TÍNH GIỚI HẠN BẰNG ĐỊNH LÍ KẸP

Bài 1. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

Hướng dẫn giải

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức : n! > $(\frac{n}{3})^n$ (*) ($\forall$ n $\in N^*$).

Bằng phương pháp qui nạp. Thật vậy : với n =1, ta có 1 > $\frac{1}{3}$ (đúng).

Giả sử (*) đúng với n = k tức là : k! > $(\frac{k}{3})^k$. Ta đi chứng minh (*) đúng với.

n = k+1.

Ta có (k+1)! = k!(k+1) >$(\frac{k}{3})^k$ (k+1) = $(\frac{k+1}{3})^{k+1}$. $\dfrac{3}{(1+\frac{1}{k})^k}$ > $(\frac{k+1}{3})^{k+1}$.

Bất đẳng thức cuối này đúng vì :.

$(1+\frac{1}{k})^k = 1+\frac{k}{k}+\frac{k(k-1)}{2!}.\frac{1}{k^2}+.+\frac{k(k-1)(k-2)....(k-k+1)}{k!}.\frac{1}{k^k}=.$

$= 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{k})+.+\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{k})(1-\frac{2}{k})...(1-\frac{k-1}{k}) < 1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!} < 1+1+\frac{1}{2}+.+\frac{1}{2^{n-1}} <.$

$< 1+1+\frac{1}{2}+.+\frac{1}{2^{n-1}}+. < 1+\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3.$

Vậy (*) đúng với $n=k+1$. Do đó $n! > \left(\dfrac{n}{3}\right)^n$, từ đây ta suy ra $\sqrt[n]{n!} > \dfrac{n}{3}$.

=> $0 < \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \dfrac{3}{n}$.

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{n} = 0$.

Do đó theo định lý về giới hạn kẹp giữa ta suy ra: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

Vậy $\lim(2014+\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}})$ =2014.

Cho dãy số (x_n) thoả mãn $\begin{cases} x_1 = 1; x_2 = 2 \\ (x_{n+2})^2 = \dfrac{(x_{n+1})^5}{4(x_n)^2}; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

Tính $I = \lim x_n$.

Từ giả thiết suy ra mội số hạng của dãy đều dương.

Đặt $y_n = \log_2 x_n$, ta có dãy $\begin{cases} y_1 = 0; y_2 = 1 \\ 2y_{n+2} = 5y_{n+1} - 2y_n; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

Lại đặt $y_n = z_n + 2$, ta có dãy $\begin{cases} z_1 = -2; z_2 = -1 \\ 2z_{n+2} = 5z_{n+1} - z_n; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ $\begin{cases} z_1 = -2, z_2 = -1 \\ 2z_{n+2} = 5z_{n+1} - z_n \end{cases}$.

Tìm được số hạng tổng quát của dãy là $z_n = -4.\dfrac{1}{2^n}$.

Từ đó ta có $\lim y_n = 2 \Rightarrow \lim x_n = 4$.

Bài 2. Cho dãy $(a_n)_{n=1}^{\infty}$: $a_1 = 1;\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 - 5a_n + 10}{5 - a_n},\ \forall n \geq 1$.

a) Chứng minh dãy (a_n) hội tụ và tính $\lim a_n$.

b) Chứng minh $\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} < \dfrac{5 - \sqrt{5}}{2},\ \forall n \geq 1$..

Hướng dẫn giải

a) Bằng phương pháp chứng minh qui nạp ta có: $1 \leq a_n \leq \dfrac{3}{2}, \forall n$.

Đặt $A = \dfrac{5 - \sqrt{5}}{2}$ và xét hàm $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 10}{5 - x} = \dfrac{10}{5 - x} - x,\ (x \neq 5)$.

Suy ra $f'(x) = \dfrac{10}{(5 - x)^2} - 1 < 0,\ \forall x \in \left[1; \dfrac{3}{2}\right]$., như vậy $f(x)$ nghịch biến trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$..

Dẫn đến $\begin{cases} a_1 < a_3 < a_5 < ... < a_{2k-1} < ... < A \\ a_2 > a_4 > a_6 > ... > a_{2k} > ... > A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists \lim a_{2k-1} = b \leq A \\ \exists \lim a_{2k} = c \geq A \end{cases}$..

Kết hợp công thức xác định dãy ta được.

$$\begin{cases} b = \dfrac{c^2 - 5c + 10}{5 - c} \\ c = \dfrac{b^2 - 5b + 10}{5 - b} \end{cases} \Leftrightarrow b = c = \dfrac{5 - \sqrt{5}}{2}.$$

Vậy $\lim a_n = \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$..

b) <u>*Nhận xét:*</u> $\forall t \in \left[1;\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$. thì $t+f(t)<5-\sqrt{5}$..

Dẫn đến $a_{2k-1}+a_{2k}<5-\sqrt{5}$, $\forall k \ge 1$.

$\Rightarrow a_1+a_2+...+a_{2k-1}+a_{2k}<2k\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$. (1).

Như vậy bất đẳng thức đúng với $n=2k$.

