BÀI TẬP NÂNG CAO SỐ HỌC 11

Câu 1. Trên bảng ô vuông 3×3, người ta đặt một số viên sỏi sao cho mỗi ô vuông có không quá một viên sỏi. Với mỗi cách đặt ta cho tương ứng với số điểm bằng tổng số: các hàng, các cột, các đường chéo chứa số lẻ các viên sỏi trên đó. Bảng không có sỏi ứng với 0 điểm.

a) Tồn tại hay không cách đặt sỏi sao cho ô chính giữa bảng không có sỏi và số điểm tương ứng với cách đặt đó là 8.

b) Chứng minh rằng số cách đặt sỏi với điểm số là một số chẵn bằng số cách đặt sỏi với điểm số là một số lẻ.

Hướng dẫn giải bài 1

a) Giả sử ô chính giữa không có sỏi và điểm số của cách đặt là 8. Như vậy 3 hàng, 3 cột và hai đường chéo đều có một số lẻ viên sỏi. Gọi a,b,c,d là số sỏi trong các ô như hình vẽ, a,b,c,d $\in\{0,1\}$. Khi đó các ô đối xứng với a,b,c,d qua tâm sẽ có số sỏi tương ứng là a',b',c',d' sao cho a+a'=b+b'=c+c'=d+d'=1.

a	b	c
	0	d

a	b	c
d'	0	d
c'	b'	a'

Từ đó (a+b+c)+(a'+b'+c')=3 suy ra một trong hai tổng a+b+c hoặc a'+b'+c' là một số chẵn. Khi đó dòng thứ nhất hoặc dòng thứ ba có tổng số sỏi là một số chẵn, mâu thuẫn với giả thiết ban đầu.

Vậy không tồn tại cách đặt sỏi thỏa mãn điều kiện bài toán

b) Ta gọi hai cách đặt sỏi là liên hợp với nhau nếu ô trên cùng bên trái của chúng có số sỏi khác nhau và các ô còn lại tương ứng có số sỏi như nhau.

a	b	c
f	e	d
g	h	i

a'	b	c
f	e	d
g	h	i

Như vậy, các cách đặt sỏi chia thành từng cặp đôi một liên hợp với nhau.

Xét hai cách đặt liên hợp với nhau (B) và (B'). Tổng số sỏi ở dòng 1, cột 1 và 1 đường chéo cả hai bảng đôi một khác nhau về tính chẵn lẻ. Các dòng, cột và đường chéo còn lại của hai bảng có số sỏi như nhau. Do đó điểm số của (B) và (B') khác nhau 3 đơn vị, suy ra số điểm của (B) và (B') có tính chẵn lẻ khác nhau. Vậy hai cách đặt liên hợp với nhau, một cách xếp có điểm số chẵn, cách đặt còn lại có điểm số là một số lẻ suy ra điều phải chứng minh.

Câu 2. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn bộ số nguyên dương (x,y,z,t) thỏa mãn hai số bất kì trong chúng đều nguyên tố cùng nhau và $x^3+y^3+z^2=t^4$.

Câu 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của n sao cho tồn tại n số nguyên dương thỏa mãn tổng các lũy thừa bậc 4 của chúng có giá trị là 1998.

Câu 4. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x,y) thỏa mãn $x^y>y^x$.

Câu 5. Tìm tất cả các bộ (n,k,p) với n,k là các số nguyên dương; p là một số nguyên tố thỏa mãn phương trình $n^5+n^4+1=p^k$.

Hướng dẫn giải bài 5

Với $n=1$ ta dễ có $p=3,k=1$. Xét $n\ge 2$, từ giả thiết suy ra $\left(n^2+n+1\right)\left(n^3-n+1\right)=p^k$. Do đó tồn tại các số nguyên dương $r,s;r\ge s$ sao cho $n^2+n+1=p^s$ và $n^3-n+1=p^r$.

Từ đó suy ra $\gcd\left(n^2+n+1,n^3-n+1\right)=\gcd\left(p^s,p^r\right)=p^s$.

