CHUYÊN ĐỀ PT NGHIỆM NGUYÊN – ÔN THI HSG

Câu 1. Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình

$$(x-1)\left(y^5-y^4-y^3-4y\right)=x^{11}-1.$$

Hướng dẫn giải

*) Ta thấy các cặp $(x;y)=(1;t), t\in\mathbb{Z}$ thỏa mãn bài toán.

*) Xét $x\neq 1$. Phương trình được viết lại dưới dạng

$$y(y-2)\left(y^3+y^2+y+2\right)=\frac{x^{11}-1}{x-1} \quad (1).$$

Gọi p là ước nguyên tố bất kỳ của $\dfrac{x^{11}-1}{x-1}$, suy ra $p\,|\,x^{11}-1$.

Gọi $h=ord_p(x)$, suy ra $h\,|\,11\Rightarrow h\in\{1,11\}$.

- Nếu $h=1$ thì $x\equiv 1\pmod{11}$. Vì $p\,|\,x^{10}+x^9+\cdots+x+1$ nên $p\,|\,11$ suy ra $p=11$. (2)
- Nếu $h=11$ thì từ $x^{p-1}-1\,\vdots\, p$ suy ra $p\equiv 1\pmod{11}$. (3)

Vì p là ước nguyên tố bất kỳ của $\dfrac{x^{11}-1}{x-1}$ nên từ (2), (3) suy ra với mọi ước số d của $\dfrac{x^{11}-1}{x-1}$ đều có tính chất $d\equiv 0$ hoÆc $1\pmod{11}$. (4)

Từ (1) suy ra $y, y-2$ vµ y^3+y^2+y+2 đều là ước số của $\dfrac{x^{11}-1}{x-1}$. (5)

Vì $y, y-2\,|\,\dfrac{x^{11}-1}{x-1}$ nên suy ra $y\equiv 0,1,2$ hoÆc $3\pmod{11}$.

- Nếu $y\equiv 0\pmod{11}$ thì $y^3+y^2+y+2\equiv 2\pmod{11}$, trái với (4), (5).
- Nếu $y\equiv 1\pmod{11}$ thì $y^3+y^2+y+2\equiv 5\pmod{11}$, trái với (4), (5).
- Nếu $y\equiv 2\pmod{11}$ thì $y^3+y^2+y+2\equiv 5\pmod{11}$, trái với (4), (5).
- Nếu $y\equiv 3\pmod{11}$ thì $y^3+y^2+y+2\equiv 8\pmod{11}$, trái với (4), (5).

Từ các trường hợp trên, suy ra phương trình (1) vô nghiệm.

Vậy tất cả các nghiệm của phương trình đã cho là $(x;y)=(1;t)$ víi $t\in\mathbb{Z}$.

Câu 2. Cho $x_1=1, x_2=1, x_3=1$ và $x_{n+3}=x_{n+2}x_{n+1}+x_n$ với mọi số nguyên dương n. Chứng minh rằng với bất kỳ số nguyên dương m, tồn tại số nguyên dương k sao cho x_k chia hết cho m.

Hướng dẫn giải

Giả sử n là số nguyên dương thỏa mãn bài toán, ta có

$$11^n=xy\left(z^2+1\right)+\left(x^2+y^2\right)z\Leftrightarrow (x+yz)(y+xz)=11^n.$$

Suy ra tồn tại các số nguyên dương p,q thỏa mãn $\begin{cases}x+yz=11^p\\ y+xz=11^q\end{cases}$ (1).

Không mất tính tổng quát, giả sử $x\geq y$. Từ (1) suy ra $\begin{cases}(x+y)(z+1)=11^p+11^q\\ (x-y)(z-1)=11^q-11^p\end{cases}$ (2).

Vì $x\geq y$ nên $q\geq p$, khi đó $(2)\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)(z+1)=11^p\left(11^{q-p}+1\right)\\ (x-y)(z-1)=11^p\left(11^{q-p}-1\right)\end{cases}$ (3).

