TÍNH GIỚI HẠN BẰNG ĐỊNH NGHĨA.

Bài 1. Cho dãy số (a_n) xác định bởi : $\begin{cases} a_1 = a + \dfrac{1}{a} \\ a_{n+1} = \dfrac{2a_n^3 - 2a_n^2 - 2}{3a_n^2 - 4a_n - 1} \end{cases}$. Chứng minh rằng với mọi số thực $a \neq 0$ thì dãy (a_n) hội tụ. Tùy theo a, hãy tìm giới hạn của dãy (a_n).

Hướng dẫn giải

Nếu $a > 0$ thì $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$ (do bất đẳng thức AM-GM).

Nếu $a < 0$ thì $-a + \dfrac{1}{-a} \geq 2$ (do bất đẳng thức AM-GM) nên $a + \dfrac{1}{a} \leq -2$.

Nếu $a = 1$ thì $a_1 = 2$. Ta chứng minh: $a_n = 2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Hiển nhiên $a_1 = 2$.

Giả sử $a_k = 2 \Rightarrow a_{k+1} = \dfrac{2.2^3 - 2.2^2 - 2}{3.2^2 - 4.2 - 1} = 2$.

Vậy $\lim a_n = \lim 2 = 2$.

. Nếu $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$ thì $a_1 > 2$. Ta chứng minh $a_n > 2\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Rõ ràng $a_1 > 2$. .

Giả sử $a_k > 2$. Ta chứng minh $a_{k+1} > 2$.

$a_{k+1} > 2 \Leftrightarrow \dfrac{2a_k^3 - 2a_k^2 - 2}{3a_k^2 - 4a_k - 1} > 2 \Leftrightarrow\ 2a_k(a_k - 2)^2 > 0$ (đúng).

Ta chứng minh (a_n) là dãy giảm, thật vậy :.

$$\forall n,\ a_{n+1} - a_n = \frac{-a_n^3 + 2a_n^2 + a_n - 2}{3a_n^2 - 4a_n - 1} = \frac{-(a_n^2 - 1)(a_n - 2)}{3a_n^2 - 4a_n - 1} < 0.$$

(do tử âm, mẫu dương vì.

$$3a_n^2 - 4a_n - 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_n > \dfrac{2 + \sqrt{7}}{3} \\ a_n < \dfrac{2 - \sqrt{7}}{3} \end{array}\right.$$

Mà $a_n > 2 > \frac{2+\sqrt{7}}{3} \Rightarrow 3a_n^{\ 2} - 4a_n - 1 > 0$).

(a_n) giảm và bị chặn dưới $\Rightarrow$ (a_n) có giới hạn là L.

$\lim a_{n+1} = \lim \frac{2a_n^{\ 3} - 2a_n^{\ 2} - 2}{3a_n^{\ 2} - 4a_n - 1} \Rightarrow \frac{2L^3 - 2L^2 - 2}{3L^2 - 4L - 1}$.

$\Rightarrow L = 2 \left(a_n > 2 \Rightarrow L \neq -1\right)$

Vậy $\lim a_n = 2$.

. Nếu $a > 0$ thì $a_1 \le -2$. Tương tự, ta có:.

$\forall n,\ a_{n+1} - a_n = \frac{-a_n^{\ 3} + 2a_n^{\ 2} + a_n - 2}{3a_n^{\ 2} - 4a_n - 1} = \frac{-\left(a_n^{\ 2} - 1\right)\left(a_n - 2\right)}{3a_n^{\ 2} - 4a_n - 1} > 0$.

nên (a_n) tăng. Hơn nữa (a_n) bị chặn trên bởi -1, thật vậy.

$a_{k+1} < -1 \Leftrightarrow \frac{2a_k^{\ 3} - 2a_k^{\ 2} - 2}{3a_k^{\ 2} - 4a_k - 1} < -1 \Leftrightarrow \left(a_k + 1\right)^2 (2a - 3) < 0$.

