CHUYÊN ĐỀ 1 - PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

A. MỤC TIÊU:

* Hệ thống lại các dạng toán và các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử

* Giải một số bài tập về phân tích đa thức thành nhân tử

* Nâng cao trình độ và kỹ năng về phân tích đa thức thành nhân tử

B. CÁC PHƯƠNG PHÁP VÀ BÀI TẬP

I. TÁCH MỘT HẠNG TỬ THÀNH NHIỀU HẠNG TỬ:

Định lí bổ sung:

+ Đa thức f(x) có nghiệm hữu tỉ thì có dạng p/q trong đó p là ước của hệ số tự do, q là ước dương của hệ số cao nhất

+ Nếu f(x) có tổng các hệ số bằng 0 thì f(x) có một nhân tử là $x - 1$

+ Nếu f(x) có tổng các hệ số của các hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của các hạng tử bậc lẻ thì f(x) có một nhân tử là $x + 1$

+ Nếu a là nghiệm nguyên của f(x) và f(1); f(- 1) khác 0 thì $\frac{f(1)}{a-1}$ và $\frac{f(-1)}{a+1}$ đều là số nguyên.

Để nhanh chóng loại trừ nghiệm là ước của hệ số tự do

1. Ví dụ 1: $3x^2 - 8x + 4$

Cách 1: Tách hạng tử thứ 2

$3x^2 - 8x + 4 = 3x^2 - 6x - 2x + 4 = 3x(x - 2) - 2(x - 2) = (x - 2)(3x - 2)$

Cách 2: Tách hạng tử thứ nhất:

$3x^2 - 8x + 4 = (4x^2 - 8x + 4) - x^2 = (2x - 2)^2 - x^2 = (2x - 2 + x)(2x - 2 - x)$

$= (x - 2)(3x - 2)$

Ví dụ 2: $x^3 - x^2 - 4$

Ta nhân thấy nghiệm của f(x) nếu có thì $x = \pm1; \pm2; \pm4$, chỉ có f(2) = 0 nên x = 2 là nghiệm của f(x) nên f(x) có một nhân tử là $x - 2$. Do đó ta tách f(x) thành các nhóm có xuất hiện một nhân tử là $x - 2$

Cách 1:

$x^3 - x^2 - 4 = (x^3 - 2x^2) + (x^2 - 2x) + (2x - 4) = x^2(x - 2) + x(x - 2) + 2(x - 2) = (x - 2)(x^2 + x + 2)$

Cách 2: $x^3 - x^2 - 4 = x^3 - 8 - x^2 + 4 = \left(x^3 - 8\right) - \left(x^2 - 4\right) = (x-2)(x^2+2x+4) - (x-2)(x+2)$

$$= (x-2)\left[\left(x^2+2x+4\right) - (x+2)\right] = (x-2)(x^2+x+2)$$

Ví dụ 3: f(x) = $3x^3 - 7x^2 + 17x - 5$

Nhận xét: $\pm1, \pm5$ không là nghiệm của f(x), như vậy f(x) không có nghiệm nguyên. Nên f(x) nếu có nghiệm thì là nghiệm hữu tỉ

Ta nhận thấy x = $\frac{1}{3}$ là nghiệm của f(x) do đó f(x) có một nhân tử là $3x - 1$. Nên

f(x) = $3x^3 - 7x^2 + 17x - 5 = 3x^3 - x^2 - 6x^2 + 2x + 15x - 5 = \left(3x^3 - x^2\right) - \left(6x^2 - 2x\right) + \left(15x - 5\right)$

$$= x^2(3x-1) - 2x(3x-1) + 5(3x-1) = (3x-1)(x^2-2x+5)$$

Vì $x^2 - 2x + 5 = (x^2 - 2x + 1) + 4 = (x-1)^2 + 4 > 0$ với mọi x nên không phân tích được thành nhân tử nữa

Ví dụ 4: $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$

Nhận xét: Tổng các hệ số của các hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của các hạng tử bậc lẻ nên đa thức có một nhân tử là x + 1

$x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = (x^3 + x^2) + (4x^2 + 4x) + (4x + 4) = x^2(x + 1) + 4x(x + 1) + 4(x + 1)$

$= (x + 1)(x^2 + 4x + 4) = (x + 1)(x + 2)^2$

Ví dụ 5: $f(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 2$

Tổng các hệ số bằng 0 thì nên đa thức có một nhân tử là x – 1, chia f(x) cho (x – 1) ta có:

$x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 2 = (x - 1)(x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x - 2)$

Vì $x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x - 2$ không có nghiệm nguyên cũng không có nghiệm hữu tỉ nên không phân tích được nữa

Ví dụ 6: $x^4 + 1997x^2 + 1996x + 1997 = (x^4 + x^2 + 1) + (1996x^2 + 1996x + 1996)$

$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + 1996(x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1 + 1996) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1997)$

Ví dụ 7: $x^2 - x - 2001.2002 = x^2 - x - 2001.(2001 + 1)$

$= x^2 - x - 2001^2 - 2001 = (x^2 - 2001^2) - (x + 2001) = (x + 2001)(x - 2002)$

II. THÊM , BỚT CÙNG MỘT HẠNG TỬ:

1. Thêm, bớt cùng một số hạng tử để xuất hiện hiệu hai bình phương:

Ví dụ 1: $4x^4 + 81 = 4x^4 + 36x^2 + 81 - 36x^2 = (2x^2 + 9)^2 – 36x^2$

$= (2x^2 + 9)^2 – (6x)^2 = (2x^2 + 9 + 6x)(2x^2 + 9 – 6x)$

$= (2x^2 + 6x + 9)(2x^2 – 6x + 9)$

Ví dụ 2: $x^8 + 98x^4 + 1 = (x^8 + 2x^4 + 1) + 96x^4$

$= (x^4 + 1)^2 + 16x^2(x^4 + 1) + 64x^4 - 16x^2(x^4 + 1) + 32x^4$

$= (x^4 + 1 + 8x^2)^2 – 16x^2(x^4 + 1 – 2x^2) = (x^4 + 8x^2 + 1)^2 - 16x^2(x^2 – 1)^2$

$= (x^4 + 8x^2 + 1)^2 - (4x^3 – 4x)^2$

$= (x^4 + 4x^3 + 8x^2 – 4x + 1)(x^4 - 4x^3 + 8x^2 + 4x + 1)$

2. Thêm, bớt cùng một số hạng tử để xuất hiện nhân tử chung

Ví dụ 1: $x^7 + x^2 + 1 = (x^7 – x) + (x^2 + x + 1) = x(x^6 – 1) + (x^2 + x + 1)$

$= x(x^3 - 1)(x^3 + 1) + (x^2 + x + 1) = x(x – 1)(x^2 + x + 1) (x^3 + 1) + (x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x + 1)[x(x – 1)(x^3 + 1) + 1] = (x^2 + x + 1)(x^5 – x^4 + x^2 - x + 1)$

