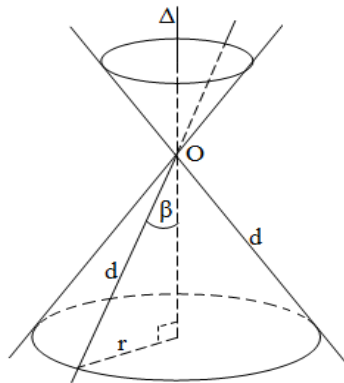


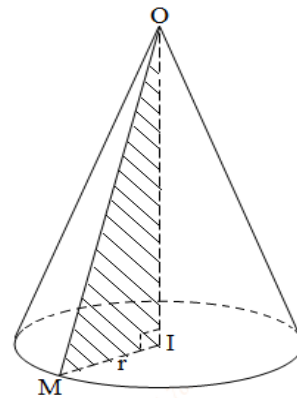
CHỦ ĐỀ 2. MẶT CẦU – MẶT NÓN – MẶT TRỤ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. MẶT NÓN



Hình 1



Hình 2

1/ Mặt nón tròn xoay

Trong mặt phẳng (P) , cho 2 đường thẳng d , Δ cắt nhau tại O và chúng tạo thành góc β với $0^\circ < \beta < 90^\circ$. Khi quay $mp(P)$ xung quanh trục Δ với góc β không thay đổi được gọi là mặt nón tròn xoay đỉnh O (hình 1).

✧ Người ta thường gọi tắt mặt nón tròn xoay là mặt nón.

✧ Đường thẳng Δ gọi là trục, đường thẳng d được gọi là đường sinh và góc 2β gọi là góc ở đỉnh.

2/ Hình nón tròn xoay

Cho $\triangle OIM$ vuông tại I quay quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OIM tạo thành một hình, gọi là hình nón tròn xoay (gọi tắt là hình nón) (hình 2).

✧ Đường thẳng OI gọi là trục, O là đỉnh, OI gọi là đường cao và OM gọi là đường sinh của hình nón.

✧ Hình tròn tâm I , bán kính $r = IM$ là đáy của hình nón.

3/ Công thức diện tích và thể tích của hình nón

Cho hình nón có chiều cao là h , bán kính đáy r và đường sinh là l thì có:

✧ Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi \cdot r \cdot l$

✧ Diện tích đáy (hình tròn): $S_\delta = \pi \cdot r^2$

Diện tích toàn phần hình nón: $S_{tp} = S_{xq} + S_\delta$.

✧ Thể tích khối nón: $V_{non} = \frac{1}{3} S_\delta \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$.

4/ Tính chất:

✧ TH1: Nếu cắt mặt nón tròn xoay bởi $mp(P)$ đi qua đỉnh thì có các trường hợp sau xảy ra:

+ Nếu $mp(P)$ cắt mặt nón theo 2 đường sinh \Rightarrow Thiết diện là tam giác cân.

+ Nếu $mp(P)$ tiếp xúc với mặt nón theo một đường sinh. Trong trường hợp này, người ta gọi đó là mặt phẳng tiếp diện của mặt nón.

- ✧ TH2: Nếu cắt mặt nón tròn xoay bởi mp(Q) **không đi qua đỉnh** thì có các trường hợp sau xảy ra:
 - + Nếu mp(Q) vuông góc với trục hình nón \Rightarrow giao tuyến là một đường tròn.
 - + Nếu mp(Q) song song với 2 đường sinh hình nón \Rightarrow giao tuyến là 2 nhánh của 1 hypebol.
 - + Nếu mp(Q) song song với 1 đường sinh hình nón \Rightarrow giao tuyến là 1 đường parabol.

II. MẶT TRỤ

1/ Mặt trụ tròn xoay

Trong mp(P) cho hai đường thẳng Δ và l song song nhau, cách nhau một khoảng r . Khi quay mp(P) quanh trục cố định Δ thì đường thẳng l sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là mặt trụ tròn xoay hay gọi tắt là mặt trụ.

- ✧ Đường thẳng Δ được gọi là trục C.
- ✧ Đường thẳng l được gọi là đường sinh.
- ✧ Khoảng cách r được gọi là bán kính của mặt trụ.

