BÀI TẬP ÔN HSG TOÁN 11 – SỐ HỌC

Câu 1: Một số có 4 chữ số là số chính phương và có tính chất: Nếu tất cả các chữ số của nó cùng trừ đi một số thì cũng được một số có 4 chữ số cũng là số chính phương. Tìm tất cả các số có 4 chữ số thỏa mãn tính chất nêu trên.

Hướng dẫn giải.

Gọi số cần tìm là $\overline{abcd}$ theo giả thiết của đề bài ta có.

$$\begin{cases} \overline{abcd} = A^2 \\ \overline{(a-k)(b-k)(c-k)(d-k)} = B^2 \end{cases}.$$

Gọi số cần tìm là $\overline{abcd}$ theo giả thiết của đề bài ta có.

$$\begin{cases} \overline{abcd} = A^2 \\ \overline{(a-k)(b-k)(c-k)(d-k)} = B^2 \end{cases}.$$

Mặt khác do A, B là các số lẻ nên chỉ $k = 1,3$ là thích hợp.

Nếu $k = 1$ thì $A_1 = 3136 = 56^2, B_1 = 2025 = 45^2$.

Nếu $k = 3$ thì $A_2 = 4489 = 67^2; B_2 = 1156 = 34^2$.

Vậy các số cần tìm là $3136; 4489$

Ta có:.

$$A^2 - B^2 = (1000a + 100b + 10c + d) - [(1000)(a-k) + 100(b-k) + 10(c-k) + (d-k)]$$

$$\Rightarrow A^2 - B^2 = 1111k = 11.101k \Leftrightarrow (A-B)(A+B) = 11.101k.$$

Do A^2, B^2 là những số có 4 chữ số nên $1000 \le A^2, B^2 \le 9999 \Rightarrow 32 \le A, B \le 99$.

Suy ra $\begin{cases} 64 < A+B < 200 \\ 0 < A-B < 67 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B = 101 \\ A-B = 11k \end{cases}$.

mặt khác do A, B là các số lẻ nên chỉ $k = 1,3$ là thích hợp.

Nếu $k = 1$ thì $A_1 = 3136 = 56^2, B_1 = 2025 = 45^2$.

Nếu $k = 3$ thì $A_2 = 4489 = 67^2; B_2 = 1156 = 34^2$.

Vậy các số cần tìm là $3136; 4489$.

Câu 2: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - 3y^2 + 2xy - 2x - 10y + 4 = 0$.

Hướng dẫn giải.

Ta có:.

$$x^2 - 3y^2 + 2xy - 2x - 10y + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x(y-1) + (y-1)^2 - (4y^2 + 8y + 4) == 7.$$

$\Leftrightarrow (x+y-1)^2-(2y+2)^2=-7$.

$\Leftrightarrow (3y+x+1)(y-x+3)=7$.

Vì 7 là số nguyên tố nên ta có các trường hợp sau:.

$\begin{cases}3y+y+1=7\\ y-x+3=1\end{cases};\begin{cases}3y+y+1=-7\\ y-x+3=-1\end{cases};\begin{cases}3y+y+1=1\\ y-x+3=7\end{cases};\begin{cases}3y+y+1=-1\\ y-x+3=-7\end{cases}$.

Giải ba hệ phương trình trên ta được: $(x;y)\in\{(\pm3;1),(1;-3),(7;-3)\}$.

Câu 3: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2+2y^2+3xy-x-y+3=0$.

Hướng dẫn giải.

Viết phương trình thành phương trình bậc hai đối với x:.

$x^2+(3y-1)x+(2y^2-y+3)=0$ (*).

Ta có $\Delta=y^2-2y-11$.

Để $(*)$ có nghiệm nguyên$\Rightarrow\Delta$ là số chính phương.

Ta có: $y^2-2y-11=k^2;k\in\square$.

$\Leftrightarrow (y-1)^2-12=k^2\Leftrightarrow (y-1)^2-k^2=12\Leftrightarrow (y-1+k)(y-1-k)=12$.

Mà $(y-1+k)-(y-1-k)=2k$ nên $(y-1+k);(y-1-k)$ cùng chẵn.

Và $(y-1+k)>(y-1-k)$.

Do đó: $\begin{cases}y-1+k=6\\ y-1-k=2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}y-1+k=-2\\ y-1-k=-6\end{cases}$.