Ví dụ 2: $x^7 + x^5 + 1 = (x^7 – x) + (x^5 – x^2) + (x^2 + x + 1)$

$= x(x^3 – 1)(x^3 + 1) + x^2(x^3 – 1) + (x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x + 1)(x – 1)(x^4 + x) + x^2 (x – 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x + 1)[(x^5 – x^4 + x^2 – x) + (x^3 – x^2) + 1] = (x^2 + x + 1)(x^5 – x^4 + x^3 – x + 1)$

Ghi nhớ:

Các đa thức có dạng $x^{3m+1} + x^{3n+2} + 1$ như: $x^7 + x^2 + 1$; $x^7 + x^5 + 1$; $x^8 + x^4 + 1$; $x^5 + x + 1$; $x^8 + x + 1$; … đều có nhân tử chung là $x^2 + x + 1$

III. ĐẶT BIẾN PHỤ:

Ví dụ 1: $x(x + 4)(x + 6)(x + 10) + 128 = [x(x + 10)][(x + 4)(x + 6)] + 128$

$= (x^2 + 10x) + (x^2 + 10x + 24) + 128$

Đặt $x^2 + 10x + 12 = y$, đa thức có dạng

$(y – 12)(y + 12) + 128 = y^2 – 144 + 128 = y^2 – 16 = (y + 4)(y – 4)$

$= (x^2 + 10x + 8)(x^2 + 10x + 16) = (x + 2)(x + 8)(x^2 + 10x + 8)$

Ví dụ 2: $A = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$

Giả sử $x \neq 0$ ta viết

$$x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 = x^2\left(x^2 + 6x + 7 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = x^2\left[\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 6\left(x - \frac{1}{x}\right) + 7\right]$$

Đặt $x - \frac{1}{x} = y$ thì $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2$, do đó

$$A = x^2(y^2 + 2 + 6y + 7) = x^2(y + 3)^2 = (xy + 3x)^2 = \left[x\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 3x\right]^2 = (x^2 + 3x - 1)^2$$

Chú ý: Ví dụ trên có thể giải bằng cách áp dụng hằng đẳng thức như sau:

$A = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 = x^4 + (6x^3 - 2x^2) + (9x^2 - 6x + 1)$

$= x^4 + 2x^2(3x - 1) + (3x - 1)^2 = (x^2 + 3x - 1)^2$

Ví dụ 3: $A = (x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z)^2 + (xy + yz + zx)^2$

$= \left[(x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + zx)\right](x^2 + y^2 + z^2) + (xy + yz + zx)^2$

Đặt $x^2 + y^2 + z^2 = a$, $xy + yz + zx = b$ ta có

$A = a(a + 2b) + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = (x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx)^2$

Ví dụ 4: $B = 2(x^4 + y^4 + z^4) - (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z)^2 + (x + y + z)^4$

Đặt $x^4 + y^4 + z^4 = a$, $x^2 + y^2 + z^2 = b$, $x + y + z = c$ ta có:

$B = 2a - b^2 - 2bc^2 + c^4 = 2a - 2b^2 + b^2 - 2bc^2 + c^4 = 2(a - b^2) + (b - c^2)^2$

Ta lại có: $a - b^2 = -2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$ và $b - c^2 = -2(xy + yz + zx)$ Do đó;

$B = -4(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + 4(xy + yz + zx)^2$

$= -4x^2y^2 - 4y^2z^2 - 4z^2x^2 + 4x^2y^2 + 4y^2z^2 + 4z^2x^2 + 8x^2yz + 8xy^2z + 8xyz^2 = 8xyz(x + y + z)$

Ví dụ 5: $(a + b + c)^3 - 4(a^3 + b^3 + c^3) - 12abc$

Đặt $a + b = m$, $a - b = n$ thì $4ab = m^2 - n^2$

$a^3 + b^3 = (a + b)[(a - b)^2 + ab] = m\left(n^2 + \frac{m^2 - n^2}{4}\right)$. Ta có:

$C = (m + c)^3 - 4.\frac{m^3 + 3mn^2}{4} - 4c^3 - 3c(m^2 - n^2) = 3(-c^3 + mc^2 - mn^2 + cn^2)$

$= 3[c^2(m - c) - n^2(m - c)] = 3(m - c)(c - n)(c + n) = 3(a + b - c)(c + a - b)(c - a + b)$

III. PHƯƠNG PHÁP HỆ SỐ BẤT ĐỊNH:

Ví dụ 1: $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3$

Nhận xét: các số $\pm 1, \pm 3$ không là nghiệm của đa thức, đa thức không có nghiệm nguyên củng không có nghiệm hữu tỉ

Như vậy nếu đa thức phân tích được thành nhân tử thì phải có dạng

$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = x^4 + (a + c)x^3 + (ac + b + d)x^2 + (ad + bc)x + bd$

đồng nhất đa thức này với đa thức đã cho ta có: $\begin{cases} a+c=-6 \\ ac+b+d=12 \\ ad+bc=-14 \\ bd=3 \end{cases}$

Xét bd = 3 với b, d $\in$ Z, b $\in \{\pm 1, \pm 3\}$ với b = 3 thì d = 1 hệ điều kiện trên trở thành

$$\begin{cases} a+c=-6 \\ ac=-8 \\ a+3c=-14 \\ bd=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c=-8 \\ ac=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=-4 \\ a=-2 \end{cases}$$

Vậy: $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3 = (x^2 - 2x + 3)(x^2 - 4x + 1)$

Ví dụ 2: $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8$

Nhận xét: đa thức có 1 nghiệm là x = 2 nên có thừa số là x - 2 do đó ta có:

$2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8 = (x - 2)(2x^3 + ax^2 + bx + c)$

$= 2x^4 + (a - 4)x^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c \Rightarrow \begin{cases} a-4=-3 \\ b-2a=-7 \\ c-2b=6 \\ -2c=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-5 \\ c=-4 \end{cases}$

Suy ra: $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8 = (x - 2)(2x^3 + x^2 - 5x - 4)$

Ta lại có $2x^3 + x^2 - 5x - 4$ là đa thức có tổng hệ số của các hạng tử bậc lẻ và bậc chẵn bằng nahu nên có 1 nhân tử là x + 1 nên $2x^3 + x^2 - 5x - 4 = (x + 1)(2x^2 - x - 4)$

Vậy: $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8 = (x - 2)(x + 1)(2x^2 - x - 4)$

Ví dụ 3:

$12x^2 + 5x - 12y^2 + 12y - 10xy - 3 = (ax + by + 3)(cx + dy - 1)$

$= acx^2 + (3c - a)x + bdy^2 + (3d - b)y + (bc + ad)xy - 3$

$$\Rightarrow \begin{cases} ac = 12 \\ bc + ad = -10 \\ 3c - a = 5 \\ bd = -12 \\ 3d - b = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ c = 3 \\ b = -6 \\ d = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow 12x^2 + 5x - 12y^2 + 12y - 10xy - 3 = (4x - 6y + 3)(3x + 2y - 1)$

BÀI TẬP:

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

10) $64x^4 + y^4$

11) $a^6 + a^4 + a^2b^2 + b^4 - b^6$

12) $x^3 + 3xy + y^3 - 1$

13) $4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1$

14) $x^8 + x + 1$

15) $x^8 + 3x^4 + 4$

16) $3x^2 + 22xy + 11x + 37y + 7y^2 + 10$

17) $x^4 - 8x + 63$

N ĐỀ 2 - SƠ LƯỢC VỀ CHỈNH HỢP,

CHUYÊN ĐỀ 2: HOÁN VỊ, TỔ HỢP

A. MỤC TIÊU:

* Bước đầu HS hiểu về chỉnh hợp, hoán vị và tổ hợp

* Vận dụng kiến thức vào một ssó bài toán cụ thể và thực tế

* Tạo hứng thú và nâng cao kỹ năng giải toán cho HS

B. KIẾN THỨC:

I. Chỉnh hợp:

1. định nghĩa: Cho một tập hợp X gồm n phần tử. Mỗi cách sắp xếp k phần tử của tập hợp X ($1 \le k \le n$) theo một thứ tự nhất định gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử ấy

Số tất cả các chỉnh hợp chập k của n phần tử được kí hiệu A_n^k

2. Tính số chỉnh chập k của n phần tử

$$\boxed{A_n^k = n(n - 1)(n - 2)\ldots[n - (k - 1)]}$$

II. Hoán vị:

1. Định nghĩa: Cho một tập hợp X gồm n phần tử. Mỗi cách sắp xếp n phần tử của tập hợp X theo một thứ tự nhất định gọi là một hoán vị của n phần tử ấy

Số tất cả các hoán vị của n phần tử được kí hiệu P_n

2. Tính số hoán vị của n phần tử

(n! : n giai thừa)

$$\boxed{P_n = A_n^n = n(n - 1)(n - 2)\ldots 2 .1 = n!}$$

III. Tổ hợp:

1. Định nghĩa: Cho một tập hợp X gồm n phần tử. Mỗi tập con của X gồm k phần tử trong n phần tử của tập hợp X ($0 \le k \le n$) gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử ấy

Số tất cả các tổ hợp chập k của n phần tử được kí hiệu C_n^k

2. Tính số tổ hợp chập k của n phần tử

$$\boxed{C_n^k = A_n^n : k! = \frac{n(n - 1)(n - 2)\ldots[n - (k - 1)]}{k!}}$$

C. Ví dụ:

1. Ví dụ 1:

Cho 5 chữ số: 1, 2, 3, 4, 5

a) có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số, các chữ số khác nhau, lập bởi ba trong các chữ số trên

b) Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số, các chữ số khác nhau, lập bởi cả 5 chữ số trên

c)Có bao nhiêu cách chọn ra ba chữ số trong 5 chữ số trên

Giải:

a) số tự nhiên có ba chữ số, các chữ số khác nhau, lập bởi ba trong các chữ số trên là chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử: $A_5^3 = 5.(5 - 1).(5 - 2) = 5 . 4 . 3 = 60$ số

b) số tự nhiên có 5 chữ số, các chữ số khác nhau, lập bởi cả 5 chữ số trên là hoán vị cua 5 phần tử (chỉnh hợp chập 5 của 5 phần tử):

$A_5^5 = 5.(5 - 1).(5 - 2).(5 - 3).(5 - 4) = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120$ số

c) cách chọn ra ba chữ số trong 5 chữ số trên là tổ hợp chập 3 của 5 phần tử:

$$C_5^3 = \frac{5.(5 - 1).(5 - 2)}{3!} = \frac{5 . 4 . 3}{3.(3 - 1)(3 - 2)} = \frac{60}{6} = 10 \text{ nhóm}$$

2. Ví dụ 2:

Cho 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 5. Dùng 5 chữ số này:

a) Lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số trong đó không có chữ số nào lặp lại? Tính tổng các số lập được

b) lập được bao nhiêu số chẵn có 5 chữ số khác nhau?

c) Lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số, trong đó hai chữ số kề nhau phải khác nhau

d) Lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số, các chữ số khác nhau, trong đó có hai chữ số lẻ, hai chữ số chẵn

Giải

a) số tự nhiên có 4 chữ số, các chữ số khác nhau, lập bởi 4 trong các chữ số trên là chỉnh hợp chập 4 của 5 phần tử: $A_5^4 = 5.(5 - 1).(5 - 2).(5 - 3) = 5 . 4 . 3 . 2 = 120$ số

Trong mỗi hang (Nghìn, trăm, chục, đơn vị), mỗi chữ số có mặt: 120 : 5 = 24 lần

Tổng các chữ số ở mỗi hang: (1 + 2 + 3 + 4 + 5). 24 = 15 . 24 = 360

Tổng các số được lập: 360 + 3600 + 36000 + 360000 = 399960

b) chữ số tận cùng có 2 cách chọn (là 2 hoặc 4)

bốn chữ số trước là hoán vị của của 4 chữ số còn lại và có $P_4 = 4! = 4 . 3 . 2 = 24$ cách chọn

Tất cả có 24 . 2 = 48 cách chọn

c) Các số phải lập có dạng $\overline{abcde}$, trong đó : a có 5 cách chọn, b có 4 cách chọn (khác a), c có 4 cách chọn (khác b), d có 4 cách chọn (khác c), e có 4 cách chọn (khác d)

Tất cả có: 5 . 4 . 4 . 4 . 4 = 1280 số

d) Chọn 2 trong 2 chữ số chẵn, có 1 cách chọn

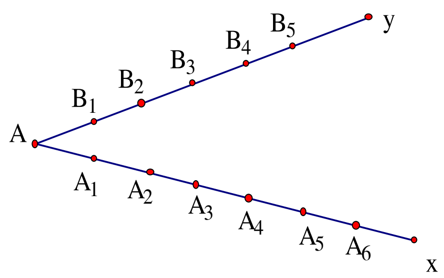
chọn 2 trong 3 chữ số lẻ, có 3 cách chọn. Các chữ số có thể hoán vị, do đó có:

1 . 3 . 4! =1 . 3 . 4 . 3 . 2 = 72 số

Bài 3: Cho $\widehat{xAy} \neq 180^0$. Trên Ax lấy 6 điểm khác A, trên Ay lấy 5 điểm khác A. trong 12 điểm nói trên (kể cả điểm A), hai điểm nào cũng được nối với nhau bởi một đoạn thẳng. Có bao nhiêu tam giác mà các đỉnh là 3 trong 12 điểm ấy

Giải

Cách 1: Tam giác phải đếm gồm ba loại:



+ Loại 1: các tam giác có một đỉnh là A, đỉnh thứ 2 thuộc Ax (có 6 cách chọn), đỉnh thứ 3 thuộc Ay (có 5 cách chọn), gồm có: 6 . 5 = 30 tam giác

+ Loại 2: Các tam giác có 1 đỉnh là 1 trong 5 điểm B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 (có 5 cách chọn), hai đỉnh kia là 2 trong 6 điểm A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 (Có $C_6^2 = \frac{6.5}{2!} = \frac{30}{2} = 15$ cách chọn)

