DỰ ĐOÁN SỐ HẠNG TỔNG QUÁT VÀ CHỨNG MINH BẰNG QUY NẠP.

Bài 1. Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $\begin{cases} u_1 = 11 \\ u_{n+1} = 10u_n + 1 - 9n, \forall n \in N \end{cases}$. Xác định số hạng tổng quát của dãy đã cho.

Hướng dẫn giải

Ta có:.

$$\begin{aligned} &u_1 = 11 = 10 + 1 \\ &u_2 = 10.11 + 1 - 9 = 102 = 100 + 2 \\ &u_3 = 10.102 + 1 - 9.2 = 1003 = 1000 + 3 \end{aligned}.$$

Dự đoán: $u_n = 10^n + n$ (1).

Chứng minh theo quy nạp ta có.

$u_1 = 11 = 10^1 + 1$, công thức (1) đúng với $n = 1$. Giả sử công thức (1) đúng với $n = k$ ta có $u_k = 10^k + k$.

Ta có: $u_{k+1} = 10\left(10^k + k\right) + 1 - 9k = 10^{k+1} + (k+1)$.

Công thức (1) đúng với $n = k + 1$.

Vậy $u_n = 10^n + n$, $\forall n \in N$..

Bài 2. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_n = 3u_{n-1} - 1, \forall n \geq 2 \end{cases}$. Xác định số hạng tổng quát của dãy.

Hướng dẫn giải

$u_n = 3u_{n-1} - 1 \Leftrightarrow u_n - \frac{1}{2} = 3u_{n-1} - \frac{3}{2} \Leftrightarrow u_n - \frac{1}{2} = 3(u_{n-1} - \frac{1}{2})(1)$.

Đặt $v_n = u_n - \frac{1}{2} \Rightarrow v_1 = u_1 - \frac{1}{2} = \frac{-5}{2}$.

$(1) \Rightarrow v_n = 3v_{n-1}, \forall n \geq 2$.

Dãy (v_n) là cấp số nhân với công bội là $q = 3$.

Nên $v_n = v_1.q^{n-1} = \frac{-5}{2}.3^{n-1}$.

Do đó $u_n = v_n + \frac{1}{2} = \frac{-5}{2}3^{n-1} + \frac{1}{2}, \forall n = 1, 2, \ldots$.

Bài 3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1; u_{n+1} = \frac{3}{2}\left(u_n - \frac{n+4}{n^2+3n+2}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm công thức số hạng tổng quát u_n của dãy số theo n.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có.

$$2u_{n+1} = 3(u_n - \frac{n+4}{(n+1)(n+2)}) \Leftrightarrow 2u_{n+1} = 3(u_n + \frac{2}{n+2} - \frac{3}{n+1}).$$

$$\Leftrightarrow 2(u_{n+1} - \frac{3}{n+2}) = 3(u_n - \frac{3}{n+1}) \Leftrightarrow u_{n+1} - \frac{3}{n+2} = \frac{3}{2}(u_n - \frac{3}{n+1}).$$

Dãy số $(v_n), v_n = u_n - \frac{3}{n+1}$ là cấp số nhân có công bội $q = \frac{3}{2}$ và $v_1 = -\frac{1}{2}$.

$$v_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right), \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_n = \frac{3}{n+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Bài 4. Cho hàm số $f: Z^+ \to Z^+$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:.

(1) $f(n+1) > f(n)$, $\forall n \in Z^+$..

(2) $f[f(n)] > n + 2000$, $\forall n \in Z^+$.

a/Chứng minh: $f(n+1) = f(n)$, $\forall n \in Z^+$..

b/Tìm biểu thức $f(n)$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu a.

Vì $f(n) \in Z^+$ nên từ giả thiết (1) ta được: $f(n+1) \geq f(n) + 1$, $\forall n \in Z^+$..

Kết hợp giả thiết (2) ta được $\forall n \in Z^+$..

$n + 2001 = (n+1) + 2000 = f[f(n+1)] \geq f[f(n)] + 1 = n + 2001$ do đó: $f(n+1) = f(n) + 1$, $\forall n \in Z^+$.

