d. *Vẽ đường kính DF của đường tròn (O;R), MF cắt AI tại N. Biết AM = R tính khoảng cách từ N đến đường thẳng AM*

Bài 74

Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O;R). (AC < AC) Tiếp tuyến tại B và tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) cắt nhau tại D. Tia OD cắt BC tại H

a. *Chứng minh tứ giác OBDC nội tiếp và OD $\perp$ BC tại H*

b. *Chứng minh HO.HD = $\frac{BC^2}{4}$*

c. *Vẽ cát tuyến DMN với đường tròn (O) song song với Abcắt AC tại K. Chứng minh DM.DN = DB.DC*

d. *Chứng minh OK $\perp$ MN*

e. *Cho $\widehat{BAC} = 60^0$ và $\widehat{AOB} = 90^0$. Tính diện tích ΔBKC theo R*

Bài 75

Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O;R) (AB < AC).Phân giác của góc BAC cắt BC tại D và cắt (O;R) tại M.

a. *Chứng minh OM $\perp$ BC tại I*

b. *Tiếp tuyến tại A cắt BC tại S. Chứng minh SA = SD*

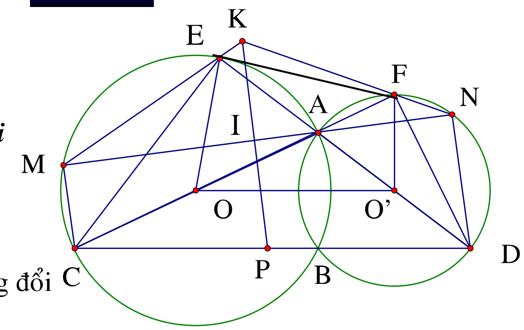
c. *Vẽ đường kính MN của (O;R) cắt AC tại F , BN cắt AM tại E. Chứng minh EF // BC*

d. *Vẽ tiếp tuyến SK của (O) (K là tiếp điểm , K $\neq$ A). Chứng minh K , N , D thẳng hàng*

e. *Cho AB = 3 , BC = 5 , AC = 6. Chứng minh ΔSAB cân*

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1



1. *Chứng minh EFO'O nội tiếp*

cm $\widehat{EOA} = \widehat{FO'A}$

2. *Chứng minh $\frac{MC}{NF}$ không đổi*

cm $\Delta MCE \sim \Delta NFD$

và $\Delta CEA \sim \Delta DFA$

$\Rightarrow \frac{MC}{NF} = \frac{EC}{DF} = \frac{AC}{AD}$ không đổi

3. *Quỹ tích trung điểm I của MN*

Gọi P là trung điểm CD $\Rightarrow$ P cố định và IP là đường trung bình của hình thang CMND $\Rightarrow$ Δ PIA vuông tại I $\Rightarrow$ I thuộc đường tròn đường kính AP cố định

4. *Chứng minh đường thẳng KI đi qua điểm cố định*

Chứng minh ΔMKN cân $\Rightarrow$ K , I , P thẳng hàng $\Rightarrow$ KI đi qua P cố định

5. *Khi MM // EF Chứng minh MN = BE + BF*

Trước hết cần chứng minh C , B , D thẳng hàng

MN // EF $\Rightarrow \widehat{EFA} = \widehat{FAN}$

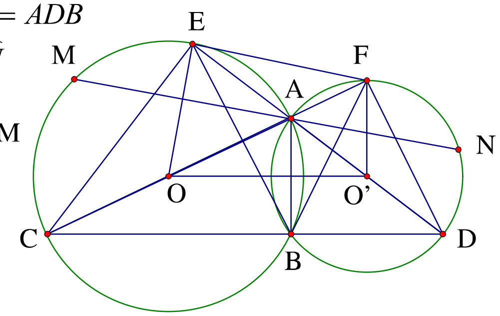
Mà $\widehat{EFA} = \widehat{ADB} \Rightarrow \widehat{FAN} = \widehat{ADB}$

$\Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{FN} \Rightarrow \widehat{BF} = \widehat{AN}$

