CÁC BÀI TOÁN VỀ TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

A. Kiến thức:

* Tam giác đồng dạng:

a) trường hợp thứ nhất: (c.c.c)

$\Delta ABC \backsim A'B'C' \Leftrightarrow \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$

b) trường hợp thứ nhất: (c.g.c)

$\Delta ABC \backsim A'B'C' \Leftrightarrow \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$; $\widehat{A} = \widehat{A'}$

c. Trường hợp đồng dạng thứ ba (g.g)

$\Delta ABC \backsim A'B'C' \Leftrightarrow \widehat{A} = \widehat{A'}$; $\widehat{B} = \widehat{B'}$

AH; A'H'là hai đường cao tương ứng thì: $\dfrac{A'H'}{AH} = k$ (Tỉ số đồng dạng); $\dfrac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = K^2$

B. Bài tập áp dụng

Bài 1:

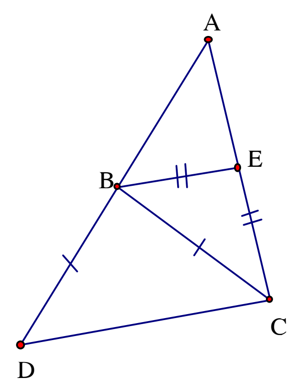
Cho ΔABC có $\widehat{B} = 2\,\widehat{C}$, AB = 8 cm, BC = 10 cm.

a)Tính AC

b)Nếu ba cạnh của tam giác trên là ba số tự nhiên liên tiếp thì mỗi cạnh là bao nhiêu?

Giải

Cách 1:



Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho:BD = BC

$\Delta ACD \backsim \Delta ABC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AD}{AC}$

$\Rightarrow AC^2 = AB.\,AD = AB.(AB + BD) = AB(AB + BC)$

$= 8(10 + 8) = 144 \Rightarrow AC = 12$ cm

Cách 2:

Vẽ tia phân giác BE của $\widehat{ABC} \Rightarrow \Delta ABE \backsim \Delta ACB$

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AB}=\frac{BE}{CB}=\frac{AE+BE}{AB+CB}=\frac{AC}{AB+CB}\Rightarrow AC^2=AB(AB+CB)=8(8+10)=144$$

$\Rightarrow$ AC = 12 cm

b) Gọi AC = b, AB = a, BC = c thì từ câu a ta có $b^2 = a(a + c)$ (1)

Vì b > a nên có thể b = a + 1 hoặc b = a + 2

+ Nếu b = a + 1 thì $(a + 1)^2 = a^2 + ac \Leftrightarrow 2a + 1 = ac \Leftrightarrow a(c - 2) = 1$

$\Rightarrow a = 1; b = 2; c = 3$(loại)

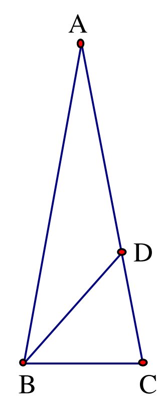
+ Nếu b = a + 2 thì $a(c - 4) = 4$

- Với a = 1 thì c = 8 (loại)
- Với a = 2 thì c = 6 (loại)
- với a = 4 thì c = 6 ; b = 5

Vậy a = 4; b = 5; c = 6

Bài 2:

Cho ΔABC cân tại A, đường phân giác BD; tính BD biết BC = 5 cm; AC = 20 cm



Giải

Ta có $\frac{CD}{AD}=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{4}\Rightarrow$ CD = 4 cm và BC = 5 cm

Bài toán trở về bài 1

Bài 3:

Cho ΔABC cân tại A và O là trung điểm của BC. Một điểm O di động trên AB, lấy điểm E trên AC sao cho $CE=\frac{OB^2}{BD}$. Chứng minh rằng

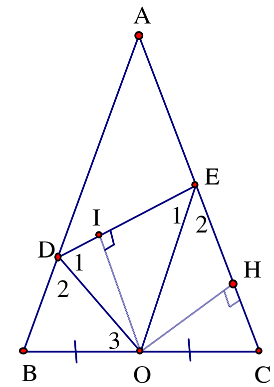
a) $\Delta DBO \backsim \Delta OCE$

b) $\Delta DOE \backsim \Delta DBO \backsim \Delta OCE$

c) DO, EO lần lượt là phân giác của các góc BDE, CED

d) khoảng cách từ O đến đoạn ED không đổi khi D di động trên AB

Giải



a) Từ $CE = \frac{OB^2}{BD} \Rightarrow \frac{CE}{OB} = \frac{OB}{BD}$ và $\hat{B} = \hat{C}$ (gt) $\Rightarrow \Delta DBO \backsim \Delta OCE$

b) Từ câu a suy ra $\hat{O}_3 = \hat{E}_2$ (1)