Câu b.

$f(n) = f(1) + n - 1, \forall n \in Z^+ \Rightarrow f\{f(1)\} = f(1) + f(1) - 1$,.

Suyra: $1 + 2000 = 2f(1) - 1 \Rightarrow f(1) = 1001 \Rightarrow f(n) = n + 1000, \forall n \in Z^+$.

Thử lại thỏa các điều kiện, nên $f(n) = n + 1000, \forall n \in Z^+$..

Bài 5.

a)Xác định ba số hạng đầu của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 9 và tổng các bình phương của chúng là 125.

b)Cho dãy số (u_n) có $\begin{cases} u_1 = 16 \\ u_{n+1} + 14 = \dfrac{15(n.u_n + 1)}{n+1}, \forall n \ge 1 \end{cases}$. Tìm số hạng tổng quát u_n.

Hướng dẫn giải

a)Xác định ba số hạng đầu của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 9 và tổng các bình phương của chúng là 125.

Gọi d là công sai, số hạng thứ 2 là a. Khi đó 3 số hạng đầu của csc là $a-d, a, a+d$.

Theo giả thiết ta có hệ: $\begin{cases} a-d+a+a+d = 9 \\ (a-d)^2 + a^2 + (a+d)^2 = 125 \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 9 \\ 3a^2 + 2d^2 = 125 \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ d = \pm 7 \end{cases}$

Vậy có 2 cấp số thỏa mãn có 3 số hạng đầu là: -4;3;10 hoặc 10;3;-4.

b)Cho dãy số (u_n) có $\begin{cases} u_1 = 16 \\ u_{n+1} + 14 = \dfrac{15(n.u_n + 1)}{n+1}, \forall n \ge 1 \end{cases}$. Tìm số hạng tổng quát u_n.

Ta có: $u_{n+1} + 14 = \dfrac{15(n.u_n + 1)}{n+1} \Leftrightarrow (u_{n+1} + 14)(n+1) = 15(n.u_n + 1)$.

$\Leftrightarrow (n+1)u_{n+1} = 15nu_n - 14n + 1$ (1).

Đặt $v_n = nu_n (\Rightarrow v_1 = 16)$.

(1) trở thành: $v_{n+1} = 15v_n - 14n + 1 \Leftrightarrow v_{n+1} - (n+1) = 15(v_n - n)$ (2).

Đặt $\mathrm{w}_n = v_n - n (\Rightarrow \mathrm{w}_1 = 15)$.

(2) trở thành: $w_{n+1} = 15w_n \Rightarrow (\mathrm{w}_n)$ là csn có $\mathrm{w}_1 = 15, q = 15 \Rightarrow \mathrm{w}_n = 15^n$.

Từ đó ta có: $u_n = \dfrac{15^n + n}{n}$.

Bài 6. Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $u_1 = 1; u_2 = 4; u_{n+2} = 7u_{n+1} - u_n - 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh : u_n là số chính phương với mọi n nguyên dương.

Hướng dẫn giải

Ta có $u_1 = 1; u_2 = 4; u_3 = 25$.

Đặt $u_n = v_n + \frac{2}{5}$ thì $v_1 = \frac{3}{5}; v_2 = \frac{18}{5}; v_3 = \frac{123}{5}$.

Khi đó $u_{n+2} = 7u_{n+1} - u_n - 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ $\Leftrightarrow v_{n+2} + \frac{2}{5} = 7\left(v_{n+1} + \frac{2}{5}\right) - \left(v_n + \frac{2}{5}\right) - 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Leftrightarrow v_{n+2} = 7v_{n+1} - v_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có : $v_{n+2}.v_n - v_{n+1}^2 = (7v_{n+1} - v_n).v_n - v_{n+1}^2 = v_{n+1}(7v_n - v_{n+1}) - v_n^2 = v_{n+1}v_{n-1} - v_n^2$.

