Toán Tổ Hợp

Câu 1. Xếp 100 bạn học sinh thành hai hàng ngang. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một số bạn học sinh từ 100 học sinh ban đầu sao cho không có hai bạn nào đứng kề nhau được chọn. Hai bạn đứng kề nhau là hai bạn có số thứ tự liên tiếp trong cùng một hàng hoặc cùng số thứ tự ở hai hàng.

Hướng dẫn giải

Gọi số học sinh ban đầu là $2n$ và U_n là số cách chọn ra một số bạn xếp thành 2 hàng ngang thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ta bỏ đi một bạn học sinh ở đầu của một hàng, còn $2n-1$ người . Gọi V_n là số cách chọn ra một số bạn từ $2n-1$ người đó thỏa mãn yêu cầu bài toán. (0,5đ)

*) Xét số cách chọn từ $2n$ người

1	3					n
2	4					n

Xảy ra các trường hợp sau

+TH1: Bạn ở vị trí 1 được chọn. Khi đó bạn ở vị trí 2, 3 không được chọn.

Do đó có $V_{n-1}+1$ cách chọn (Thêm 1 cách không chọn ai cả từ $2n-1$ bạn)

+TH2: Bạn ở vị trí 2 được chọn. Tương tự có $V_{n-1}+1$ cách chọn

+TH3: Cả 2 bạn ở vị trí 1 và 2 không được chọn. Khi đó có U_{n-1} cách

Vậy ta có $U_n = U_{n-1} + 2V_{n-1} + 2$ (1) (1đ)

*)Xét số cách chọn từ $2n-1$ bạn

1	2					n
×						n

Xảy ra các trường hợp sau

+Th1: Bạn ở vị trí 1 được chọn.khi đó bạn ở vị trí 2 không được chọn . Vậy có $V_{n-1}+1$ cách

+Th2: Bạn ở vị trí 1 không được chọn . Có U_{n-1} cách

Vậy ta có $V_n = V_{n-1}+1 + U_{n-1}$ (2) (1đ)

Từ (1) và (2) ta tìm được $U_{n+1} = 2U_n + U_{n-1} + 2$ (0,5đ)

Từ đó suy ra $U_n = \dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1} - 2}{2}$ (0,5đ)

Với $n = 50$ ta có số cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán là

$$U_{50} = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{51} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{51} - 2}{2} \qquad (0{,}5đ)$$

Câu 2. Cho tập $X = \{1,2,3,...2015\}$, xét tất cả các tập con của X, mỗi tập hợp có 3 phần tử. Trong mỗi tập hợp con ta chọn số bé nhất. Tính trung bình cộng của các số được chọn.

Hướng dẫn giải

Xét $X = \{1,2,3...n\}$ và các tập con gồm r phần tử của $X\left(1 \le r \le n\right)$. Các tập hợp con của X có phần tử được chọn là $1,2...n - r + 1$ (có rất nhiều tập con có chung phần tử bé nhất).

Cách cấu tạo các tập hợp như sau:

Lấy $A \subset X \setminus \{1\}$, A có $r - 1$ phần tử, thì $\{1\} \cup A$ là tập hợp có r phần tử trong đó số 1 là phần tử bé nhất. Vậy có:

+ $C_{(n-1)}^{(r-1)}$ tập con có số bé nhất là 1.

Tương tự ta có

+ $C_{(n-2)}^{(r-1)}$ tập con có r phần tử có số bé nhất là 2

....

+ C_{n-r+1}^{r-1} tập con có r phần tử có số bé nhất là $n - r + 1$

Suy ra trung bình cộng của số được chọn là

$$\frac{1}{C_n^r}\left(1C_{n-1}^{r-1} + 2C_{n-2}^{r-1} + ... + \left(n-r+1\right)C_{n-r+1}^{r-1}\right)$$

Ta chứng minh:

$$\frac{1}{C_n^r}\left(1C_{n-1}^{r-1} + 2C_{n-2}^{r-1} + ... + \left(n-r+1\right)C_{n-r+1}^{r-1}\right) = \frac{n+1}{r+1}$$

$$\left(1C_{n-1}^{r-1}+2C_{n-2}^{r-1}+...+\left(n-r+1\right)C_{n-r+1}^{r-1}\right)=\frac{n+1}{r+1}C_n^r=C_{n+1}^{r+1}$$