Mặt khác, ta lại có

$$n^3-n+1=(n-1)(n^2+n+1)-(n-2) \text{ và } n^2+n+1=(n-2)(n+3)+7.$$

Suy ra $\gcd(n^2+n+1, n^3-n+1)=\gcd(n-2,7)$.

Do vậy ta có $p^s=1$ hoặc $p^s=7$. Từ đây dễ dàng suy ra $p=7$ và $n=2$.

Vậy $(n,k,p)=(1,1,3),(2,2,7)$.

Câu 6. Chứng minh rằng đa thức $P(x)=(x^2-12x+11)^4+23$ không thể biểu diễn thành tích của 3 đa thức hệ số nguyên và có bậc không nhỏ hơn 1.

Hướng dẫn giải bài 6

Giả sử phản chứng rằng $P(x)=Q(x)H(x)R(x)$ với $Q(x),H(x),R(x)\in Z_{[x]}$ và không phải các đa thức hằng. Từ $P(x)>0\forall x\in R$, bậc của $Q(x),H(x),R(x)$ là chẵn. Từ đó suy ra rằng hai trong ba đa thức này là đa thức bậc hai. Giả sử rằng $\deg Q(x)=\deg H(x)=2$. Từ $P(1)=P(11)=23$ suy ra rằng $Q(1),Q(11)$ là ước của 23. Có nghĩa là $Q(1),Q(11)\in\{\pm1;\pm23\}$. Nhưng bởi vì $[Q(11)-Q(1)]\vdots 10$ nên $Q(11)=Q(1)$. Tương tự, $H(11)=H(1)$.

Mặt khác, $Q(1)H(1)$ là ước của 23 do đó ít nhất một trong số $Q(1)$ hoặc $H(1)$ là ±1.

Không mất tính tổng quát giả sử $Q(1)=\pm1$ thì $Q(11)=Q(1)=\pm1$. Từ đó suy ra $Q(x)=(x-1)(x-11)\pm1$. Nhưng điều này kéo theo $Q(x)$ có ít nhất một nghiệm thực trong khi $P(x)>0\forall x\in R$, mâu thuẫn. Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Câu 7. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, luôn tồn tại n số tự nhiên liên tiếp sao cho bất kì số nào trong các số đó cũng có ước nguyên dương dạng 2^k-1.

Hướng dẫn giải bài 7

Gọi n số nguyên liên tiếp là $x+1,x+2,...,x+n$. Yêu cầu bài toán giúp ta nghĩ đến hệ thặng dư

$$\begin{cases} x\equiv -1(\bmod p_1) \\ x\equiv -2(\bmod p_2) \\ ... \\ x\equiv -n(\bmod p_n) \end{cases} \text{ với } p_i=2^{k_i}-1 \text{ và } \gcd(p_i,p_j)=1 \text{ với } i\neq j$$

Ta có $\gcd(p_i,p_j)=1\Leftrightarrow(k_i,k_j)=1$. Thật vậy, đặt $d=(2^{k_i}-1,2^{k_j}-1)$

Ta có $\begin{cases} 2^{k_i}\equiv 1(\bmod d) \\ 2^{k_j}\equiv 1(\bmod d) \end{cases} \Rightarrow 2^{(k_i,k_j)}\equiv 1(\bmod d)$

Có $\begin{cases} 2^{(k_i,k_j)}-1\,|\,2^{k_i}-1 \\ 2^{(k_i,k_j)}-1\,|\,2^{k_j}-1 \end{cases}$ suy ra $d=2^{(k_i,k_j)}-1$

Khi đó $d=1\Leftrightarrow(k_i,k_j)=1$

Từ đó, ta chỉ cần chọn $k_1,k_2,...,k_n$ sao cho $(k_i,k_j)=1$ với $i\neq j$ thì theo định lý thặng dư Trung Hoa, hệ thặng dư trên có nghiệm. Khi đó ta có đpcm

Câu 8. Các số tự nhiên $0,1,2,3,...$ được điền vào bảng ô vuông kích thước 2015×2015 (mỗi ô một số), bắt đầu từ số 0 ở chính giữa bảng, đến các số tiếp theo được điền theo hình xoắn ốc ngược chiều kim đồng hồ như hình vẽ bên dưới:

	20	19	18	17	16	
	21	6	5	4	15	
	22	7	0	3	14	
	23	8	1	2	13	
	24	9	10	11	12	

1) Biết rằng các cột của bảng được đánh số từ 1 đến 2015 từ trái sang phải và các dòng của bảng được đánh số từ 1 đến 2015 theo thứ tự từ trên xuống dưới. Hỏi theo cách điền trên thì số 2015 nằm ở dòng nào, cột nào?

