

nhưng vẫn đi qua A, B thì đường thẳng FI luôn đi qua một điểm cố định

**Bài 14**

Cho  $\Delta ABC$  vuông tại A. Trên cạnh AC lấy điểm D. Vẽ đường tròn (O) đường kính CD. Đường tròn (I) đường kính BC cắt (O) tại E. AE cắt (O) tại F.

1. Chứng minh  $ABCE$  nội tiếp
2. Chứng minh  $\widehat{BCA} = \widehat{ACF}$
3. Lấy điểm M đối xứng với D qua A; N đối xứng với D qua đường thẳng BC. Chứng minh BMCN nội tiếp
4. Xác định vị trí của D để đường tròn ngoại tiếp tứ giác BMCN có bán kính nhỏ nhất

**Bài 15**

Cho  $\Delta ABC$  có  $\hat{B}$  và  $\hat{C}$  nhọn, các đường tròn đường kính AB và AC cắt nhau tại H. Một đường thẳng d tùy ý đi qua A lần lượt cắt hai đường tròn tại M và N.

1. Chứng minh  $H \in BC$
2. Tứ giác BCNM là hình gì? Tại sao?
3. Gọi I và K là trung điểm của BC và MN. Chứng minh bốn điểm A, H, I, K  $\in$  một đường tròn. Từ đó suy ra quỹ tích của I khi d quay quanh A

1. Xác định vị trí của d để MN có độ dài lớn nhất

**Bài 16**

Cho hai đường tròn (O) và (O') có bán kính bằng nhau và cắt nhau tại A và B. Vẽ cát tuyến qua B cắt (O) tại E, cắt (O') tại F.

1. Chứng minh  $AE = AF$
2. Vẽ cát tuyến BCD vuông góc với AB ( $C \in (O); D \in (O')$ ), Gọi K là giao điểm của CE và FD. Chứng minh AEKF và ACKD là các tứ giác nội tiếp
3. Chứng minh  $\Delta EKF$  cân
4. Gọi I là trung điểm EF. Chứng minh I, A, K thẳng hàng
5. Khi EF quay quanh B thì I và K di chuyển trên đường nào?

Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến AB và AC với (O). Vẽ dây  $BD \parallel AC$ . AD cắt (O) tại K. Tia BK cắt AC tại I.

1. Chứng minh  $IC^2 = IK \cdot IB$
2. Chứng minh  $\Delta BAI \sim \Delta AKI$
3. Chứng minh I là trung điểm AC
4. Tìm vị trí điểm A để  $CK \perp AB$

**Bài 18**

Cho đường tròn (O; R) và điểm A cố định với  $OA = 2R$ . BC là đường kính quay quanh O. Đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$  cắt đường thẳng AO tại I.

1. Chứng minh  $OI \cdot OA = OB \cdot OC$ . Suy ra I là điểm cố định
2. Trường hợp AB, AC cắt (O) tại D và E. DE cắt OA tại K.
  - a. Chứng minh tứ giác KECI nội tiếp
  - b. Tính AK theo R
  - c. Gọi N là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ADE$  với OA. Chứng minh tứ giác BOND nội tiếp. Suy ra N là điểm cố định
3. Tìm vị trí của BC để diện tích  $\Delta ABC$  lớn nhất
4. Tìm vị trí BC để bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$  nhỏ nhất.

**Bài 19**

Cho đường tròn (O; R) và dây AB cố định. M là điểm di chuyển trên cung lớn  $\widehat{AB}$ . Vẽ hình bình hành MABC. Vẽ  $MH \perp BC$  tại H cắt (O) tại K. BK cắt MC tại F.

1. Chứng minh tứ giác FKHC nội tiếp. Suy ra K là trực tâm của  $\Delta MBC$
2. Tia phân giác của  $\widehat{AMB}$  cắt (O) tại E và cắt tia CB tại N. Chứng minh  $\Delta MBN$  cân. Suy ra N thuộc một cung tròn cố định tâm O' khi M di chuyển trên cung lớn  $\widehat{AB}$
3. Chứng minh AB là tiếp tuyến của (O')
4. Khi  $AB = R\sqrt{3}$ . Tính diện tích tứ giác OEO'B theo R

**Bài 20**

Cho đường tròn  $(O; R)$  và một dây  $AB$  cố định  $(AB < 2R)$ . Một điểm  $M$  tùy ý trên cung lớn  $AB$  ( $M \neq A, B$ ). Gọi  $I$  là trung điểm của dây  $AB$  và  $(O')$  là đường tròn qua  $M$  và tiếp xúc với  $AB$  tại  $A$ . Đường thẳng  $MI$  cắt  $(O)$ ;  $(O')$  lần lượt tại các giao điểm thứ hai là  $N, P$ .

