# I. PHƯƠNG TRÌNH

## 1. Không có tham số

### Dạng 1: Biến đổi tương đương

**Câu 1.** Giải phương trình $\sqrt[3]{x^4+x^2}+2\sqrt[5]{x^5+x^2+2}=\sqrt[3]{x^4+3x-2}+2\sqrt[5]{x^5+3x}$

**Lời giải**

+Biến đổi phương trình tương đương : $x^2-3x+2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$

**Câu 2.** Giải phương trình $4\sqrt{x+1}+2\sqrt{2x+3}=(x-1)(x^2-2)$.

**Lời giải**

Điều kiện: $x \geq -1$.

Nhận thấy $x=-1$ là một nghiệm của phương trình.

Xét $x>-1$. Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$4\left(\sqrt{x+1}-2\right)+2\left(\sqrt{2x+3}-3\right)=x^3-x^2-2x-12$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(x-3)}{\sqrt{x+1}+2}+\frac{4(x-3)}{\sqrt{2x+3}+3}=(x-3)(x^2+2x+4)$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{4}{\sqrt{x+1}+2}+\frac{4}{\sqrt{2x+3}+3}-(x+1)^2-3\right)=0. \qquad (1)$$

Vì $x>-1$ nên $\sqrt{x+1}>0$ và $\sqrt{2x+3}>1$. Suy ra $\frac{4}{\sqrt{x+1}+2}+\frac{4}{\sqrt{2x+3}+3}<3$, vì vậy

$$\frac{4}{\sqrt{x+1}+2}+\frac{4}{\sqrt{2x+3}+3}-(x+1)^2-3<0.$$

Do đó phương trình $(1) \Leftrightarrow x-3=0 \Leftrightarrow x=3$.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=-1$ hoặc $x=3$.

**Câu 3.** *[Đề thi hsg Bắc Sơn, Lạng Sơn]* Giải phương trình sau : $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{5x}$

**Lời giải**

$$\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{5x} \Leftrightarrow 2x+3\sqrt[3]{x^2-1}\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}\right)=5x$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x^2-1}\sqrt[3]{5x}=x \Rightarrow 4x^3-5x=0 \Rightarrow x=0; x=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Thử lại ta thấy phương trình có 3 nghiệm: $x=0$; $x=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$.

**Câu 4.** Giải phương trình: $x^2+6x+1=(2x+1)\sqrt{x^2+2x+3}\,(1)$, với $x\in R$.

**Hướng dẫn giải.**

$(1) \Leftrightarrow x^2+2x+3-(2x+1)\sqrt{x^2+2x+3}+4x-2=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+2x+3}-2x+1\right)\left(\sqrt{x^2+2x+3}-2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+2x+3}=2x-1\\ \sqrt{x^2+2x+3}=2\end{array}\right.$

$\sqrt{x^2+2x+3}=2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge\frac{1}{2} \\ 3x^2-6x-2=0\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{3+\sqrt{15}}{3}$

**Câu 5.** Giải phương trình $\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+1}=2x^2-x-3$.

**Hướng dẫn giải.**

$\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+1}=2x^2-x-3 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+1}}=(2x-3)(x+1)$

Tìm được nghiệm duy nhất x=2/3

**Câu 6.** Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2-3y^2+2xy-2x-10y+4=0$.

**Hướng dẫn giải**

Ta có:

$x^2-3y^2+2xy-2x-10y+4=0$

$\Leftrightarrow x^2+2x(y-1)+(y-1)^2-(4y^2+8y+4)==7$

$\Leftrightarrow (x+y-1)^2-(2y+2)^2=-7$

$\Leftrightarrow (3y+x+1)(y-x+3)=7$

Vì 7 là số nguyên tố nên ta có các trường hợp sau:

$\begin{cases}3y+y+1=7\\ y-x+3=1\end{cases}$; $\begin{cases}3y+y+1=-7\\ y-x+3=-1\end{cases}$; $\begin{cases}3y+y+1=1\\ y-x+3=7\end{cases}$; $\begin{cases}3y+y+1=-1\\ y-x+3=-7\end{cases}$

Giải ba hệ phương trình trên ta được: $(x;y)\in\left\{(\pm3;1),(1;-3),(7;-3)\right\}$.