$\Rightarrow$ BF = AN

Tương tự chứng minh BE = AM

$\Rightarrow$ MN = BE + BF



Bài 2

1. *Chứng minh $\widehat{CAF}=\widehat{CKF}$*

Chứng minh AKFC nội tiếp

2. *Chứng minh ΔKAF vuông cân*

Chú ý $\widehat{AFK}=\widehat{ACD}=45^0$

3. *Chứng minh đường thẳng BD đi qua trung điểm I của KF*

Chứng minh AIBF nội tiếp $\Rightarrow$ $\widehat{ABI}=\widehat{AFI}=45^0$

Mà $\widehat{ABD}=45^0$ $\Rightarrow$ B , D , I thẳng hàng

4. *Chứng minh IMCF nội tiếp*

Chứng minh ΔABM = ΔCBM

$\Rightarrow$ $\widehat{BAM}=\widehat{BCM}$

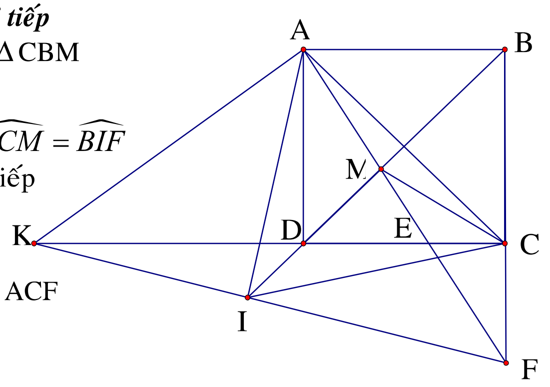
Mà $\widehat{BAM}=\widehat{BIF}$ $\Rightarrow$ $\widehat{BCM}=\widehat{BIF}$

Do đó tứ giác IMCF nội tiếp

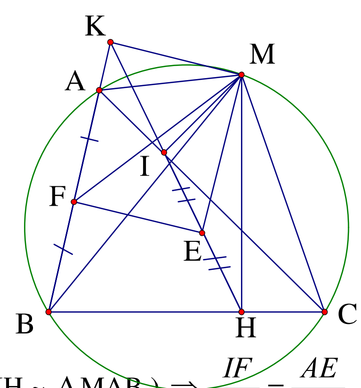
5. *Tính tỉ số $\frac{ID}{CF}$*

Chứng minh ΔADI ~ Δ ACF

$\Rightarrow \frac{ID}{CF}=\frac{AD}{AC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$



Bài 3



1. *Chứng minh $\widehat{IHM}=\widehat{ICM}$*

Chứng minh tứ giác MIHC nội tiếp

2. *Chứng minh MK $\perp$ BK*

Chứng minh tứ giác BHMK nội tiếp

3. *Chứng minh Δ MIH ~ Δ MAB*

Chứng minh $\widehat{IMH}=\widehat{AMB}\ (=\widehat{ACB})$

Và $\widehat{IHM}=\widehat{ABM}$

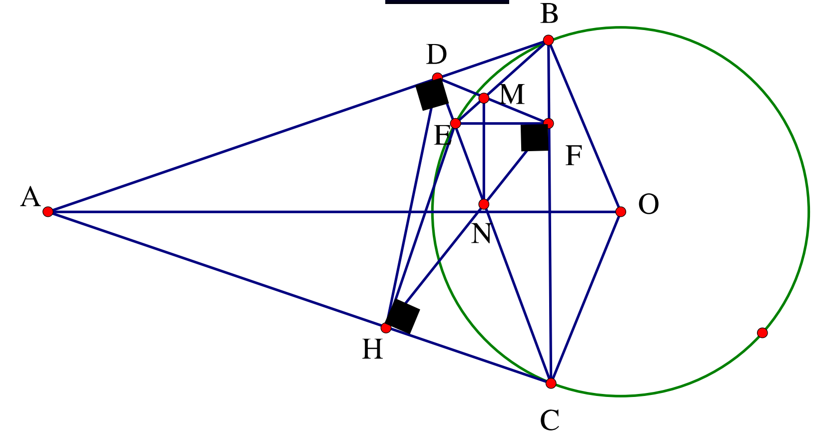
4. *Chứng minh ME $\perp$ EF*

Ta có $\widehat{MIH}=\widehat{MAB}$ và $\frac{IH}{IM}=\frac{AB}{AM}$ (ΔMIH ~ ΔMAB) $\Rightarrow$ $\frac{IF}{IM}=\frac{AE}{AM}$