Vì B, O ,C thẳng hàng nên $\hat{O}_3 + \widehat{DOE} + \widehat{EOC} = 180^0$ (2)

trong tam giác EOC thì $\hat{E}_2 + \hat{C} + \widehat{EOC} = 180^0$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{DOE} = \hat{B} = \hat{C}$

ΔDOE và ΔDBO có $\frac{DO}{DB} = \frac{OE}{OC}$ (Do $\Delta DBO \backsim \Delta OCE$)

và $\frac{DO}{DB} = \frac{OE}{OB}$ (Do OC = OB) và $\widehat{DOE} = \hat{B} = \hat{C}$

nên $\Delta DOE \backsim \Delta DBO \backsim \Delta OCE$

c) Từ câu b suy ra $\hat{D}_1 = \hat{D}_2 \Rightarrow$ DO là phân giác của các góc BDE

Củng từ câu b suy ra $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$ EO là phân giác của các góc CED

c) Gọi OH, OI là khoảng cách từ O đến DE, CE thì OH = OI, mà O cố định nên OH không đổi $\Rightarrow$OI không đổi khi D di động trên AB

Bài 4: (Đề HSG huyện Lộc hà – năm 2007 – 2008)

Cho ΔABC cân tại A, có BC = 2a, M là trung điểm BC, lấy D, E thuộc AB, AC sao cho $\widehat{DME} = \hat{B}$

a) Chứng minh tích BD. CE không đổi

b)Chứng minh DM là tia phân giác của $\widehat{BDE}$

c) Tính chu vi của ΔAED nếu ΔABC là tam giác đều

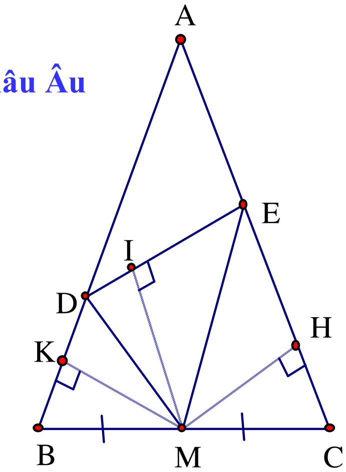
Giải

a) Ta có $\widehat{DMC} = \widehat{DME} + \widehat{CME} = \hat{B} + \widehat{BDM}$, mà $\widehat{DME} = \hat{B}$(gt)

nên $\widehat{CME} = \widehat{BDM}$, kết hợp với $\hat{B} = \hat{C}$ (ΔABC cân tại A)

suy ra $\Delta BDM \backsim \Delta CME$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{BD}{CM} = \frac{BM}{CE} \Rightarrow BD.\ CE = BM.\ CM = a^2$ không đổi



b) $\Delta BDM \backsim \Delta CME \Rightarrow \dfrac{DM}{ME} = \dfrac{BD}{CM} \Rightarrow \dfrac{DM}{ME} = \dfrac{BD}{BM}$

(do BM = CM)$\Rightarrow$ $\Delta DME \backsim \Delta DBM$ (c.g.c) $\Rightarrow$ $\widehat{MDE} = \widehat{BMD}$ hay

DM là tia phân giác của $\widehat{BDE}$

c) chứng minh tương tự ta có EM là tia phân giác của $\widehat{DEC}$

kẻ $MH \perp CE$,$MI \perp DE$, $MK \perp DB$ thì MH = MI = MK $\Rightarrow$ Δ DKM = ΔDIM

$\Rightarrow$DK =DI $\Rightarrow$ $\Delta EIM = \Delta EHM$ $\Rightarrow$EI = EH

Chu vi ΔAED là P_{AED} = AD + DE + EA = AK +AH = 2AH (Vì AH = AK)