Vậy (a_n) tăng và bị chặn trên $\Rightarrow$ (a_n) có giới hạn là L.

$a_n < -1, \forall n$, $a_{n+1} - a_n > 0, \forall n$

$L = \frac{2L^3 - 2L^2 - 2}{3L^2 - 4L - 1} \Rightarrow L = -1 \left(a_n < -1 \Rightarrow L \neq 2\right)$.

Vậy $\lim a_n = -1$.

Tóm lại: + Nếu $a = 1$ thì $\lim a_n = 2$.

+ Nếu $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$ thì $\lim a_n = 2$.

+ Nếu $a < 0$ thì $\lim a_n = -1$.

Bài 2. Cho dãy số (x_n) được xác định bởi $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} + \frac{2}{x_n^2} + \frac{3}{x_n^3} + \cdots + \frac{2015}{x_n^{2015}} \end{cases} \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$. Tìm giới hạn của dãy nx_n^{α} khi $n \to +\infty$, với α là số thực cho trước.

Hướng dẫn giải

Dễ dàng chứng minh được $x_n > 0, \forall n \ge 1$ bằng qui nạp.

Ta có.

$$x_{n+1} > x_n + \frac{1}{x_n}, \forall n \ge 1 \Rightarrow x_{n+1}^2 > \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)^2 = x_n^2 + 2 + \frac{1}{x_n^2} > x_n^2 + 2\ ; \forall n \ge 1.$$

Bởi vậy $\forall n \in \mathrm{N}, n \ge 2$ thì $x_n^2 > x_{n-1}^2 + 2 > x_{n-2}^2 + 4 > \ldots > x_1^2 + 2(n-1)$.

$\Rightarrow x_n > 1, \forall n \ge 2$ *và* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

Với $n \in \mathrm{N}^*$, đặt $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} + t_n$ trong đó $t_n = \frac{2}{x_n^2} + \frac{3}{x_n^3} + \ldots + \frac{2015}{x_n^{2015}}$.

$x_n > 1; \forall n \ge 2 \Rightarrow 0 < t_n < \frac{t}{x_n^2}$, với $t = 2 + 3 + \ldots + 2014 + 2015$ (1), suy ra.

$$x_{n+1}^2 - x_n^2 = \left(x_n + \frac{1}{x_n} + t_n\right)^2 - x_n^2 = \frac{1}{x_n^2} + t_n^2 + 2 + 2x_nt_n + \frac{2t_n}{x_n} \to 2.$$ khi $n \to +\infty$.

Áp dụng định lý trung bình Cesaro cho dãy (b_n) với $\begin{cases} b_1 = x_1^2 \\ b_n = x_n^2 - x_{n-1}^2, \forall n \ge 2. \end{cases}$.

ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 2$ suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 2.$.

Mà $\frac{x_n^2}{n} = \frac{\left(x_n^2 - x_{n-1}^2\right) + \left(x_{n-1}^2 - x_{n-2}^2\right) + \ldots + \left(x_2^2 - x_1^2\right) + x_1^2}{n} = \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}$ suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{x_n^2} = \frac{1}{2}.$.

Thật vậy ta có thể chứng minh trực tiếp $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{x_n^2} = \frac{1}{2}$ như sau (chứng minh định lý trung bình Cesaro).

Xét dãy $(c_n): c_1 = x_1^2 - 2; c_n = x_n^2 - x_{n-1}^2 - 2$ với $n = 2, 3 \ldots$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$ nên $\forall \varepsilon > 0$ tồn tại $m \in \mathrm{N}^*$ sao cho $|c_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \ge m.$.

Gọi $M = max\{|c_i|\}$ với $1 \le i \le m-1$.

Với ε ở trên tồn tại $m' = \left[\frac{2(m-1)M}{\varepsilon}\right] + 1$ thì $\frac{2(m-1)M}{\varepsilon} < m'$ hay $\frac{(m-1)M}{m'} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Xét $n > max\{m, m'\}$. ta có.