**Câu 7.** **(THPT Quảng Xương 2 – Thanh Hóa, 2009-2010)** Giải phương trình:

$$\frac{2}{\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}}=1+\sqrt{5+6x-x^2}$$

**Hướng dẫn giải**

Đặt $t=\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}$ ta được $\frac{2}{t}=1+\frac{t^2-4}{2}\Leftrightarrow(t-2)\left(t^2+2t+2\right)=0$

Giải ta được $t=2$ suy ra $x=1,x=5$

## Dạng 2: Đặt ẩn phụ

**Câu 1.** Giải phương trình trên tập số thực: $\sqrt{x^2+x+9}=2x-4+\sqrt{x+1}$ (1).

**Hướng dẫn giải**

Điều kiện: $x\geq-1$.

$\sqrt{x^2+x+9}=2x-4+\sqrt{x+1}\Leftrightarrow\sqrt{(x-2)^2+5(x+1)}=2(x-2)+\sqrt{x+1}$

$x=-1$ không là nghiệm của phương trình.

$x>-1$: $pt(1)\Leftrightarrow\sqrt{\left(\frac{x-2}{\sqrt{x+1}}\right)^2+5}=2\frac{x-2}{\sqrt{x+1}}+1$.

Đặt $t=\frac{x-2}{\sqrt{x+1}}$.

Phương trình trở thành: $\sqrt{t^2+5}=2t+1\Leftrightarrow t=\frac{2}{3}$.

Khi đó ta có: $2\sqrt{x+1}=3x-6\Leftrightarrow x=\frac{20+4\sqrt{7}}{9}$. Vậy $S=\left\{\frac{20+4\sqrt{7}}{9}\right\}$.

**Câu 2.** Giải phương trình sau trên tập số thực: $2x^2+3x+7=(x+5)\sqrt{2x^2+1}$.

**Hướng dẫn giải**

Phương trình (1) $\Leftrightarrow 2x^2+1-(x+5)\sqrt{2x^2+1}+3x+6=0$.

Đặt $t=\sqrt{2x^2+1}$. Ta có phương trình:

$t^2-(x+5)t+3x+6=0\,(*)$.

$\Delta=\left[-(x+5)\right]^2-4(3x+6)=(x-1)^2$.

Phương trình $(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=x+2\end{array}\right.$

$t=3\Leftrightarrow\sqrt{2x^2+1}=3\Leftrightarrow x=\pm2$ $t=x+2\Leftrightarrow\sqrt{2x^2+1}=x+2\Leftrightarrow\begin{cases}x+2>0\\x^2-4x-3=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x>-2\\x=2\pm\sqrt{7}\end{cases}\Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{7}$.

Vậy $S=\left(\pm2;2\pm\sqrt{7}\right)$.

**Câu 3.** Giải phương trình sau trên tập số thực: $\left(2x^2-x-5\right)\sqrt{x^2+x+2}+\left(2x^2+x+1\right)\sqrt{x+3}=0$.

**Hướng dẫn giải**

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{x^2+x+2} \\ b=\sqrt{x+3} \end{cases}$. Điều kiện: $\begin{cases} a\ge \dfrac{\sqrt{7}}{2} \\ b\ge 0 \end{cases}$.

Ta có: $2x^2-x-5=2a^2-3b^2$; $2x^2+x+1=2a^2-b^2$.

Thay vào phương trình ta được: $\left(2a^2-3b^2\right)a+\left(2a^2-b^2\right)b=0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{b}{a}\right)^3+3\left(\dfrac{b}{a}\right)^2-2\left(\dfrac{b}{a}\right)-2=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{b}{a}=1 \\ \left(\dfrac{b}{a}\right)^2+4\dfrac{b}{a}+2=0 \end{array}\right.$$

+) $\left(\dfrac{b}{a}\right)^2+4\dfrac{b}{a}+2=0$ : phương trình vô nghiệm do $\dfrac{b}{a}\ge 0$.

+) $\dfrac{b}{a}=1 \Leftrightarrow b=a \Leftrightarrow x+3=x^2+x+2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Vậy $x=1;\ x=-1$ là nghiệm phương trình.

**Câu 4.** Giải phương trình sau

$$-2x^3+10x^2-17x+8=2x^2\sqrt[3]{5x-x^3}$$

**Lời giải**

Nhận xét rằng $x=0$ không là nghiệm của phương trình đã cho.

