CHUYÊN ĐỀ DÃY SỐ
CÁC DẠNG KHÁC

Bài 1.

a/Tìm $p \in N^*$ sao cho hệ $\begin{cases} \sum_{i=1}^{p} x_i = 4 \\ \sum_{i=1}^{p} x_1^{-1} = 4 \\ x_i > 0, \forall i \in \overline{1,p} \end{cases}$ có nghiệm.

b/Với p tìm được ở câu a/,hãy xác định tập hợp tất cả các giá trị của tổng:.

$\sum_{i=1}^{p} \frac{a_i}{1-a_i^2}$ với $a_i > 0$ và $\sum_{i=1}^{p} a_i^2 = 1$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu a.

Do: $16 = \left(\sum_{i=1}^{p} x_i\right).\left(\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{x_i}\right) \geq p^2 \Rightarrow p \leq 4$.

$p = 4$:Khi đó: $x_i = 1, i \in \overline{1,4}$. Vậy hệ có nghiệm.

$p = 3$:Chọn $x_1 = 1$ và $\begin{cases} x_2 + x_3 = 3 \\ x_2.x_3 = 1 \end{cases}$ có nghiệm. Nên (x_1, x_2, x_3) là nghiệm của hệ.

$p = 2$: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1.x_2 = 1 \end{cases}$ có nghiệm. Nên (x_1, x_2) là nghiệm của hệ.

$p = 1$:Vô nghiệm.

Vậy hệ có nghiệm khi $p = 2, p = 3, p = 4$.

Câu b

Ta có: $f(a_1, a_2, ..., a_p) = \sum_{i=1}^{p} \frac{a_i^2}{a_i(1-a_1^2)}$.

Xét hàm: $g(x) = x(1-x^2), 0 < x < 1; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Ta có: $\max\limits_{(0;1)} g(x) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Do đó: $f(a_1, a_2, ..., a_p) \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} \sum_{i=1}^{p} a_i^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi: $\frac{p}{3} = 1$ hay p = 3..

$p=2: f\left(a_1,a_2\right)=\frac{a_1}{a_2^2}+\frac{a_2}{a_1^2}\ge 2\frac{1}{\sqrt{a_1.a_2}}\ge 2\sqrt{2}$ vì $a_1^2+a_2^2=1$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a_1=a_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$

, $f(a_1,a_2)=\frac{a_1}{1-a_1^2}+\frac{\sqrt{1-a_1^2}}{a_1^2}$ liên tục trên $(0;1)$. Khi $a_1\to 0$ thì $f(a_1,a_2)\to+\infty$. Vậy $p=2$, tập giá trị là: $\left[2\sqrt{2};+\infty\right)$..

$p=3$: Chọn $a_1=\sqrt{1-2x}$; $a_2=\sqrt{x}$; $a_3=\sqrt{x}$, $0<x<\frac{1}{2}$ .Thỏa giả thiết:.

$a_1^2+a_2^2+a_3^2=1-2x+x+x=1$. $f(a_1,a_2,a_3)=\frac{\sqrt{1-2x}}{2x}+\frac{\sqrt{x}}{1-x}+\frac{\sqrt{x}}{1-x}=g(x)$ liên tục trên $(0;\frac{1}{2})$; $g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=+\infty$. Vậy tập giá trị là: $\left[\frac{3\sqrt{3}}{2};+\infty\right)$.

$p=4: f\left(a_1,a_2,...,a_p\right)>\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Chọn $a_1=\sqrt{1-2x}$; $a_2=\sqrt{x}$; $a_3=\sqrt{x}$, $a_4=\sqrt{x}$ thỏa giả thiết: $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2=1-3x+x+x+x=1$ với $0<x<\frac{1}{3}$;

$f(a_1,a_2,a_3,a_4)=\frac{\sqrt{1-2x}}{2x}+\frac{\sqrt{x}}{1-x}+\frac{\sqrt{x}}{1-x}+\frac{\sqrt{x}}{1-x}=g(x)$ liên tục trên $(0;\frac{1}{3})$; $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} g(x)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$; $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=+\infty$

.Tập giá trị là: $\left[\frac{3\sqrt{3}}{2};+\infty\right)$.

