Rút gọn; tính giá trị biểu thức thoả mãn điều kiện của biến

Bài 1: Cho $x+\frac{1}{x}=3$. Tính giá trị của các biểu thức sau :

a) $A=x^2+\frac{1}{x^2}$; b) $B=x^3+\frac{1}{x^3}$; c) $C=x^4+\frac{1}{x^4}$; d) $D=x^5+\frac{1}{x^5}$.

Lời giải

a) $A=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=9-2=7$;

b) $B=x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=27-9=18$;

c) $C=x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=49-2=47$;

d) $A.B=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=x^5+\frac{1}{x}+x+\frac{1}{x^5}=D+3 \Rightarrow D = 7.18 – 3 = 123$.

Bài 2: Cho $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=2$ (1); $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=2$ (2).

Tính giá trị biểu thức $D=\left(\frac{a}{x}\right)^2+\left(\frac{b}{y}\right)^2+\left(\frac{c}{z}\right)^2$

Từ (1) suy ra bcx + acy + abz = 0 (3)

Từ (2) suy ra

$\left(\frac{a}{x}\right)^2+\left(\frac{b}{y}\right)^2+\left(\frac{c}{z}\right)^2+2.\left(\frac{ab}{xy}+\frac{ac}{xz}+\frac{bc}{yz}\right)=4\Rightarrow\left(\frac{a}{x}\right)^2+\left(\frac{b}{y}\right)^2+\left(\frac{c}{z}\right)^2=4-2.\left(\frac{ab}{xy}+\frac{ac}{xz}+\frac{bc}{yz}\right)$

(4)

Thay (3) vào (4) ta có $D = 4 – 2.0 = 4$

Bài 3

a) Cho abc = 2; rút gọn biểu thức $A=\frac{a}{ab+a+2}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{2c}{ac+2c+2}$

Ta có :

$$A = \frac{a}{ab+a+2} + \frac{ab}{abc+ab+a} + \frac{2c}{ac+2c+2} = \frac{a}{ab+a+2} + \frac{ab}{2+ab+a} + \frac{2c}{ac+2c+abc}$$

$$= \frac{a}{ab+a+2} + \frac{ab}{2+ab+a} + \frac{2c}{c(a+2+ab)} = \frac{a}{ab+a+2} + \frac{ab}{2+ab+a} + \frac{2}{a+2+ab} = \frac{ab+a+2}{ab+a+2} = 1$$

b) Cho $a + b + c = 0$; rút gọn biểu thức $B = \frac{a^2}{a^2 - b^2 - c^2} + \frac{b^2}{b^2 - c^2 - a^2} + \frac{c^2}{c^2 - b^2 - a^2}$

Từ $a + b + c = 0 \Rightarrow a = -(b + c) \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \Rightarrow a^2 - b^2 - c^2 = 2bc$

Tương tự ta có: $b^2 - a^2 - c^2 = 2ac$; $c^2 - b^2 - a^2 = 2ab$ (Hoán vị vòng quanh), nên

$$B = \frac{a^2}{2bc} + \frac{b^2}{2ac} + \frac{c^2}{2ab} = \frac{a^3+b^3+c^3}{2abc} \quad (1)$$

$a + b + c = 0 \Rightarrow -a = (b + c) \Rightarrow -a^3 = b^3 + c^3 + 3bc(b + c) \Leftrightarrow -a^3 = b^3 + c^3 - 3abc$

$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ (2)

Thay (2) vào (1) ta có $B = \frac{a^3+b^3+c^3}{2abc} = \frac{3abc}{2abc} = \frac{3}{2}$ (Vì $abc \neq 0$)

c) Cho a, b, c từng đôi một khác nhau thoả mãn: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Rút gọn biểu thức $C = \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab}$

Từ $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow ab + ac + bc = 0$

$\Rightarrow a^2 + 2bc = a^2 + 2bc - (ab + ac + bc) = a^2 - ab + bc - ac = (a - b)(a - c)$

Tương tự: $b^2 + 2ac = (b - a)(b - c)$; $c^2 + 2ab = (c - a)(c - b)$

$$C = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} - \frac{b^2}{(a-b)(b-c)} + \frac{c^2}{(a-c)(b-c)}$$

$$= \frac{a^2(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)} - \frac{b^2(a-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)} + \frac{c^2(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = \frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = 1$$