ΔABC là tam giác đều nên suy ra ΔCME củng là tam giác đều $CH = \dfrac{MC}{2} = \dfrac{a}{2}$

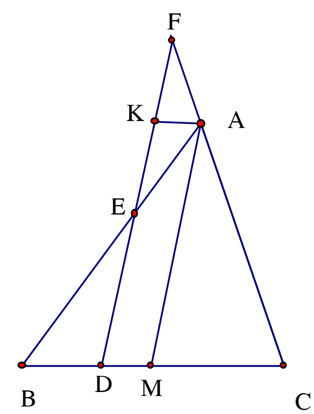
$\Rightarrow$ AH = 1,5a $\Rightarrow$ P_{AED} = 2 AH = 2. 1,5 a = 3a

Bài 5:

Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Qua điểm D thuộc cạnh BC, vẽ đường thẳng song song với AM, cắt AB, AC tại E và F

a) chứng minh DE + DF không đổi khi D di động trên BC

b) Qua A vẽ đường thẳng song song với BC, cắt FE tại K. Chứng minh rằng K là trung điểm của FE



Giải

a) DE // AM $\Rightarrow$ $\dfrac{DE}{AM} = \dfrac{BD}{BM} \Rightarrow DE = \dfrac{BD}{BM}.AM$ (1)

DF // AM $\Rightarrow$ $\dfrac{DF}{AM} = \dfrac{CD}{CM} \Rightarrow DF = \dfrac{CD}{CM}.AM = \dfrac{CD}{BM}.AM$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$DE + DF = \dfrac{BD}{BM}.AM + \dfrac{CD}{BM}.AM = \left(\dfrac{BD}{BM} + \dfrac{CD}{BM}\right).AM = \dfrac{BC}{BM}.AM = 2AM$ không đổi

b) AK // BC suy ra $\Delta FKA \backsim \Delta AMC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{FK}{AM} = \dfrac{KA}{CM}$ (3)

$\dfrac{EK}{ED} = \dfrac{KA}{BD} \Rightarrow \dfrac{EK}{ED+EK} = \dfrac{KA}{BD+KA} \Rightarrow \dfrac{EK}{KD} = \dfrac{KA}{BD+DM} \Rightarrow \dfrac{EK}{AM} = \dfrac{KA}{BM} \Rightarrow \dfrac{EK}{AM} = \dfrac{KA}{CM}$

(2)

(Vì CM = BM)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{FK}{AM}=\frac{EK}{AM}$ $\Rightarrow$ FK = EK hay K là trung điểm của FE

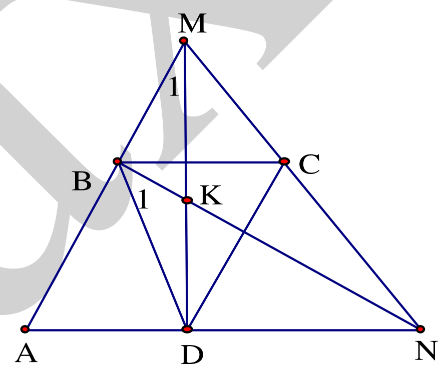
Bài 6: (Đề HSG huyện Thạch hà năm 2003 – 2004)

Cho hình thoi ABCD cạnh a có $\widehat{A}=60^0$, một đường thẳng bất kỳ qua C cắt tia đối của các tia BA, DA tại M, N

a) Chứng minh rằng tích BM. DN có giá trị không đổi

b) Gọi K là giao điểm của BN và DM. Tính số đo của góc BKD

Giải



a) BC // AN $\Rightarrow \frac{MB}{BA}=\frac{CM}{CN}$ (1)

CD// AM $\Rightarrow \frac{CM}{CN}=\frac{AD}{DN}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$\frac{MB}{BA}=\frac{AD}{DN}\Rightarrow MB.DN = BA.AD = a.a = a^2$

b) ΔMBD và ΔBDN có $\widehat{MBD}=\widehat{BDN}=120^0$

$\frac{MB}{BD}=\frac{MB}{BA}=\frac{CM}{CN}=\frac{AD}{DN}=\frac{BD}{DN}$ (Do ABCD là hình thoi có $\widehat{A}=60^0$ nên AB = BC = CD = DA) $\Rightarrow \Delta MBD \backsim \Delta BDN$