Gồm 5 . 15 = 75 tam giác

+ Loại 3: Các tam giác có 1 đỉnh là 1 trong 6 điểm A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 hai đỉnh kia là 2 trong 5 điểm B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 gồm có: 6. $C_5^2 = 6.\frac{5.4}{2!} = 6.\frac{20}{2} = 60$ tam giác

Tất cả có: 30 + 75 + 60 = 165 tam giác

Cách 2: số các tam giác chọn 3 trong 12 điểm ấy là $C_{12}^3 = \frac{12.11.10}{3!} = \frac{1320}{3.2} = \frac{1320}{6} = 220$

Số bộ ba điểm thẳng hang trong 7 điểm thuộc tia Ax là: $C_7^3 = \frac{7.6.5}{3!} = \frac{210}{3.2} = \frac{210}{6} = 35$

Số bộ ba điểm thẳng hang trong 6 điểm thuộc tia Ay là: $C_6^3 = \frac{6.5.4}{3!} = \frac{120}{3.2} = \frac{120}{6} = 20$

Số tam giác tạo thành: 220 - (35 + 20) = 165 tam giác

D. BÀI TẬP:

Bài 1: cho 5 số: 0, 1, 2, 3, 4. từ các chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên:

a) Có 5 chữ số gồm cả 5 chữ số ấy?

b) Có 4 chữ số, có các chữ số khác nhau?

c) có 3 chữ số, các chữ số khác nhau?

d) có 3 chữ số, các chữ số có thể giống nhau?

Bài 2: Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số lập bởi các chữ số 1, 2, 3 biết rằng số đó chia hết cho 9

Bài 3: Trên trang vở có 6 đường kẻ thẳng đứng và 5 đường kẻ nằm ngang đôi một cắt nhau. Hỏi trên trang vở đó có bao nhiêu hình chữ nhật

CHUYÊN ĐỀ 3 - LUỸ THỪA BẬC N CỦA MỘT NHỊ THỨC

A. MỤC TIÊU:

HS nắm được công thức khai triển luỹ thừa bậc n của một nhị thức: $(a + b)^n$

Vận dụng kiến thức vào các bài tập về xác định hệ số của luỹ thừa bậc n của một nhị thức, vận dụng vào các bài toán phân tích đa thức thành nhân tử

B. KIẾN THỨC VÀ BÀI TẬP VẬN DỤNG:

I. Nhị thức Niutơn: $\boxed{(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n}$

Trong đó: $C_n^k = \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{1.2.3\ldots k}$

II. Cách xác định hệ số của khai triển Niutơn:

1. Cách 1: Dùng công thức $C_n^k = \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{k\,!}$

Chẳng hạn hệ số của hạng tử a^4b^3 trong khai triển của $(a + b)^7$ là

$$C_7^4 = \frac{7.6.5.4}{4!} = \frac{7.6.5.4}{4.3.2.1} = 35$$

Chú ý: a) $C_n^k = \dfrac{n\,!}{n\,!(n-k)\,!}$ với quy ước $0! = 1 \Rightarrow C_7^4 = \dfrac{7!}{4!.3!} = \dfrac{7.6.5.4.3.2.1}{4.3.2.1.3.2.1} = 35$

b) Ta có: $C_n^k = C_n^{k-1}$ nên $C_7^4 = C_7^3 = \dfrac{7.6.5.}{3!} = 35$

2. Cách 2: Dùng tam giác Patxcan

Đỉnh							1						
Dòng 1(n = 1)						**1**		**1**					
Dòng 2(n = 1)					**1**		**2**		**1**				
Dòng 3(n = 3)				**1**		**3**		**3**		**1**			
Dòng 4(n = 4)			**1**		**4**		**6**		**4**		**1**		
Dòng 5(n = 5)		**1**		**5**		**10**		**10**		**5**		**1**	
Dòng 6(n = 6)	**1**		**6**		**15**		**20**		**15**		**6**		**1**

Trong tam giác này, hai cạnh bên gồm các số 1; dòng k + 1 được thành lập từ dòng k ($k \geq 1$), chẳng hạn ở dòng 2 (n = 2) ta có 2 = 1 + 1, dòng 3 (n = 3): 3 = 2 + 1, 3 = 1 + 2 dòng 4 (n = 4): 4 = 1 + 3, 6 = 3 + 3, 4 = 3 + 1, …

Với n = 4 thì: $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Với n = 5 thì: $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Với n = 6 thì: $(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2 b^4 + 6ab^5 + b^6$

3. Cách 3:

Tìm hệ số của hạng tử đứng sau theo các hệ số của hạng tử đứng trước:

a) Hệ số của hạng tử thứ nhất bằng 1

b) Muốn có hệ số của của hạng tử thứ k + 1, ta lấy hệ số của hạng tử thứ k nhân với số mũ của biến trong hạng tử thứ k rồi chia cho k

Chẳng hạn: $(a + b)^4 = a^4 + \frac{1.4}{1}a^3b + \frac{4.3}{2}a^2b^2 + \frac{4.3.2}{2.3}ab^3 + \frac{4.3.2.}{2.3.4}b^5$

Chú ý rằng: các hệ số của khai triển Niutơn có tính đối xứng qua hạng tử đứng giữa, nghĩa là các hạng tử cách đều hai hạng tử đầu và cuối có hệ số bằng nhau

$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \frac{n(n-1)}{1.2}a^2b^{n-2} + na^{n-1}b^{n-1} + b^n$

III. Ví dụ:

1. Ví dụ 1: phân tích đa thức sau thành nhân tử

a) $A = (x + y)^5 - x^5 - y^5$

Cách 1: khai triển $(x + y)^5$ rồi rút gọn A

$A = (x + y)^5 - x^5 - y^5 = (x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5) - x^5 - y^5$

$= 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 = 5xy(x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3)$

$= 5xy\,[(x + y)(x^2 - xy + y^2) + 2xy(x + y)] = 5xy(x + y)(x^2 + xy + y^2)$

Cách 2: $A = (x + y)^5 - (x^5 + y^5)$

$x^5 + y^5$ chia hết cho x + y nên chia $x^5 + y^5$ cho x + y ta có:

$x^5 + y^5 = (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$ nên A có nhân tử chung là (x + y), đặt (x + y) làm nhân tử chung, ta tìm được nhân tử còn lại

b) $B = (x + y)^7 - x^7 - y^7 = (x^7+7x^6y +21x^5y^2 + 35x^4y^3 +35x^3y^4 +21x^2y^5 \ \ 7xy^6 + y^7) - x^7 - y^7$

$= 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6$

$= 7xy[(x^5 + y^5) + 3(x^4y + xy^4) + 5(x^3y^2 + x^2y^3)]$

$= 7xy \{[(x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)] + 3xy(x + y)(x^2 - xy + y^2) + 5x^2y^2(x + y)\}$

$= 7xy(x + y)[x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 + 3xy(x^2 + xy + y^2) + 5x^2y^2]$

$= 7xy(x + y)[x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 + 3x^3y - 3x^2y^2 + 3xy^3 + 5x^2y^2]$

