Chứng minh đẳng thức thoả mãn điều kiện của biến

Bài 1: Cho $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2$ (1); $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=2$ (2).

Chứng minh rằng: $a+b+c= abc$

Từ (1) suy ra

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2.\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)=4 \Rightarrow 2.\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)=4-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}=1 \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{abc}=1 \Leftrightarrow a+b+c=abc$$

Bài 2: Cho a, b, $c \neq 0$ và $a+b+c \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$.

Chứng minh rằng trong ba số a, b, c có hai số đối nhau.

Từ đó suy ra rằng : $\frac{1}{a^{2009}}+\frac{1}{b^{2009}}+\frac{1}{c^{2009}}=\frac{1}{a^{2009}+b^{2009}+c^{2009}}$.

Ta có : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c} \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a+b+c}=0 \Leftrightarrow$

$$\frac{a+b}{ab}+\frac{a+b}{c(a+b+c)}=0$$

$\Leftrightarrow$

$$(a+b).\frac{c(a+b+c)+ab}{abc(a+b+c)}=0 \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ b=-c \\ c=-a \end{array}\right.$$

Từ đó suy ra : $\frac{1}{a^{2009}}+\frac{1}{b^{2009}}+\frac{1}{c^{2009}}=\frac{1}{a^{2009}}+\frac{1}{(-c)^{2009}}+\frac{1}{c^{2009}}=\frac{1}{a^{2009}}$

$$\frac{1}{a^{2009}+b^{2009}+c^{2009}}=\frac{1}{a^{2009}+(-c)^{2009}+c^{2009}}=\frac{1}{a^{2009}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^{2009}}+\frac{1}{b^{2009}}+\frac{1}{c^{2009}}=\frac{1}{a^{2009}+b^{2009}+c^{2009}}.$$

Bài 3: Cho $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$ (1)

chứng minh rằng : trong ba số a, b, c tồn tại hai số bằng nhau

Từ (1) $\Rightarrow a^2c+ab^2+bc^2=b^2c+ac^2+a^2b \Rightarrow a^2(b-c)-a(c^2-b^2)+bc(c-b)=0$

$\Rightarrow (c - b)(a^2 - ac = ab + bc) = 0 \Rightarrow (c - b)(a - b)(a - c) = 0 \Rightarrow$ đpcm

Bài 4: Cho $(a^2 - bc)(b - abc) = (b^2 - ac)(a - abc)$; $abc \neq 0$ và $a \neq b$

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a + b + c$

Từ GT $\Rightarrow a^2b - b^2c - a^3bc + ab^2c^2 = ab^2 - a^2c - ab^3c + a^2bc^2$

$\Leftrightarrow (a^2b - ab^2) + (a^2c - b^2c) = abc^2(a - b) + abc(a - b)(a + b)$

$\Leftrightarrow (a - b)(ab + ac + bc) = abc(a - b)(a + b + c)$

$\Leftrightarrow \frac{ab + ac + bc}{abc} = a + b + c \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a + b + c$

Bài 5: Cho $a + b + c = x + y + z = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$;

Chứng minh rằng: $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$

Từ $x + y + z = 0 \Rightarrow x^2 = (y + z)^2$; $y^2 = (x + z)^2$; $z^2 = (y + x)^2$

$\Rightarrow ax^2 + by^2 + cz^2 = a(y + z)^2 + b(x + z)^2 + c(y + x)^2 = \ldots$

$= (b + c)x^2 + (a + c)y^2 + (a + b)z^2 + 2(ayz + bxz + cxy)$ (1)

Từ $a + b + c = 0 \Rightarrow -a = b + c; -b = a + c; -c = a + b$ (2)

Từ $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0 \Rightarrow ayz + bxz + cxy = 0$ (3). Thay (2), (3) vào (1); ta có:

$ax^2 + by^2 + cz^2 = -(ax^2 + by^2 + cz^2) \Rightarrow ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$

Bài 6: Cho $\frac{a}{b - c} + \frac{b}{c - a} + \frac{c}{a - b} = 0$; chứng minh: $\frac{a}{(b - c)^2} + \frac{b}{(c - a)^2} + \frac{c}{(a - b)^2} = 0$

Từ $\frac{a}{b - c} + \frac{b}{c - a} + \frac{c}{a - b} = 0 \Rightarrow \frac{a}{b - c} = \frac{b}{a - c} + \frac{c}{b - a} = \frac{b^2 - ab + ac - c^2}{(a - b)(c - a)}$

$\Leftrightarrow \frac{a}{(b - c)^2} = \frac{b^2 - ab + ac - c^2}{(a - b)(c - a)(b - c)}$ (1) (Nhân hai vế với $\frac{1}{b - c}$)

Tương tự, ta có: $\frac{b}{(c - a)^2} = \frac{c^2 - bc + ba - a^2}{(a - b)(c - a)(b - c)}$ (2) ; $\frac{c}{(a - b)^2} = \frac{a^2 - ac + cb - b^2}{(a - b)(c - a)(b - c)}$ (3)

Cộng từng vế (1), (2) và (3) ta có đpcm

Bài 7:

Cho $a + b + c = 0$; chứng minh: $\left(\frac{a - b}{c} + \frac{b - c}{a} + \frac{c - a}{b}\right)\left(\frac{c}{a - b} + \frac{a}{b - c} + \frac{b}{c - a}\right) = 9$

(1)

Đặt $\frac{a-b}{c}=x$; $\frac{b-c}{a}=y$; $\frac{c-a}{b}=z$ $\Rightarrow \frac{c}{a-b}=\frac{1}{x}$ $\frac{a}{b-c}=\frac{1}{y}$; $\frac{b}{c-a}=\frac{1}{z}$

(1) $\Leftrightarrow$ $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=9$

Ta có: $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\left(\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}\right)$ (2)

Ta lại có:

$$\frac{y+z}{x}=\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right).\frac{c}{a-b}=\frac{b^2-bc+ac-a^2}{ab}.\frac{c}{a-b}=\frac{c(a-b)(c-a-b)}{ab(a-b)}=\frac{c(c-a-b)}{ab}$$

$=\frac{c\left[2c-(a+b+c)\right]}{ab}=\frac{2c^2}{ab}$ (3)

Tương tự, ta có: $\frac{x+z}{y}=\frac{2a^2}{bc}$ (4) ; $\frac{x+y}{z}=\frac{2b^2}{ac}$ (5)

Thay (3), (4) và (5) vào (2) ta có:

$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\frac{2c^2}{ab}+\frac{2a^2}{bc}+\frac{2b^2}{ac}=3+\frac{2}{abc}(a^3+b^3+c^3)$ (6)

Từ $a+b+c=0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$ (7) ?

Thay (7) vào (6) ta có: $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\frac{2}{abc}.3abc=3+6=9$

Bài tập về nhà:

1) cho $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$; tính giá trị biểu thức $A=\frac{yz}{x^2}+\frac{xz}{y^2}+\frac{xy}{z^2}$

HD: $A=\frac{xyz}{x^3}+\frac{xyz}{y^3}+\frac{xyz}{z^3}$; vận dụng $a+b+c=0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$

2) Cho $a^3+b^3+c^3=3abc$; Tính giá trị biểu thức $A=\left(\frac{a}{b}+1\right)\left(\frac{b}{c}+1\right)\left(\frac{c}{a}+1\right)$

3) Cho $x+y+z=0$; chứng minh rằng: $\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}+3=0$

4) Cho $a+b+c=a^2+b^2+c^2=1$; $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$. Chứng minh $xy+yz+xz=0$

Amax