Bài 2. Kí hiệu H_n là tập hợp các đa thức bậc n dạng: $f(x)=x^n+\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i$, $a_i\in R$. Chứng minh:

$$\min_{f\in H_n}\left\{\max_{x\in[-1;1]}|f(x)|\right\}=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Xét đa thức Trêbưsép $T(x)=\cos(n.\arccos x)$.

Chứng minh $T(x)$ là đa thức bậc n có hệ tử bậc n là 2^{n-1}.

Chứng minh bằng quy nạp dựa vào công thức: $\cos nt+\cos(n-1)t=2\cos t.\cos(n-1)t$.

Do đó: $\frac{T(x)}{2^{n-1}}\in H_n$. Ta có $\max\left|\frac{T(x)}{2^{n-1}}\right|=\frac{1}{2^{n-1}}$. Nếu tồn tại $f(x)\in H_n$ sao cho $f(x)\le\frac{1}{2^{n-1}}$,.

$\forall x\in[-1;1]$. Lúc đó ta xét $g(x)=f(x)-\frac{T(x)}{2^{n-1}}$ đa thức bậc nhỏ hơn hay bằng $n-1$, $g(x)$ đổi dấu $n+1$ lần tại các điểm $\cos\frac{k\pi}{n}$, $k=\overline{0,n}$.

Do đó $\max f(x) \geq \frac{1}{2^{n-1}}$. Vậy $\min\limits_{f\in H_n}\left\{\max\limits_{x\in[-1;1]}|f(x)|\right\} = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Bài 3. Cho dãy số (x_n) không âm thỏa mãn $x_1 = 0$,

và $(n+1)^2 x_{n+1}^2 + (2^n+4)(n+1)x_{n+1} + 2^{n+1} + 2^{2n-2} = 9n^2x_n^2 + 36nx_n + 32$, $\forall n \geq 1$.

Chứng minh rằng x_n là số nguyên với mọi nguyên tố lớn hơn hoặc bằng 5.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Viết lại đẳng thức trong đầu bài về dạng $\left[(n+1)x_{n+1} + 2^{n-1} + 2\right]^2 = (3nx_n + 6)^2$.

Từ x_n không âm dẫn đến $(n+1)x_{n+1} + 2^{n-1} + 2 = 3nx_n + 6$, với mọi n.

Biến đổi về $(n+1)x_{n+1} - 2^n + 2 = 3(nx_n - 2^{n-1} + 2)$,.

Bài 4. Cho dãy số dương $\{x_n\}$ thoả mãn: $x_n + x_{n+1} > 2x_{n+2}$ với mọi số tự nhiên $n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ hội tụ.

Hướng dẫn giải

Đặt $y_n = \max\{x_n; x_{n+1}\}$..

Từ (1) và (2) suy ra $y_n \geq y_{n+1} > 0; \forall n \in \square^* \Rightarrow \exists a = \lim(y_n)$.

Với $\varepsilon > 0$ tuỳ ý, khi n đủ lớn, ta có $\varepsilon > y_n - a \geq 0$.

□Nếu $y_n > a$ thì $\varepsilon > y_n - a \geq x_n - a > 0$.

□Nếu $x_n \leq a$ thì $x_{n+1} < a \leq y_{n-1} = x_{n-1}$.

Mà $x_n + x_{n-1} > 2x_{n+1} > 2a \Rightarrow x_n + x_{n-1} > 2a \Rightarrow a > x_n > 2a - x_{n-1} > a - \varepsilon$..

Tóm lại, cả hai trường hợp đều dẫn đến $|x_n - a| < \varepsilon$.

Vậy dãy số $\{x_n\}$ hội tụ.

