MỘT SỐ DẠNG TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TÍNH CHẤT CỦA DÃY SỐ.

Bài 1. Cho cấp số cộng (u_n) với n là số nguyên dương thoã mãn $u_{2013}=2013; u_{2014}=2014$. Tính tổng: $S=\frac{1}{u_1u_2}+\frac{1}{u_2u_3}+....+\frac{1}{u_{2013}u_{2014}}$.

Hướng dẫn giải

Dễ dàng chứng minh được số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) là $u_n=n$.

Khi đó.

$$S=\frac{1}{u_1u_2}+\frac{1}{u_2u_3}+....+\frac{1}{u_{2013}u_{2014}}=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...\frac{1}{2013+2014}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}=\frac{1006}{2014}=\frac{503}{1007}$$
.

Bài 2. Cho dãy số thực (x_n) được xác định bởi. $\begin{cases} x_0=a \\ x_{n+1}=2x_n^2-1 \end{cases} (\forall n\in\mathbb{N})$. Tìm tất cả các giá trị của a để $x_n<0$ với mọi số tự nhiên n.

Hướng dẫn giải

Giả sử $x_n<0$ với $\forall n\in\mathbb{N}$.

Từ $x_{n+2}=2x_{n+1}^2-1<0$ có $-\frac{\sqrt{2}}{2}<x_{n+1}<0$.

Lại từ $-\frac{\sqrt{2}}{2}<2x_n^2-1<0$ có $-\frac{\sqrt{2}}{2}<x_n<\frac{-\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\Rightarrow -1<x_n<-\frac{1}{4},\forall n\in\mathbb{N}$.

Suy ra $\left|x_n-\frac{1}{2}\right|>\frac{3}{4}$ và $\left|x_n+\frac{1}{2}\right|<1,\forall n\in\mathbb{N}$.

Từ đó $\left|x_{n+1}+\frac{1}{2}\right|=\left|2x_n^2-1+\frac{1}{2}\right|=2\left|x_n^2-\frac{1}{4}\right|=2\left|x_n-\frac{1}{2}\right|.\left|x_n+\frac{1}{2}\right|>\frac{3}{2}\left|x_n+\frac{1}{2}\right|,\forall n\in\mathbb{N}$.

Áp dụng liên tiếp bất đẳng thức này, ta có:.

$$\left|a+\frac{1}{2}\right|=\left|x_0+\frac{1}{2}\right|<\frac{2}{3}\left|x_1+\frac{1}{2}\right|<\left(\frac{2}{3}\right)^2\left|x_2+\frac{1}{2}\right|<...<\left(\frac{2}{3}\right)^n\left|x_n+\frac{1}{2}\right|<\left(\frac{2}{3}\right)^n,\forall n\in\mathbb{N}.$$

Mà $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ nên phải có $\left|a+\frac{1}{2}\right|=0\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$.

Thử lại với $a=-\frac{1}{2}$ thì $x_n=-\frac{1}{2}<0,\forall n$.

Vậy $a=-\dfrac{1}{2}$ là giá trị duy nhất cần tìm.

Bài 3. Cho dãy số (x_n) xác định bởi $\begin{cases} x_0=20; x_1=30 \\ x_{n+2}=3x_{n+1}-x_n, \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$. Tìm n để $x_{n+1}.x_n+1$ là số chính phương.

Hướng dẫn giải

Từ công thức truy hồi của x_n ta có.

$\forall n\in\mathbb{N}, x_{n+1}^2+x_n^2-3x_{n+1}x_n=x_{n+1}^2+x_n\left(x_n-3x_{n+1}\right)=x_{n+1}^2-x_{n+2}x_n$

và $x_{n+1}^2+x_n^2-3x_{n+1}x_n=x_{n+1}\left(x_{n+1}-3x_n\right)+x_n^2=x_n^2-x_{n+1}x_{n-1}$

Suy ra $x_{n+1}^2-x_{n+2}x_n=x_n^2-x_{n+1}x_{n-1}=\ldots=x_1^2-x_0x_2=-500$.

$\Rightarrow x_{n+1}^2+x_n^2-3x_{n+1}x_n=-500$

$\Leftrightarrow x_{n+1}^2+x_n^2=3x_{n+1}x_n-500$

$\Leftrightarrow \left(x_{n+1}-x_n\right)^2=x_{n+1}x_n-500$

Vậy $x_{n+1}x_n-500$ là số chính phương.