2/ Hình trụ tròn xoay

Khi quay hình chữ nhật ABCD xung quanh đường thẳng chứa một cạnh, chẳng hạn cạnh AB thì đường gấp khúc ABCD tạo thành một hình, hình đó được gọi là hình trụ tròn xoay hay gọi tắt là hình trụ.

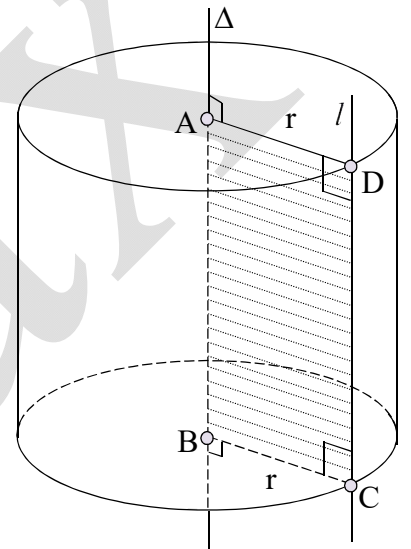
- ✧ Đường thẳng AB được gọi là trục C.
- ✧ Đoạn thẳng CD được gọi là đường sinh.
- ✧ Độ dài đoạn thẳng $AB = CD = h$ được gọi là chiều cao của hình trụ.
- ✧ Hình tròn tâm A, bán kính $r = AD$ và hình tròn tâm B, bán kính $r = BC$ được gọi là 2 đáy của hình trụ.
- ✧ Khối trụ tròn xoay, gọi tắt là khối trụ, là phần không gian giới hạn bởi hình trụ tròn xoay kể cả hình trụ.

3/ Công thức tính diện tích và thể tích của hình trụ

Cho hình trụ có chiều cao là h và bán kính đáy bằng r , khi đó:

- ✧ Diện tích xung quanh của hình trụ: $S_{xq} = 2\pi rh$
- ✧ Diện tích toàn phần của hình trụ: $S_{tp} = S_{xq} + 2.S_{\text{Đáy}} = 2\pi rh + 2\pi r^2$
- ✧ Thể tích khối trụ: $V = B.h = \pi r^2 h$

4/ Tính chất:



- ✧ Nếu cắt mặt trụ tròn xoay (có bán kính là r) bởi một $mp(\alpha)$ vuông góc với trục Δ thì ta được đường tròn có tâm trên Δ và có bán kính bằng r với r cũng chính là bán kính của mặt trụ đó.
- ✧ Nếu cắt mặt trụ tròn xoay (có bán kính là r) bởi một $mp(\alpha)$ không vuông góc với trục Δ nhưng cắt tất cả các đường sinh, ta được giao tuyến là một đường elíp có trục nhỏ bằng $2r$ và trục lớn bằng $\frac{2r}{\sin \varphi}$, trong đó φ là góc giữa trục Δ và $mp(\alpha)$ với $0^\circ < \varphi < 90^\circ$.
- ✧ Cho $mp(\alpha)$ song song với trục Δ của mặt trụ tròn xoay và cách Δ một khoảng d .
 - + Nếu $d < r$ thì $mp(\alpha)$ cắt mặt trụ theo hai đường sinh \Rightarrow thiết diện là hình chữ nhật.
 - + Nếu $d = r$ thì $mp(\alpha)$ tiếp xúc với mặt trụ theo một đường sinh.
 - + Nếu $d > r$ thì $mp(\alpha)$ không cắt mặt trụ.