Gọi vế trái của (1) là S. Sử dụng công thức $C_{(m+1)}^r-C_m^r=C_m^{(r-1)}$ ta được:

$S=1(C_n^r-C_{(n-1)}^r)+2(C_{(n-1)}^r-C_{(n-2)}^r)+...+(n-r)(C_{(r+1)}^r-C_r^r)+(n-r+1)C_r^r$

Câu 3. Cho n là số nguyên dương. Cho $2n$ điểm trên phân biệt trên một đường tròn được gán giá trị bởi các số $1,2,..,2n$ (2 điểm khác nhau được gán giá trị khác nhau) theo một cách nào đó. Mỗi dây cung được nối 2 điểm trong các điểm trên và được gán giá trị bằng độ chênh lệch dương giữa 2 đầu mút. Chứng minh rằng ta có thể chọn được n dây cung đôi một không cắt nhau sao cho tổng giá trị của các dây cung bằng n^2

Bổ đề: Trên một được tròn có $2n$ điểm phân biệt. Người ta tô màu $2n$ điểm này bằng 1 trong 2 màu màu xanh đỏ sao cho có đúng n điểm được tô màu xanh và đúng n điểm được tô màu đỏ. 2 điểm khác màu nhau bất kì được nối bởi 1 dây cung. Khi đó với mỗi cách tô màu luôn tồn tại n dây cung mà không có 2 dây cung nào cắt nhau.

Chứng minh: Ta sẽ chứng minh bổ đề trên bằng quy nạp

Dễ thấy bổ đề đúng với $n=1$. Giả sử bổ đề đúng với mọi $n=m$. Xét $n=m+1$:

Do các điểm chỉ được tô bởi 1 trong 2 màu nên phải tồn tại 2 điểm kề nhau mà chúng được tô khác màu. Ta chọn dây cung có 2 đầu mút là 2 điểm này.

Theo giả thiết quy nạp tồn tại cách chọn m cung trong số các dây cung có đầu mút là các điểm trong $2m$ điểm còn lại mà không có 2 dây cung nào cắt nhau. Rõ ràng không có dây cung nào trong m dây cung này cắt dây cung vừa chọn phía trên.

Như vậy tồn tại cách chọn $m+1$ dây cung mà không có 2 dây cung nào cắt nhau, Bổ đề được chứng minh

----

Trở lại bài toán:

Ta tô các điểm có giá trị là $1,2,\ldots,n$ bằng màu đỏ, các điểm $n+1,\ldots,2n$ bằng màu xanh. Khi đó theo bổ đề tồn tại cách chọn n dây cung mà mỗi dây cung có 2 đầu mút được tô bởi 2 màu khác nhau và chúng đôi một không cắt nhau. Tổng giá trị của các dây cung sẽ bằng:

$(n+1)+(n+2)+?+2n-1-2-n-n=n^2$ (ĐPCM)

Câu 4. Cho số nguyên dương $n\geq 3$.

Chứng minh rằng tập hợp $X=\left\{1;\ 2;\ 3;...;\ n^2-n\right\}$ có thể chia thành hai tập con không giao nhau sao cho không tập nào trong chúng chứa n phần tử $a_1,a_2,...,a_n$ với $a_1<a_2<...<a_n$ và $a_k\leq\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$ với mọi $k=2;\ 3;\ ...,\ n-1$.

Đặt $S_k=\left\{k^2-k+1;\ k^2-k+2;\ ...;k^2\right\}$; $T_k=\left\{k^2+1;\ k^2+2;\ ...;k^2+k\right\}$

$S=\bigcup_{k=1}^{n-1}S_k;\quad T=\bigcup_{k=1}^{n-1}T_k$. Ta chứng minh $S,\ T$ là các tập con cần tìm của X

Dễ dàng thấy $S\cap T=\varnothing$ và $S\cup T=X$

Ta chứng minh phản chứng. Giả sử S gồm các phần tử $a_1,a_2,...,a_n$ với $a_1<a_2<...<a_n$ và $a_k\leq\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$ với mọi $k=2;\ 3;\ ...,\ n-1$.