Giả sử n là số thỏa mãn $x_{n+1}x_n-500$ là số chính phương.

Đặt $x_{n+1}x_n-500=b^2, x_{n+1}x_n+1=a^2, a,b\in\mathbb{N}, a>b$.

Ta có $a^2-b^2=501\Leftrightarrow(a-b)(a+b)=1.501=3.167$.

Khi đó ta tìm được $a=201$, $b=1$ thì $x_{n+1}x_n=12600\Rightarrow n=2$.

Với $a=85$, $b=82$ thì $x_{n+1}x_n=\dfrac{7224}{5}\Rightarrow\nexists\, n$.

Vậy $n=2$ thì $x_{n+1}.x_n+1$ là số chính phương.

Bài 4. Dãy số (u_n) xác định như sau: $\begin{cases} u_1=2 \\ u_{n+1}=u_n^2-u_n+1, \forall n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$. Chứng minh rằng $1-\dfrac{1}{2^{2^{2015}}}<\sum\limits_{k=1}^{2016}\dfrac{1}{u_k}<1-\dfrac{1}{2^{2^{2016}}}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $u_{n+1}-u_n=u_n^2-2u_n+1=\left(u_n-1\right)^2$. (1).

Do $u_1=2\Rightarrow u_2-u_1=1\Rightarrow u_2>u_1$.

Từ đó bằng phép quy nạp ta suy ra (u_n) là dãy đơn điệu tăng thực sự, và u_n nhận giá trị nguyên dương lớn hơn hoặc bằng 2 với mọi $n=1,2,....$

Ta viết lại điều kiện truy hồi xác định dãy số dưới dạng sau đây:.

$u_{n+1}-1=u_n^2-u_n=u_n(u_n-1)$ (2).

Từ đó dẫn đến: $\frac{1}{u_{n+1}-1}=\frac{1}{u_n(u_n-1)}=\frac{1}{u_n-1}-\frac{1}{u_n}\Rightarrow\frac{1}{u_n}=\frac{1}{u_n-1}-\frac{1}{u_{n+1}-1},$ (3) Bây giờ từ (3), ta có:.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{u_k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{u_k-1}-\frac{1}{u_{k+1}-1}\right)=1-\frac{1}{u_{k+1}-1}. \quad (4).$$

Từ (4) suy ra bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với.

$$1-\frac{1}{2^{2^{n-1}}}<1-\frac{1}{u_{n+1}-1}<1-\frac{1}{2^{2^n}}\Leftrightarrow 2^{2^{n-1}}<u_{n+1}-1<2^{2^n} \qquad (5).$$

(ở đây $n=2016$). Ta sẽ chứng minh (5) đúng với mọi n. Khi đó nó sẽ đúng với $n=2016$.

Do u_n nguyên dương với mọi n, (5) tương đương.

$2^{2^{n-1}}+1\le u_{n+1}-1<2^{2^n}$. (6).

Xét khi $n=k+1$. Theo (2), ta có: $u_{k+2}-1=u_{k+1}(u_{k+1}-1)$.

Vì thế theo giả thiết quy nạp suy ra:.

$$u_{k+2}-1<2^{2^k}(2^{2^k}-1)<2^{2^k}.2^{2^k}=2^{2^{k+1}}$$
$$u_{k+2}-1\ge(2^{2^{k-1}}+1).(2^{2^{k-1}}+1-1)>2^{2^{k-1}}.2^{2^{k-1}}=2^{2^k}.$$

Như thế với $n=k+1$, ta thu được:.

$$2^{2^k}<u_{k+2}-1<2^{2^{k+1}}$$
$$\Rightarrow 2^{2^k}+1\le u_{k+2}-1<2^{2^{k+1}}. \qquad (8).$$

Từ (8) suy ra (6) đúng với mọi $n=2,3,....$

Vì vậy (5) đúng $n=2016$. Ta có điều phải chứng minh!.

Bài 5. Cho dãy $(a_n)_{n=1}^{\infty}$: $a_1=1; a_{n+1}=\frac{a_n^2-5a_n+10}{5-a_n}\forall n\ge1$.

a) Chứng minh dãy (a_n) hội tụ và tính $\lim a_n$.

b) Chứng minh $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}<\frac{5-\sqrt{5}}{2}\forall n\ge1$.