2) Người ta cho phép thực hiện thao tác sau: Đầu tiên, thay số 0 ở giữa bảng bằng số 14. Mỗi lần sau đó, người ta sẽ chọn ra 12 ô vuông liên tiếp thuộc cùng hàng, hoặc 12 ô vuông liên tiếp thuộc cùng cột, hoặc 12 ô vuông thuộc một bảng hình chữ nhật 3×4 rồi cộng thêm 1 vào tất cả các ô được chọn (mỗi lần chỉ được chọn 1 trong 3 loại hình trên). Hỏi sau một số hữu hạn lần, có thể làm cho tất cả các ô vuông của bảng đã cho đều chia hết cho 2016 được không?

Hướng dẫn giải bài 8

1) Ta có các nhận xét sau:

i. Trong một bảng ô vuông con có kích thước lẻ $(2n+1)\times(2n+1)$ và có tâm là ô chứa số 0, tất cả $(2n+1)^2$ số từ 0 đến $(2n+1)^2-1$ đều được điền và cột đầu tiên tính từ trái sang của bảng này chứa $2n+1$ số lớn nhất (số lớn nhất là $(2n+1)^2-1$ nằm cuối cột đó).

ii. Số 0 nằm ở hàng 1008, cột 1008 của bảng.

Từ đó, ta thấy rằng:

Vì $2015<45^2=2025$ nên số này nằm trong bảng ô vuông 45×45 và số lớn nhất trong bảng này là 2024.

Số 2024 nằm ở cột 1 của bảng này, tương ứng là cột thứ $1008-22=986$ của bảng đã cho.

Số 2024 nằm ở dòng 45 của bảng này, tương ứng là dòng thứ $1008+22=1030$ của bảng.

Do $2024-2015=9$ nên số 2015 sẽ nằm cao hơn số 2024 là 9 dòng, suy ra số 2015 nằm ở dòng thứ $1030-9=1021$.

Vậy số 2015 nằm ở dòng thứ 1021 và cột thứ 986 của bảng.

2) Sau bước thay 0 bởi 14, ta thấy tổng các số của bảng là:

$$14+\left(1+2+3+...+2015^2-1\right)=14+\frac{2015^2\left(2015^2-1\right)}{2}.$$

Dễ thấy số này chia 4 dư 2.

Trong thao tác cộng các số trong 12 ô (bất kể nằm trên hàng nào, cột nào) của bảng thì tổng các số tăng lên đúng 12 đơn vị. Suy ra số dư của tổng các số trên bảng khi chia cho 4 là bất biến trong suốt quá trình.

Để bảng có tất cả các số chia hết cho 2016 thì dễ thấy tổng của chúng phải chia hết cho 4, đây là điều không thể xảy ra.

Vậy câu trả lời là phủ định.

Câu 9. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $x^2+13y^2+4xy=y^2z^2$

Hướng dẫn giải bài 9

Gọi d = (x, y), và giả sử x = dx_0 ; y = dy_0. Thay vào (1) ta có :

$d^2x_0^2+13d^2y_0^2+4x_0y_0d^2=y_0^2d^2z^2$. (2)

Do $x>0, y>0 \Rightarrow d>0$. Từ (2) ta có :

$x_0^2=y_0(y_0z^2-13y_0-4x_0)$. (3)

Từ (3) suy ra $x_0^2 \,\vdots\, y_0$. Do $d=(x,y)\Rightarrow(x_0,y_0)=1$. Vì thế suy ra

$x_0 \vdots y_0$. Lại do $(x_0, y_0) = 1 \Rightarrow y_0 = 1 \Rightarrow y = d \Rightarrow x = x_0 y$.