- Nếu $z+1 \vdots 11$ thì $z-1 \not\vdots 11$, do đó từ (3) suy ra $x-y \vdots 11^p$, hay $x-y \vdots x+yz$. Mặt khác, ta có $x+yz > |x-y|$, nên suy ra $x=y$. Khi đó ta có $11^n=(x+xz)^2$, từ đây suy ra n là một số chẵn.
- Nếu $z+1 \not\vdots 11$ thì từ (3) suy ra $x+y \vdots 11^p$, hay $x+y \vdots x+yz$. Mặt khác, ta có $x+yz \ge x+y > 0$, nên suy ra $z=1$. Khi đó ta có $11^n=(x+y)^2$, suy ra n là một số chẵn.

Từ các trường hợp trên, suy ra n là một số chẵn.

Ngược lại, với n là một số chẵn, đặt $n=2k, k\in \mathbb{N}^+$. Ta thấy bộ $(x;y;z)=(1;1;11^k-1)$ thỏa mãn

$$11^n = xy(z^2+1)+(x^2+y^2)z.$$

Vậy n thỏa mãn bài toán khi và chỉ khi n là một số nguyên dương chẵn.

Câu 3. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại các số nguyên dương x,y,z thỏa mãn $11^n = xy(z^2+1)+(x^2+y^2)z.$

Hướng dẫn giải

Đặt $x_0=0$ thì ta thấy hệ thức truy hồi đã cho thỏa mãn với $n=0$.

Xét số nguyên dương m, ta chứng minh tồn tại số nguyên dương $k\le m^3$ sao cho $m \mid x_k$.

Đặt r_t là số dư khi chia x_t cho m, với $t=0,1,\ldots,m^3+2$. Ta xét các bộ gồm ba phần tử $(r_0;r_1;r_2),(r_1;r_2;r_3),\ldots,(r_{m^3};r_{m^3+1};r_{m^3+2})$. Vì r_t có thể nhận m giá trị nên theo nguyên tắc Đi-rích-lê, suy ra có ít nhất hai bộ bằng nhau.

Giả sử p là số nhỏ nhất sao cho bộ $(r_p;r_{p+1};r_{p+2})$ bằng bộ $(r_q;r_{q+1};r_{q+2})$, với $0\le p<q\le m^3$. Ta chứng minh $p=0$.

Thật vậy, giả sử phản chứng $p\ge 1$. Từ hệ thức truy hồi đã cho, suy ra

$r_{p+2}\equiv r_{p+1}r_p+r_{p-1} \pmod m$ và $r_{q+2}\equiv r_{q+1}r_q+r_{q-1} \pmod m$.

Vì $r_p=r_q, r_{p+1}=r_{q+1}, r_{p+2}=r_{q+2}$ nên từ các đồng dư thức trên suy ra $r_{p-1}=r_{q-1}$. Do đó hai bộ $(r_{p-1};r_p;r_{p+1})$ và $(r_{q-1};r_q;r_{q+1})$ bằng nhau, điều này trái với tính chất của p. Do vậy $p=0$, suy ra $r_q=0$, chứng tỏ $x_q\equiv 0 \pmod m$ hay x_q chia hết cho m.

Câu 4. Giải phương trình sau trên tập hợp số tự nhiên: $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=x^4$

Hướng dẫn giải:

Xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1: Một trong các số x,y,z bằng 0

Trong trường hợp này ta được 4 nghiệm của phương trình:

$(0;0;m)$; $(0;m;0)$; $(m;0;m)$; $(m;m;0)$ (với m là số tự nhiên bất kì)

Trường hợp 2 x,y,z đều khác 0

Ta chứng minh phương trình vô nghiệm.Thật vậy:

Phương trình đã cho tương đương với:

$\left(\frac{yz}{x}\right)^2 = x^2-y^2-z^2 \Rightarrow \left(\frac{yz}{x}\right)^2$ là số nguyên,mặt khác $\frac{yz}{x}$ là số hữu tỷ nên $\frac{yz}{x}$ là số nguyên.