Trường hợp $n=2k+1$, chú ý $a_{2k+1}<\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$, kết hợp với (1) thu được:.

$a_1+a_2+...+a_{2k-1}+a_{2k}+a_{2k+1}<(2k+1)\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 3. Cho dãy số thực $(u_n): u_1=\dfrac{1}{2},\ u_{n+1}=\dfrac{u_n e^{u_n}}{1-e^{u_n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh dãy trên có giới hạn hữu hạn, tìm giới hạn đó.

Hướng dẫn giải

Chứng minh $-1<u_n<0, \forall n \ge 2\ (1)$.

Với $n=2,\ u_2=\dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{e}}{1-\sqrt{e}} \in (-1;0)$ đúng.

Giả sử (1) đúng với $n=k\ge 2$, ta chứng minh (1) đúng với $n=k+1$.

Ta có $u_n<0 \Rightarrow e^{u_n}<1 \Rightarrow 1-e^{u_n}>0 \Rightarrow \dfrac{u_n e^{u_n}}{1-e^{u_n}}<0$.

$u_n>-1 \Rightarrow e^{u_n}>\dfrac{1}{e};\ \dfrac{u_n e^{u_n}}{1-e^{u_n}}>-1 \Leftrightarrow u_n e^{u_n}>e^{u_n}-1 \ \Leftrightarrow e^{u_n}(u_n-1)>-1$(luôn đúng).

Vậy (1) được chứng minh.

Xét hàm $f(x)=\dfrac{xe^x}{1-e^x}$ trên $(-\infty;0)$. Ta có $f'(x)=\dfrac{e^x(1+x-e^x)}{(1-e^x)^2}$.

Hàm $g(x)=1+x-e^x$ có $g'(x)=1-e^x>0$ với mọi $x\in(-\infty;0)$ nên hàm này đồng biến trên $(-\infty;0)$.

Suy ra $g(x) < g(0) = 0$, suy ra $f'(x) = \dfrac{e^x\left(1 + x - e^x\right)}{\left(1 - e^x\right)^2} < 0$.

hay hàm $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;0)$.

Ta có $u_2 = \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{e}}{1 - \sqrt{e}} = \dfrac{\sqrt{e}}{2\left(1 - \sqrt{e}\right)}$, $u_3 = \dfrac{\dfrac{\sqrt{e}}{2\left(1 - \sqrt{e}\right)} e^{\frac{\sqrt{e}}{2\left(1-\sqrt{e}\right)}}}{1 - e^{\frac{\sqrt{e}}{2\left(1-\sqrt{e}\right)}}}$, $u_4 > u_2$.

Suy ra $f(u_4) < f(u_2) \Rightarrow u_5 < u_3 < 0 < u_1$.

Quy nạp ta được dãy (u_{2n+1}) giảm và dãy (u_{2n}) tăng.

Hơn nữa $-1 < u_n < 0, \forall n \geq 2$ nên mỗi dãy trên tồn tại giới hạn hữu hạn.

Giả sử $\lim u_{2n} = a, \lim u_{2n+1} = b \ \left(a, b \in (-1;0)\right)$, lấy giới hạn hai vế ta được.

$$\begin{cases} a = \dfrac{be^b}{1 - e^b} \\ b = \dfrac{ae^a}{1 - e^a} \end{cases} \Rightarrow \left(1 - e^a\right)^2 = e^a e^{\frac{ae^a}{1 - e^a}}.$$

Đặt $e^a = t\left(t \in \left(\dfrac{1}{e};1\right)\right)$, ta được phương trình

$(1-t)^2 = t.t^{\frac{t}{1-t}} \Leftrightarrow 2(1-t)\ln(1-t) - (1-t)\ln t - t\ln t = 0$.

Hàm $h(t) = 2(1-t)\ln(1-t) - (1-t)\ln t - t\ln t$ nghịch biến nên phương trình có nhiều nhất 1 nghiệm, nhận thấy $t = \dfrac{1}{2}$ là nghiệm nên nó là nghiệm duy nhất.

Suy ra $a = \ln\dfrac{1}{2}$, thay vào được $b = \ln\dfrac{1}{2}$.

Vậy $\lim u_n = \ln\dfrac{1}{2}$.

Bài 4. Cho dãy số $(a_n), n \geq 1$ thỏa mãn $a_1 = 1, a_n = \dfrac{2n-3}{2n}a_{n-1}, n \geq 2$ và dãy $(b_n), n \geq 1$ thỏa mãn $b_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i, n \geq 1$. Chứng minh dãy (b_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Hướng dẫn giải

Ta có $2na_n = (2n-3)a_{n-1} \Leftrightarrow a_{n-1} = 2\left[(n-1)a_{n-1} - na_n\right], n > 1$.

Do đó $b_n=\sum_{i=1}^{n}2\left[ia_i-(i+1)a_{i+1}\right]=2\left[1-(n+1)a_{n+1}\right]$.

Ta chứng minh bằng quy nạp rằng $na_n\le\frac{1}{\sqrt{n}},n\ge1$.

Thật vậy:.