$= 7xy(x + y)[(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) + 2xy (x^2 + y^2) + x^2y^2] = 7xy(x + y)(x^2 + xy + y^2)^2$

Ví dụ 2:Tìm tổng hệ số các đa thức có được sau khi khai triển

a) $(4x - 3)^4$

Cách 1: Theo cônh thức Niu tơn ta có:

$(4x - 3)^4 = 4.(4x)^3.3 + 6.(4x)^2.3^2 - 4. 4x. 3^3 + 3^4 = 256x^4 - 768x^3 + 864x^2 - 432x + 81$

Tổng các hệ số: 256 - 768 + 864 - 432 + 81 = 1

b) Cách 2: Xét đẳng thức $(4x - 3)^4 = c_0x^4 + c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4$

Tổng các hệ số: $c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4$

Thay x = 1 vào đẳng thức trên ta có: $(4.1 - 3)^4 = c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4$

Vậy: $c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 1$

* Ghi chú: Tổng các hệ số khai triển của một nhị thức, một đa thức bằng giá trị của đa thức đó tại x = 1

C. BÀI TẬP:

Bài 1: Phân tích thành nhân tử

a) $(a + b)^3 - a^3 - b^3$ b) $(x + y)^4 + x^4 + y^4$

Bài 2: Tìm tổng các hệ số có được sau khi khai triển đa thức

a) $(5x - 2)^5$ b) $(x^2 + x - 2)^{2010} + (x^2 - x + 1)^{2011}$

CHUYÊN ĐỀ 4 - CÁC BÀI TOÁN VỀ SỰ CHIA HẾT CỦA SỐ NGUYÊN

A. MỤC TIÊU:

* Củng cố, khắc sâu kiến thức về các bài toán chia hết giữa các số, các đa thức

* HS tiếp tục thực hành thành thạo về các bài toán chứng minh chia hết, không chia hết, sốnguyên tố, số chính phương…

* Vận dụng thành thạo kỹ năng chứng minh về chia hết, không chia hết… vào các bài toán cụ thể

B.KIẾN THỨC VÀ CÁC BÀI TOÁN:

I. Dạng 1: Chứng minh quan hệ chia hết

1. Kiến thức:

* Để chứng minh A(n) chia hết cho một số m ta phân tích A(n) thành nhân tử có một nhân tử làm hoặc bội của m, nếu m là hợp số thì ta lại phân tích nó thành nhân tử có các đoi một nguyên tố cùng nhau, rồi chứng minh A(n) chia hết cho các số đó

* Chú ý:

+ Với k số nguyên liên tiếp bao giờ củng tồn tại một bội của k

+ Khi chứng minh A(n) chia hết cho m ta xét mọi trường hợp về số dư khi chia A(n) cho m

+ Với mọi số nguyên a, b và số tự nhiên n thì:

+) $a^n - b^n$ chia hết cho a - b (a $\neq$ - b)

+) $a^{2n+1} + b^{2n+1}$ chia hết cho a + b

+ $(a + b)^n = B(a) + b^n$

+) $(a + 1)^n$ là BS(a)+ 1

+)$(a - 1)^{2n}$ là B(a) + 1

+) $(a - 1)^{2n+1}$ là B(a) - 1

2. Bài tập:

2. Các bài toán

<u>Bài 1</u>: chứng minh rằng

a) $2^{51} - 1$ chia hết cho 7

b) $2^{70} + 3^{70}$ chia hết cho 13

c) $17^{19} + 19^{17}$ chi hết cho 18 d) $36^{63} - 1$ chia hết cho 7 nhưng không chia hết cho 37

e) $2^{4n} - 1$ chia hết cho 15 với $n \in N$

Giải

a) $2^{51} - 1 = (2^3)^{17} - 1 \vdots 2^3 - 1 = 7$

b) $2^{70} + 3^{70}$ $(2^2)^{35} + (3^2)^{35} = 4^{35} + 9^{35} \vdots 4 + 9 = 13$

c) $17^{19} + 19^{17} = (17^{19} + 1) + (19^{17} - 1)$

$17^{19} + 1 \vdots 17 + 1 = 18$ và $19^{17} - 1 \vdots 19 - 1 = 18$ nên $(17^{19} + 1) + (19^{17} - 1)$

hay $17^{19} + 19^{17} \vdots 18$

d) $36^{63} - 1 \vdots 36 - 1 = 35 \vdots 7$

$36^{63} - 1 = (36^{63} + 1) - 2$ chi cho 37 dư - 2

e) $2^{4n} - 1 = (2^4)^n - 1 \vdots 2^4 - 1 = 15$

<u>Bài 2</u>: chứng minh rằng

a) $n^5 - n$ chia hết cho 30 với $n \in N$;

b) $n^4 - 10n^2 + 9$ chia hết cho 384 với mọi n lẻ $n \in Z$

c) $10^n + 18n - 28$ chia hết cho 27 với $n \in N$;

Giải:

a) $n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1) = (n - 1).n.(n + 1)(n^2 + 1)$ chia hết cho 6 vì $(n - 1).n.(n+1)$ là tích của ba số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 2 và 3 (*)

Mặt khác $n^5 - n = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n^2 - 1).(n^2 - 4 + 5) = n(n^2 - 1).(n^2 - 4) + 5n(n^2 - 1)$

$= (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) + 5n(n^2 - 1)$

Vì $(n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$ là tích của 5 số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 5

$5n(n^2 - 1)$ chia hết cho 5

Suy ra $(n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) + 5n(n^2 - 1)$ chia hết cho 5 (**)

Từ (*) và (**) suy ra đpcm

b) Đặt $A = n^4 - 10n^2 + 9 = (n^4 - n^2) - (9n^2 - 9) = (n^2 - 1)(n^2 - 9) = (n - 3)(n - 1)(n + 1)(n + 3)$

Vì n lẻ nên đặt $n = 2k + 1$ ($k \in Z$) thì

$A = (2k - 2).2k.(2k + 2)(2k + 4) = 16(k - 1).k.(k + 1).(k + 2) \Rightarrow$ A chia hết cho 16 (1)

Và $(k - 1).k.(k + 1).(k + 2)$ là tích của 4 số nguyên liên tiếp nên A có chứa bội của 2, 3, 4 nên A là bội của 24 hay A chia hết cho 24 (2)

Từ (1) và (2) suy ra A chia hết cho 16. 24 = 384

c) $10^n + 18n - 28 = (10^n - 9n - 1) + (27n - 27)$

+ Ta có: $27n - 27 \vdots 27$ (1)

+ $10^n - 9n - 1 = [(\underbrace{9...9}_{n} + 1) - 9n - 1] = \underbrace{9...9}_{n} - 9n = 9(\underbrace{1...1}_{n} - n) \vdots 27$ (2)

vì $9 \vdots 9$ và $\underbrace{1...1}_{n} - n \vdots 3$ do $\underbrace{1...1}_{n} - n$ là một số có tổng các chữ số chia hết cho 3