Thay x = x_0y vào (1) và có: $x_0^2 y^2 + 13y^2 + 4x_0 y^2 = y^2 z^2$.

Do y > 0, nên có : $x_0^2 + 13 + 4x_0 = z^2 \Rightarrow (x_0 + 2)^2 + 9 = z^2 \Rightarrow (x_0 + 2 + z)(z - x_0 - 2) = 9$. (4)

Để ý rằng $x_0 + 2 + z > z - x_0 - 2$, nên từ (4) suy ra :

$$\begin{cases} x_0 + 2 + z = 9 \\ -x_0 - 2 + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 5 \\ x_0 = 2. \end{cases}$$

Từ đây suy ra x = 2t , y = t, z = 5 với t nguyên dương.

Thử lại thấy họ nghiệm này thỏa mãn (1).

Câu 10. Cho 100 số tự nhiên không lớn hơn 100 có tổng bằng 200. Chứng minh rằng từ các số đó có thể chọn được ít nhất một bộ các số có tổng bằng 100.

Câu 11. Tìm chữ số hàng trăm của số $P = 29^{2007}$.

Hướng dẫn giả bài 11

$29^1 \equiv 29 \pmod{1000}$; $29^2 \equiv 841 \pmod{1000}$;

$29^3 \equiv 389 \pmod{1000}$; $29^4 \equiv 281 \pmod{1000}$;

$29^5 \equiv 149 \pmod{1000}$; $29^6 \equiv 321 \pmod{1000}$;

$29^{10} = \left(29^5\right)^2 \equiv 149^2 \equiv 201 \pmod{1000}$;

$29^{20} \equiv 201^2 \equiv 401 \pmod{1000}$;

$29^{40} \equiv 801 \pmod{1000}$; $29^{80} \equiv 601 \pmod{1000}$;

$29^{100} = 29^{20} \times 29^{80} \equiv 401 \times 601 \equiv 1 \pmod{1000}$;

$29^{2000} = \left(29^{100}\right)^{20} \equiv 1^{20} \equiv 1 \pmod{1000}$;

$29^{2007} = 29^{2000} \times 29^6 \times 29^1 \equiv 1 \times 321 \times 29 \pmod{1000}$

$= 309 \pmod{1000}$;

Vậy chữ số hàng trăm của P là 3.

Câu 12. Tìm các nghiệm nguyên dương x, y của phương trình $3x^2 + 14y^2 + 13xy = 330$

Hướng dẫn giải bài 12

Phương trình đã cho tương đương với

$(3x^2 + 7xy) + (6xy + 14y^2) = 330$

$\Leftrightarrow x(3x + 7y) + 2y(3x + 7y) = 330 \Leftrightarrow (x + 2y)(3x + 7y) = 330$ (1)

Do x, y nguyên dương nên:

$(x + 2y)(3x + 6y) < (x + 2y)(3x + 7y) < (x + 2y)(4x + 8y)$

$\Leftrightarrow 3(x + 2y)^2 < 330 < 4(x + 2y)^2$ (2)

Từ $3(x + 2y)^2 < 330 \Rightarrow x + 2y < \sqrt{110}$; $330 < 4(x + 2y)^2 \Rightarrow x + 2y > \sqrt{\dfrac{165}{2}}$

Nên từ (2) $\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{165}{2}} < x + 2y < \sqrt{110}$

Do x, y nguyên dương và $\sqrt{\dfrac{165}{2}} \approx 9{,}08$ còn $\sqrt{110} \approx 10{,}49$ nên suy ra

$x + 2y = 10$ (3)

Từ (1) và (3) suy ra

$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 3x + 7y = 33 \end{cases}$ Tìm được x = 4 và y = 3

Câu 13. Tìm các chữ số x, y, z để $\overline{579xyz}$ chia hết cho 5, 7 và 9.

Hướng dẫn giải bài 13

- Vì các số 5, 7, 9 đôi một nguyên tố cùng nhau nên ta phải tìm các chữ số x, y, z sao cho $\overline{579xyz}$ chia hết cho 5.7.9 = 315.

