Một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức

Phương pháp 1: dùng định nghĩa

Kiến thức : Để chứng minh A > B Ta chứng minh A – B > 0

Lưu ý dùng hằng bất đẳng thức $M^2 \geq 0$ với $\forall$ M

Ví dụ 1 $\forall$ x, y, z chứng minh rằng :

a) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

b) $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy - 2xz + 2yz$

Giải:

a) Ta xét hiệu : $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2}.2.(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$= \frac{1}{2}\left[(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2\right] \geq 0$ đúng với mọi x;y;z$\in R$

Vì $(x-y)^2 \geq 0$ với$\forall$x ; y .Dấu bằng xảy ra khi x = y

$(x-z)^2 \geq 0$ với$\forall$x ; z . Dấu bằng xảy ra khi x = z

$(y-z)^2 \geq 0$ với$\forall$ z; y . Dấu bằng xảy ra khi z = y

Vậy $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$. Dấu bằng xảy ra khi x = y =z

b)Ta xét hiệu:

$x^2 + y^2 + z^2 - (2xy - 2xz + 2yz) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz = (x - y + z)^2 \geq 0$

đúng với mọi x;y;z$\in R$

Vậy $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy - 2xz + 2yz$ đúng với mọi x;y;z$\in R$

Dấu bằng xảy ra khi x + y = z

Ví dụ 2: chứng minh rằng :

a) $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$; b) $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$ c) Hãy tổng quát bài toán

Giải

a) Ta xét hiệu

$$\frac{a^2+b^2}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{2\left(a^2+b^2\right)}{4}-\frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{1}{4}\left(2a^2+2b^2-a^2-b^2-2ab\right) = \frac{1}{4}(a-b)^2 \ge 0$$

Vậy $\frac{a^2+b^2}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ Dấu bằng xảy ra khi a = b

b)Ta xét hiệu: $\frac{a^2+b^2+c^2}{3}-\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right] \ge 0$

Vậy $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \ge \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$ Dấu bằng xảy ra khi a = b =c

c)Tổng quát: $\frac{a_1^2+a_2^2+....+a_n^2}{n} \ge \left(\frac{a_1+a_2+....+a_n}{n}\right)^2$

* Tóm lại các bước để chứng minh A≥B theo định nghĩa

Bước 1: Ta xét hiệu H = A - B

Bước 2:Biến đổi H = $(C+D)^2$ hoặc H=$(C+D)^2+\ldots.+(E+F)^2$

Bước 3: Kết luận A ≥ B