Suy ra $x\ne 0$. Chia cả hai vế của phương trình cho $x^3$ rồi đặt $t=\dfrac{1}{x}, t\ne 0$, ta có phương trình $8t^3-17t^2+10t-2=2\sqrt[3]{5t^2-1}$

$\Leftrightarrow (2t-1)^3+2(2t-1)=\left(5t^2-1\right)+2\sqrt[3]{5t^2-1}$ (*)

Xét hàm số $f(t)=t^3+2t, \forall t\in \mathbb{R}$.

Ta có hàm số $f(t)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(t)=3t^2+2>0, \forall t$.

Suy ra hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Khi đó phương trình đã cho có dạng $f(2t-1)=f\left(\sqrt[3]{5t^2-1}\right) \Leftrightarrow 2t-1=\sqrt[3]{5t^2-1}$

$\Leftrightarrow 8t^3-17t^2+6t=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{17\pm\sqrt{97}}{16}$ (do $t\ne 0$)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x_1=\dfrac{17-\sqrt{97}}{12}$ và $x_2=\dfrac{17+\sqrt{97}}{12}$.

**Câu 5.** Giải phương trình sau : $(4x-1)\sqrt{x^2+1}=2x^2+2x+1$

**Lời giải**

Đặt $y=\sqrt{x^2+1}\ge 1 \Leftrightarrow y^2=x^2+1 \Rightarrow 2y^2+(1-4x)y+2x-1=0$.

$\Leftrightarrow y=2x-1 \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$

$\sqrt[3]{x^3+5x^2}-1=\sqrt{\frac{5x^2-2}{6}}$.

Điều kiện xác định: $5x^2-2\ge 0$.

Đặt $t=\sqrt{\frac{5x^2-2}{6}}(t\ge 0)$. Ta có $5x^2=6t^2+2$.

Phương trình đã cho trở thành

$\sqrt[3]{x^3+6t^2+2}-1=t \Leftrightarrow x^3+6t^2+2=(t+1)^3$

$\Leftrightarrow x^3=(t-1)^3 \Leftrightarrow x=t-1 \Leftrightarrow t=x+1$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{5x^2-2}{6}}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ \frac{5x^2-2}{6}=(x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x^2+12x+8=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x=-6+\sqrt{28}$ (tm đk).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=-6+\sqrt{28}$.

**Câu 6.** Giải phương trình: $\log_{2+\sqrt{5}}(x^2-2x-11)=\log_{2\sqrt{2+\sqrt{5}}}(x^2-2x-12)$ (1)

- Điều kiện: $\begin{cases} x^2-2x-12>0 \\ x^2-2x-11>0 \end{cases}$ (*)
- $(2+\sqrt{5})^2=9+4\sqrt{5}$ và $(2\sqrt{2+\sqrt{5}})^2=8+4\sqrt{5}$ do đó $2+\sqrt{5}=\sqrt{9+4\sqrt{5}}$ và $2\sqrt{2+\sqrt{5}}=\sqrt{8+4\sqrt{5}}$.
- (1) $\Leftrightarrow \log_{\sqrt{9+4\sqrt{5}}}(x^2-2x-11)=\log_{\sqrt{8+4\sqrt{5}}}(x^2-2x-12)$

  $\Leftrightarrow \log_{9+4\sqrt{5}}(x^2-2x-11)=\log_{8+4\sqrt{5}}(x^2-2x-12)$
- Đặt: a = 8 + 4$\sqrt{5}$ > 1, t = $x^2$ – 2x -12. Điều kiện: t > 0.
- Do đó: (1) $\Leftrightarrow$ $\ln_{a+1}(t+1)=\ln_a t$

Cách 1: (1) $\Leftrightarrow$ $\ln_{a+1}(t+1)=\ln_a t \Leftrightarrow \begin{cases} t=a^y \\ t+1=(a+1)^y \end{cases}$ (I).