$\frac{|\sum_{i=1}^n c_i|}{n} \le \frac{\sum_{i=m}^n |c_i|}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{m-1} |c_i|}{n} < \frac{(n-m+1)\frac{\varepsilon}{2}}{n} + \frac{(m-1)M}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{(m-1)M}{m'} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$ o đó theo định nghĩa $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|\sum_{i=1}^n c_i|}{n} = 0$.

$$\frac{x_n^2}{n}=\frac{\left(x_n^2-x_{n-1}^2\right)+\left(x_{n-1}^2-x_{n-2}^2\right)+\ldots+\left(x_2^2-x_1^2\right)+x_1^2}{n}=\frac{c_1+c_2+\ldots+c_n}{n}+2$$. suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{x_n^2}=\frac{1}{2}$..

Nếu $\alpha=-2$ thì $n.x_n^\alpha=n.x_n^{-2}\to\frac{1}{2}$ khi $n\to+\infty$.

Nếu $\alpha>-2$ thì $n.x_n^\alpha=x_n^{\alpha+2}.n.x_n^{-2}\to+\infty$ khi $n\to+\infty$.

Nếu $\alpha<-2$ thì $n.x_n^\alpha=x_n^{\alpha+2}.n.x_n^{-2}\to0$ khi $n\to+\infty$.

Bài 3. Cho hai số a_1,b_1 với $0<b_1=\sqrt{a_1}<1$.Lập hai dãy số (a_n), (b_n) với $n=1,2,\ldots$Theo quy tắc sau: giải nghĩa cái đó là:. $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n)$,$b_{n+1}=\sqrt{a_{n+1}.b_n}$. Tính: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ và $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

Hướng dẫn giải

Tính a_2,b_2 với $0<b_1=\sqrt{a_1}<1$ ta có thể chọn $0<a<\frac{\pi}{2}$ sao cho: $b_1=cosa$,.

Suy ra $a_1=cos^2a$.

$$a_2=\frac{1}{2}(\cos^2a+\cos a)=\frac{1}{2}\cos a(\cos a+1)=\cos a.\cos^2\frac{a}{2}.$$

$$b_2=\sqrt{\cos a.\cos^2\frac{a}{2}.\cos a}=\cos a.\cos\frac{a}{2}.$$

Bằng quy nạp, chứng minh được:.

$$a_n=\cos a.\cos\frac{a}{2}...\cos\frac{a}{2^{n-1}}\cos\frac{a}{2^{n-1}}\ (1)\ b_n=\cos a.\cos\frac{a}{2}...\cos\frac{a}{2^{n-1}}\ (2).$$

Nhân hai vế của (1) và (2) cho $\sin\frac{a}{2^{n-1}}$ và áp dụng công thức $\sin2a$ được:.

$$a_n=\frac{\sin2a.\cos\frac{a}{2^{n-1}}}{2^n.\sin\frac{a}{2^{n-1}}},\quad b_n=\frac{\sin2a}{2^n.\sin\frac{a}{2^{n-1}}}.$$

Tính giới hạn:.

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{\sin2a}{2a},\quad \lim_{n\to\infty}b_n=\frac{\sin2a}{2a}.$$

Bài 4. Cho dãy số $(a_n),a_1=1$ và $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$.Chứng minh: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}=\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

$$a_{k+1}^2 = a_k^2 + \frac{1}{a_k^2} + 2 \Rightarrow \sum_{i=2}^{n} a_i^2 = \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{a_j^2} + 2(n-1)..$$

$a_n^2 = 2n - 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{a_j^2}$. Vậy $a_n > \sqrt{2n-1}$, $\forall n \geq 2$..

$$a_k^2 > 2k - 1 \quad \forall k \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{a_k^4} < \frac{1}{(2k-1)^2} < \frac{1}{(2k-1)^2 - 1} = \frac{1}{4k(k+1)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right).$$

Suyra: $\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{a_k^4} < \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{n-1}) < \frac{1}{4} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{a_j^4} < 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

Suyra: $\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{a_j^2} \leq \sqrt{(n-1)\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{a_j^4}} < \sqrt{(n-1)\frac{5}{4}}$ $(n \geq 2)$..

