CÁC DẠNG KHÁC

Bài 1. Tìm các giá trị thực của tham số m để dãy số $(x_n):\begin{cases} x_1=\sqrt{2016} \\ x_{n+1}=\dfrac{m}{1+x_n^2}\ \forall n\in N^* \end{cases}$ có giới hạn hữu hạn.

Hướng dẫn giải

*) $m>0\Rightarrow 0<x_n<m\ \ \forall n>1$.

Xét hàm số: $f(x)=\dfrac{m}{x^2+1}$ ta có $f'(x)=\dfrac{-2mx}{(x^2+1)^2}\Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên $(0;m)$.

Suy ra $(x_{2n}),(x_{2n+1})$ đơn điệu và bị chặn.

+ $0<m<\dfrac{2017}{\sqrt{2016}}\Rightarrow x_1>x_2,x_3\Rightarrow\begin{cases} x_1>x_3>x_5>...> \\ x_2<x_4<x_6<...< \end{cases}$.

$f(f(1))=\dfrac{4m}{m^2+4}\le 1, x_2=\dfrac{m}{2017}<1\Rightarrow x_{2n}<1\ \forall n\in N^*$.

Giả sử $\lim x_{2n}=a,\lim x_{2n+1}=b\Rightarrow a<1,\begin{cases} a(1+b^2)=m \\ b(1+a^2)=m \end{cases}(I)$.

$$(I)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=b \\ a^3+a=m \end{cases}(II) \\ \begin{cases} b=\dfrac{1}{a} \\ a+\dfrac{1}{a}=m \end{cases}(III) \end{array}\right..$$

Khi $o<m\le 2$ hệ (I) có nghiệm duy nhất $\Rightarrow (x_n)$ có giới hạn hữu hạn.

Khi $2<m<\dfrac{2017}{\sqrt{2016}}$ hệ (II) có nghiệm duy nhất lớn hơn 1 và hệ (III) có nghiệm thỏa mãn $a\ne b$. Do đó $\Rightarrow \lim x_{2n}\ne\lim x_{2n+1}\Rightarrow (x_n)$ không có giới hạn.

$+\dfrac{2017}{\sqrt{2016}}\le m<2017\sqrt{2016}\Rightarrow x_1>x_2, x_1\le x_3\Rightarrow\begin{cases} x_1\le x_3\le x_5\le ... \\ x_2\ge x_4\ge x_6\ge ... \end{cases}$.

$\Rightarrow \lim x_{2n}<\lim x_{2n+1}\Rightarrow (x_n)$ không có giới hạn.

$+m=2017\sqrt{2016}\Rightarrow x_n=\sqrt{2016}\ \ \forall n\in N^*\Rightarrow 1imx_n=\sqrt{2016}$.

$+m > 2017\sqrt{2016} \Rightarrow x_1 < x_2, x_1 > x_3 \Rightarrow \begin{cases} x_1 > x_3 < x_5 < ... \\ x_2 < x_4 < x_6 < ... \end{cases}$.

$\Rightarrow \lim x_{2n} > \lim x_{2n+1} \Rightarrow (x_n)$ không có giới hạn.

*) $m < 0$ tượng tự ta có $0 < m \le 2$ và $m = -2017\sqrt{2016}$.

Bài 2. Cho số thực a, xét dãy số $(x_n)_{n\ge1}$ được xác định bởi $x_1 = a$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n^3 - 6x_n - 6}{3x_n^2 + 9x_n + 7}, n = 1, 2, ...$

Tìm tất cả các giá trị của a để dãy số có giới hạn hữu hạn, tìm giới hạn đó?.

Hướng dẫn giải

Với $a = -1$ thì $x_n = -1, \forall n \ge 1$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -1$.

Với $a \ne -1$ thì $x_n + 1 = \dfrac{(x_{n-1}+1)^3}{3x_{n-1}^2 + 9x_{n-1} + 7}$, $x_n + 2 = \dfrac{(x_{n-1}+2)^3}{3x_{n-1}^2 + 9x_{n-1} + 7}, \forall n \ge 2$.

Do đó $\dfrac{x_n + 2}{x_n + 1} = \left(\dfrac{x_{n-1}+2}{x_{n-1}+1}\right)^3 = ...\left(\dfrac{a+2}{a+1}\right)^{3^{n-1}}, \forall n \ge 1$.

Từ đó, tính được $x_n = \dfrac{2(a+1)^{3^{n-1}} - (a+2)^{3^{n-1}}}{(a+2)^{3^{n-1}} - (a+1)^{3^{n-1}}}, \forall n \ge 1$,.