- Từ (I) ta được: $\left(\frac{a}{a+1}\right)^y+\left(\frac{1}{a+1}\right)^y=1$ (2).
- y = 1: là nghiệm của (2).
- y < 1: $\left(\frac{a}{a+1}\right)^y+\left(\frac{1}{a+1}\right)^y>\frac{a}{a+1}+\frac{1}{a+1}=1$, y < 1: $\left(\frac{a}{a+1}\right)^y+\left(\frac{1}{a+1}\right)^y<\frac{a}{a+1}+\frac{1}{a+1}=1$.
- Nên (2) có nghiệm duy nhất: y = 1. Do đó: (1) t = a $\Leftrightarrow$ $x^2$ – 2x – 12 = 8 + 4$\sqrt{5}$ ( thỏa *)

  $\Leftrightarrow$ $x^2$ – 2x – 20 - 4$\sqrt{5}$ = 0 $\Leftrightarrow$ x = 2 + 2$\sqrt{5}$ hoặc x = -2$\sqrt{5}$.

- Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = 2 + 2\sqrt{5}$ hoặc $x = -2\sqrt{5}$.

Cách 2: Xét hàm số $y = f(t) = \ln_{a+1}(t + 1) - \ln_a t$ $(a > 1)$

- Ta được: $y' = \dfrac{1}{(t+1)\ln(a+1)} - \dfrac{1}{t\ln a} < 0$ vì $a > 1$, nên hàm số giảm trên $(0; +\infty)$ và ta có $f(t) = 0$ có nghiệm $t = a$ nên $f(t)$ có nghiệm duy nhất $t = a$.
- Vậy: (1) (1) $\Leftrightarrow \ln_{a+1}(t + 1) = \ln_a t \Leftrightarrow t = a$ $x^2 - 2x - 12 = 8 + 4\sqrt{5}$ ( thỏa *)
  $\Leftrightarrow x^2 - 2x - 20 - 4\sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow x = 2 + 2\sqrt{5}$ hoặc $x = -2\sqrt{5}$.
- Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = 2 + 2\sqrt{5}$ hoặc $x = -2\sqrt{5}$.

**Câu 7.** Giải phương trình: $3(x^2 + 2x + 2) = 10\sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$ (1).

- $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x+1)(x^2 + x + 1)$ nên điều kiện là: $x \geq -1$.
- $x^2 + 2x + 2 = (x + 1) + (x^2 + x + 1)$, đặt $a = \sqrt{x+1}$, $b = \sqrt{x^2 + x + 1}$
- Với điều kiện $x \geq -1$: (1) trở thành:
  $3(a^2 + b^2) = 10ab \Leftrightarrow 3a^2 - 10ab + 3b^2 = 0 \Leftrightarrow (a - 3b)(3a - b) = 0 \Leftrightarrow a = 3b$ hay $a = b/3$.
- $a = 3b \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 3\sqrt{x^2 + x + 1} \Leftrightarrow x + 1 = 9(x^2 + x + 1) \Leftrightarrow 9x^2 + 8x + 8 = 0$ (vô nghiệm)
- $a = b/3 \Leftrightarrow 3a = b \Leftrightarrow 3\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2 + x + 1} \Leftrightarrow 9(x + 1) = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 8x - 8 = 0$
  $\Leftrightarrow x = 4 \pm 2\sqrt{6}$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x = 4 \pm 2\sqrt{6}$.

**Câu 8.** Giải phương trình : $x^3 - 3x^2 + 2 = \sqrt{x+1}$

Điều kiện: $x \geq -1$

+) Nếu $x > 3$ thì:

$x^3 - 3x^2 + 2 = (x - 1)^3 - 3(x - 1) > 4(x - 1) - 3(x - 1) = x - 1 > \sqrt{x+1}$ Chứng tỏ $x > 3$ không thỏa mãn

Với $-1 \leq x \leq 3$

Đặt $x = 2\cos t + 1$ $(0 \leq t \leq \pi)$

Khi đó phương trình trở thành:

$$(2\cos t + 1)^3 - 3(2\cos t + 1)^2 + 2 = \sqrt{2\cos t + 2}$$

$$\Leftrightarrow 8\cos^3 t - 6\cos t = \sqrt{2(\cos t + 1)}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 3t = 2\cos\frac{t}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 3t = \cos\frac{t}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3t = \dfrac{t}{2} + 2k\pi \\ 3t = -\dfrac{t}{2} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{4k\pi}{5} \\ t = \dfrac{4k\pi}{7} \end{array}\right.$$

**Câu 9.** Giải phương trình $\sqrt[3]{x^3+5x^2}-1=\sqrt{\dfrac{5x^2-2}{6}}$

**Hướng dẫn giải**

Điều kiện xác định: $5x^2-2\ge 0$.