$\Rightarrow$ ΔMAE ~ Δ MIF (c-g-c) $\Rightarrow$ $\widehat{KFM}=\widehat{KEM}$ $\Rightarrow$ KMFE nội tiếp

$\Rightarrow$ $\widehat{MFE}=\widehat{MKE}=90^0$ $\Rightarrow$ MF $\perp$ EF

Bài 4



1. *Chứng minh EFCH và EFBD nội tiếp*

Học sinh tự chứng minh

2. *Chứng minh EF^2 = ED.EH*

Chứng minh ΔEFD ~ ΔEHF (g-g)

3. *Chứng minh EMFN nội tiếp*

Ta có $\widehat{DEB}=\widehat{EBC}+\widehat{ECB}$ (góc ngoài ΔBEC)

Mà $\widehat{EBC}=\widehat{ECH}=\widehat{EFH}$ và $\widehat{ECB}=\widehat{DBE}=\widehat{DFE}$

Suy ra : $\widehat{DEB}=\widehat{DFE}+\widehat{EFN}=\widehat{MFN}$ $\Rightarrow$ tứ giác EMFN nội tiếp

4. *Chứng minh MN $\perp$ EF*

Ta có : $\widehat{ENM}=\widehat{EFM}$ (EMFN nội tiếp)

Mà : $\widehat{EFM}=\widehat{DBE}=\widehat{BEC}$ $\Rightarrow$ $\widehat{ENM}=\widehat{BCE}$

$\Rightarrow$ MN // BC $\Rightarrow$ MN $\perp$ EF

Bài 5

1. *Chứng minh AMOI nội tiếp . Xác định tâm K của đường tròn*

Học sinh tự chứng minh

2. *Chứng minh CHOD nội tiếp*

Chứng minh AC.AD = AH.AO (= AM^2) $\Rightarrow \dfrac{AC}{AO} = \dfrac{AH}{AD}$

$\Rightarrow \Delta AHC \sim \Delta ADO \Rightarrow \widehat{AHC} = \widehat{ADO} \Rightarrow$ CHOD nội tiếp

3. Chứng minh CFIN nội tiếp

Ta có AM // CB (cùng $\perp$ MO) $\Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{MAI}$

Mà $\widehat{MAI} = \widehat{MNI}$ (cùng chắn cung $\widehat{MI}$) $\Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{MNI}$

Suy ra tứ giác CFIN nội tiếp

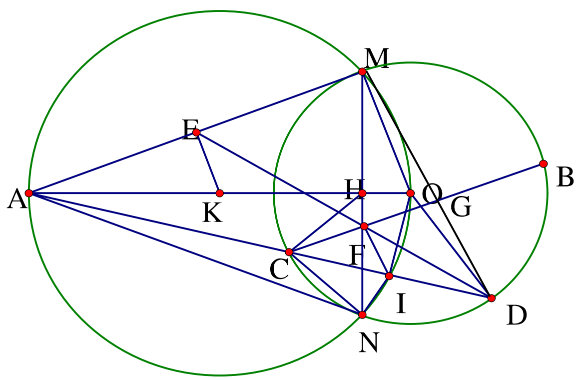
4. Chứng minh KE $\perp$ AM

MD cắt CB tại G. Ta có $\widehat{MDC} = \widehat{FIC}$ (= $\widehat{MNC}$) $\Rightarrow$ FI // MD

ΔCED có I là trung điểm CD và FI // GD $\Rightarrow$ F là trung điểm CG

Xét ΔMDA có CG // AM và F là trung điểm CG $\Rightarrow$ E là trung điểm AM

Suy ra : KE $\perp$ AM (tính chất đường kính – dây cung)



Bài 6

1. Chứng minh MAOB nội tiếp

Học sinh tự chứng minh

2. Chứng minh EB^2 = EC.EA

Chứng minh Δ EBC ~ Δ EAB $\Rightarrow \dfrac{EB}{EC} = \dfrac{EA}{EB} \Rightarrow$ EB^2 = EC. EA

