

Bài 53

Cho ΔAOB cân tại O ($\widehat{AOB} > 90^\circ$). Trên cạnh AB lấy điểm M , vẽ $MC // OB$ và $MD // OA$. Vẽ đường tròn $(C; CM)$ và đường tròn $(D; DM)$ cắt nhau tại điểm thứ hai là N .

1. Chứng minh $A \in (C; CM)$ và $B \in (D; DM)$
2. Chứng minh $\Delta ANB \sim \Delta CMD$
3. Chứng minh N thuộc một đường cố định khi M chạy trên AB
4. Chứng minh ΔONM vuông

Bài 54

Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Vẽ đường cao AH của ΔABC , đường kính AD . Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của C và B lên AD . M là trung điểm BC .

1. Chứng minh các tứ giác $ABHF$ và $BFOM$ nội tiếp
2. Chứng minh $HE // BD$
3. Chứng minh $S_{\Delta ABC} = \frac{AB.AC.BC}{4R}$
4. Chứng minh M là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔEFH

Bài 55

Cho đường tròn $(O; R)$ và dây BC cố định, A là điểm di chuyển trên cung lớn \widehat{BC} . Vẽ 2 đường cao BE và CF của ΔABC cắt nhau tại H .

1. Chứng minh $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$
2. Vẽ bán kính $ON \perp BC$ tại M ($N \in$ cung nhỏ \widehat{BC}). AN cắt BC tại D . Chứng minh $AB.NC = AN.BD$
3. AH cắt (O) tại K . Chứng minh: $BC.AK = AB.CK + AC.BK$
4. Chứng minh tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔADC luôn thuộc một đường cố định khi A di chuyển trên cung lớn \widehat{BC}

Bài 56

Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ ($R > r$) cắt nhau tại A và B . Vẽ đường kính AC của (O) và đường kính AD của (O') . M là điểm thuộc cung nhỏ \widehat{BC} . MB cắt (O') tại N .

1. Chứng minh C, B, D thẳng hàng. Tính tỉ số $\frac{AN}{AM}$ theo R và r

2. CM và DN cắt nhau tại E . Ch. minh tứ giác $AMEN$ nội tiếp
3. Chứng minh điểm E thuộc một đường cố định khi M thay đổi
4. Chứng minh $\Delta AMB \sim \Delta AED$

Bài 57

Cho ΔABC có ba góc nhọn ($AB < AC$). Vẽ đường tròn (O) đường kính BC cắt AB và AC lần lượt tại E và D .

1. Chứng minh $AD.AC = AE.AB$
2. Gọi H là giao điểm của BD và CE , K là giao điểm của AH và BC . Chứng minh $\widehat{BHK} = \widehat{AED}$
3. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AM và AN với (O) với M, N là các tiếp điểm. Chứng minh KA là phân giác của \widehat{NKM}
4. Chứng minh ba điểm M, N, H thẳng hàng

Bài 58

Cho $(O; R)$ và điểm P trên đường tròn. Từ P vẽ hai tia Px, Py cắt đường tròn tại A và B sao cho \widehat{xPy} là góc nhọn.

1. Vẽ hình bình hành $APBM$. Gọi K là trực tâm của ΔABM . Chứng minh K thuộc đường tròn (O)
2. Gọi H là trực tâm của ΔAPB , I là trung điểm AB . Chứng minh H, I, K thẳng hàng
3. Khi hai tia Px và Py quay quanh P sao cho Px và Py vẫn cắt đường tròn và \widehat{xPy} không đổi thì H chạy trên đường cố định nào.

Bài 59

Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Điểm M di động trên cung nhỏ \widehat{BC} . Từ M kẻ $MH \perp AB$ và $MK \perp AC$.

1. Chứng minh $\Delta MBC \sim \Delta MHK$
2. Gọi D là giao điểm của HK và BC . Chứng minh $MD \perp BC$
3. Tìm vị trí của M để độ dài đoạn HK lớn nhất.