Kết luận + $a < -\dfrac{3}{2} \Rightarrow |a+1| > |a+2| \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -2$.

$+a > -\dfrac{3}{2} \Rightarrow |a+1| < |a+2| \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -1$.

$+a = -\dfrac{3}{2} \Rightarrow x_n = -\dfrac{3}{2}, \forall n \ge 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\dfrac{3}{2}$..

Bài 3. Cho hai dãy số dương $(a_n)_{n\ge0}, (b_n)_{n\ge0}$ xác định bởi: $a_0 = \sqrt{3}, b_0 = 2$ và $\begin{cases} a_n + b_n = \dfrac{1+a_{n+1}}{1-a_{n+1}} \\ a_n^2 + 1 = b_n^2 \end{cases}$.

Với mọi $n = 0, 1, 2, ...$ Chứng minh rằng hai dãy trên hội tụ và tìm giới hạn của chúng.

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh bằng quy nạp $a_n = \tan\dfrac{\pi}{3.2^n}, b_n = \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{3.2^n}}, n = 0, 1, 2, ...$ (*). Thật vậy.

Với $n = 0$, ta có $a_0 = \sqrt{3} = \tan\dfrac{\pi}{3} = \tan\dfrac{\pi}{3.2^0}, b_0 = 2 = \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{3.2^0}}$, vậy (*) đúng.

Với $n=1$, ta có $a_1=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan\frac{\pi}{6}=\tan\frac{\pi}{3.2^1}, b_1=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3.2^1}}$, vậy $(*)$ đúng.

Giả sử khẳng định đúng đến $n=k, k\ge 1$, tức là $a_n=\tan\frac{\pi}{3.2^n}, b_n=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3.2^n}}$.

Ta chứng minh $a_{n+1}=\tan\frac{\pi}{3.2^{n+1}}, b_{n+1}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3.2^{n+1}}}$. Thật vậy. Từ (1) ta có.

$$\frac{1+a_{n+1}}{1-a_{n+1}}=\frac{\sin\frac{\pi}{3.2^n}+1}{\cos\frac{\pi}{3.2^n}}=\frac{2\sin\frac{\pi}{3.2^{n+1}}\cos\frac{\pi}{3.2^{n+1}}+\sin^2\frac{\pi}{3.2^{n+1}}+\cos^2\frac{\pi}{3.2^{n+1}}}{\cos^2\frac{\pi}{3.2^{n+1}}-\sin^2\frac{\pi}{3.2^{n+1}}}=$$

$$=\frac{\left(\sin\frac{\pi}{3.2^{n+1}}+\cos\frac{\pi}{3.2^{n+1}}\right)^2}{\left(\cos\frac{\pi}{3.2^{n+1}}-\sin\frac{\pi}{3.2^{n+1}}\right)\left(\cos\frac{\pi}{3.2^{n+1}}+\sin\frac{\pi}{3.2^{n+1}}\right)}$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{3.2^{n+1}}+\cos\frac{\pi}{3.2^{n+1}}}{\cos\frac{\pi}{3.2^{n+1}}-\sin\frac{\pi}{3.2^{n+1}}}=\frac{\tan\frac{\pi}{3.2^{n+1}}+1}{1-\tan\frac{\pi}{3.2^{n+1}}}\Rightarrow a_{n+1}=\tan\frac{\pi}{3.2^{n+1}}$$

Khi đó từ (2), suy ra $b_{n+1}^2=a_{n+1}^2+1=\tan^2\frac{\pi}{3.2^{n+1}}+1=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{3.2^{n+1}}}\Rightarrow b_{n+1}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3.2^{n+1}}}$.

Như vậy theo nguyên lý quy nạp thì $a_n=\tan\frac{\pi}{3.2^n}, b_n=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3.2^n}}, n=0,1,2,...$.

Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\tan\frac{\pi}{3.2^n}=\tan 0=0; \lim\limits_{n\to+\infty} b_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3.2^n}}=\frac{1}{\cos 0}=1$.

Kết luận: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0; \lim\limits_{n\to+\infty} b_n=1$.■.

Bài 4. Cho dãy số (u_n) xác định như sau : $\begin{cases} u_1=2014 \\ u_{n+1}=u_n^2+(1-2a)u_n+a^2;\forall n=1,2,... \end{cases}$. Tìm điều kiện của a để dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n\to+\infty$ và tính giới hạn đó.