Gọi P là tập nghiệm của phương trình và giả sử $P\ne\varnothing$

Gọi (x_0, y_0, z_0) là bộ nghiệm của phương trình thỏa mãn $\frac{yz}{x}$ nguyên nhỏ nhất.

Dễ thấy $(x_0, y_0, z_0)=1$ (trái lại $(x_0, y_0, z_0)=d > 1$ thì (dx_0, dy_0, dz_0) cũng là nghiệm của phương trình và $\frac{(dy_0)(dz_0)}{dx_0}=d.\frac{y_0z_0}{x_0}>\frac{y_0z_0}{x_0}$,trái với cách gọi bộ (x_0, y_0, z_0))

Đặt $a=(x_0,z_0)$ và $b=(y_0,x_0) \Rightarrow (a,b)=1$ và $x_0 \vdots ab$.

Ta có $(y_0,x_0).(x_0,z_0) \vdots (y_0,z_0,x_0)$ nên $ab \vdots x_0$

Vậy $x_0=ab$ và $y_0=ay_1, z_0=az_1$ với $(y_1,a)=(z_1,b)=1$.Thay vào phương trình ta được:

$(y_1^2+a^2)(z_1^2+b^2)=2a^2b^2$

Do $(y_1^2+a^2,a^2)=(z_1^2+b^2,b^2)=1$,không mất tính tổng quát ta có thể giả sử:

$y_1^2+a^2=2b^2$ (1) và $z_1^2+b^2=a^2$ (2)

Dễ dàng chứng minh được a,b là các số lẻ (trái lại z_1^2 hoặc y_1^2 chia 4 dư 3,vô lý!)

Từ (2) ta có: $\begin{cases} b=m^2-n^2 \\ z_1=2mn \\ a=m^2+n^2 \end{cases}$ với $(m,n)=1$ và m,n khác tính chẵn lẻ

Thay vào (1) ta được: $y_1^2+(2mn)^2=(m^2-n^2)^2$

$\Rightarrow y_1=p^2-q^2, 2mn=2pq, m^2-n^2=p^2+q^2$ với p,q là các số tự nhiên

$\Rightarrow p^2q^2=m^2n^2=m^2(m^2-p^2-q^2) \Rightarrow m^2p^2+m^2q^2+p^2q^2=m^2$

Vậy (m,p,q) là nghiệm của phương trình và: $\frac{pq}{m}=n<\frac{y_0z_0}{x_0}=2mny_1$ (mâu thuẫn với cách gọi bộ (x_0,y_0,z_0)!)

Do đó giả sử $P \neq \varnothing$ là sai tức phương trình vô nghiệm trong trường hợp này.

Kết luận

Phương trình có nghiệm: $(0,0,m)$; $(0,m,0)$; $(m,0,m)$; $(m,m,0)$ (với m là số tự nhiên bất kì)

Câu 5. Gọi $f(n)$ là số cách chọn các dấu cộng,trừ đặt giữa biểu thức: $E_n=\pm1\pm2\pm3\pm\ldots\pm n$ sao cho $E_n=0$.Chứng minh rằng:

a) $f(n)=0$ khi $n \equiv 1,2 (mod\ 4)$

b) Khi $n \equiv 0,3 (mod\ 4)$ ta có $\frac{(\sqrt{2})^n}{2} \le f(n) \le 2^n-2^{1+\left[\frac{n}{2}\right]}$

Hướng dẫn giải

a) Giả sử tồn tại một cách đặt dấu +,− với $n \equiv 1,2 (mod\ 4)$ để $E_n=0$.

Khi đó $1+2+\ldots+n$ là số chẵn,vì vậy $\frac{n(n+1)}{2} \equiv 0 (mod\ 2) \Rightarrow n \equiv 0,3 (\text{mod } 4)$,trái với $n \equiv 1,2 (\text{mod } 4)$.Vậy giả sử là sai,ta có điều cần chứng minh.

b) Ta chứng minh: $f(n) \le 2^n-2^{1+\left[\frac{n}{2}\right]}$,thật vậy:

Chia tất cả các biểu thức thành 2^{n-1} cặp theo dạng:
$(1+2a_2+3a_3+...+na_n;-1+2a_2+3a_3+...+na_n)$ với a_i bằng 1 hoặc -1

Nếu $f(n)>2^{n-1}$ thì theo nguyên lý Dirichlet tồn tại 2 biểu thức cùng nằm trong một cặp như trên,hiệu của chúng bằng 2. Do đó chúng không thể cùng bằng 0 được (mâu thuẫn !)