III. MẶT CẦU

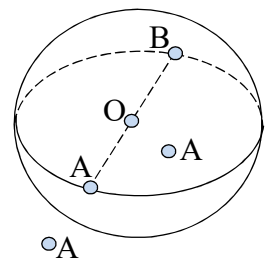
1/ Định nghĩa

Tập hợp các điểm M trong không gian cách điểm O cố định một khoảng R gọi là mặt cầu tâm O , bán kính R , kí hiệu là: $S(O; R)$. Khi đó $S(O; R) = \{M \mid OM = R\}$

2/ Vị trí tương đối của một điểm đối với mặt cầu

Cho mặt cầu $S(O; R)$ và một điểm A bất kì, khi đó:

- ✧ Nếu $OA = R \Leftrightarrow A \in S(O; R)$. Khi đó OA gọi là bán kính mặt cầu. Nếu OA và OB là hai bán kính sao cho $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$ thì đoạn thẳng AB gọi là một đường kính của mặt cầu.
- ✧ Nếu $OA < R \Leftrightarrow A$ nằm trong mặt cầu.
- ✧ Nếu $OA > R \Leftrightarrow A$ nằm ngoài mặt cầu.
 \Rightarrow Khối cầu $S(O; R)$ là tập hợp tất cả các điểm M sao cho $OM \leq R$.

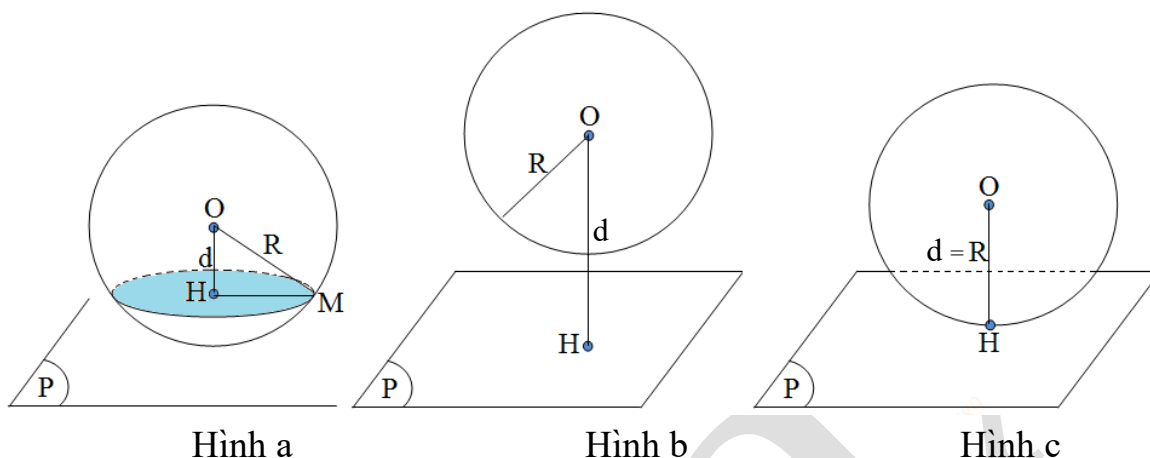


3/ Vị trí tương đối của mặt phẳng và mặt cầu

Cho mặt cầu $S(O; R)$ và một $mp(P)$. Gọi d là khoảng cách từ tâm O của mặt cầu đến $mp(P)$ và H là hình chiếu của O trên $mp(P) \Rightarrow d = OH$.

- ✧ Nếu $d < R \Leftrightarrow mp(P)$ cắt mặt cầu $S(O; R)$ theo giao tuyến là đường tròn nằm trên $mp(P)$ có tâm là H và bán kính $r = HM = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{R^2 - OH^2}$ (hình a).

- ✧ Nếu $d > R \Leftrightarrow mp(P)$ không cắt mặt cầu $S(O; R)$ (hình b).
- ✧ Nếu $d = R \Leftrightarrow mp(P)$ có một điểm chung duy nhất. Ta nói mặt cầu $S(O; R)$ tiếp xúc $mp(P)$. Do đó, điều kiện cần và đủ để $mp(P)$ tiếp xúc với mặt cầu $S(O; R)$ là $d(O, (P)) = R$ (hình c).



4/ Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt cầu

Cho mặt cầu $S(O; R)$ và một đường thẳng Δ . Gọi H là hình chiếu của O trên đường thẳng Δ và $d = OH$ là khoảng cách từ tâm O của mặt cầu đến đường thẳng Δ . Khi đó:

- ✧ Nếu $d > R \Leftrightarrow \Delta$ không cắt mặt cầu $S(O; R)$.
- ✧ Nếu $d < R \Leftrightarrow \Delta$ cắt mặt cầu $S(O; R)$ tại hai điểm phân biệt.
- ✧ Nếu $d = R \Leftrightarrow \Delta$ và mặt cầu tiếp xúc nhau (tại một điểm duy nhất). Do đó: điều kiện cần và đủ để đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu là $d = d(O, \Delta) = R$.