Đặt $\sqrt{\dfrac{5x^2-2}{6}}=t(t\ge 0)$. Ta có $5x^2=6t^2+2$.

Phương trình đã cho trở thành

$\sqrt[3]{x^3+6t^2+2}-1=t\Leftrightarrow x^3+6t^2+2=(t+1)^3$

$\Leftrightarrow x^3=(t-1)^3\Leftrightarrow x=t-1\Leftrightarrow t=x+1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{5x^2-2}{6}}=x+1\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ \dfrac{5x^2-2}{6}=(x+1)^2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x^2+12x+8=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=-6+\sqrt{28}.$$

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm là $x=-6+\sqrt{28}$.

**Câu 10.** *[Đề chọn hsg tỉnh Trà Vinh, 2014-2015]* Giải phương trình : $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left[\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}\right]=2+\sqrt{1-x^2}$

**Câu 11.** *[Đề thi hsg tỉnh Vĩnh Long, 2015-2016]* Giải phương trình $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$

**Lời giải**

Phương trình tương đương với $x^3+2x=2x-1+2\sqrt[3]{2x-1}$

Đặt $t=\sqrt[3]{2x-1}$, ta có phương trình $x^3+2x=t^3+2t$

$\Leftrightarrow (x-t)(x^2+xt+t^2)+2(x-t)=0$

$\Leftrightarrow (x-t)(x^2+xt+t^2+2)=0 \quad (1)$

Vì $x^2+xt+t^2+2=\left(x+\dfrac{t}{2}\right)^2+\dfrac{3t^2}{4}+2>0$ nên $(1)\Leftrightarrow x=t$

$$\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{2x-1}\Leftrightarrow x^3-2x+1=0\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Tập nghiệm $S=\left\{1;\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$

**Câu 12.** Giải phương trình: $\sqrt{x^4+x^2+1}+\sqrt{3}\left(x^2+1\right)=3\sqrt{3}x$ ,với $x\in\mathbb{R}$

**Hướng dẫn giải.**

Từ pt ta thấy $x\rangle 0$

$$(1)\Leftrightarrow \sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}+1}+\sqrt{3}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=3\sqrt{3}$$

Đặt: $t = x + \frac{1}{x}, t \geq 2$

Pt trở thành: $\sqrt{t^2 - 1} = \sqrt{3}(3 - t)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 3 \\ t^2 - 9t + 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2$

$x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1$

Giải phương trình $x^3 - 5x^2 + 12x - 6 = 2\sqrt[3]{x^2 - x + 1}$

**Câu 13.** Giải phương trình: $-x\sqrt{2-3x} + \sqrt{1-x} = \sqrt{x^2+1}.\sqrt{3-4x}$ .

**Hướng dẫn giải.**

Đặt $\vec{u} = (x;1), \vec{v} = \left(\sqrt{2-3x}; -\sqrt{1-x}\right)$ từ phương trình ta có $\vec{u}.\vec{v} = -\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$

Như vậy: $\vec{u}, \vec{v}$ ngược hướng

Suy ra: $\frac{\sqrt{2-3x}}{x} = \frac{-\sqrt{1-x}}{1}$ (1)

Giải (1) và thử lại ta thấy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

**Câu 14.** Giải phương trình: $x = 10 + \sqrt{10 + \sqrt{x}}$ ,với $x \in R$

**Hướng dẫn giải.**

Đk: $x \geq 0$

Đặt $u = 10 + \sqrt{x}, u \geq 10$

Ta có: $\begin{cases} x = 10 + \sqrt{u} \\ u = 10 + \sqrt{x} \end{cases}$

$x - u - \left(\sqrt{x} - \sqrt{u}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - \sqrt{u}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{u} + 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = u \\ \sqrt{u} + \sqrt{x} + 1 = 0 (VL) \end{array}\right.$

$x = u \Leftrightarrow \sqrt{x} = x - 10 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 10 \\ x^2 - 21x + 100 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{21+\sqrt{41}}{2}$

Vậy phương trình có một nghiệm: $x = \frac{21+\sqrt{41}}{2}$,

Giải phương trình: $\sqrt[3]{81x - 8} = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - 2$.