Khi đó ta có $a_k - a_{k-1} \le a_{k+1} - a_k$, với mọi $k = 2; 3; ..., n-1$ (1)

Nếu $a_1 \in S_i$., ta có $i < n-1$ do $|S_{n-1}| < n$. Suy ra tồn tại ít nhất $n - |S_i| = n - i$ phần tử thuộc $\{a_1; a_2; ...; a_n\} \cap (S_{i+1} \cup S_{i+2} \cup ... \cup S_{n-1})$.

Áp dụng nguyên lý Dirichlet, tồn tại ít nhất một tập $S_j, (i < j < n)$ chứa ít nhất 2 phần tử trong số các phần tử $a_1, a_2, ..., a_n$.

Tức là tồn tại a_k sao cho $a_k, a_{k+1} \in S_j$ và $a_{k-1} \in S_1 \cup S_2 \cup ... \cup S_{j-1}$.

Khi đó ta có $a_{k+1} - a_k \le |S_j| - 1 = j - 1$; $a_k - a_{k-1} \ge |T_{j-1}| + 1 = j$

Suy ra $a_{k+1} - a_k < a_k - a_{k-1}$. Điều này, mâu thuẫn với (1)

Vậy S không chứa các phần tử $a_1, a_2, ..., a_n$ với $a_1 < a_2 < ... < a_n$ và $a_k \le \dfrac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$ với mọi $k = 2; 3; ..., n-1$.

Chứng minh tương tự ta cũng có tập T không chứa các phần tử $a_1, a_2, ..., a_n$ với $a_1 < a_2 < ... < a_n$ và $a_k \le \dfrac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$ với mọi $k = 2; 3; ..., n-1$.

Vậy S, T là các tập con cần tìm của X.

Câu 5. Trong mặt phẳng cho $2n+1$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ đường thẳng phân biệt sao cho không có hai đường nào song song hoặc vuông góc và không có ba đường nào đồng quy. Chúng cắt nhau tạo thành các tam giác. Chứng minh rằng số các tam giác nhọn tạo thành không vượt quá $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Gọi số tam giác tạo thành là $f(n)$. Ta phải chứng minh $f(n) \le \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $(1), \forall n \in \mathbb{N}^*$

Với ba đường thẳng bất kỳ trong số các đường thẳng đã cho luôn cắt nhau tạo thành một tam giác hoặc nhọn hoặc tù.

Gọi $g(n)$ là số các tam giác tù. Ta gọi một tam giác tạo bởi ba đường thẳng a, b, c nào đó là: "giả nhọn cạnh a" nếu các góc chung cạnh a của tam giác đó là các góc nhọn. Chọn một đường thẳng d nào đó và coi nó là trục hoành, các đường thẳng còn lại được chia làm hai tập: Tập T^+ là các đường thẳng với hệ số góc dương, Tập T^- là tập các đường thẳng với hệ số góc âm. Hai đường thẳng tạo với d một tam giác "giả nhọn" nếu một đường thẳng thuộc tập T^+ và một đường thẳng thuộc tập T^-.

Gọi p là số đường thẳng thuộc T^+ và q là số các đường thẳng thuộc tập T^-. Khi đó $p + q = 2n$ và số tam giác "giả nhọn cạnh d" là pq. Ta có $pq \le \left(\dfrac{p+q}{2}\right) = n^2$

Nhưng do d có thể là đường thẳng bất kỳ trong số $2n+1$ đường thẳng đã cho nên ta có số cặp (đường thẳng d ; tam giác "giả nhọn cạnh d") sẽ nhỏ hơn hoặc bằng $n^2(2n+1)$.