Bài 60

Cho hai điểm A và B thuộc đường tròn (O) (AB không đi qua O) và có hai điểm C và D lưu động trên cung lớn AB sao cho $AD // BC$ (C

và D khác A và B ; $AD > BC$). Gọi M là giao điểm của BD và AC . Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và D cắt nhau tại I .

1. Chứng minh ba điểm I, O, M thẳng hàng
2. Chứng minh bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle MCD$ không đổi

Bài 61

Cho $(O;R)$ và dây MN cố định P là điểm chính giữa cung lớn \widehat{MN} . Lấy điểm I thuộc \widehat{PN} nhỏ, kẻ tia $Mx \perp PI$ tại K cắt tia NI tại E .

1. Chứng minh IP là tia phân giác của \widehat{MIE}
2. Chứng minh E luôn chạy trên một cung tròn cố định khi I di chuyển trên cung nhỏ \widehat{PN} . Xác định tâm của cung tròn này.
3. Tia EP cắt MN tại F , cắt đường tròn (O) tại G . Chứng minh PM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle MFG$
4. Tính tích $PF.PG$ theo R và $\alpha = \widehat{PMN}$

Bài 62

Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm A cố định thuộc (O) . Vẽ tiếp tuyến Ax , trên tia Ax lấy điểm Q . Vẽ tiếp tuyến QB với đường tròn (O) (B là tiếp điểm).

1. Chứng minh $QBOA$ nội tiếp và $OQ \perp AB$
2. Gọi E là trung điểm OQ . Tìm quỹ tích của E khi Q di chuyển trên tia Ax
3. Vẽ $BK \perp Ax$ tại K cắt OQ tại H . Tìm quỹ tích của H
4. Cho $AQ = 2R$. Tính HK theo R

Bài 63

Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . AH cắt (O) tại K . Đường thẳng AO cắt đường tròn (O) tại M .

1. Chứng minh $MK \parallel BC$ và $DH = DK$
2. Chứng minh HM đi qua trung điểm I của BC
3. Chứng minh: $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1$
4. Chứng minh $\frac{AD}{HD} + \frac{BE}{HE} + \frac{CF}{HF} \geq 9$

Bài 64

Cho $\triangle ABC$ đều nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Một đường thẳng d thay đổi qua A cắt hai tiếp tuyến tại B và C của (O) ở M và N . Giả sử d cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là E . Gọi F là giao điểm của MC và NB .

1. Chứng minh $\triangle MBA \sim \triangle CAN$
2. Chứng minh tích $MB.CN$ không đổi
3. Chứng minh tứ giác $BMEF$ nội tiếp
4. Chứng minh đường thẳng EF luôn đi qua điểm cố định

Bài 65

Cho đường tròn $(O;R)$ và đường kính AB cố định. MN là đường kính thay đổi của (O) . Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BM và BN lần lượt tại E và F . Gọi I là trung điểm EA và K là trung điểm AF .

1. Chứng minh tứ giác $EMNF$ nội tiếp
2. Chứng minh $IMNK$ là hình thang vuông. Tính EF theo R để $IMNK$ là hình chữ nhật
3. Chứng minh tích $AI.AK$ không đổi khi MN thay đổi
4. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp $\triangle IBK$ luôn đi qua điểm cố định (khác điểm B)

Bài 66

Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính BC . Điểm M tùy ý thuộc bán kính OC . Qua M vẽ dây AE vuông góc với BC . Từ A vẽ tiếp tuyến của (O) cắt đường thẳng BC tại D .

1. Chứng minh EC là phân giác của \widehat{AED}
2. Vẽ đường cao AK của $\triangle BAE$. Gọi I là trung điểm của AK . Tia BI cắt đường tròn (O) tại H . Chứng minh $MH \perp AH$
3. Chứng minh tứ giác $EMHD$ nội tiếp
4. Chứng minh đường thẳng BD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle AHD$
5. Khi M là trung điểm OC . Tính diện tích $\triangle MHC$ theo R

Bài 67

Từ điểm A ngoài đường tròn $(O;R)$ vẽ hai tiếp tuyến AB và AC với