- Với n = 1, ta có $a_1=1$ nên khẳng định đúng.

- Giả sử khẳng định đúng với n $(n\ge1)$. Ta có $a_{n+1}=\frac{2(n+1)-3}{2(n+1)}a_n\le\left(\frac{2n-1}{2n+2}\right)\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$, ta cần chứng minh $\left(\frac{2n-1}{2n+2}\right)\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\le\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}\Leftrightarrow(2n-1)\sqrt{n+1}\le2n\sqrt{n}$.

$\Leftrightarrow\left(4n^2-4n+1\right)(n+1)\le4n^3\Leftrightarrow1\le3n$.

Bất đẳng thức cuối đúng nên khẳng định trên đúng với $n+1$.

Theo nguyên lí qui nạp thì khẳng định được chứng minh.

Ta có $2\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\le2\left[1-(n+1)a_{n+1}\right]=b_n\le2$.

Theo nguyên lí kẹp thì dãy (b_n) có giới hạn và $\lim b_n=2$.

Bài 5. Cho dãy số (b_n) được xác định bởi: $\begin{cases}u_1=\frac{1}{2}\\ u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\sqrt{u_n^2+\frac{1}{4^n}}\right)\end{cases}$.

Chứng minh dãy số hội tụ và tìm $\lim\limits_{x\to\infty}u_n$.

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh $u_n=\frac{1}{2^n}\cot\frac{\pi}{2^{n+1}};\forall n\in\mathbb{N}$ (*).

Thật vậy: $n=1$: $u_1=\frac{1}{2^1}\cot\frac{\pi}{2^{1+1}}=\frac{1}{2}$.

$\Rightarrow$ (*) đúng với $n=1$.

Giả sử (*) đúng tới $n=k$, $k\in\mathbb{N}^*$, nghĩa là có : $u_k=\frac{1}{2^k}\cot\frac{\pi}{2^{k+1}}$.

Ta chứng minh (*) cũng đúng với $n=k+1$. Thật vậy $u_{k+1}=\frac{1}{2}\left(u_k+\sqrt{u_k^2+\frac{1}{4^k}}\right)$.

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^k}\cot\frac{\pi}{2^{k+1}}+\sqrt{\frac{1}{4^k}\cot^2\frac{\pi}{2^{k+1}}+\frac{1}{4^k}}\right)=\frac{1}{2^{k+1}}\left(\cot\frac{\pi}{2^{k+1}}+\sqrt{\cot^2\frac{\pi}{2^{k+1}}+1}\right).$$

$$=\frac{1}{2^{k+1}}\left(\cot\frac{\pi}{2^{k+1}}+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2^{k+1}}}\right)$$ (vì khi $k\to+\infty$ thì $\frac{\pi}{2^{k+1}}\to 0;\quad \sin\to 0$).

$$=\frac{1}{2^{k+1}}.\frac{\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}+1}{\sin\frac{\pi}{2^{k+1}}}=\frac{1}{2^{k+1}}\frac{2\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}}}{2\sin\frac{\pi}{2^{k+2}}\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}}=\frac{1}{2^{k+1}}\cot\frac{\pi}{2^{k+2}}.$$

$\Rightarrow$ (*) cũng đúng với $n=k+1$.

Vậy $u_n=\frac{1}{2^n}\cot\frac{\pi}{2^{n+1}}\ ;\forall n\in\mathbb{N}$.

$$\lim_{x\to\infty}u_n=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}.\frac{1}{2^n}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}\frac{2}{\pi}\right)=\frac{2}{\pi}.$$

Vậy dãy hội tụ và có $\lim\limits_{x\to\infty}u_n=\frac{2}{\pi}$.

Bài 6. Cho phương trình: $x^n-x^2-x-1=0$ với $n\in N,\ n>2$.

1)Chứng minh rằng với mỗi số nguyên $n>2$, thì phương trình có một nghiệm dương duy nhất x_n.

2)Xét dãy số sau đây: $U_n=n(x_n-1)$, $n=2,3,4,...$ Tìm $\lim U_n$?.

Hướng dẫn giải

Xét phương trình: $f(x)=\ x^n-x^2-x-1=0$, với n nguyên, $n>2$ **(1)**.

+) Ta có: $f'(x)=nx^{n-1}-2x-1$. Do $n>2$, nên khi $x>1$ thì $f'(x)>0$. Vậy $f(x)$ là hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Lại có: $f(1)=-2<0$; $f(2)=2^n-7>0$ (vì n nguyên và $n>2\ \Rightarrow n\geq 3$).

Ta có: $f(1)f(2)<0$ và $f(x)$ liên tục, đồng biến nên phương trình $f(x)=0$ có nghiệm duy nhất trên $(1;+\infty)$.

+) Mặt khác với $0<x<1$ thì $x^n<x^2$ (do $n>2$) suy ra $f(x)<0$ với mọi $0<x<1$.

Như vậy ta đã chứng minh được (1) có nghiệm dương duy nhất với mọi n nguyên, $n>2$.

Gọi x_n là nghiệm dương duy nhất của phương trình $x^n-x^2-x-1=0$.