Suy ra : $y=5$ hoặc $y=-3$.

Thay $y=5$ vào $(*)$ ta được : $x=8$ hoặc $x=-6$.

Thay $y=-3$ vào $(*)$ ta được : $x=4$ hoặc $x=6$.

Tập nghiệm: $S=\{(-8;5);(-6;5);(6;-3);(4;-3)\}$.

Câu 4: Tìm một hằng số nguyên dương c sao cho phương trình. $xy^2-y^2-x+y=c$ có đúng ba nghiệm nguyên dương (x,y).

Hướng dẫn giải.

Ta viết lại phương trình $x(y^2-1)=y^2-y+c$.

- Nếu $y=1\Rightarrow c=0$, loại.

- Nếu $y\neq1\Rightarrow x=\dfrac{y^2-y+c}{y^2-1}=\dfrac{y(y-1)+c}{(y-1)(y+1)}$, do đó $c\,\vdots\, y-1$ và $y(y-1)+c\,\vdots\, y+1$.

Ta có $y \equiv -1(\bmod y+1), y-1 \equiv -2(\bmod y+1)$ nên $y(y-1) \equiv 2(\bmod y+1) \Rightarrow c \equiv -2(\bmod y+1)$.

vậy $c \equiv 0(\bmod y-1), c \equiv -2(\bmod y+1)$, mà $y-1 \equiv 0(\bmod y-1), y-1 \equiv -2(\bmod y+1)$.

nên $c \equiv y-1(\bmod lcm(y-1, y+1))$.

Với $y=2,3$ ta có $c \equiv 1(\bmod 3), c \equiv 2(\bmod 4)$. Do vậy ta thử lấy $c=10$.

Ta phải có $y-1 | 10 \Rightarrow y=2,3,6,11$. Khi đó $x=4,2,\frac{2}{7},1$, theo thứ tự.

Vậy phương trình có đúng ba nghiệm nguyên dương $(x,y)=(4,2),(2,3),(1,11)$.

Câu 5: Cho a,m,n là các số nguyên dương sao cho $a>1$, $m \neq n$. Chứng minh rằng nếu a^m-1 và a^n-1 có các ước nguyên tố giống nhau, thì $a+1$ là một lũy thừa của 2.

Hướng dẫn giải.

Giả sử $m>n$ và $d=(m,n)$. Vì.

$(a^m-1, a^n-1)=a^{(m,n)}-1=a^d-1$.

nên a^d-1 và a^m-1 có các ước nguyên tố giống nhau.

Đặt $m=d.k \quad (k>1), b=a^d$ thì $b-1$ và b^k-1 có các ước nguyên tố giống nhau.

Ta sẽ chứng minh k là một lũy thừa của 2.

Thật vậy, nếu k không phải là lũy thừa của 2, thì k có ước nguyên tố lẻ là p..

Do $b^p-1 \mid b^k-1$ và $b-1 \mid b^p-1$ nên b^p-1 và $b-1$ có các ước nguyên tố giống nhau.

Gọi q là một ước nguyên tố của $b^{p-1}+\ldots+b+1$, thì do $b \equiv 1 \quad (\bmod q)$ nên.

$b^{p-1}+\ldots+b+1 \equiv p \quad (\bmod q) \Rightarrow q=p$..

Do đó, $b^{p-1}+\ldots+b+1$ chỉ có ước nguyên tố là p, suy ra $b^{p-1}+\ldots+b+1=p^t$..

Vì $b^{p-1}+\ldots+b+1>b-1$ nên $t>1$. Từ $b \equiv 1 \quad (\bmod p)$ suy ra $b=p.h+1$..

Khi ấy $b^{p-1}+\ldots+b+1=p+\frac{p^2(p-1)}{2}.u+A.p^2 \equiv p\left(\bmod p^2\right)$.

Điều mâu thuẫn này chứng tỏ k là một lũy thừa của 2.

Bây giờ nếu p là một ước nguyên tố bất kì của $b+1$, thì p cũng là ước của $b-1$.

.

Do đó, $p=2$. Thành thử, $b+1$ là một lũy thừa của 2 hay a^d+1 cũng vậy.

Do $m=d.k$ là số chẵn nên $a+1 \mid a^m-1$, suy ra các ước nguyên tố của $a+1$ cũng là các ước nguyên tố của a^d-1..