3. Chứng minh E là trung điểm MB

Ta có : AD // MB $\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{CME}$

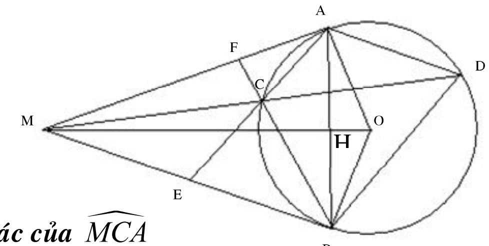
Mà $\widehat{ADC} = \widehat{MAC}$ (cùng chắn cung $\widehat{AC}$) $\Rightarrow \widehat{CME} = \widehat{MAC}$

Xét ΔMEA và ΔCEM đồng dạng $\Rightarrow$ EM^2 = EC.EA

Từ đó suy ra : EM = EB

4. Chứng minh BC.BM =MC.AB

Chứng minh ΔMCB ~ ΔBCA (g – g)



5. Chứng minh tia CF là phân giác của $\widehat{MCA}$

Ta có AD // MB $\Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{DB} \Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{DCB}$

Mà $\widehat{FCA} = \widehat{ADB}$ (ACBD nội tiếp) và $\widehat{FCM} = \widehat{DCB}$ (đ đ)

Suy ra : $\widehat{FCM} = \widehat{FCA} \Rightarrow$ tia CF là phân giác của $\widehat{MCA}$

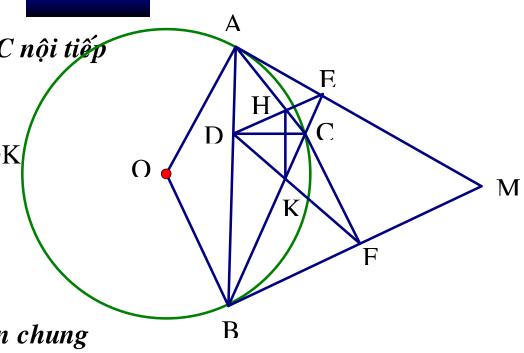
6. Tính diện tích ΔBAD theo R

Tính diện tích ΔMAB theo R (tính MA và tính AH)

Chứng minh ΔADB ~ ΔABM với tỉ số đồng dạng k = $\dfrac{AB}{AM}$ = ?

Suy ra : $S_{\Delta ABD} = k^2 . S_{\Delta AMB}$ = ?

Bài 7



1. Chứng minh DAEC và DBFC nội tiếp

(Học sinh tự chứng minh)

2. Chứng minh CE.CF = CD^2

Chứng minh ΔCED ~ Δ CDK

3. Chứng minh CHDK nội tiếp

Chứng minh tương tự bài 4

4. Chứng minh HK // AB

Chứng minh tương tự bài 4

5. Chứng minh HK là tiếp tuyến chung

Chứng minh $\widehat{CHK} = \widehat{CEH} \Rightarrow$ HK là tiếp tuyến của đường tròn (CEH)

Chứng minh $\widehat{CKH} = \widehat{CFK} \Rightarrow$ HK là tiếp tuyến của đường tròn (CKF)

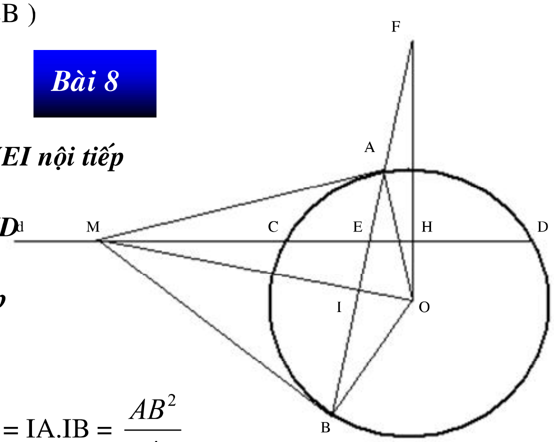
6. Chứng minh CI đi qua trung điểm AB

Chứng minh đường thẳng CI đi qua trung điểm của HK

$\Rightarrow$ đường thẳng CI đi qua trung điểm của AB

(do AB // HK trong ΔACB)

