

BÀI TẬP LƯỢNG GIÁC NÂNG CAO

Câu 1. Giải phương trình:
$$\frac{2\sqrt{3}\sin x(1+\cos x)-4\cos x.\sin^2\frac{x}{2}-3}{2\sin x-1}=0$$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $\sin x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x \neq \frac{5\pi}{6} + l\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z} (*)$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$$2\sqrt{3}\sin x(1+\cos x)-4\cos x.\sin^2\frac{x}{2}-3=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x+2\sqrt{3}\sin x.\cos x-2\cos x(1-\cos x)-3=0$$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{3}\sin x-\cos x)-(3\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x.\cos x+\cos^2 x)=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3}\sin x-\cos x)(\sqrt{3}\sin x-\cos x-2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}\sin x-\cos x=0 \\ \sqrt{3}\sin x-\cos x=2 \end{cases}$$

TH1: $\sqrt{3}\sin x-\cos x=0 \Leftrightarrow \cot x=\sqrt{3} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi, k \in \mathbb{Z}$

TH2: $\sqrt{3}\sin x-\cos x=2 \Leftrightarrow 2\left(\sin x \cos \frac{\pi}{6}-\cos x \sin \frac{\pi}{6}\right)=2 \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1$

$$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Đổi chiều điều kiện ta thấy phương trình đã cho có 2 họ nghiệm

$$x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi, x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 2. Tìm tất cả các nghiệm $x \in (2009; 2011)$ của phương trình :
 $|\cos x| - |\sin x| - \cos 2x\sqrt{1+\sin 2x} = 0$

Câu 3. Chứng minh rằng: $\frac{1+\sin 2a}{1-\sin 2a} = \cot^2\left(a-\frac{\pi}{4}\right)$.

Câu 4. Cho: $\sin x + \sin y = 2\sin(x+y)$, với $x+y \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng:

$$\tan \frac{x}{2} + \tan \frac{y}{2} = \frac{1}{3}.$$

Câu 5. Giải phương trình : $3 \tan 2x - \frac{3}{\cos 2x} - 2 \frac{1-\cot x}{1+\cot x} + 2 \cos 2x = 0$

Câu 6. Cho tam giác ABC với các kí hiệu thông thường, biết: $\sin \frac{A}{2} \cdot \cos^3 \frac{B}{2} = \sin \frac{B}{2} \cdot \cos^3 \frac{A}{2}$.

Chứng minh rằng tam giác ABC cân.

Câu 7. Giải phương trình sau: $\sqrt{2}(\sin x + \sqrt{3}\cos x) = \sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x$.

Câu 8. Tìm a để bất phương trình đúng với mọi x : $|3\sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x + \cos 2x + a| \leq 3$

Câu 9. Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh là a, b, c , độ dài ba đường phân giác trong tương ứng với các góc A, B, C lần lượt là l_a, l_b, l_c .

1. Chứng minh rằng: $\frac{l_a+l_b}{c} + \frac{l_b+l_c}{a} + \frac{l_c+l_a}{b} \leq 3\sqrt{3}$.

2. Nhận dạng tam giác, biết: $a+b = \tan \frac{C}{2}(a \tan a + b \tan b)$.

Câu 10. Định a để hệ: $\begin{cases} ax^2 + a = y + |\cos x| \\ \sin^2 x + y^2 = 1 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Câu 11. Chứng minh rằng nếu $x > \sqrt{2}x^2$ thì: $\frac{2 \cos^2 x + \sin 2x}{\sin^2 x \cdot \cos 2x} > 16$

Câu 12. Tìm m để hệ phương trình sau đây có nghiệm và hãy giải hệ phương trình tương ứng với những giá trị tìm được của m: $\begin{cases} \sin x \cdot \cos 2y = m^4 - 2m^2 + 2 \\ \cos x \cdot \cos 2y = m^3 + 1 \end{cases}$.