Hướng dẫn giải

a) Bằng phương pháp chứng minh qui nạp ta có: $1 \le a_n \le 3/2 \; \forall n$.

Đặt $A = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ và xét hàm $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 10}{5-x} = \frac{10}{5-x} - x (x \ne 5)$.

Suy ra $f'(x) = \frac{10}{(5-x)^2} - 1 < 0 \forall x \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$, như vậy $f(x)$ nghịch biến trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Dẫn đến $\begin{cases} a_1 < a_3 < a_5 < \ldots < a_{2k-1} < \ldots < A \\ a_2 > a_4 > a_6 > \ldots > a_{2k} > \ldots > A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists \lim a_{2k-1} = b \le A \\ \exists \lim a_{2k} = c \ge A \end{cases}$.

Kết hợp công thức xác định dãy ta được: $\begin{cases} b = \dfrac{c^2 - 5c + 10}{5-c} \\ c = \dfrac{b^2 - 5b + 10}{5-b} \end{cases} \Leftrightarrow b = c = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$.

Vậy $\lim a_n = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$.

b) ***Nhận xét:*** $\forall t \in \left[1; \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$ thì $t + f(t) < 5 - \sqrt{5}$.

Dẫn đến $a_{2k-1} + a_{2k} < 5 - \sqrt{5} \quad \forall k \ge 1$.

$\Rightarrow a_1 + a_2 + \ldots + a_{2k-1} + a_{2k} < 2k \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ (1).

Như vậy bất đẳng thức đúng với $n = 2k$.

Trường hợp $n = 2k+1$, chú ý $a_{2k+1} < \frac{5-\sqrt{5}}{2}$, kết hợp với (1) thu được:.

$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2k-1} + a_{2k} + a_{2k+1} < (2k+1)\frac{5-\sqrt{5}}{2}$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 6. Cho dãy số (u_n) như sau $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_2 = -2 \\ nu_{n+2} - (3n+1)u_{n+1} + 2(n+1)u_n = 3, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

a) Chứng minh $u_n = 2^n - 3n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Đặt $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} u_k$. Chứng minh rằng nếu n là số nguyên tố và n > 2 thì S_n chia hết cho n.

Hướng dẫn giải

a) Với $n=1$, $u_1=2^1-3.1=-1$.

$n=2$, $u_1=2^2-3.2=-2$.

Giả sử $u_k=2^k-3k;u_{k+1}=2^{k+1}-3(k+1)$.

Chứng minh $u_{k+2}=2^{k+2}-3(k+2),\forall k\in\mathbb{N}^*$.

Ta có.

$ku_{k+2}-(3k+1)u_{k+1}+2(k+1)u_k=3$.

$\Leftrightarrow ku_{k+2}-(3k+1)\left(2^{k+1}-3(k+1)\right)+2(k+1)\left(2^k-3k\right)=3$.

$\Leftrightarrow u_{k+2}=2^{k+2}-3(k+2)$.

Vậy $u_{k+2}=2^{k+2}-3(k+2),\forall k\in\mathbb{N}^*$.

b) Đặt $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}u_k$. Chứng minh rằng nếu n là số nguyên tố và $n>2$ thì S_n chia hết cho n.

Ta có: $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}u_k=2+2^2+...+2^{n-1}-3\left(1+2+...+(n-1)\right)$.

$S_n=2.\dfrac{1-2^{n-1}}{1-2}-3.\dfrac{(n-1)n}{2}=2\left(2^{n-1}-1\right)-3\dfrac{(n-1)n}{2}$.

Với n là số nguyên tố $\Rightarrow 2^{n-1}-1$ chia hết cho n.

Do n là số nguyên tố lớn hơn 2 $\Rightarrow \dfrac{(n-1)n}{2}$ chia hết cho n.

Vậy $S_n \vdots n$.

Bài 7. Cho dãy số $(u_n)\begin{cases}u_1=0\\u_2=18\\u_{n+2}=5u_{n+1}-6u_n-24,\forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$. Chứng minh rằng nếu n là số nguyên tố và $n>3$ thì u_n chia hết cho $6n$.

Hướng dẫn giải

Đặt $v_n=u_n+12$ hay $u_n=v_n-12,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Khi đó $v_{n+2}=5v_{n+1}-6v_n$.