Vậy: $a_n^2 < 2n - 1 + \frac{\sqrt{5(n-1)}}{2}$ $(n \geq 2)$.

Suyra: $n \geq 2$; $\sqrt{2n-1} < a_n < \sqrt{2n-1+\frac{\sqrt{5(n-1)}}{2}} \Rightarrow \sqrt{2-\frac{1}{n}} < \frac{a_n}{\sqrt{n}} < \sqrt{2n-1+\frac{\sqrt{5(n-1)}}{2}}$.

Dođó: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} \sqrt{2}$.

Bài 5. Cho hai số a_1, b_1 với $a_1 = \cos^2\frac{\pi}{8}$, $b_1 = \cos\frac{\pi}{8}$. Lập hai dãy số $(a_n),(b_n)$ với $n = 1, 2, ...$ theo quy tắc sau:. $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, $b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}.b_n}$. Tính: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ và $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Hướng dẫn giải

+Tính a_2, b_2:.

$$a_2 = \frac{1}{2}(\cos^2\frac{\pi}{8} + \cos\frac{\pi}{8}) = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{8}(\cos x\frac{\pi}{8} + 1) = \cos\frac{\pi}{8}.\cos^2\frac{\pi}{16}.$$

$$b_2 = \sqrt{\cos\frac{\pi}{8}\cos^2\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{8}} = \cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}.$$

+ Bằng quy nạp, chứng minh được:.

$a_n = \cos\frac{\pi}{2.4}\cos\frac{\pi}{2^2.4}...\cos\frac{\pi}{2^n.4}\cos\frac{\pi}{2^n.4}$ (1) $b_n = \cos\frac{\pi}{2.4}\cos\frac{\pi}{2^2.4}...\cos\frac{\pi}{2^n.4}$ (2).

+Nhân hai vế của (1) và (2) cho $\sin\frac{\pi}{2^n.4}$ và áp dụng công thức $\sin 2a$ được:.

$$a_n = \frac{\sin\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{2^n.4}}{2^n.\sin\frac{\pi}{2^n.4}}, \quad b_n = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{2^n.\sin\frac{\pi}{2^n.4}}.$$

+Tính giới hạn:.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{4\sin\frac{\pi}{4}}{\pi}, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{4\sin\frac{\pi}{4}}{\pi}.$$

Bài 6. Cho dãy số (u_n) biết:.

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n{}^2} \end{cases}, \forall n \in N^*.$$

Hãy tính $\lim_{n\to+\infty}(u_n\sqrt{n})$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $u_1 > 0 \Rightarrow u_n > 0, \forall n \in N^*$.

$un+1-un = u_n/(1+u_n^2) - un = (-u_n^3)/(1+u_n^2) < 0 \quad \forall n \in N^*$.

$\Rightarrow (u_n)$ là dãy số giảm và bị chặn dưới bởi 0.

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = a \ (a \in R, a \geq 0)$.

Từ $un+1 = u_n/(1+u_n^2)$, cho $n \to +\infty$ ta được:.

$a = a/(1+a^3) \Leftrightarrow a = 0.$ Vậy $\lim_{x\to+\infty} u_n = 0$.

Đặt $v_n = 1/(u_n^2+1) - 1/(u_n^2), \ n \in N^*$.