Câu 13. Cho hai phương trình sau:

$$2 \sin^7 x = (1 + \sin \pi a) \cdot \sin x + a \cdot \sin^3 x \quad (1)$$

$$(a-1)(1 + \cos^2 x) + 2 \sin^6 x = 2 \sin^2 x + 2(a-1)^3 \quad (2)$$

a. Giải các phương trình trên với $a = 2$.

b. Tìm tất cả các giá trị của a để hai phương trình (1) và (2) tương đương.

Câu 14. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sin x + \sin y + \sin z = \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ \cos x + \cos y + \cos z = \frac{3}{2} \end{cases}$.

Câu 15. Tìm tất cả các giá trị $x \in [0; 2\pi]$ sao cho: $2 \cos x \leq |\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}| \leq 2$.

Câu 16. Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất để phương trình sau có nghiệm:

$$\cos^2 \pi(a-x) - 2 \cos \pi(a-x) + \cos \frac{3\pi x}{2a} \cdot \cos \left(\frac{\pi x}{2a} + \frac{\pi}{3} \right) + 2 = 0.$$

Câu 17. Cho tam giác ABC có $\tan A + \tan C = 2 \tan B$. Chứng minh rằng: $\cos A + \cos C \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Câu 18. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh thỏa mãn hệ thức: $\frac{BC}{AB-BC} = \frac{AB+BC}{AC}$. Tính tổng số đo góc: $3A+B$.

Câu 19. Xét các tam giác ABC thỏa mãn ràng buộc: $\text{Max}\{A, B, C\} \geq \frac{\pi}{2}$. Tìm giá trị lớn của biểu thức: $P = \sin A + \sin^2 B + \sin^3 C$.

Câu 20. Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $(2m+1)(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x) + 2m^2 + 2m + 2 = 0$

Câu 21. Chứng minh rằng với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta luôn có $|\sin x| + |\cos x| \geq 1$.

Câu 22. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm

$$m(|\sin x| + |\cos x| + 1) = |\sin 2x| + |\sin x| + |\cos x| + 2$$

Câu 23. Giải phương trình: $\cos 2x + \cos 3x - \sin x - \cos 4x = \sin 6x$.

Câu 24. Tìm tổng nghịch đảo các nghiệm của phương trình $\sin \frac{2x+1}{x} + \sin \frac{2x+1}{3x} - 3\cos^2 \frac{2x+1}{3x} = 0$ thỏa mãn điều kiện $x \geq \frac{1}{10}$

Câu 25. Tìm m để phương trình $m\cos x + \cos 3x - \cos 2x = 1$ có đúng 8 nghiệm trên khoảng $(-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2})$

Câu 26. Trong tất cả các tam giác ABC cho trước, tìm tam giác có $P = \cos 2A + \cos 2B - \cos 2C$ lớn nhất.

Câu 27. Giải phương trình: $8\cos 4x \cdot \cos^2 2x + \sqrt{1 - \cos 3x} + 1 = 0$

Câu 28. Tính số đo các góc trong tam giác ABC, biết $\frac{\sin A}{1} = \frac{\sin B}{\sqrt{3}} = \frac{\sin C}{2}$

Câu 29. Giải phương trình $2\cos^2 x(1 + \cot x) - 2\sin^2 x + 1 = 0$

Câu 30. Tam giác ABC thỏa mãn đẳng thức $\cos 2A + \sqrt{2}(\cos 2B + \cos 2C) + 2 = 0$

Câu 31. Tìm số tự nhiên a bé nhất để phương trình sau có nghiệm:

$$\cos^2 \pi(a-x) - 2\cos \pi(a-x) + \cos \frac{3\pi x}{2a} \cdot \cos \left(\frac{\pi x}{2a} + \frac{\pi}{3} \right) + 2 = 0;$$

Câu 32. Cho tam giác ABC có: $\tan A + \tan C = 2\tan B$. CMR: $\cos A + \cos C \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}$;

Câu 33. Giải phương trình: $1 - \tan x \cdot \tan 2x = \cos 3x$

Câu 34. Trong tam giác ABC biết số đo ba góc A, B, C lập thành cấp số cộng với $A \geq B \geq C$

và thỏa hệ thức $\cos A + \cos B + \cos C = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$. Tính số đo các góc A, B, C.