Nếu $a+1$ có ước nguyên tố lẻ là p, thì do $a \equiv -1 \quad (\bmod p)$ nên $a^d \equiv (-1)^d=1 \quad (\bmod p)$, suy ra d là số chẵn.

Nhưng là số lẻ a nên $a^d + 1 \equiv 2 \pmod 8$, suy ra $a^d + 1 = 2$. Vô lí vì $a > 1$..

Vậy $a+1$ phải là lũy thừa của 2.

Câu 6: Cho số nguyên $n \ge 1$. Tìm số lớn nhất các cặp gồm 2 phần tử phân biệt của tập $\{1;2;...;n\}$ sao cho tổng của các cặp khác nhau là các số nguyên khác nhau và không vượt quá n.

Hướng dẫn giải.

Giả sử có k cặp thỏa mãn đề bài. Gọi S là tổng của k cặp đó, thì.

$S \ge 1 + 2 + ... + 2k = k(2k+1)$.

Dễ thấy $S \le n + (n-1) + ... + (n-k+1) = nk - \dfrac{k(k-1)}{2}$.

Do đó $k(2k+1) \le nk - \dfrac{k(k-1)}{2} \Leftrightarrow k \le \left[\dfrac{2n-1}{5}\right]$.

Bây giờ ta xây dựng $\left[\dfrac{2n-1}{5}\right]$ cặp thỏa mãn đề bài như sau.

Trường hợp 1: Số n có dạng $5k+1$ hoặc $5k+2$. Khi ấy, $\left[\dfrac{2n-1}{5}\right] = 2k$.

Ta xét các cặp sau: $(4k+1;k), (4k;k-1), ... (3k+2;1), (3k;2k), (3k-1;2k-1), ... (2k+1;k+1)$.

Rõ ràng dãy trên có $2k$ cặp thỏa mãn đề bài.

Trường hợp 2: Số n có dạng $5k+3$ hoặc $5k+4$ hoặc $5k+5$.

Khi ấy, $\left[\dfrac{2n-1}{5}\right] = 2k+1$.

Ta xét các cặp sau $(4k+2;k+1), (4k+1;k), ..., (3k+2;1), (3k+1;2k+1), (3k;2k), ..., (2k+1;k+1)$.

Dãy trên có $2k+1$ thỏa mãn đề bài.

Vậy số lớn nhất các cặp thỏa mãn đề bài là $\left[\dfrac{2n-1}{5}\right]$.

Câu 7: Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $P(x)$ không đồng nhất không thỏa mãn: $P(2014) = 2046$, $P(x) = \sqrt{P(x^2+1) - 33} + 32, \forall x \ge 0$.

Hướng dẫn giải.

Giả sử $P(x)$ thỏa mãn đầu bài. Khi đó ta có $P(x^2+1) = [P(x) - 32]^2 + 33, \forall x \ge 0$.

Suy ra $P(2014^2 + 1) = (2046 - 32)^2 + 33 = 2014^2 + 33$.

Đặt $x_0 = 2014$, ta có $x_0 + 32 = 2046, P(x_0) = x_0 + 32$ do $P(2014) = 2046$.

Xét dãy $\{x_n\}$ như sau: $x_0 = 2014$, $x_1 = x_0^2 + 1$, $x_{n+1} = x_n^2 + 1$, $\forall n = 1,2,3...$.

Khi đó:.

$P(x_0)=x_0+32$

$P(x_1)=P(x_0^2+1)=[P(x_0)-32]^2+33=x_0^2+33=x_0^2+1+32=x_1+32$.

$P(x_2)=P(x_1^2+1)=[P(x_1)-32]^2+33=x_1^2+33=x_1^2+1+32=x_2+32$

Bằng quy nạp dễ dàng chứng minh được.

$P(x_n)=x_n+32, \forall n=0,1,2...(*)$.

Xét đa thức hệ số thực $Q(x)=P(x)-x-32$.

Từ (*) ta có $Q(x)$ nhận x_n làm nghiệm với mọi $n=0;1;2;...$.

Mặt khác do dãy $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ tăng nghiệm ngặt nên $Q(x)\equiv 0$ suy ra $P(x)=x+32$.

Thử lại ta có $P(x)$ thỏa mãn đầu bài.