Định lí: Nếu điểm A nằm ngoài mặt cầu $S(O; R)$ thì:

- ✧ Qua A có vô số tiếp tuyến với mặt cầu $S(O; R)$.
- ✧ Độ dài đoạn thẳng nối A với các tiếp điểm đều bằng nhau.
- ✧ Tập hợp các điểm này là một đường tròn nằm trên mặt cầu $S(O; R)$.

5/ Diện tích và thể tích mặt cầu

• Diện tích mặt cầu: $S_C = 4\pi R^2$.

• Thể tích mặt cầu: $V_C = \frac{4}{3}\pi R^3$.

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

I. Mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện

1/ Các khái niệm cơ bản

- ✧ **Trục của đa giác đáy:** là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp của đa giác đáy và vuông góc với mặt phẳng chứa đa giác đáy.
 \Rightarrow Bất kì một điểm nào nằm trên trục của đa giác thì cách đều các đỉnh của đa giác đó.

❖ **Đường trung trực của đoạn thẳng:** là đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó.

⇒ Bất kì một điểm nào nằm trên đường trung trực thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng.

❖ **Mặt trung trực của đoạn thẳng:** là mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó.

⇒ Bất kì một điểm nào nằm trên mặt trung trực thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng.

2/ Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

❖ **Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp:** là điểm cách đều các đỉnh của hình chóp. Hay nói cách khác, nó chính là giao điểm I của trục đường tròn ngoại tiếp mặt phẳng đáy và mặt phẳng trung trực của một cạnh bên hình chóp.

❖ **Bán kính:** là khoảng cách từ I đến các đỉnh của hình chóp.

3/ Cách xác định tâm và bán kính mặt cầu của một số hình đa diện cơ bản

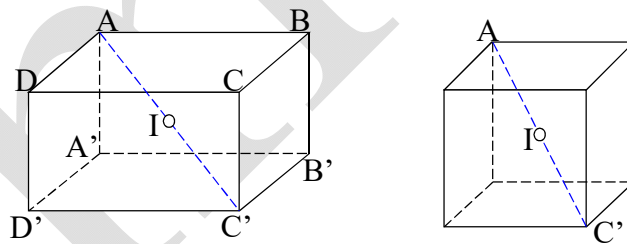
a/ Hình hộp chữ nhật, hình lập phương.

- **Tâm:** trùng với tâm đối xứng của hình hộp chữ nhật (hình lập phương).

⇒ Tâm là I , là trung điểm của AC' .

- **Bán kính:** bằng nửa độ dài đường chéo hình hộp chữ nhật (hình lập phương).

⇒ Bán kính: $R = \frac{AC'}{2}$.



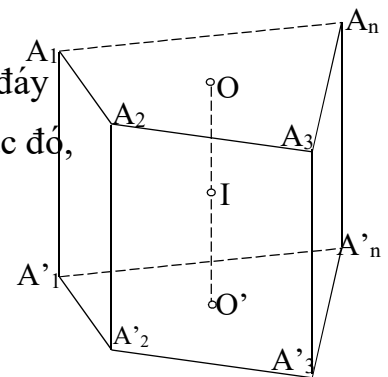
b/ Hình lăng trụ đứng có đáy nội tiếp đường tròn.

Xét hình lăng trụ đứng $A_1A_2A_3...A_n.A'_1A'_2A'_3...A'_n$, trong đó có 2 đáy $A_1A_2A_3...A_n$ và $A'_1A'_2A'_3...A'_n$ nội tiếp đường tròn (O) và (O') . Lúc đó,

mặt cầu nội tiếp hình lăng trụ đứng có:

- **Tâm:** I với I là trung điểm của OO' .

- **Bán kính:** $R = IA_1 = IA_2 = \dots = IA'_n$.