Suy ra $\widehat{M_1}=\widehat{B_1}$. ΔMBD và ΔBKD có $\widehat{BDM}=\widehat{BDK}$ và $\widehat{M_1}=\widehat{B_1}$ nên

$\widehat{BKD}=\widehat{MBD}=120^0$

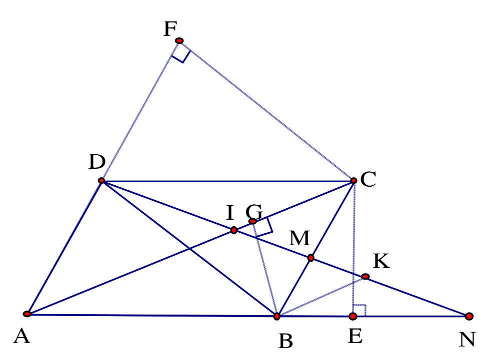
Bài 7:

Cho hình bình hành ABCD có đường chéo lớn AC,tia Dx cắt SC, AB, BC lần lượt tại I, M, N. Vẽ CE vuông góc với AB, CF vuông góc với AD, BG vuông góc với AC. Gọi K là điểm đối xứng với D qua I.

Chứng minh rằng

a) IM. IN = ID^2

b) $\frac{KM}{KN}=\frac{DM}{DN}$



c) AB. AE + AD. AF = AC^2

Giải

a) Từ AD // CM $\Rightarrow \frac{IM}{ID} = \frac{CI}{AI}$ (1)

Từ CD // AN $\Rightarrow \frac{CI}{AI} = \frac{ID}{IN}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{IM}{ID} = \frac{ID}{IN}$ hay ID^2 = IM. IN

b) Ta có $\frac{DM}{MN} = \frac{CM}{MB} \Rightarrow \frac{DM}{MN + DM} = \frac{CM}{MB + CM} \Rightarrow \frac{DM}{DN} = \frac{CM}{CB}$ (3)

Từ ID = IK và ID^2 = IM. IN suy ra IK^2 = IM. IN

$\Rightarrow \frac{IK}{IM} = \frac{IN}{IK} \Rightarrow \frac{IK - IM}{IM} = \frac{IN - IK}{IK} \Rightarrow \frac{KM}{IM} = \frac{KN}{IK} \Rightarrow \frac{KM}{KN} = \frac{IM}{IK} \Rightarrow$

$\frac{KM}{KN} = \frac{IM}{ID} = \frac{CM}{AD} = \frac{CM}{CB}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{KM}{KN} = \frac{DM}{DN}$

c) Ta có $\Delta AGB \backsim \Delta AEC \Rightarrow \frac{AE}{AG} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AB.AE = AC.AG \Rightarrow$ AB. AE = AG(AG + CG) (5)

$\Delta CGB \backsim \Delta AFC \Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{CG}{CB} = \frac{CG}{AD}$ (vì CB = AD)

$\Rightarrow$ AF . AD = AC. CG $\Rightarrow$ AF . AD = (AG + CG) .CG (6)

Cộng (5) và (6) vế theo vế ta có: AB. AE + AF. AD = (AG + CG) .AG + (AG + CG) .CG

$\Leftrightarrow$ AB. AE + AF. AD = AG^2 +2.AG.CG + CG^2 = $(AG + CG)^2$ = AC^2

Vậy: AB. AE + AD. AF = AC^2

Bài tập về nhà

Bài 1

Cho Hình bình hành ABCD, một đường thẳng cắt AB, AD, AC lần lượt tại E, F, G

Chứng minh: $\frac{AB}{AE}+\frac{AD}{AF}=\frac{AC}{AG}$

HD: Kẻ DM // FE, BN // FE (M, N thuộc AC)

Bài 2:

Qua đỉnh C của hình bình hành ABCD, kẻ đường thẳng cắt BD, AB, AD ở E, G, F

chứng minh:

a) $DE^2 = \frac{FE}{EG}. BE^2$

b) $CE^2 = FE. GE$

(Gợi ý: Xét các tam giác DFE và BCE, DEC và BEG)

Bài 3

Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, trung tuyến BM, phân giác CD cắt nhau tại một điểm. Chứng minh rằng

a) $\frac{BH}{HC}.\frac{CM}{MA}.\frac{AD}{BD}=1$

b) BH = AC