Bài 5. Cho phương trình $x^2 - \alpha x - 1 = 0$ với α là số nguyên dương. Gọi β là nghiệm dương của phương trình. Dãy số (x_n) được xác định như sau:.

$x_0 = \alpha$, $x_{n+1} = [\beta\, x_n]$, $n = 0,1,2,3,\dots$.

Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số tự nhiên n sao cho x_n chia hết cho α.

Hướng dẫn giải

Đầu tiên ta chứng minh β là số vô tỉ. Thật vậy, nếu β là số hữu tỉ thì β là số nguyên (do hệ số cao nhất của x^2 là 1) và β là ước của 1. Do đó $\beta = 1$ suy ra $\alpha = 0$, trái giả thiết.

Do đó $[\beta x_{n-1}] < \beta x_{n-1} < [\beta x_{n-1}] + 1$.

$\Leftrightarrow x_n < \beta x_{n-1} < x_n + 1$.

$\Rightarrow \frac{x_n}{\beta} < x_{n-1} < \frac{x_n}{\beta} + \frac{1}{\beta} \Rightarrow x_{n-1} - \frac{1}{\beta} < \frac{x_n}{\beta} < x_{n-1}$.

$\Rightarrow \left[\frac{x_n}{\beta}\right] = x_{n-1} - 1$ (1). Lại có $\beta^2 - \alpha\beta - 1 = 0$, suy ra $\beta = \alpha + \frac{1}{\beta}$.

$\Rightarrow \beta x_n = \alpha x_n + \frac{x_n}{\beta} \Rightarrow x_{n+1} = \left[\alpha x_n + \frac{x_n}{\beta}\right] = \alpha x_n + \left[\frac{x_n}{\beta}\right] = \alpha x_n + x_{n-1} - 1$ (do (1)).

Vậy $x_{n+1} \equiv x_{n-1} - 1 \pmod{\alpha}$. Từ đó bằng quy nạp ta có với mọi $k \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2k+1$, thì $x_{n+1} \equiv x_{n-(2k+1)} - (k+1) \pmod{\alpha}$ (2).

Chọn $k+1 = l\alpha$ $(l \in \mathbb{N}^*)$, $n+1 = 2l\alpha$, từ (2) ta có $x_{2l\alpha} \equiv x_0 - l\alpha = \alpha - l\alpha \equiv 0 \pmod{\alpha}$.

Vậy $x_{2l\alpha}$ chia hết cho α, $\forall l \in \mathbb{N}^*$..

Bài 6. Cho dãy (a_n) với n > 0 được xác định bởi:.

$$\begin{cases} a_1 = 1; a_2 = 2; a_3 = 6; a_4 = 12 \\ a_{n+4} = 2a_{n+3} + a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

a) Chứng minh a_n chia hết cho n với mọi giá trị nguyên dương của n.

b) Đặt $b_n = \frac{a_n}{n}$. Chứng minh tồn tại vô số số nguyên dương n để 2015 là một ước của b_n..

Hướng dẫn giải

a) Ta có $b_1 = 1;\ b_2 = 1;\ b_3 = 2;\ b_4 = 3$.

Dễ thấy $b_n = F_n$ với $n = 1;2;3;4$. Bằng quy nạp ta chứng minh dãy (b_n) trùng với dãy (F_n).

Thật vậy:.

Mệnh đề đúng với $n = 1;2;3;4$. Giả sử mệnh đề đúng đến $n+3$. Khi đó ta có:.

$(n+4)b_{n+4} = 2(n+3)F_{n+3} + (n+2)F_{n+2} - 2(n+1)F_{n+1} - nF_n$..

Dùng công thức của dãy Fibonaci : $F_{m+2} = F_{m+1} + F_m$ ta dễ dàng biến đổi vế phải thành $(n+4)F_{n+4}$.

suy ra $b_{n+4} = F_{n+4}$..

Vậy mệnh đề đúng với $n+4$, do đó nó đúng với mọi n nguyên dương.