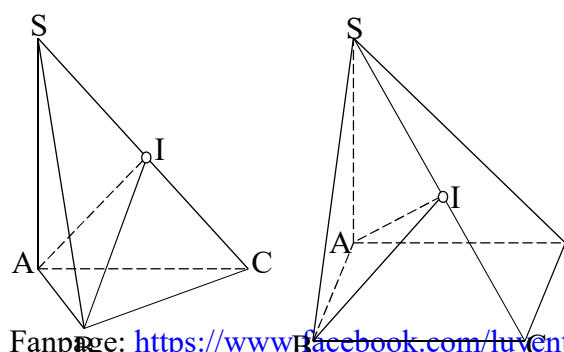
c/ Hình chóp có các đỉnh nhìn đoạn thẳng nối 2 đỉnh còn lại dưới 1 góc vuông.

- Hình chóp $S.ABC$ có $\sphericalangle SAC = \sphericalangle SBC = 90^\circ$.

+ Tâm: I là trung điểm của SC .

+ Bán kính: $R = \frac{SC}{2} = IA = IB = IC$.

- Hình chóp $S.ABCD$ có



$$\angle SAC = \angle SBC = \angle SDC = 90^\circ.$$

+ Tâm: I là trung điểm của SC .

$$+ \text{ Bán kính: } R = \frac{SC}{2} = IA = IB = IC = ID.$$

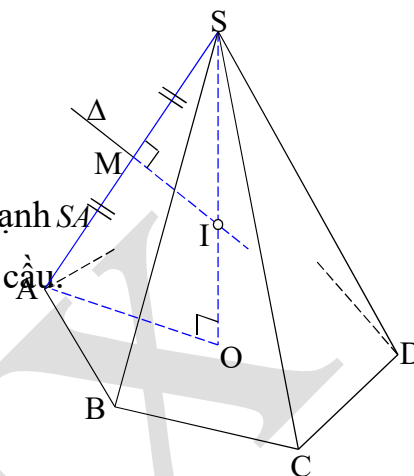
d/ Hình chóp đều.

Cho hình chóp đều $S.ABC\dots$

- Gọi O là tâm của đáy $\Rightarrow SO$ là trục của đáy.
- Trong mặt phẳng xác định bởi SO và một cạnh bên, chẳng hạn như $mp(SAO)$, ta vẽ đường trung trực của cạnh SA là Δ cắt SA tại M và cắt SO tại $I \Rightarrow I$ là tâm của mặt cầu.
- Bán kính:

$$\text{Ta có: } \triangle SMI \square \triangle SOA \Rightarrow \frac{SM}{SO} = \frac{SI}{SA} \Rightarrow \text{Bán kính là:}$$

$$R = IS = \frac{SM \cdot SA}{SO} = \frac{SA^2}{2SO} = IA = IB = IC = \dots$$



e/ Hình chóp có cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy.

Cho hình chóp $S.ABC\dots$ có cạnh bên $SA \perp$ đáy $(ABC\dots)$ và đáy $ABC\dots$ nội tiếp được trong đường tròn tâm O . Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC\dots$ được xác định như sau:

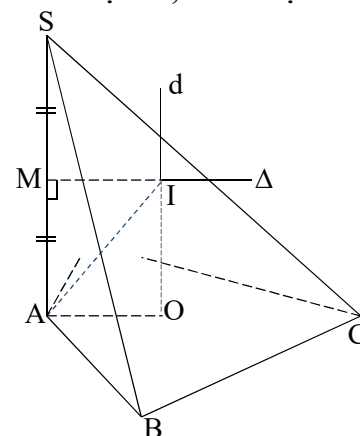
- Từ tâm O ngoại tiếp của đường tròn đáy, ta vẽ đường thẳng d vuông góc với $mp(ABC\dots)$ tại O .
- Trong $mp(d, SA)$, ta dựng đường trung trực Δ của cạnh SA , cắt SA tại M , cắt d tại I .
 $\Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp và bán kính $R = IA = IB = IC = IS = \dots$

- Tìm bán kính:

Ta có: $MIOB$ là hình chữ nhật.