Ta có $v_n = ((1+u_n^2)/u_n)^2 - 1/(u_n^2) = 2 + u_n^2 \to 2 \ khi \ n \to +\infty?$ Áp dụng định lí trung bình Cesaro ta có:.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_1+v_2+\ldots+v_n}{n} = 2 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_1^2}}{n} = 2.$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}\right) + \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_1^2}}{n} = 2.$$

Mà $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{u_{n+1}^2}-\dfrac{1}{u_n^2}}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{v_n}{n}=0$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{u_1^2}}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{u_n^2}}{n}=2\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n.u_n^2}=2\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\sqrt{n})=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Bài 7. Cho dãy $\{U_n\}$ xác định bởi: $\begin{cases}U_1=2\\ U_{n+1}=\dfrac{U_n^2+2009U_n}{2010}\end{cases}\left(n\in N^*\right)$.

Ta lập dãy $\{S_n\}$ với $\left\{S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{U_i}{U_{i+1}-1}\right\}$. Tính $\lim\limits_{x\to\infty}S_n$.

Hướng dẫn giải

Tacó $a_1=-\dfrac{a_0}{2}>0$.

Giả sử $a_1,a_2,...,a_{n-1}>0$.

Tacó.

$$\begin{cases}\dfrac{a_n}{1}+\dfrac{a_{n-1}}{2}+...+\dfrac{a_0}{n+1}=0\\ \dfrac{a_{n-1}}{1}+\dfrac{a_{n-2}}{2}+...+\dfrac{a_0}{n}=0\end{cases}\Rightarrow a_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)a_{n-1}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)a_{n-2}+...+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)a_0.$$

Hay $a_n=\dfrac{a_{n-1}}{1.2}+\dfrac{a_{n-2}}{2.3}+...+\dfrac{a_1}{(n-1)n}+\dfrac{a_0}{n(n+1)}$.

Do $a_1,a_2,...,a_{n-1}>0$ nên.

$$\left(\frac{a_{n-1}}{1.2}+\frac{a_{n-2}}{2.3}+...+\frac{a_1}{(n-1)n}\right)\left(\frac{2a_{n-1}}{1}+\frac{3a_{n-2}}{2}+...+\frac{na_1}{n-1}\right)$$
$$\geq\left(\frac{a_{n-1}}{1}+\frac{a_{n-2}}{2}+...+\frac{a_1}{(n-1)}\right)^2=\frac{a_0^2}{n^2}.$$

$$\Rightarrow\left(\frac{a_{n-1}}{1.2}+\frac{a_{n-2}}{2.3}+...+\frac{a_1}{(n-1)n}\right)\geq\frac{a_0^2}{n^2\left(\frac{2a_{n-1}}{1}+\frac{3a_{n-2}}{2}+...+\frac{na_1}{n-1}\right)}.$$

Ta lại có.

$$\frac{2a_{n-1}}{1}+\frac{3a_{n-2}}{2}+...+\frac{na_1}{n-1}=n\left(\frac{2a_{n-1}}{n}+\frac{3a_{n-2}}{2n}+...+\frac{a_1}{n-1}\right).$$

$$\le n\left(\frac{a_{n-1}}{1}+\frac{a_{n-2}}{2}+...+\frac{a_1}{n-1}\right)=n\left(-\frac{a_0}{n}\right)=-a_0.$$

$$\Rightarrow\left(\frac{a_{n-1}}{1.2}+\frac{a_{n-2}}{2.3}+...+\frac{a_1}{(n-1)n}\right)\ge-\frac{a_0}{n^2}.$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{a_{n-1}}{1.2}+\frac{a_{n-2}}{2.3}+...+\frac{a_1}{(n-1)n}+\frac{a_0}{n(n+1)}\ge-\frac{a_0}{n^2}+\frac{a_0}{n(n+1)}>0.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 8. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=1,\ u_{n+1}=\frac{\sqrt{1+u_n^2}-1}{u_n}, \forall n\ge 1.$

a) Chứng minh:.

$u_n=\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}, \forall n\ge 1.$.

b) Suy ra tính đơn điệu và bị chặn của (u_n).