1. Chứng minh  $IA^2 = IP \cdot IM$
2. Chứng minh tứ giác  $ANBP$  là hình bình hành
3. Chứng minh  $IB$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(MBP)$
4. Chứng minh khi  $M$  di chuyển thì  $P$  chạy trên một cung tròn cố định

**Bài 21**

Cho  $\Delta ABC$  có góc  $A$  tù, đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$  cắt đường tròn  $(O')$  đường kính  $AC$  tại giao điểm thứ hai là  $H$ . Một đường thẳng  $d$  quay quanh  $A$  cắt đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  lần lượt tại  $M$  và  $N$  sao cho  $A$  nằm giữa  $M$  và  $N$ .

1. Chứng minh  $H \in BC$  và tứ giác  $BCNM$  là hình thang vuông

2. Chứng minh tỉ số  $\frac{HM}{HN}$  không đổi

3. Gọi  $I$  là trung điểm  $MN$ ,  $K$  là trung điểm  $BC$ . Chứng minh 4

điểm  $A, H, I, K$  cùng thuộc một đường tròn và  $I$  di chuyển trên một cung tròn cố định

4. Xác định vị trí của đường thẳng  $d$  để diện tích  $\Delta MHN$  lớn nhất

**Bài 22**

Cho đoạn thẳng  $AB = 2a$  có trung điểm là  $O$ . Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ  $AB$  kẻ các tia  $Ax$  và  $By$  vuông góc với  $AB$ . Một đường thẳng  $d$  thay đổi cắt  $Ax$  tại  $M$ , cắt  $By$  tại  $N$  sao cho  $AM \cdot BN = a^2$ .

1. Chứng minh  $\Delta AOM \sim \Delta BON$  và  $\widehat{MON}$  vuông
2. Gọi  $H$  là hình chiếu của  $O$  trên  $MN$ . Chứng minh đường thẳng  $d$  luôn tiếp xúc với một nửa đường tròn cố định tại  $H$ .
3. Chứng minh tâm  $I$  của đường tròn ngoại tiếp  $\Delta MON$  chạy trên một tia cố định
4. Tìm vị trí của đường thẳng  $d$  sao cho chu vi  $\Delta AHB$  đạt giá trị lớn

nhất, tính giá trị lớn nhất đó theo  $a$

**Bài 23**

Cho  $\Delta ABC$  có ba góc nhọn với trực tâm  $H$ . Vẽ hình bình hành  $BHCD$ . Đường thẳng qua  $D$  và  $\parallel BC$  cắt đường thẳng  $AH$  tại  $E$ .

1. Chứng minh  $A, B, C, D, E$  cùng thuộc một đường tròn
2. Gọi  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$ , chứng minh  $\widehat{BAE} = \widehat{OAC}$  và  $BE = CD$
3. Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ , đường thẳng  $AM$  cắt  $OH$  tại  $G$ . Chứng minh  $G$  là trọng tâm của  $\Delta ABC$

**Bài 24**

Cho ba điểm cố định  $A, B, C$  thẳng hàng (theo thứ tự đó). Một đường tròn  $(O)$  thay đổi nhưng luôn đi qua  $B, C$ . Từ điểm  $A$  kẻ các tiếp tuyến  $AM, AN$  đến đường tròn  $(O)$ . Đường thẳng  $MN$  cắt  $AO$  và  $AC$  lần lượt tại  $H$  và  $K$

1. Chứng minh  $M, N$  di động trên một đường tròn cố định
2. Gọi  $I$  là trung điểm  $BC$ . Vẽ dây  $MD \parallel BC$ . Chứng minh  $DN$  đi qua điểm cố định
3. Chứng minh đường tròn  $(OHI)$  luôn đi qua 2 điểm cố định

**Bài 25**

Cho  $\Delta ABC$  có  $\hat{A} = 45^\circ, BC = a$ .  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$ .  $B'$  và  $C'$  là chân các đường cao hạ từ  $B$  và  $C$  xuống các cạnh tương ứng. Gọi  $O'$  là điểm đối xứng của  $O$  qua đường thẳng  $B'C'$ .

1. Chứng minh  $A, B', O', C'$  cùng thuộc một đường tròn tâm  $I$
2. Tính  $B'C'$  theo  $a$
3. Tính bán kính đường tròn  $(I)$  theo  $a$

**Bài 26**

Cho đường tròn  $(O; R)$  và điểm  $M$  sao cho  $OM = 2R$ . Từ  $M$  vẽ hai tiếp tuyến  $MA$  và  $MB$  với  $(O)$

1. Chứng minh  $\Delta AMB$  đều và tính  $MA$  theo  $R$
2. Qua điểm  $C$  thuộc cung nhỏ  $\widehat{AB}$  vẽ tiếp tuyến với  $(O)$  cắt  $MA$  tại  $E$  và cắt  $MB$  tại  $F$ . Chứng minh chu vi  $\Delta MEF$  không đổi khi  $C$  chạy trên cung nhỏ  $AB$