Xét $\triangle MAI$ vuông tại M có:

$$R = AI = \sqrt{MI^2 + MA^2} = \sqrt{AO^2 + \left(\frac{SA}{2}\right)^2}.$$

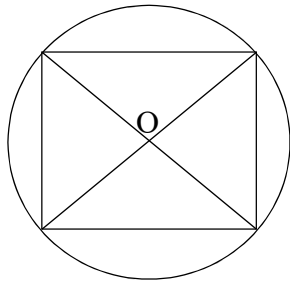


f/ Hình chóp khác.

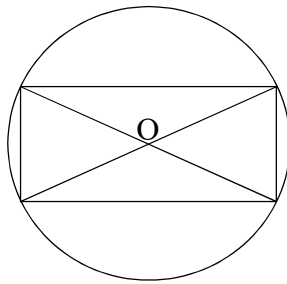
- Dựng trục Δ của đáy.
- Dựng mặt phẳng trung trực (α) của một cạnh bên bất kì.
- $(\alpha) \cap \Delta = I \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.
- Bán kính: khoảng cách từ I đến các đỉnh của hình chóp.

g/ Đường tròn ngoại tiếp một số đa giác thường gặp.

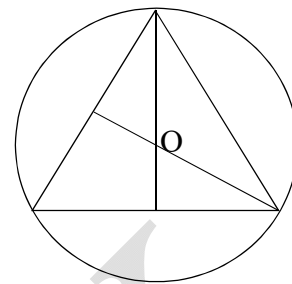
Khi xác định tâm mặt cầu, ta cần xác định trục của mặt phẳng đáy, đó chính là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng đáy tại tâm O của đường tròn ngoại tiếp đáy. Do đó, việc xác định tâm ngoại O là yếu tố rất quan trọng của bài toán.



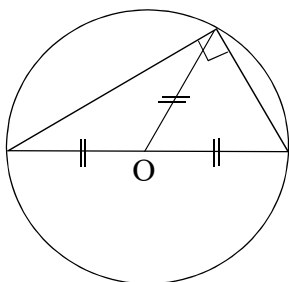
Hình vuông: O là giao điểm 2 đường chéo.



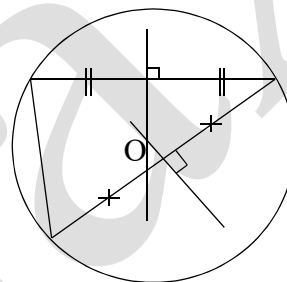
Hình chữ nhật: O là giao điểm của hai đường chéo.



Δ đều: O là giao điểm của 2 đường trung tuyến (trọng



Δ vuông: O là trung điểm của cạnh huyền.



Δ thường: O là giao điểm của hai đường trung trực của hai

II. KỸ THUẬT XÁC ĐỊNH MẶT CẦU NGOẠI TIẾP HÌNH CHÓP.

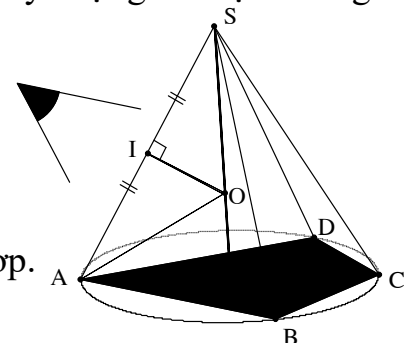
Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ (thỏa mãn điều kiện tồn tại mặt cầu ngoại tiếp). Thông thường, để xác định mặt cầu ngoại tiếp hình chóp ta thực hiện theo hai bước:

Bước 1: Xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy. Dụng Δ : trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

Bước 2: Lập mặt phẳng trung trực (α) của một cạnh bên.

Lúc đó :

- Tâm O của mặt cầu: $\Delta \cap mp(\alpha) = \{O\}$
- Bán kính: $R = SA (= SO)$. Tùy vào từng trường hợp.

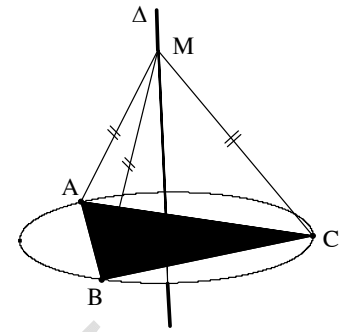


Lưu ý: Kỹ năng xác định trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

1. Trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy: là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp đáy và vuông góc với mặt phẳng đáy.