Câu 6. Gọi M là số các số nguyên dương viết trong hệ thập phân có $2n$ chữ số, trong đó có n chữ số 1 và n chữ số 2. Gọi N là số tất cả các số viết trong hệ thập phân có n chữ số, trong đó chỉ có các chữ số $1,\ 2,\ 3,\ 4$ và số chữ số 1 bằng số chữ số 2. Chứng minh rằng $M=N=C_{2n}^{n}$.

Hướng dẫn giải

Hiển nhiên $M=C_{2n}^{n}$

Ta cần chỉ ra rằng $M=N$.

Với mỗi số có n chữ số gồm các chữ số $1,\ 2,\ 3,\ 4$ và số chữ số 1 bằng số chữ số 2, ta "nhân đôi" thành số có $2n$ chữ số theo quy tắc sau: đầu tiên hai phiên bản của số này được viết kề nhau thành số có $2n$ chữ số, sau đó các chữ số 3 ở n chữ số đầu và các chữ số 4 ở n chữ số sau được đổi thành chữ số 1, các chữ số 3 ở n chữ số sau và các chữ số 4 ở n chữ số đầu được đổi thành chữ số 2

Ví dụ: $1234142 \rightarrow 12341421234142 \rightarrow 12121221221112$

Để chứng minh đây là một song ánh, ta xây dựng ánh xạ ngược như sau: Với mỗi số có n chữ số 1 và n chữ số 2, ta cắt n chữ số đầu và n chữ số cuối rồi cộng chúng theo cột với quy tắc:

$1+1=1,\ 2+2=2,\ 1+2=3,\ 2+1=4$. Ta thu được một số có n chữ số gồm các chữ số $1,2,3,4$ với số chữ số 1 bằng số các chữ số 2.

Câu 7. Tìm tất cả các số nguyên dương x,y,z thỏa mãn phương trình

$$x^4+4y^4=z^2$$

Hướng dẫn giải

Trước hết ta có kết quả quen thuộc sau:

Hệ quả. Không tồn tại các số nguyên dương a,b,c thỏa mãn điều kiện $a^4-b^4=c^2$.

Trở lại bài toán, đặt $d=gcm(x,y)\Rightarrow \exists x_1,y_1: x=dx_1, y=dy_1, (x_1,y_1)=1$, thay vào phương trình ta được: $d^4(x_1^4+4y_1^4)=z^2\Rightarrow d^2|z\Rightarrow z=d^2z_1\Rightarrow x_1^4+4y_1^4=z_1^2$. Do đó không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $gcm(x,y)=1$. Ta xét 2 trường hợp sau:

TH1. Nếu x lẻ thì $gcm(x^2,2y^2)=1\Rightarrow$ tồn tại 2 số nguyên dương $m,n,\ gcm(m,n)=1$ sao cho:

$$\begin{cases} x^2=m^2-n^2 \\ 2y^2=2mn \\ z=m^2+n^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=m^2-n^2 \\ y^2=mn \\ z=m^2+n^2 \end{cases}$$

Từ $y^2=mn, gcm(m,n)=1\Rightarrow m=m_1^2, n=n_1^2$, kết hợp với $x^2=m^2-n^2\Rightarrow x^2=m_1^4-n_1^4$. Mâu thuẫn với hệ quả trên. Do đó trong trường hợp này phương trình vô nghiệm.

TH2. Nếu x chẵn, $x=2x_1$, kết hợp với phương trình đã cho ta được:

$$16x_1^4+4y^4=z^2\Rightarrow z=2z_1\Rightarrow 16x_1^4+4y^4=4z^2\Rightarrow y^4+4x_1^4=z^2\ (1)$$

Chú ý do x chẵn và $gcm(x,y)=1$ nên y lẻ. Do đó từ phương trình (1) và kết hợp với TH1 thì (1) vô nghiệm.