Trong cách tính trên mỗi tam giác nhọn được tính 3 lần (theo 3 cạnh) còn mỗi tam giác tù được tính 1 lần nên

$$3f(n) + g(n) \le n^2(2n+1) \quad (1)$$

Thế nhưng tổng số các tam giác là:

$$C_{2n+1}^3 = f(n) + g(n) = \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{6} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$2f(n) \le n^2(2n+1) - \left(f(n) + g(n)\right) = n^2(2n+1) - \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$$

hay $f(n) \le \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Câu 6. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho trong mặt phẳng tồn tại n đường thẳng mà mỗi đường thẳng cắt đúng 2014 đường khác

Xét n đường trong mặt phẳng, mà mỗi đường thẳng cắt đúng 2014 đường khác

Nếu *a* là một đường thẳng trong n đường và có đúng k đường song song với nó $(0 \le k < n)$. Cho *b* là đường thẳng bất kỳ cắt *a*, khi đó *b* cắt tất cả các đường không song song với *a* và *b* với số giao điểm bằng số giao điểm của *a* với các đường thẳng đó đồng thời *b* cắt các đường thẳng song song với *a* mà mỗi đường thẳng cắt đúng 2014 đường khác

Suy ra có đúng k đường song song với *b*.

Vậy n đường được chia thành S nhóm, mỗi nhóm gồm $k+1$ đường thẳng song song với nhau

=> Số giao điểm của mỗi đường với các đường khác là $(k+1)(S-1) = 2014$

Mà 2014 = 2.19.53 và $k+1$ là ước nguyên dương của 2014

=> $(k+1) \in \{1;\ 2;\ 19;\ 53;\ 38;\ 106;\ 1007;\ 2014\}$

$n = (k+1)S = 2014 + (k+1)$ => $n \in$ {2015; 2016; 2033; 2067; 2120; 2510; 3021; 4028}

Câu 7. Trên bàn cờ 10 x 10 người ta viết các số từ 1 đến 100. Mỗi hàng chọn ra số lớn thứ ba. Chứng minh rằng tồn tại một hàng có tổng các số trong hàng đó nhỏ hơn tổng các số lớn thứ ba được chọn.

Sắp xếp thứ tự của 10 số lớn thứ ba của các hàng là $a_1 > a_2 > ... > a_{10}$. Ta thấy tối đa là 20 số có thể lớn hơn a_1 (là các số lớn thứ nhất và thứ hai ở mỗi hàng).

Vì vậy $a_1 \ge 80$. Tương tự có tối đa 28 số có thể lớn hơn a_2. Vì vậy $a_2 \ge 72$. Từ đó

$$a_1 + a_2 + ... + a_{10} \ge 80 + 72 + (a_{10} + 7) + (a_{10} + 6) + ... + a_{10} = 8a_{10} + 180.$$

Trong khi đó, tổng các số ở hàng chứa a_{10} không lớn hơn

$100 + 99 + a_{10} + (a_{10} - 1) + ... + (a_{10} - 7) = 8a_{10} + 171.$

Do $8a_{10} + 171 < 8a_{10} + 180$ nên hàng chứa a_{10} là hàng thỏa mãn yêu cầu.

Câu 8. Cho tập hợp X có 2016 phần tử. Chọn ra 64 tập con X_1, X_2, ..., X_{64} của tập X (mỗi tập con đều chứa nhiều hơn 1008 phần tử).
Chứng minh tồn tại tập con A của X có số phần tử không vượt quá 6 mà $A \cap X_i \neq \varnothing$, với $i = \overline{1,64}$.

(Chuyên Thái Bình)

Lời giải

Tổng số phần tử trong 64 tập con lớn hơn $64.1008 = 32.2016$. Vì vậy tồn tại một phần tử a của tập X thuộc ít nhất 33 tập con, giả sử là X_1, X_2, …, X_{33}.

Xét 31 tập con còn lại, lý luận tương tự suy ra tồn tại một phần tử b của tập X thuộc ít nhất 16 tập con, giả sử là X_{34}, X_{35}, …, X_{49}.

Xét 15 tập con còn lại, lý luận tương tự suy ra tồn tại một phần tử c của tập X thuộc ít nhất 8 tập con, giả sử là X_{50}, X_{51}, …, X_{57}.

Xét 7 tập con còn lại, lý luận tương tự suy ra tồn tại một phần tử d của tập X thuộc ít nhất 4 tập con, giả sử là X_{58}, X_{59}, X_{60}, X_{61}.

Xét 3 tập con còn lại, lý luận tương tự suy ra tồn tại một phần tử e của tập X thuộc ít nhất 2 tập con, giả sử là X_{62}, X_{63}.