HƯỚNG DẪN GIẢI

a) Chứng minh bằng quy nạp toán học.

b) Nhận xét $0<\frac{\pi}{2^{n+1}}\le\frac{\pi}{4}, \forall n\ge 1$ và hàm số *tanx* đồng biến trên $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$.

nên dãy số (u_n) giảm và bị chặn dưới bởi số $\tan 0=0$.

và bị chặn trên bởi số $\tan\frac{\pi}{4}=1$.

Bài 9. Cho dãy số (x_n) xác định bởi:.

$$x_1>0;\ x_{n+1}=x_n+\frac{1}{x_n}+\frac{2}{x_n^2}+\frac{3}{x_n^3}+...+\frac{2014}{x_n^{2014}}+\frac{2015}{x_n^{2015}}, \forall n\in\mathbb{N}^*..$$

1.Với mỗi $n\in\mathbb{N}^*$,đặt $y_n=\frac{n}{x_n^2}$.Chứng minh dãy số (y_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

2.Tìm các số α để dãy (nx_n^{α}) có giới hạn hữu hạn và giới hạn là một số khác 0.

HƯỚNG DẪN GIẢI

1.Từ giả thiết suy ra $x_{n+1} > x_n + \frac{1}{x_n} > 0 \Rightarrow x_{n+1}^2 > x_n^2 + \frac{1}{x_n^2} + 2 > x_n^2 + 2$.

Suy ra $x_{n+1}^2 > x_n^2 + 2 > x_{n-1}^2 + 2 > ... > x_1^2 + 2n$ do đó $\lim x_n = +\infty$.

Xét

$$x_{n+1}^2 - x_n^2 = (x_{n+1} + x_n)(x_{n+1} - x_n) = \left(2x_n + \frac{1}{x_n} + \frac{2}{x_n^2} + \frac{3}{x_n^3} + ... + \frac{2014}{x_n^{2014}} + \frac{2015}{x_n^{2015}}\right)\left(\frac{1}{x_n} + \frac{2}{x_n^2} + \frac{3}{x_n^3} + ... + \frac{2014}{x_n^{2014}} + \frac{2015}{x_n^{2015}}\right).$$

$$= \left(2 + \frac{1}{x_n^2} + \frac{2}{x_n^3} + \frac{3}{x_n^4} + ... + \frac{2014}{x_n^{2015}} + \frac{2015}{x_n^{2016}}\right)\left(1 + \frac{2}{x_n} + \frac{3}{x_n^2} + ... + \frac{2014}{x_n^{2013}} + \frac{2015}{x_n^{2014}}\right).$$

Suy ra $\lim\left(x_{n+1}^2 - x_n^2\right) = 2$.

Ta có $\frac{x_n^2}{n} = \frac{\left(x_n^2 - x_{n-1}^2\right) + \left(x_{n-1}^2 - x_{n-2}^2\right) + ... + \left(x_2^2 - x_1^2\right) + x_1^2}{n}$.

Áp dụng định lý trung bình Cesaro ta có.

$$\lim \frac{x_n^2}{n} = \lim \frac{\left(x_n^2 - x_{n-1}^2\right) + \left(x_{n-1}^2 - x_{n-2}^2\right) + ... + \left(x_2^2 - x_1^2\right) + x_1^2}{n} = 2.$$

Do đó $\lim \frac{n}{x_n^2} = \frac{1}{2}$.

2.Xét $z_n = n x_n^{\alpha} = \frac{n}{x_n^2} x_n^{\alpha+2}$.

Từ đó:.

+) Nếu $\alpha > -2$ thì $\lim z_n = +\infty$.

+)Nếu $\alpha < -2$ thì $\lim z_n = 0$.

+) Nếu $\alpha = -2$ thì $\lim z_n = \frac{1}{2}$.

Vậy $\alpha = -2$ là giá trị cần tìm thỏa mãn đề bài.

Bài 10. Cho dãy số $\{y_n\}$ thỏa mãn $y_1 > 0, y_{n+1}^3 = y_1 + y_2 + ... + y_n, \forall n \geq 1$.