Tính chất: $\forall M \in \Delta: MA = MB = MC$

Suy ra: $MA = MB = MC \Leftrightarrow M \in \Delta$



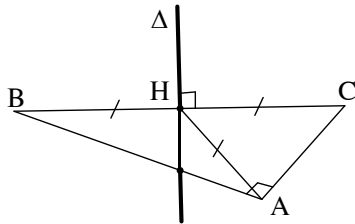
2. Các bước xác định trục:

- **Bước 1:** Xác định tâm H của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

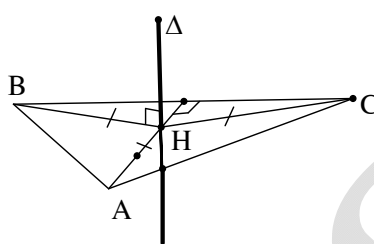
- **Bước 2:** Qua H dựng Δ vuông góc với mặt phẳng đáy.

VD: Một số trường hợp đặc biệt

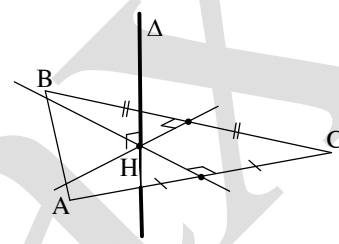
A. Tam giác vuông



B. Tam giác đều

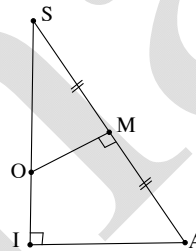


C. Tam giác bất kì



3. Lưu ý: Kỹ năng tam giác đồng dạng

$$\Delta SMO \text{ đồng dạng với } \Delta SIA \Rightarrow \frac{SO}{SA} = \frac{SM}{SI}$$

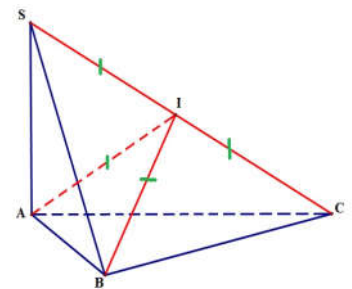


4. Nhận xét quan trọng:

$$\exists M, S: \begin{cases} MA = MB = MC \\ SA = SB = SC \end{cases} \Rightarrow SM \text{ là trục đường tròn ngoại tiếp } \Delta ABC.$$

5. Ví dụ: Tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp
Dạng 1: Chóp có các điểm cùng nhìn một đoạn dưới một góc vuông.

Ví dụ: Cho $S.ABC: \begin{cases} SA \perp (ABC) \\ \Delta ABC \perp B \end{cases}$. Theo đề bài:



$$\begin{cases} BC \perp AB (gt) \\ BC \perp SA (SA \perp (ABC)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$$

Ta có B và A nhìn SC dưới một góc vuông

\Rightarrow nên B và A cùng nằm trên một mặt cầu có đường kính là SC.

Gọi I là trung điểm SC \Rightarrow I là tâm MCNT khối chóp S.ABC và bán kính $R = SI$.

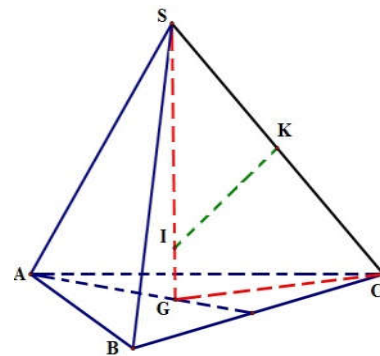
Dạng 2: Chóp có các cạnh bên bằng nhau.

Ví dụ: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$.

+ Vẽ $SG \perp (ABC)$ thì G là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

+ Trên mặt phẳng (SGC) , vẽ đường trung trực của SC , đường này cắt SG tại I thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp $S.ABC$ và bán kính $R = IS$.