Từ (1) và (2) suy ra đpcm

3. Bài 3: Chứng minh rằng với mọi số nguyên a thì

a) $a^3 - a$ chia hết cho 3

b) $a^7 - a$ chia hết cho 7

Giải

a) $a^3 - a = a(a^2 - 1) = (a - 1) a (a + 1)$ là tích của ba số nguyên liên tiếp nên tồn tại một số là bội của 3 nên $(a - 1) a (a + 1)$ chia hết cho 3

b)) $a^7 - a = a(a^6 - 1) = a(a^2 - 1)(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$

Nếu $a = 7k$ $(k \in Z)$ thì a chia hết cho 7

Nếu $a = 7k + 1$ $(k \in Z)$ thì $a^2 - 1 = 49k^2 + 14k$ chia hết cho 7

Nếu $a = 7k + 2$ $(k \in Z)$ thì $a^2 + a + 1 = 49k^2 + 35k + 7$ chia hết cho 7

Nếu $a = 7k + 3$ $(k \in Z)$ thì $a^2 - a + 1 = 49k^2 + 35k + 7$ chia hết cho 7

Trong trường hợp nào cũng có một thừa số chia hết cho 7

Vậy: $a^7 - a$ chia hết cho 7

Bài 4: Chứng minh rằng $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 100^3$ chia hết cho $B = 1 + 2 + 3 + ... + 100$

Giải

Ta có: $B = (1 + 100) + (2 + 99) + ... + (50 + 51) = 101. 50$

Để chứng minh A chia hết cho B ta chứng minh A chia hết cho 50 và 101

Ta có: $A = (1^3 + 100^3) + (2^3 + 99^3) + ... + (50^3 + 51^3)$

$= (1 + 100)(1^2 + 100 + 100^2) + (2 + 99)(2^2 + 2.\ 99 + 99^2) + ... + (50 + 51)(50^2 + 50.\ 51 + 51^2) = 101(1^2 + 100 + 100^2 + 2^2 + 2.\ 99 + 99^2 + ... + 50^2 + 50.\ 51 + 51^2)$ chia hết cho 101 (1)

Lại có: $A = (1^3 + 99^3) + (2^3 + 98^3) + ... + (50^3 + 100^3)$

Mỗi số hạng trong ngoặc đều chia hết cho 50 nên A chia hết cho 50 (2)

Từ (1) và (2) suy ra A chia hết cho 101 và 50 nên A chi hết cho B

Bài tập về nhà

Chứng minh rằng:

a) $a^5 – a$ chia hết cho 5

b) $n^3 + 6n^2 + 8n$ chia hết cho 48 với mọi n chẵn

c) Cho a l à số nguyên tố lớn hơn 3. Cmr $a^2 – 1$ chia hết cho 24

d) Nếu $a + b + c$ chia hết cho 6 thì $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 6

e) 2009^{2010} không chia hết cho 2010

f) $n^2 + 7n + 22$ không chia hết cho 9

Dạng 2: Tìm số dư của một phép chia

Bài 1:

Tìm số dư khi chia 2^{100}

a)cho 9, b) cho 25, c) cho 125

Giải

a) Luỹ thừa của 2 sát với bội của 9 là $2^3 = 8 = 9 - 1$

Ta có : $2^{100} = 2.\ (2^3)^{33} = 2.(9 - 1)^{33} = 2.[B(9) - 1] = B(9) - 2 = B(9) + 7$

Vậy: 2^{100} chia cho 9 thì dư 7

b) Tương tự ta có: $2^{100} = (2^{10})^{10} = 1024^{10} = [B(25) - 1]^{10} = B(25) + 1$

Vậy: 2^{100} chia chop 25 thì dư 1

c)Sử dụng công thức Niutơn:

$$2^{100} = (5 - 1)^{50} = (5^{50} - 5.\ 5^{49} + \ldots + \frac{50.49}{2}.\ 5^2 - 50\ .\ 5\ ) + 1$$

Không kể phần hệ số của khai triển Niutơn thì 48 số hạng đầu đã chứa thừa số 5 với số mũ lớn hơn hoặc bằng 3 nên đều chia hết cho $5^3 = 125$, hai số hạng tiếp theo: $\frac{50.49}{2} . 5^2 - 50.5$ cũng chia hết cho 125 , số hạng cuối cùng là 1

Vậy: $2^{100} = B(125) + 1$ nên chia cho 125 thì dư 1

Bài 2:

Viết số 1995^{1995} thành tổng của các số tự nhiên . Tổng các lập phương đó chia cho 6 thì dư bao nhiêu?

Giải

Đặt $1995^{1995} = a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Gọi $S = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \ldots + a_n^3 = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \ldots + a_n^3 + a - a$

$= (a_1^3 - a_1) + (a_2^3 - a_2) + \ldots + (a_n^3 - a_n) + a$

Mỗi dấu ngoặc đều chia hết cho 6 vì mỗi dấu ngoặc là tích của ba số tự nhiên liên tiếp. Chỉ cần tìm số dư khi chia a cho 6

1995 là số lẻ chia hết cho 3, nên a củng là số lẻ chia hết cho 3, do đó chia cho 6 dư 3

Bài 3: Tìm ba chữ số tận cùng của 2^{100} viết trong hệ thập phân

giải

Tìm 3 chữ số tận cùng là tìm số dư của phép chia 2^{100} cho 1000

Trước hết ta tìm số dư của phép chia 2^{100} cho 125

Vận dụng bài 1 ta có $2^{100} = B(125) + 1$ mà 2^{100} là số chẵn nên 3 chữ số tận cùng của nó chỉ có thể là 126, 376, 626 hoặc 876

Hiển nhiên 2^{100} chia hết cho 8 vì $2^{100} = 16^{25}$ chi hết cho 8 nên ba chữ số tận cùng của nó chia hết cho 8

trong các số 126, 376, 626 hoặc 876 chỉ có 376 chia hết cho 8

Vậy: 2^{100} viết trong hệ thập phân có ba chữ số tận cùng là 376

Tổng quát: Nếu n là số chẵn không chia hết cho 5 thì 3 chữ số tận cùng của nó là 376

Bài 4: Tìm số dư trong phép chia các số sau cho 7

a) $22^{22} + 55^{55}$ b)3^{1993}

c) $1992^{1993} + 1994^{1995}$ d) $3^{2^{1930}}$

Giải

a) ta có: $22^{22} + 55^{55} = (21 + 1)^{22} + (56 – 1)^{55} = (BS\ 7 +1)^{22} + (BS\ 7 – 1)^{55}$

$= BS\ 7 + 1 + BS\ 7 - 1 = BS\ 7$ nên $22^{22} + 55^{55}$ chia 7 dư 0

b) Luỹ thừa của 3 sát với bội của 7 là $3^3 = BS\ 7 – 1$

Ta thấy 1993 = BS 6 + 1 = 6k + 1, do đó:

$3^{1993} = 3^{6k + 1} = 3.(3^3)^{2k} = 3(BS\ 7 – 1)^{2k} = 3(BS\ 7 + 1) = BS\ 7 + 3$

c) Ta thấy 1995 chia hết cho 7, do đó:

$1992^{1993} + 1994^{1995} = (BS\ 7 – 3)^{1993} + (BS\ 7 – 1)^{1995} = BS\ 7 – 3^{1993} + BS\ 7 – 1$

Theo câu b ta có $3^{1993} = BS\ 7 + 3$ nên

$1992^{1993} + 1994^{1995} = BS\ 7 – (BS\ 7 + 3) – 1 = BS\ 7 – 4$ nên chia cho 7 thì dư 3

d) $3^{2^{1930}} = 3^{2860} = 3^{3k + 1} = 3.3^{3k} = 3(BS\ 7 – 1) = BS\ 7 – 3$ nên chia cho 7 thì dư 4

Bài tập về nhà

Tìm số d ư khi:

a) 2^{1994} cho 7

b) $3^{1998} + 5^{1998}$ cho 13

c) $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ...+ 99^3$ chia cho $B = 1 + 2 + 3 + ... + 99$

Dạng 3: Tìm điều kiện để xảy ra quan hệ chia hết

Bài 1: Tìm $n \in Z$ để giá trị của biểu thức $A = n^3 + 2n^2 - 3n + 2$ chia hết cho giá trị của biểu thức $B = n^2 - n$

Giải

Chia A cho B ta có: $n^3 + 2n^2 - 3n + 2 = (n + 3)(n^2 - n) + 2$

Để A chia hết cho B thì 2 phải chia hết cho $n^2 - n = n(n - 1)$ do đó 2 chia hết cho n, ta có:

n	1	- 1	2	- 2
n - 1	0	- 2	1	- 3
n(n - 1)	0	2	2	6
	loại			loại

Vậy: Để giá trị của biểu thức $A = n^3 + 2n^2 - 3n + 2$ chia hết cho giá trị của biểu thức $B = n^2 - n$ thì $n \in \{-1; 2\}$

Bài 2:

a) Tìm $n \in N$ để $n^5 + 1$ chia hết cho $n^3 + 1$

b) Giải bài toán trên nếu $n \in Z$

Giải

Ta có: $n^5 + 1 \vdots n^3 + 1 \Leftrightarrow n^2(n^3 + 1) - (n^2 - 1) \vdots n^3 + 1 \Leftrightarrow (n + 1)(n - 1) \vdots n^3 + 1$

$\Leftrightarrow (n + 1)(n - 1) \vdots (n + 1)(n^2 - n + 1) \Leftrightarrow n - 1 \vdots n^2 - n + 1$ (Vì $n + 1 \neq 0$)

a) Nếu $n = 1$ thì $0 \vdots 1$

Nếu $n > 1$ thì $n - 1 < n(n - 1) + 1 < n^2 - n + 1$ nên không thể xẩy ra $n - 1 \vdots n^2 - n + 1$

Vậy giá trụ của n tìm được là $n = 1$

b) $n - 1 \vdots n^2 - n + 1 \Rightarrow n(n - 1) \vdots n^2 - n + 1 \Leftrightarrow (n^2 - n + 1) - 1 \vdots n^2 - n + 1$

$\Rightarrow 1 \vdots n^2 - n + 1$. Có hai trường hợp xẩy ra:

$+ n^2 - n + 1 = 1 \Leftrightarrow n(n - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 0 \\ n = 1 \end{array}\right.$ (Tm đề bài)

$+ n^2 - n + 1 = -1 \Leftrightarrow n^2 - n + 2 = 0$ (Vô nghiệm)

Bài 3: Tìm số nguyên n sao cho:

a) $n^2 + 2n - 4 \vdots 11$

b) $2n^3 + n^2 + 7n + 1 \vdots 2n - 1$

c) $n^4 - 2n^3 + 2n^2 - 2n + 1 \vdots n^4 - 1$

d) $n^3 - n^2 + 2n + 7 \vdots n^2 + 1$

Giải

a) Tách $n^2 + 2n - 4$ thành tổng hai hạng tử trong đó có một hạng tử là B(11)

$n^2 + 2n - 4 \vdots 11 \Leftrightarrow (n^2 - 2n - 15) + 11 \vdots 11 \Leftrightarrow (n - 3)(n + 5) + 11 \vdots 11$

$\Leftrightarrow (n - 3)(n + 5) \vdots 11 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n - 3 \vdots 11 \\ n + 5 \vdots 11 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = B(11) + 3 \\ n = B(11) - 5 \end{array}\right.$

b) $2n^3 + n^2 + 7n + 1 = (n^2 + n + 4)(2n - 1) + 5$

Để $2n^3 + n^2 + 7n + 1 \vdots 2n - 1$ thì $5 \vdots 2n - 1$ hay $2n - 1$ là Ư(5) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2n-1=-5 \\ 2n-1=-1 \\ 2n-1=1 \\ 2n-1=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=-2 \\ n=0 \\ n=1 \\ n=3 \end{array}\right.$

Vậy: $n \in \{-2; 0; 1; 3\}$ thì $2n^3 + n^2 + 7n + 1 \vdots 2n - 1$

c) $n^4 - 2n^3 + 2n^2 - 2n + 1 \vdots n^4 - 1$

Đặt A = $n^4 - 2n^3 + 2n^2 - 2n + 1 = (n^4 - n^3) - (n^3 - n^2) + (n^2 - n) - (n - 1)$

$= n^3(n - 1) - n^2(n - 1) + n(n - 1) - (n - 1) = (n - 1)(n^3 - n^2 + n - 1) = (n - 1)^2(n^2 + 1)$

$B = n^4 - 1 = (n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$

A chia hết cho b nên $n \neq \pm 1 \Rightarrow$ A chia hết cho B $\Leftrightarrow n - 1 \vdots n + 1 \Leftrightarrow (n + 1) - 2 \vdots n + 1$

$\Leftrightarrow 2 \vdots n + 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n+1=-2 \\ n+1=-1 \\ n+1=1 \\ n+1=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=-3 \\ n=-2 \\ n=0 \\ n=1 \text{ (không Tm)} \end{array}\right.$

Vậy: $n \in \{-3; -2; 0\}$ thì $n^4 - 2n^3 + 2n^2 - 2n + 1 \vdots n^4 - 1$

d) Chia $n^3 - n^2 + 2n + 7$ cho $n^2 + 1$ được thương là $n - 1$, dư $n + 8$

Để $n^3 - n^2 + 2n + 7 \vdots n^2 + 1$ thì $n + 8 \vdots n^2 + 1 \Rightarrow (n + 8)(n - 8) \vdots n^2 + 1 \Leftrightarrow 65 \vdots n^2 + 1$

Lần lượt cho $n^2 + 1$ bằng 1; 5; 13; 65 ta được n bằng 0; ± 2; ± 8

Thử lại ta có n = 0; n = 2; n = 8 (T/m)

Vậy: $n^3 - n^2 + 2n + 7 \vdots n^2 + 1$ khi n = 0, n = 8

Bài tập về nhà:

Tìm số nguyên n để:

a) $n^3 – 2$ chia hết cho $n – 2$

b) $n^3 – 3n^2 – 3n – 1$ chia hết cho $n^2 + n + 1$

c) $5^n – 2^n$ chia hết cho 63

Dạng 4: Tồn tại hay không tồn tại sự chia hết

Bài 1: Tìm $n \in N$ sao cho $2^n – 1$ chia hết cho 7

Giải

Nếu n = 3k (k $\in$ N) thì $2^n - 1 = 2^{3k} - 1 = 8^k - 1$ chia hết cho 7

Nếu n = 3k + 1 (k $\in$ N) thì $2^n - 1 = 2^{3k+1} - 1 = 2(2^{3k} - 1) + 1$ = BS 7 + 1

Nếu n = 3k + 2 (k $\in$ N) thì $2^n - 1 = 2^{3k+2} - 1 = 4(2^{3k} - 1) + 3$ = BS 7 + 3

V ậy: $2^n - 1$ chia hết cho 7 khi n = BS 3

Bài 2: Tìm n $\in$ N để:

a) $3^n - 1$ chia hết cho 8

b) $A = 3^{2n+3} + 2^{4n+1}$ chia hết cho 25

c) $5^n - 2^n$ chia hết cho 9

Giải

a) Khi n = 2k (k$\in$ N) thì $3^n - 1 = 3^{2k} - 1 = 9^k - 1$ chia hết cho 9 – 1 = 8

Khi n = 2k + 1 (k$\in$ N) thì $3^n - 1 = 3^{2k+1} - 1 = 3.(9^k - 1) + 2$ = BS 8 + 2

Vậy : $3^n - 1$ chia hết cho 8 khi n = 2k (k$\in$ N)

b) $A = 3^{2n+3} + 2^{4n+1} = 27 . 3^{2n} + 2.2^{4n} = (25 + 2) 3^{2n} + 2.2^{4n} = 25. 3^{2n} + 2.3^{2n} + 2.2^{4n}$

= BS 25 + $2(9^n + 16^n)$

Nếu n = 2k +1(k$\in$ N) thì $9^n + 16^n = 9^{2k+1} + 16^{2k+1}$ chia hết cho 9 + 16 = 25

Nếu n = 2k (k$\in$ N) thì 9^n có chữ số tận cùng bằng 1 , còn 16^n có chữ số tận cùng bằng 6 suy ra $2((9^n + 16^n)$ có chữ số tận cùng bằng 4 nên A không chia hết cho 5 nên không chia hết cho 25

c) Nếu n = 3k (k$\in$ N) thì $5^n - 2^n = 5^{3k} - 2^{3k}$ chia hết cho $5^3 - 2^3 = 117$ nên chia hết cho 9

Nếu n = 3k + 1 thì $5^n - 2^n = 5.5^{3k} - 2.2^{3k} = 5(5^{3k} - 2^{3k}) + 3. 2^{3k}$ = BS 9 + $3. 8^k$

= BS 9 + $3(\text{BS } 9 - 1)^k$ = BS 9 + BS 9 + 3

Tương tự: nếu n = 3k + 2 thì $5^n - 2^n$ không chia hết cho 9

CHUYÊN ĐỀ 5: SỐ CHÍNH PHƯƠNG

I. Số chính phương:

A. Một số kiến thức:

Số chính phương: số bằng bình phương của một số khác

Ví dụ:

$4 = 2^2$; $9 = 3^2$

$A = 4n^2 + 4n + 1 = (2n + 1)^2 = B^2$

+ Số chính phương khong tận cùng bởi các chữ số: 2, 3, 7, 8

+ Số chính phương chia hết cho 2 thì chia hết cho 4, chia hết cho 3 thì chia hết cho 9, chia hết cho 5 thì chia hết cho 25, chia hết cho 2^3 thì chia hết cho 2^4,…

+ Số $\underbrace{11...1}_{n} =$ a thì $\underbrace{99...9}_{n} = 9a \Rightarrow 9a + 1 = \underbrace{99...9}_{n} + 1 = 10^n$

B. Một số bài toán:

1. Bài 1:

Chứng minh rằng: Một số chính phương chia cho 3, cho 4 chỉ có thể dư 0 hoặc 1

Giải

Gọi $A = n^2$ $(n \in N)$

a) xét $n = 3k$ $(k \in N) \Rightarrow A = 9k^2$ nên chia hết cho 3

$n = 3k \pm 1$ $(k \in N) \Rightarrow A = 9k^2 \pm 6k + 1$, chia cho 3 dư 1

Vậy: số chính phương chia cho 3 dư 0 hoặc 1

b) $n = 2k$ $(k \in N)$ thì $A = 4k^2$ chia hết cho 4

$n = 2k + 1$ $(k \in N)$ thì $A = 4k^2 + 4k + 1$ chia cho 4 dư 1

Vậy: số chính phương chia cho 4 dư 0 hoặc 1

Chú ý: + Số chính phương chẵn thì chia hết cho 4

+ Số chính phương lẻ thì chia cho 4 thì dư 1(Chia 8 củng dư 1)

2. Bài 2: Số nào trong các số sau là số chính phương

a) $M = 1992^2 + 1993^2 + 1994^2$

b) $N = 1992^2 + 1993^2 + 1994^2 + 1995^2$

c) $P = 1 + 9^{100} + 94^{100} + 1994^{100}$

d) $Q = 1^2 + 2^2 + ...+ 100^2$

e) $R = 1^3 + 2^3 + ... + 100^3$

Giải

a) các số 1993^2, 1994^2 chia cho 3 dư 1, còn 1992^2 chia hết cho 3 $\Rightarrow$ M chia cho 3 dư 2 do đó M không là số chính phương

b) $N = 1992^2 + 1993^2 + 1994^2 + 1995^2$ gồm tổng hai số chính phương chẵn chia hết cho 4, và hai số chính phương lẻ nên chia 4 dư 2 suy ra N không là số chính phương

c) $P = 1 + 9^{100} + 94^{100} + 1994^{100}$ chia 4 dư 2 nên không là số chính phương

d) $Q = 1^2 + 2^2 + ...+ 100^2$

Số Q gồm 50 số chính phương chẵn chia hết cho 4, 50 số chính phương lẻ, mỗi số chia 4 dư 1 nên tổng 50 số lẻ đó chia 4 thì dư 2 do đó Q chia 4 thì dư 2 nên Q không là số chính phương

e) $R = 1^3 + 2^3 + ... + 100^3$

Gọi $A_k = 1 + 2 +... + k = \frac{k(k+1)}{2}$, $A_{k-1} = 1 + 2 +... + k = \frac{k(k-1)}{2}$

Ta có: $A_k^2 - A_{k-1}^2 = k^3$ khi đó:

$1^3 = A_1^2$

$2^3 = A_2^2 - A_1^2$

....

$n^3 = A_n^2 = A_{n-1}^2$

Cộng vế theo vế các đẳng thức trên ta có:

$1^3 + 2^3 + ... +n^3 = A_n^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \left[\frac{100(100+1)}{2}\right]^2 = (50.101)^2$ là số chính phương

3. Bài 3:

CMR: Với mọi n Ỵ N thì các số sau là số chính phương.

a) $A = (10^n + 10^{n-1} + ... + .10 + 1)(10^{n+1} + 5) + 1$