Vậy trong mọi trường hợp phương trình đã cho không có nghiệm nguyên dương.

Câu 8. Cho 100 số tự nhiên không lớn hơn 100 có tổng bằng 200. Chứng minh rằng từ các số đó có thể chọn được ít nhất một bộ các số có tổng bằng 100.

Hướng dẫn giải

Nếu tất cả các số bằng nhau thì tất cả các số là 2. Khi đó ta lấy 50 số 2 sẽ có tổng là 100.
Giả sử $a_1 \neq a_2$ ta xét 100 số có dạng

$0 < a_1, a_2, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, ..., a_1+a_2+...+a_{99} < 200$

Nếu có một số chia hết cho 100 thì số đó bằng 100 vì số đó bé hơn 200.
Nếu không có số nào chia hết cho 100 thì trong 100 số phải có hai số đồng dư trong phép chia cho 100 (vì các số dư nhận giá trị từ 1 đến 99) suy ra hiệu của chúng chia hết cho 100 và hiệu hai số đó chính là tổng cần tìm

Câu 9. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x,y) với x,y nguyên tố cùng nhau và thỏa mãn phương trình $2(x^3-x)=y^3-y$.

Hướng dẫn giải

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x,y) với x,y nguyên tố cùng nhau và thỏa mãn phương trình $2(x^3-x)=y^3-y$.

Áp dụng đẳng thức $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$. GT

$\Leftrightarrow x^3+x^3+(-y)^3=2x-y \Leftrightarrow (x+x-y)(x^2+x^2+y^2-x.x+xy+yx\ )+3x.x.(-y)=2x-y$

$\Leftrightarrow (2x-y)(x^2+y^2+2xy-1)=3x^2y\ (*) \Rightarrow \begin{cases} 2x-y \mid 3x^2y \\ 2x-y \mid 3x^2(2x-y) \end{cases} \Rightarrow 2x-y \mid 6x^3$

Mặt khác $(2x-y,6x^3)=(2x-y,6)$ (do $(x,y)=1 \Rightarrow (2x-y,x)=1 \Rightarrow (2x-y,x^3)=1$)

$2x-y\in\{1,2,3,6\}$ (do từ $(*)$ $2x-y\in\mathbb{N}^*$)

<u>Trường hợp 1</u>. $2x-y=1 \Leftrightarrow y=2x-1$ thay vào phương trình đã cho ta được

$2(x^3-x)=(2x-1)^3-(2x-1) \Leftrightarrow 6x(x-1)^2=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=1$

<u>Trường hợp 2</u>. $2x-y=2 \Leftrightarrow y=2x-2$ thay vào phương trình đã cho ta được

$(x-1)(x^2-3x+1)=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=0$ (loại)

<u>Trường hợp 3.</u> $2x-y=3 \Leftrightarrow y=2x-3$ thay vào phương trình đã cho ta được

$(x-1)^3 x-4=0 \Rightarrow x=4 \Rightarrow y=5$

<u>Trường hợp 4.</u> $2x-y=6 \Leftrightarrow y=2x-6$ thay vào phương trình đã cho ta được

$x^3-12x^2+36x-35=0$ do $y\in\mathbf{Z}^+, x>3,\ x \mid 35 \Rightarrow x\in\{5,7,35\}$ thử lại không có giá trị nào thỏa mãn. Vậy các cặp $(x,y)=(1\ ,1)$ và $(x,y)=(4\ ,5)$

Câu 10. Cho các số nguyên $a_1,a_2,...,a_{2015}$ với $0\le a_i\le 100$, $i=\overline{1;2015}$. Với mỗi cặp $(a_i;a_{i+1})$ ta cộng thêm 1 vào cả hai số và mỗi cặp đó không được xuất hiện quá k lần. Tìm k nhỏ nhất sao cho hữu hạn lần thực thiện thao tác trên ta được mọi số bằng nhau.

Hướng dẫn giải