Ta có $\overline{579xyz}$ = 579000 + $\overline{xyz}$ = 1838.315 + 30 + $\overline{xyz}$

$\Rightarrow$ 30 + $\overline{xyz}$ chia hết cho 315. Vì 30 ≤ 30 + $\overline{xyz}$ < 1029 nên *(Dùng máy tính tìm các bội của 315 trong khoảng (30; 1029):*

- Nếu 30 + $\overline{xyz}$ = 315 thì $\overline{xyz}$ = 315 - 30 = 285
- Nếu 30 + $\overline{xyz}$ = 630 thì $\overline{xyz}$ = 630 - 30 = 600
- Nếu 30 + $\overline{xyz}$ = 945 thì $\overline{xyz}$ = 945 - 30 = 915

Vậy ta có đáp số sau:

$$\left[\begin{array}{l}(x,y,z)=(2,8,5)\\(x,y,z)=(6,0,0)\\(x,y,z)=(9,1,5)\end{array}\right.$$

Câu 14. Có hay không số nguyên lẻ n lớn hơn 1 sao cho $3^{2016+n}+1$ chia hết cho n?

Hướng dẫn giải bài 14

Giả sử có số nguyên lẻ n lớn hơn 1 thỏa yêu cầu đã cho thì gọi p là ước số nguyên tố nhỏ nhất của n, ta có p lẻ và $3^{2016+n}+1\equiv 0(\text{mod } p)$ do đó $3^{4032+2n}\equiv 1(\text{mod } p)$. Theo định lý nhỏ Fermat thì $3^{p-1}\equiv 1(\text{mod } p)$.

Lại có $(2016+n, p-1)=1$ nên $(4032+2n, p-1)=2$. Theo định lý Bezout suy ra có các số nguyên x, y sao cho $(4032+2n)x+(p-1)y=2$. Do đó $3^2=3^{(4032+2n)x+(p-1)y}=3^{(4032+2n)x}.3^{(p-1)y}\equiv 1(\text{mod } p)$

hay $8\equiv 0(\text{mod } p)$: vô lý do p lẻ. Vậy không có số n lẻ cần tìm.

Câu 15. Trên đường tròn ngoại tiếp đa giác lồi 2n đỉnh (n lẻ, lớn hơn 2), ta đặt tại đỉnh thứ i số $(-1)^i.i$. Một phép biến đổi là thay hai số tại hai đỉnh tùy ý bởi hai số mới: số mới tăng 1 đơn vị so với số cũ nếu số cũ âm và giảm 1 đơn vị so với số cũ nếu số cũ không âm.

Sau một số phép biến đổi như vậy ta có thể thu được tất cả các số tại 2n đỉnh của đa giác là các số bằng nhau không?

Hướng dẫn giải bài 15

Xét đa giác $A_1A_2...A_{2n}$ và tại đỉnh A_1 ta đặt số -1, tại đỉnh A_2 ta đặt số 2,…, tại đỉnh thứ 2n ta đặt số 2n. Tổng tất cả các số trên đường tròn ban đầu là n (số lẻ).

Xét tính chất chẵn, lẻ của tổng 2n số trên đường tròn sau mỗi phép biến đổi thì tính chất này không đổi. Thật vậy, có ba trường hợp sau

Nếu hai số bị tác động đều là các số chẵn thì hai số này sau phép biến đổi đều là các số lẻ, do đó tính chẵn, lẻ của tổng hai số này không đổi sau phép biến đổi. Các số còn lại không đổi nên tính chẵn, lẻ của tổng của 2n số không đổi sau phép biến đổi.

Nếu hai số bị tác động đều là các số lẻ thì hai số này sau phép biến đổi đều là các số chẵn, tương tự trên, tính chẵn, lẻ của tổng của 2n số không đổi sau phép biến đổi.

Nếu hai số bị tác động có một số lẻ, một số chẵn thì hai số này sau phép biến đổi cũng là một số lẻ, một số chẵn, do đó tính chẵn, lẻ của tổng của 2n số không đổi sau phép biến đổi.

Nếu có thể thu được tất cả các số tại 2n đỉnh là các số bằng nhau thì tổng của 2n số này là một số chẵn. Điều này không thể xảy ra do ban đầu tổng này là số lẻ.