Hướng dẫn giải

Ta có: $u_{n+1}-u_n=(u_n-a)^2\ge 0\Rightarrow u_{n+1}\ge u_n;\ \forall n=1,2,3,...$.

* Suy ra dãy số (u_n) tăng knn ; từ đó dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi dãy bị chặn trên.

Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L\ (L \in \mathbb{R})$, thì chuyển qua giới hạn hệ thức $u_{n+1} = u_n^2 + (1-2a)u_n + a^2$ ta có: $L = L^2 + (1-2a)L + a^2 \Leftrightarrow L = a$.

- Nếu có chỉ số $k \in \mathbb{N}^*$ mà $u_k > a$ thì $u_n > a;\ \forall n \ge k$ trái với kết quả $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L = a$.

Do đó: $u_k \le a$ với mọi $k = 1,2,...$ hay $u_n^2 - (1-2a)u_n + a^2 \le a,\ \forall n = 1,2,3,...$.

$\Leftrightarrow a-1 \le u_1 \le a \Leftrightarrow a-1 \le 2014 \le a$.

* Đảo lại: Nếu $a-1 \le 2014 \le a \Rightarrow a-1 \le u_1 \le a$.

$\Rightarrow (u_1 - a + 1)(u_1 - a) \le 0 \Rightarrow u_1^2 + (1-2a)u_1 + a^2 - a \le 0 \Rightarrow u_2 \le a$.

và $u_1 \le u_2 \Rightarrow a-1 \le u_2 \le a$.

Bằng quy nạp ta chứng minh được $a-1 \le u_n \le a,\ \forall n = 1,2,3,...$ (H/s trình bày ra).

Như vậy dãy (u_n) tăng knn, bị chặn trên bởi a, do đó dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn.

Kết luận: Với điều kiện $a-1 \le 2014 \le a$ thì dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.

Bài 5. Cho dãy số (x_n) thỏa mãn $\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = \dfrac{2x_n^3}{3x_n^2 - 1}, n = 1,2,3,... \end{cases}$. Tìm a sao cho dãy số xác định và có giới hạn hữu hạn.

Hướng dẫn giải

Đặt $f(x) = \dfrac{2x^3}{3x^2-1}, x \ne \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Ta có $x_1 = a, x_{n+1} = f(x_n)$. Ta có.

$$f'(x) = \frac{6x^4 - 6x^2}{(3x^2-1)^2} = \frac{6x^2(x^2-1)}{(3x^2-1)^2}.$$

Bảng biến thiên.

Ta xây dựng dãy số như sau $a_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{3},\ a_0 = f(a_1),\ a_1 = f(a_2),\ a_2 = f(a_3),...$.

Nhận thấy $a_1, a_3, ..., a_{2k+1}, ... < 0;\ a_0, a_2, ..., a_{2k}, ... > 0$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $a_1 \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3};0\right), a_2 = f^{-1}(a_1) \in \left(0;\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

$\Rightarrow a_2 < a_0 \Rightarrow f(a_3) < f(a_1) \Rightarrow a_3 > a_1 \Rightarrow f(a_4) > f(a_2) \Rightarrow a_4 < a_2$.

Bằng quy nạp ta chứng minh được dãy (a_{2k}) đơn điệu giảm, bị chặn bởi 0 và $\frac{\sqrt{3}}{3}$, dãy (a_{2k+1}) đơn điệu tăng và bị chặn bởi $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ và 0. Từ đó tồn tại $\lim\limits_{k\to+\infty}(a_{2k}), \lim\limits_{k\to+\infty}(a_{2k+1})$.

Ta có $a_n = f(a_{n+1}) = f(f(a_{n+2})) \Rightarrow \lim a_n = f(f(\lim a_{n+2})) \Rightarrow l = f(f(l))$.

$$\Leftrightarrow l = \frac{2\left(\frac{2l^3}{3l^2-1}\right)^3}{3\left(\frac{2l^3}{3l^2-1}\right)^2 - 1} \Leftrightarrow l\left(l^2 - \frac{1}{5}\right)(l^2-1)(20l^4 - 15l^2 + 5) = 0 \ (*).$$

(do $f(x) = \frac{2x^3}{3x^2-1}, x \neq \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ liên tục trên $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};0\right)$, $\left(0;\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ và $l = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$).