**Câu 15.** Giải phương trình: $x + \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}} = 1$

**Hướng dẫn giải.**

Phương trình đã cho có điều kiện $0 < x < 1$

Với điều kiện trên ta có: $x+\frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}=1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=\frac{3x}{1-x}$

$\Leftrightarrow (1-x)^2(x^2+1)=9x^2$

$\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-7=0$

Đặt $t=x+\frac{1}{x}$ $(t\geq 2)$ ta có: $t^2-2t-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1-\sqrt{10} \\ t=1+\sqrt{10}\end{array}\right. \Leftrightarrow t=1+\sqrt{10}$

Với $t=1+\sqrt{10}$ ta có : $x+\frac{1}{x}=1+\sqrt{10} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1+\sqrt{10}-\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2} \\ x=\frac{1+\sqrt{10}+\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$

So với điều kiện $0<x<1$, phương trình đã cho có nghiệm $x=\frac{1+\sqrt{10}-\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2}$

**Câu 16.** Giải phương trình sau trên tập số thực: $x+1=(2x+1)\sqrt{\sqrt{x+1}+2}$.

**Hướng dẫn giải.**

Điều kiện: $x\geq -\frac{1}{2}$. Đặt $y=\sqrt{\sqrt{x+1}+2}$ $(y>\sqrt{2})$,

ta thu được hệ $\begin{cases} x+1+y=2(x+1)y \\ y^2-\sqrt{x+1}=2 \end{cases}$

Suy ra

$x+1+y=\left(y^2-\sqrt{x+1}\right)(x+1)y$

$\Leftrightarrow \left(y\sqrt{x+1}+1\right)\left(y+x+1-y^2\sqrt{x+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(y\sqrt{x+1}+1\right)\left(y-2\sqrt{x+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow y=2\sqrt{x+1}$

Do vậy $\sqrt{\sqrt{x+1}+2}=2\sqrt{x+1} \Leftrightarrow x=\frac{-15+\sqrt{33}}{32}$.

Thay vào, thử lại thấy $x=\frac{-15+\sqrt{33}}{32}$ thỏa mãn.

Đáp số: $x=\frac{-15+\sqrt{33}}{32}$.

**Câu 17.** Giải phương trình: $x^2+\sqrt{6x^2+4x}=x+1$.

**Hướng dẫn giải.**

$$pt \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2+4x\ge 0 \\ x+1-x^2\ge 0 \\ 6x^2+4x=(x+1-x^2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -\dfrac{2}{3} \vee x\ge 0 \\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\le x\le \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 6x^2+4x=(x+1-x^2)^2 \quad (1) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow x^4+1-2x^3-2x-x^2=0$

$\Leftrightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}-2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-7=0$ (x = 0 không là nghiệm)

Đặt $t=x+\dfrac{1}{x}$ $(t\ge 2)$ ta được $t^2-2t-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1-\sqrt{10} \\ t=1+\sqrt{10} \end{array}\right.$

So với điều kiện ta được $t=1+\sqrt{10} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1+\sqrt{10}-\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2} \\ x=\dfrac{1+\sqrt{10}+\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$

So với điều kiện $0\le x\le \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, ta được $x=\dfrac{1+\sqrt{10}-\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2}$

**Câu 18.** Giải phương trình sau: $4\sqrt{x^2+x+1}=1+5x+4x^2-2x^3-x^4$ với $x\in R$.

**Hướng dẫn giải.**

Đặt $t=\sqrt{x^2+x+1}, t\ge \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Khi đó phương trình trở thành:

$4t=-t^4+7t^2-5 \Leftrightarrow t^4-6t^2+9-\left(t^2-4t+4\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(t^2-3\right)^2-\left(t-2\right)^2=0 \Leftrightarrow \left(t^2-t-1\right)\left(t^2+t-5\right)=0\,(*)$

$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2-t-1=0 \\ t^2+t-5=0 \end{array}\right.$

• Với $t\ge \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ thì $t^2-t-1=0$ có một nghiệm là $t=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

• Với $t\ge \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ thì $t^2+t-5=0$ có một nghiệm là $t=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$

• Khi $t=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ thì $x^2+x+1=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 2x^2+2x-1-\sqrt{5}=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-1-\sqrt{3+2\sqrt{5}}}{2}$ hoặc $x=\dfrac{-1+\sqrt{3+2\sqrt{5}}}{2}$.

•Khi $t=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$ thì $x^2+x+1=\left(\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 2x^2+2x-9+\sqrt{21}=0$