+ Ta có $\Delta SGC \sim \Delta SKI$ (g - g) $\Rightarrow \frac{SG}{SK} = \frac{SC}{SI} \Rightarrow \boxed{R = \frac{SC \cdot SK}{SG} = \frac{SC^2}{2SG}}$



Dạng 3: Chóp có một mặt bên vuông góc với đáy.

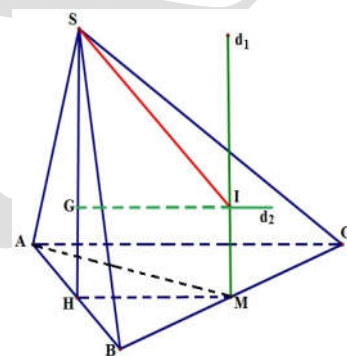
Ví dụ: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A . Mặt bên $(SAB) \perp (ABC)$ và ΔSAB đều. Gọi H, M lần lượt là trung điểm của AB, AC .

Ta có M là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC (do $MA = MB = MC$).

Dựng d_1 là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC (d_1 qua M và song song SH).

Gọi G là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔSAB và d_2 là trục đường tròn ngoại tiếp ΔSAB , d_2 cắt d_1 tại $I \Rightarrow I$ là tâm **mặt cầu ngoại tiếp** khối chóp $S.ABC$

\Rightarrow Bán kính $R = SI$. Xét $\Delta SGI \rightarrow SI = \sqrt{GI^2 + SG^2}$.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

MẶT CẦU

Câu 1. Cho một mặt cầu có diện tích là S , thể tích khối cầu đó là V . Tính bán kính R của mặt cầu.

- A.** $R = \frac{3V}{S}$. **B.** $R = \frac{S}{3V}$. **C.** $R = \frac{4V}{S}$. **D.** $R = \frac{V}{3S}$.

Câu 2. Cho mặt cầu $S(O; R)$ và điểm A cố định với $OA = d$. Qua A , kẻ đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu $S(O; R)$ tại M . Công thức nào sau đây được dùng để tính độ dài đoạn thẳng AM ?

- A.** $\sqrt{2R^2 - d^2}$. **B.** $\sqrt{d^2 - R^2}$. **C.** $\sqrt{R^2 - 2d^2}$. **D.** $\sqrt{d^2 + R^2}$.

Câu 3. Một hình hộp chữ nhật có ba kích thước là a, b, c . Gọi (S) là mặt cầu đi qua 8 đỉnh của hình hộp chữ nhật đó. Tính diện tích của hình cầu (S) theo a, b, c .

- A.** $\pi(a^2 + b^2 + c^2)$. **B.** $2\pi(a^2 + b^2 + c^2)$.
C. $4\pi(a^2 + b^2 + c^2)$. **D.** $\frac{\pi}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$.

Câu 4. Một hình hộp chữ nhật có ba kích thước là a, b, c . Gọi (S) là mặt cầu đi qua 8 đỉnh của hình hộp chữ nhật đó. Tâm của mặt cầu (S) là

- A.** một đỉnh bất kì của hình hộp chữ nhật.
B. tâm của một mặt bên của hình hộp chữ nhật.
C. trung điểm của một cạnh của hình hộp chữ nhật.
D. tâm của hình hộp chữ nhật.

Câu 5. Cho mặt cầu $S(O; R)$ và đường thẳng Δ . Biết khoảng cách từ O tới Δ bằng d . Đường thẳng Δ tiếp xúc với $S(O; R)$ khi thỏa mãn điều kiện nào trong các điều kiện sau?

- A.** $d = R$. **B.** $d > R$. **C.** $d < R$. **D.** $d \neq R$.

Câu 6. Cho đường tròn (C) và điểm A nằm ngoài mặt phẳng chứa (C) . Có tất cả bao nhiêu mặt cầu chứa đường tròn (C) và đi qua A ?

- A.** 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** vô số.

Câu 7. Cho hai điểm A, B phân biệt. Tập hợp tâm những mặt cầu đi qua A và B là

- A.** mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB . **B.** đường thẳng trung trực của AB .
C. mặt phẳng song song với đường thẳng AB . **D.** trung điểm của đoạn thẳng AB .