Xét $0 < l < \frac{\sqrt{3}}{3}$. Ta có $f(f(a_n)) - a_n = a_{n+2} - a_n < 0$ nên $(*) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} < a_n < \frac{\sqrt{3}}{3}$. Vậy $l = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Tương tự ta chứng minh được dãy (a_{2k+1}) đơn điệu tăng, hội tụ về $-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

+) Nếu $a = \frac{\sqrt{5}}{5}$ thì $x_2 = -x_1, x_3 = -x_2$ nên ta có dãy $x_n = \begin{cases} \frac{\sqrt{5}}{5} & \text{nếu n chẵn} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$.

Dãy này không hội tụ.

+) Nếu $a = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ ta có dãy $x_n = \begin{cases} -\frac{\sqrt{5}}{5} & \text{nếu n chẵn} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$.

Dãy này không hội tụ.

+) Nếu tồn tại n sao cho $a = a_n$ thì ta có.

$$x_1 = a_n \Rightarrow f(x_1) = f(a_n) \Leftrightarrow x_2 = a_{n-1} \Rightarrow f(x_2) = f(a_{n-1}) \Rightarrow x_3 = a_{n-2}, \ldots, x_{n+1} = a_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Khi đó không tồn tại x_{n+2}.

Vậy nếu $a = a_n$ thì dãy không xác định.

+) Nếu $0 < a < \frac{\sqrt{5}}{5}$ thì hai dãy con $(x_{2k}),(x_{2k+1})$ cùng hội tụ về 0 nên giới hạn của dãy là 0.

Nếu $a > 1$ thì $x_2 = f(a) < a = x_1$ và hàm số đồng biến nên dãy đơn điệu giảm, bị chặn dưới bởi 1. Khi đó dãy hội tụ về 1.

+) Nếu $\frac{\sqrt{3}}{3} < a < 1$ thì $x_2 = f(a) > 1$. Khi đó ta có thể khảo sát dãy từ x_2. Trường hợp này dãy đơn điệu giảm và bị chặn dưới bởi 1 nên hội tụ về 1.

+) Nếu a = 1 thì $x_n = 1 \ \forall n$ nên dãy hội tụ về 1.

+) Nếu $\frac{\sqrt{5}}{5} < a < \frac{\sqrt{3}}{3}$ ta có $\frac{\sqrt{5}}{5} = \lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n}$ và $a_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ nên tồn tại a_{2k}, a_{2k+2} sao cho $a_{2k+2} < a < a_{2k}$

(Thật vậy, các số hạng của (a_{2k}) không thể cùng nằm bên trái a do $a_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, chúng cũng không thể cùng nằm bên phải a do nếu thế thì $a < a_{2n} < \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n} \ne \frac{\sqrt{5}}{5}$).

Vậy $a \in (a_{2k+2}; a_{2k}) \Rightarrow x_2 \in (a_{2k}; a_{2k-2}), \ldots, x_{2k} \in (a_2; a_0), x_{2k+2} \in (a_0; +\infty) \Rightarrow x_{2k+2} > \frac{\sqrt{3}}{3}$. Khi đó ta lại có dãy đơn điệu giảm, bị chặn dưới bởi 1 nên hội tụ về 1.

Vì f(x) là hàm lẻ nên trường hợp $-\frac{\sqrt{5}}{5} < a < 0,\ -1 < a < -\frac{\sqrt{3}}{3},\ a < -1,\ a = -1$ ta khảo sát tương tự.

Kết luận: Điều kiện để dãy xác định và có giới hạn hữu hạn là.

$a \ne \pm\frac{\sqrt{3}}{3};\ a \ne \pm\frac{\sqrt{5}}{5};\ a \ne a_n, \forall n = 1,2,3,\ldots$.

Bài 6. Cho dãy số $\{a_n\}$ xác định bởi $0 < a_1 \ne 1$ và $a_{n+1} = a_n + \frac{n}{a_n}, \forall n \ge 1$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - n) = 0$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có $a_2 = a_1 + \frac{1}{a_1} > 2$ (do $a_1 \ne 1$).

Nhận xét: $a_n > n, \forall n \ge 2$.

Ta sẽ chứng minh nhận xét này bằng phương pháp quy nap.

Thật vậy.

□Với $n=2$ ta có $a_2>2$ (đúng).

□Giả sử $a_k>k$.

□Ta có $a_{k+1}=a_k+\frac{k}{a_k}>k+1 \Leftrightarrow a_k^2+k>(k+1)a_k$.

$\Leftrightarrow a_k^2-(k+1)a_k+k>0$.

$\Leftrightarrow (a_k-1)(a_k-k)>0$ (đúng).

Suy ra $a_{k+1}>k+1$.