Suy ra : $v_{n+2}.v_n - v_{n+1}^2 = v_{n+1}v_{n-1} - v_n^2 = \cdots = v_3v_1 - v_2^2 = \frac{9}{5}; \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra : $\left(u_{n+2} - \frac{2}{5}\right).\left(u_n - \frac{2}{5}\right) - \left(u_{n+1} - \frac{2}{5}\right)^2 = \frac{9}{5} \Rightarrow u_{n+2}u_n - \frac{2}{5}(u_{n+2} + u_n) + \frac{4}{25} - \left(u_{n+1}^2 - \frac{4}{5}u_{n+1} + \frac{4}{25}\right) = \frac{9}{5}$

$\Rightarrow u_{n+2}u_n - \frac{2}{5}(7u_{n+1} - 2) - u_{n+1}^2 + \frac{4}{5}u_{n+1} = \frac{9}{5} \Rightarrow u_{n+2}u_n = u_{n+1}^2 + 2u_{n+1} + 1 = (u_{n+1} + 1)^2; \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Từ hệ thức $u_{n+2}u_n = (u_{n+1} + 1)^2; \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $u_1; u_2$ là các số chính phương suy ra u_n là số chính phương với mọi n nguyên dương.

Bài 7. Cho dãy số $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ tăng, $a_n > 0\ \forall n = 1, 2, 3, ...$ và $\alpha > 0$. Xét dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ xác định bởi $x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i+1} - a_i}{a_{i+1}a_i^\alpha}$. Chứng minh rằng tồn tại $\lim_{n \to +\infty} x_n$.

Hướng dẫn giải

Dễ dàng thấy rằng dãy $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ tăng ngặt.

Trường hợp 1. Nếu $\alpha > 1$.

$\frac{a_{i+1} - a_i}{a_{i+1}a_i^\alpha} = \frac{1}{a_i^\alpha} - \frac{1}{a_{i+1}a_i^{\alpha-1}} < \frac{1}{a_i^\alpha} - \frac{1}{a_{i+1}^\alpha} \Rightarrow x_n < \frac{1}{a_1^\alpha}$ vậy dãy $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

bị chặn trên do đó tồn tại $\lim_{n \to +\infty} x_n$.

Trường hợp 2. Nếu $0 < \alpha < 1$.

$\frac{a_{i+1} - a_i}{a_{i+1}a_i^\alpha} < \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{a_i^\alpha} - \frac{1}{a_{i+1}^\alpha}\right)(*)$ thật vậy $(*) \Leftrightarrow \alpha a_{i+1}^{\alpha-1}(a_{i+1} - a_i) < a_{i+1}^\alpha - a_i^\alpha$.

$\Leftrightarrow \frac{a_{i+1}^\alpha - a_i^\alpha}{a_{i+1} - a_i} > \alpha a_{i+1}^{\alpha-1} (**)$. Ta chứng minh (**).

Xét hàm số $f(x)=x^{\alpha}$ Trên đoạn $[a_i;a_{i+1}]$ rõ ràng hàm số thoả mãn điều kiện của định lí Lagrăng nên tồn tại số $c\in(a_i;a_{i+1})$ thoả mãn $f'(c)=\dfrac{a_{i+1}^{\alpha}-a_i^{\alpha}}{a_{i+1}-a_i}\Leftrightarrow \alpha c^{\alpha-1}=\dfrac{a_{i+1}^{\alpha}-a_i^{\alpha}}{a_{i+1}-a_i}\Rightarrow \alpha a_{i+1}^{\alpha-1}<\dfrac{a_{i+1}^{\alpha}-a_i^{\alpha}}{a_{i+1}-a_i}$ đpcm.

Từ đó ta có.

$\Rightarrow x_n<\dfrac{1}{\alpha a_1^{\alpha}}\Rightarrow$ dãy $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ bị chặn trên do đó tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.

Bài 8. Cho dãy số (x_n) được xác định bởi : $x_4=1$ và.

$x_{n+1}=x_n+1(n-2)+2(n-3)+3(n-4)+\cdots+(n-2)1,$ với mọi $n\ge 4$..

Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n}{n^4}$..

Hướng dẫn giải

Ta có: $1(n+2)+2(n-3)+3(n-4)+...(n-2).1$.

$=\left[(n-1)-1\right]+2\left[(n-1-2)\right]+3\left[(n-1)-3\right]+...+(n-2)\left[(n-1)-(n-2)\right]$.