Vậy: Có duy nhất đa thức $P(x)=x+32$.

Câu 8: Trên bảng ô vuông cố định có kích thước 3×3 người ta xếp một số viên sỏi sao cho mỗi ô vuông có nhiều nhất một viên sỏi. Mỗi cách xếp sỏi được tính điểm như sau, nếu tổng số sỏi trên một hàng (hoặc trên một cột hoặc trên một trong hai đường chéo) là một số lẻ thì được tính 1 điểm. Bảng không có sỏi ứng với 0 điểm, bảng xếp kín 9 viên sỏi ứng với 8 điểm.

a)Tồn tại hay không cách xếp sỏi sao cho ô chính giữa bảng không có sỏi và số điểm.

tương ứng với cách xếp đó là 8.

b)Chứng minh rằng số cách xếp sỏi với điểm số là một số chẵn bằng số cách xếp sỏi.

với điểm số là một số lẻ.

Hướng dẫn giải.

a)Giả sử ô chính giữa không có sỏi và điểm số của cách xếp là 8. Như vậy 3 hàng, 3 cột và hai đường chéo đều có một số lẻ viên sỏi.

Gọi *a, b, c, d* là số sỏi trong các ô như hình vẽ, $a,b,c,d\in\{0,1\}$. Khi đó các ô đối xứng với *a, b, c, d* qua tâm sẽ có số sỏi tương ứng là a',b',c',d' sao cho $a+a'=b+b'=c+c'=d+d'=1$.

a	b	c
	0	d

a	b	c
d	0	d
c'	b	a

Từ đó $(a+b+c)+(a'+b'+c')=3$ suy ra một trong hai tổng $a+b+c$ hoặc $a'+b'+c'$ là một số chẵn. Khi đó dòng thứ nhất hoặc dòng thứ ba có tổng số sỏi là một số chẵn, mâu thuẫn với giả thiết ban đầu.

Vậy không tồn tại các xếp sỏi thỏa mãn điều kiện bài toán.

b)Ta gọi hai cách xếp sỏi là liên hợp với nhau nếu ô trên cùng bên trái của chúng có số sỏi khác nhau và các ô còn lại tương ứng có số sỏi như nhau.

(B) (B')

a	b	c
f	e	d
g	h	i

a'	b	c
f	e	d
g	h	i

Như vậy, các cách xếp sỏi chia thành từng cặp đôi một liên hợp với nhau.

Xét hai cách xếp liên hợp với nhau (B) và (B'). Tổng số sỏi ở dòng 1, cột 1 và 1 đường chéo của hai bảng đôi một khác nhau về tính chẵn lẻ. Các dòng, cột và đường chéo còn lại của hai bảng có số sỏi như nhau. Do đó điểm số của (B) và (B') khác nhau 3 đơn vị, suy ra số điểm của (B) và (B') có tính chẵn lẻ khác nhau.

Vậy hai cách xếp liên hợp với nhau, một cách xếp có điểm số chẵn, cách xếp còn lại có điểm số là một số lẻ suy ra điều phải chứng minh.

Câu 9: Cho tập hợp $A=\{1;2;...;2013\}$. Cần phải loại khỏi A ít nhất bao nhiêu phần tử để tập hợp còn lại có tính chất: Không phần tử nào bằng tích của hai phần tử khác.

Hướng dẫn giải.

Loại khỏi A tập hợp $\{2;3;...;44\}$, tập này có 43 phần tử. Khi đó tập còn lại là $\{1;45;46;...;2012;2013\}$. Rõ ràng tập này thỏa mãn yêu cầu: Không có phần tử nào là tích của hai phần tử khác.

Ta sẽ chứng minh mọi cách tách khỏi A một tập hợp có nhiều nhất 42 phần tử đều không thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Thật vậy xét các bộ ba sau (43 bộ ba):.

2, 87, 2.87.

3, 86, 3.86.

4, 85, 4.85.

………….

44, 45, 44.45.

Xét hàm số $f(x)=x(89-x)$ với $2\le x\le 44$. Ta có $f'(x)=89-2x>0, \forall 2\le x\le 44$.

Vậy f là hàm đồng biến khi $2\le x\le 44$.

Suy ra $f(2)<f(3)<...<f(44)\Rightarrow 2.87<3.86<...<44.45$.