Như vậy $a_n>n, \forall n\ge 2$ (điều phải chứng minh).

Mặt khác, $a_{n+1}-(n+1)=a_n+\frac{n}{a_n}-(n+1)=a_n-n+\frac{n}{a_n}-1$.

$=\frac{a_n^2-(n+1)a_n+n}{a_n}=\frac{(a_n-n)(a_n-1)}{a_n}$ (1).

Áp dụng (1) ta có.

$$\begin{cases} a_3-3=\dfrac{(a_2-2)(a_2-1)}{a_2} \\ a_4-4=\dfrac{(a_3-3)(a_3-1)}{a_3} \\ \quad ... \\ a_{n+1}-(n+1)=\dfrac{(a_n-n)(a_n-1)}{a_n} \end{cases}.$$

Suy ra $(a_3-3)(a_4-4)...(a_{n+1}-(n+1))=\frac{(a_2-2)(a_2-1)(a_3-3)(a_3-1)...(a_n-n)(a_n-1)}{a_2a_3...a_n}$.

$\Leftrightarrow a_{n+1}-(n+1)=\frac{(a_2-2)(a_2-1)(a_3-1)...(a_n-1)}{a_2a_3...a_n}$.

$\Leftrightarrow a_{n+1}-(n+1)=(a_2-2)\left(1-\frac{1}{a_2}\right)\left(1-\frac{1}{a_3}\right)...\left(1-\frac{1}{a_n}\right)$.

$\Leftrightarrow a_{n+1}-(n+1)=(a_2-2)\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{a_i}\right)$ (2).

Ta lại có $1-\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}}=\dfrac{a_n+\dfrac{n}{a_n}-1}{a_{n+1}}<\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ (do $a_n>n\Rightarrow \dfrac{n}{a_n}<1$).

Suy ra $\prod\limits_{i=2}^{n}\left(1-\dfrac{1}{a_i}\right)<\dfrac{a_1}{a_2}.\dfrac{a_2}{a_3}...\dfrac{a_{n-1}}{a_n}=\dfrac{a_1}{a_n}$.

Từ (2) $\Rightarrow a_{n+1}-(n+1)<(a_2-2).\dfrac{a_1}{a_n}<(a_2-2).\dfrac{a_1}{n}$ (vì $a_n>n$).

$\Rightarrow 0<a_{n+1}-(n+1)<(a_2-2).\dfrac{a_1}{n}$.

Mà $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1}{n}=0\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_2-2)\dfrac{a_1}{n}=0$.

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+1}-(n+1)\right)=0$ hay $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-n)=0$.

Bài 7. Cho $p\in\mathbb{N}^*$, $a>0$ và $a_1>0$. Xét dãy số (a_n) được xác định bởi: $a_{n+1}=\dfrac{1}{p}\left[(p-1)a_n+\dfrac{a}{a_n^{p-1}}\right]$, với mọi $n\ge 1$. Chứng minh dãy số (a_n) có giới hạn hữu hạn khi $n\to+\infty$. Hãy tìm giới hạn đó.

Hướng dẫn giải

* Theo bất đẳng thức Côsi ta có:.

$$a_{n+1}=\frac{1}{p}\left(\underbrace{a_n+a_n+...+a_n}_{p-1}+\frac{a}{a_n^{p-1}}\right)\ge p.\frac{1}{p}\sqrt[p]{a_n^{p-1}.\frac{a}{a_n^{p-1}}}=\sqrt[p]{a}\text{, với } \forall\ n\ge 1. \ (1).$$

Do đó:
$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=\frac{1}{p}\left[(p-1)a_n+\frac{a}{a_n^{p-1}}\right]-a_n\\&=-\frac{a_n}{p}+\frac{a}{p.a_n^{p-1}}=-\frac{a_n^p-a}{p.a_n^{p-1}}\le 0;\ \forall\ n\ge 2\end{aligned} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có dãy số (a_n) giảm và bị chặn dưới bởi $\sqrt[p]{a}$;.

suy ra dãy số (a_n) có giới hạn hữu hạn khi $n\to+\infty$..

Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=L$; ($L\ge\sqrt[p]{a}$).

Chuyển qua giới hạn hệ thức $a_{n+1}=\dfrac{1}{p}\left[(p-1)a_n+\dfrac{a}{a_n^{p-1}}\right]$.

ta có phương trình $L=\dfrac{1}{p}\left[(p-1)L+\dfrac{a}{L^{p-1}}\right]\Leftrightarrow pL^p=(p-1)L^p+a$.