$=(n-1)\left[1+2+3+...+(n-2)\right]-\left[1^2+2^2+3^2+...+(n-2)^2\right]$.

$=(n-1).\dfrac{(n-2)(n-1)}{2}-\dfrac{(n-2)(n-1)(2m-3)}{6}=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

Do đó ta suy ra : $x_{n+1}=x_n+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}=x_n+C_n^3$ $(*)$.

Ta chứng minh $x_n=C_n^4$. Thật vậy với $n=4$, ta có $x_4=1=C_4^4$.

Giả sử với $n\ge 4$ ta có : $x_n=C_n^4$.

Ta có : $x_{n+1}=x_n+C_n^4$ theo (*) hay $x_{n+1}=x_n+C_n^3=C_n^4+C_n^3=C_n^4$ trong.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n}{n^4}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n!}{4!(n-4)!n^4}=\dfrac{1}{6}$..

Bài 9. Cho hàm số $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ thỏa mãn điều kiện $f(3x)\ge f\left(\dfrac{1}{2}f(2x)\right)+2x$ với mọi $x>0$. Chứng minh rằng $f(x)\ge x$ với mọi $x>0$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $f(3x)\ge f\left(\frac{1}{2}f(2x)\right)+2x$ (1).

Từ (1) suy ra $f(x)\ge f\left(\frac{1}{2}f\left(\frac{2x}{3}\right)\right)+\frac{2x}{3}\Rightarrow f(x)>\frac{2x}{3},\ \forall x>0$ (2).

Khi đó $f(x)\ge f\left(\frac{1}{2}f\left(\frac{2x}{3}\right)\right)+\frac{2x}{3}>\frac{2}{3}.\frac{1}{2}f\left(\frac{2x}{3}\right)+\frac{2x}{3}=\frac{1}{3}f\left(\frac{2x}{3}\right)+\frac{2x}{3}>\left(\frac{4}{27}+\frac{2}{3}\right)x$.

Xét dãy (a_n), $(n=1,2,\ldots)$ được xác định như sau: $a_1=\frac{2}{3}$ và $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n^2+\frac{2}{3}$.

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo n rằng với mỗi $n\in\mathbb{N}^*$ luôn có.

$f(x)>a_nx$ với $x>0$ (3).

Thật vậy, khi $n=1$ thì theo (2), ta có ngay (3).

Giả sử mệnh đề (3) đúng với $n=k$. Khi đó.

$f(x)\ge f\left(\frac{1}{2}f\left(\frac{2x}{3}\right)\right)+\frac{2x}{3}>\frac{1}{2}a_k.f\left(\frac{2x}{3}\right)+\frac{2x}{3}>\frac{1}{2}a_k.a_k.\frac{2x}{3}+\frac{2x}{3}$.

$=\frac{a_k^2+2}{3}.x=a_{k+1}.x$

Vậy (3) đúng với $n=k+1$.

Tiếp theo ta chứng minh $\lim a_n=1$. Thật vậy, ta thấy ngay $a_n<1\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Do đó: $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{3}(a_n-1)(a_n-2)>0$, suy ra dãy (a_n) tăng ngặt.

Dãy (a_n) tăng và bị chặn trên nên hội tụ. Đặt $\lim a_n=l$ thì $l=\frac{1}{3}l^2+\frac{2}{3}$ với $l\le 1$, suy ra $l=1$. Vậy $\lim a_n=1$.

Do đó từ (3) suy ra $f(x)\ge x$ với mỗi $x>0$ (đpcm).

Bài 10. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau đây.

1. $f(x+y)\le f(x)+f(y)$ với mọi $x,y\in\mathbb{R}$.

2. $f(x)\le e^x-1$ với mỗi $x\in\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

$f(x+0)\le f(x)+f(0)\Rightarrow f(0)\ge 0$ và bởi vì $f(0)\le e^0-1=0$ cho nên $f(0)=0$.

$f(x+(-x))\le f(x)+f(-x)\Rightarrow f(x)+f(-x)\ge 0$ (1).