Câu 35. Giải phương trình $\cos 3x + \sin 7x = 2\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{5x}{2} \right) - 2\cos^2 \frac{9x}{2}$

Câu 36. Tìm m để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt trong khoảng $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$:

$$4\cos^2 x + 16m \left(\sin^4 \frac{x}{4} + \cos^4 \frac{x}{4} \right) - 14m - 1 = 0$$

Câu 37. Giải phương trình: $\cos x \cdot \cos 2x = 1/4$

Hướng dẫn giải

$x = k\pi$ không phải là nghiệm. nhân thêm $\sin x$ vào hai vế để đưa về pt $\sin 4x = \sin x$

Suy ra $x = k2\pi/3$; $x = \pi/5 + k2\pi/5$

vì $x \neq k\pi$ nên pt có các nghiệm $x = \pm 2\pi/3 + k2\pi$; $x = \pm \pi/5 + k2\pi$; $x = \pm 3\pi/5 + k2\pi$

Câu 38. Giải phương trình: $\frac{(\cos x - 1)(2\cos x - 1)}{\sin x} = 1 - \sin 2x + 2\cos^2 x$.

Câu 39. Cho phương trình: $(m+3)\sin^3 x + (m-1)\cos^3 x + \cos x - (m+2)\sin x = 0$

a) Giải phương trình khi $m = -5$.

b) Xác định tham số m để phương trình có đúng một nghiệm $x \in \left[\pi, \frac{5\pi}{4} \right]$.

Câu 40. Cho tam giác ABC có các góc A, B, C thỏa mãn hệ thức:

$$\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} = \frac{1}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}}$$

Chứng minh tam giác ABC là tam giác đều.

Câu 41. Giải phương trình: $\frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\sin x - \cos^3 x}{\sqrt{\sin^3 x - \cos^3 x}} = 0.$

Câu 42. Tìm m để phương trình $\cos \frac{4x}{x^2+1} + \cos \frac{2x}{x^2+1} - m = 0$ có nghiệm.

Câu 43. Tam giác ABC có ba góc thỏa mãn hệ thức: $8 \cos A \sin B \sin C + 4\sqrt{3}(\sin A + \cos B + \cos C) - 17 = 0.$ Hãy tính các góc của tam giác đó.

Câu 44. Giải phương trình: $\frac{\cos 2x + 3 \cos x + 1}{\sin x + 1} = -1$

Câu 45. Giải phương trình sau $\sin 2x - (\sin x + \cos x - 1)(2 \sin x - \cos x - 3) = 0.$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} PT &\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^2 - 1 - (\sin x + \cos x - 1)(2 \sin x - \cos x - 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\sin x + \cos x - 1)(\sin x + \cos x + 1) - (\sin x + \cos x - 1)(2 \sin x - \cos x - 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\sin x + \cos x - 1)(-\sin x + 2 \cos x + 4) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 1 \\ \sin x - 2 \cos x = 4(VN) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm: $x = k2\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Câu 46. Cho $\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$ Tính giá trị của biểu thức: $P = (1 + \tan \alpha) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$

Hướng dẫn giải

Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0.$ Ta có:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \frac{1}{10} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}},$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \frac{9}{10} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}, \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -3$$

Khi đó: $P = (1 + \tan \alpha) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \alpha + \sin \alpha) = (1 - 3) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{3}{\sqrt{10}}\right) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

Câu 47. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{1 + \cot x}{2 \cos x - 1}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Nhiều điều kiện xác định} \begin{cases} \cos x \neq \frac{1}{2} \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x \neq l\pi \end{cases}, (k, l \in \mathbb{Z})$$

Câu 48. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \cos^2 x + \tan^2 x$