Với tập X_{64} còn lại ta lấy một phần tử f.

Như vậy tập con A chứa các phần tử a, b, c, d, e, f thỏa mãn bài toán.

Suy ra đpcm.

Câu 9. Những ô của hình vuông kích thước 7×7 được tô bằng hai màu. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 21 hình chữ nhật với đỉnh cùng màu và các cạnh song song với các cạnh của hình vuông.

Giải:

Ta cho màu được tô là trắng và đen. Lấy một hàng bất kỳ, ta giả sử tồn tại k ô đen và $7 - k$ ô trắng. Khi đó tồn tại $C_k^2 + C_{7-k}^2 = k^2 - 7k + 21 \geq 9$

Cặp ô cùng màu. Vậy tồn tại ít nhất 7.9 = 63 cặp ô cùng màu trên cùng hàng.

Tiếp theo tồn tại $C_7^2 = 21$ cặp cột. Suy ra tồn tại 21.2 = 42 tổ hợp của màu và cặp cột.

Với tổ hợp $i = \overline{1;24}$, giả sử tồn tại ji cặp trong cùng một tổ hợp, thì tồn tại ít nhất ji – 1 hình chữ nhật cho tổ hợp này. Vì tổng của ji ít nhất là 63 nên tồn tại ít nhất $\sum_{i=1}^{42}(ji - 1) \geq 63 - 42 = 21$

Vậy tồn tại ít nhất 21 hình chữ nhật thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Câu 10. *Cho tập hợp $A=\{1;2;...;2013\}$. Cần phải loại khỏi A ít nhất bao nhiêu phần tử để tập hợp còn lại có tính chất: Không phần tử nào bằng tích của hai phần tử khác.*
Lời giải

Loại khỏi A tập hợp $\{2;3;...;44\}$, tập này có 43 phần tử. Khi đó tập còn lại là $\{1;45;46;...;2012;2013\}$. Rõ ràng tập này thỏa mãn yêu cầu: Không có phần tử nào là tích của hai phần tử khác. 1.0 đ

Ta sẽ chứng minh mọi cách tách khỏi A một tập hợp có nhiều nhất 42 phần tử đều không thỏa mãn yêu cầu đề bài. 0.5 đ

Thật vậy xét các bộ ba sau (43 bộ ba):

2, 87, 2.87

3, 86, 3.86

4, 85, 4.85

…………

44, 45, 44.45

Xét hàm số $f(x)=x(89-x)$ với $2\le x\le 44$. Ta có $f'(x)=89-2x>0,\forall 2\le x\le 44$. Vậy f là hàm đồng biến khi $2\le x\le 44$. Suy ra

$f(2)<f(3)<...<f(44)\Rightarrow 2.87<3.86<...<44.45$.

Dễ thấy $2<3<...<44<45<46<...<87<2.87<3.86<...<44.45$. Vì $44.45=1980<2013$ nên toàn bộ các phần tử của 43 bộ ba đều là khác nhau và đều nằm trong tập hợp A.

Vì ta tách ra khỏi A tối đa 42 phần tử, nên phần còn lại của A (sau khi tách) phải có ít nhất một bộ ba nói trên. Vậy mọi cách tách như thế không thỏa mãn yêu cầu đầu bài. 2.0 đ

Kết luận: Số phần tử ít nhất cần tách khỏi A là 43 phần tử. 0.5 đ

Câu 11. Trên bảng ô vuông cố định có kích thước 3×3 người ta xếp một số viên sỏi sao cho mỗi ô vuông có nhiều nhất một viên sỏi. Mỗi cách xếp sỏi được tính điểm như sau, nếu tổng số sỏi trên một hàng (hoặc trên một cột hoặc trên một trong hai đường chéo) là một số lẻ thì được tính 1 điểm. Bảng không có sỏi ứng với 0 điểm, bảng xếp kín 9 viên sỏi ứng với 8 điểm.

a) Tồn tại hay không cách xếp sỏi sao cho ô chính giữa bảng không có sỏi và số điểm tương ứng với cách xếp đó là 8.

b) Chứng minh rằng số cách xếp sỏi với điểm số là một số chẵn bằng số cách xếp sỏi với điểm số là một số lẻ.