Vậy không thể thu được tất cả các số tại 2n đỉnh của đa giác là các số bằng nhau

Câu 16. Cho bảng hình chữ nhật kích thước $m\times n$ $(m<n)$. Một số ô có một số ngôi sao, giả sử mỗi cột có ít nhất một ngôi sao. Chứng minh rằng có ít nhất hai ngôi sao mà hàng chứa nó có nhiều ngôi sao hơn cột chứa nó.

Hướng dẫn giải bài 16

N ngôi sao được đánh số từ 1 tới N. Đặt a_i,b_i tương ứng là số ngôi sao ở cột và hàng chứa ngôi sao thứ i. Ta cần chứng minh $b_i>a_i$ với ít nhất hai chỉ số i nào đó. Nhận xét: Nếu $a_i=k$ thì mọi ngôi sao cùng cột với ngôi sao thứ i có a_j tương ứng là k. Từ đó suy ra

$$\sum\frac{1}{a_i}=n\ \Rightarrow\sum\frac{1}{b_i}\le m<n=\sum\frac{1}{a_i}$$

$\Rightarrow\sum\left(\frac{1}{a_i}-\frac{1}{b_i}\right)\ge 1$ Suy ra tồn tại hai chỉ số i để $\frac{1}{a_i}-\frac{1}{b_i}>0$ hay $b_i>a_i$ với hai chỉ số. $\Rightarrow$ đpcm.

Câu 17. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho 3^n-1 chia hết cho 2^{2014}

Hướng dẫn giải bài 17

Số n có thể biểu diễn thành $n=2^k.h$, với $k,h\in\mathbb{N}$ và h là số lẻ, lúc đó ta có

$$\begin{aligned}3^n-1&=3^{2^k.h}-1\\&=\left(3^{2^k}-1\right)\left(3^{2^k(h-1)}+3^{2^k(h-2)}+\ldots+3^{2^k}+1\right)\\&=\left(3^{2^k}-1\right).A\end{aligned}$$

Do $h-1$ là số chẵn nên A là số lẻ. Khi đó 3^n-1 chia hết cho 2^{2014} khi và chỉ khi $3^{2^k}-1$ chia hết cho 2^{2014}.

Mặt khác ta có $3^{2^k}-1=\left(3^2-1\right)\left(3^2+1\right)\left(3^{2^2}+1\right)\ldots\left(3^{2^{k-2}}+1\right)\left(3^{2^{k-1}}+1\right)$ $(*)$. Mỗi thừa số trong ngặc ở vế phải của (*) chia hết cho 2 và không chia hết cho 4, ngoại trừ $3^2-1=8$, nên ta có $3^{2^k}-1$ chứa đúng $(k-1)+3=k+2$ thừa số 2

Để bài toán được thỏa mãn thì $k+2=2014\Leftrightarrow k=2012$ và chỉ việc chọn $h=1$

Khi đó n nhỏ nhất cần tìm là $n=2^{2012}$

Câu 18. Cho k số nguyên dương $a_1,a_2,\ldots,a_k$ đôi một nguyên tố cùng nhau và một số nguyên dương n. Tìm các số nguyên dương $a\le n$ sao cho a chia hết a_i với $i=1,2,\ldots,k$.

Hướng dẫn giải bài 18

Với mỗi $i=1,2,\ldots,k$ ta đặt $A_i=\left\{a\in\mathbb{N}^*\mid a\le n, a\,\vdots\,a_i\right\}$. Suy ra số các số thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right|=\sum_{i=1}^{k}\left|A_i\right|-\sum_{1\le i_1<i_2\le k}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\right|+\sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le k}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}\right|-\ldots+(-1)^{k+1}\left|\bigcap_{i=1}^{k}A_i\right|$$

Dễ thấy $A_i=\left\{a_i,2a_i,\ldots,m_ia_i\right\}$ với $m_i\in\mathbb{N}^*$ và thỏa mãn $m_ia_i\le n\le\left(m_i+1\right).a_i$

$$\Rightarrow\left|A_i\right|=m_i=\left[\frac{n}{a_i}\right]$$