Bài 8



1. Chứng minh MIHF và OHEI nội tiếp

(Học sinh tự chứng minh)

2. Chứng minh $MA^2 = MC.MD$

(Học sinh tự chứng minh)

3. Chứng minh CIOD nội tiếp

Tương tự câu 2 bài 5

4. Chứng minh $4IF.IE = AB^2$

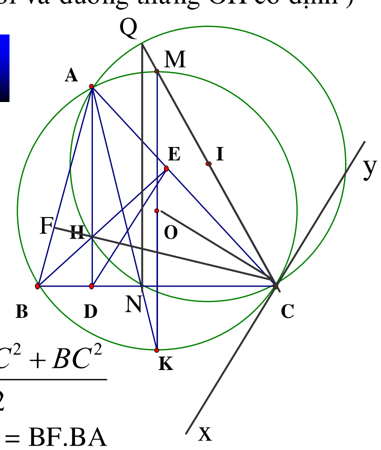
Chứng minh IF.IE = IO.IM = IA.IB = $\frac{AB^2}{4}$

5. Chứng minh đường thẳng AB đi qua điểm cố định

Chứng minh OH.OF = OI.OM = $OA^2 = R^2$ $\Rightarrow$ OF = $\frac{R^2}{OH}$ không đổi

Từ đó $\Rightarrow$ F là điểm cố định (OF không đổi và đường thẳng OH cố định)

Bài 9



1. Chứng minh AEDB và CDHE nội tiếp

(Học sinh tự chứng minh)

2. Chứng minh OC $\perp$ DE

Vẽ tiếp tuyến tại C của (O) ,

chứng minh xy // DE $\Rightarrow$ OC $\perp$ DE

3. Chứng minh

$$AH.AD + BH.BE + CH.CF = \frac{AB^2 + AC^2 + BC^2}{2}$$

Chứng minh : AH.AD = AF.AB và BH.BE = BF.BA

Suy ra : AH.AD + BH.BE = AB^2

Tương tự chứng minh : AH.AD + CH.CF = AC^2 và BH.BE + CH.CF = BC^2

Từ đó suy ra điều phải chứng minh .

4. Chứng minh KO và CI cắt nhau tại điểm thuộc đường tròn (O)

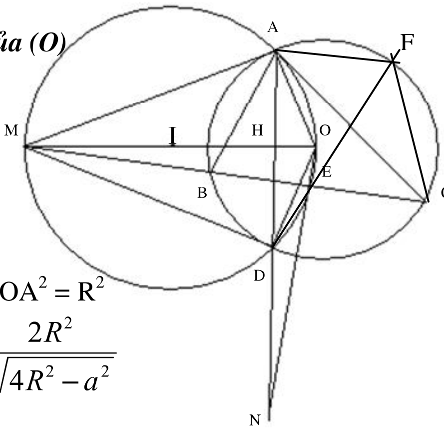
Đường thẳng CI cắt (I) tại Q , đường thẳng KO cắt CQ tại M

$\Rightarrow$ NQ $\perp$ BC $\Rightarrow$ NQ // KM $\Rightarrow$ $\widehat{KMC} = \widehat{NQC}$

Mà ta có : $\widehat{NQC} = \widehat{KAC}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{NC}$ trong (I))

Suy ra : $\widehat{KAC} = \widehat{KMC}$ $\Rightarrow$ tứ giác KAMC nội tiếp $\Rightarrow$ M thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔAKC $\Rightarrow$ M thuộc đường tròn (O).

Bài 10



1. Chứng minh MA là tiếp tuyến của (O) và $MA^2 = MB.MC$

Chứng minh ΔMAO vuông tại A

Chứng minh ΔMAB ~ ΔMCA

2. Chứng minh MHEN nội tiếp

Học sinh tự chứng minh

3. Tính ON theo a và R

Chứng minh OE.ON = OH.OM = $OA^2 = R^2$

$$\Rightarrow ON = \frac{R^2}{OE} = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}} = \frac{2R^2}{\sqrt{4R^2 - a^2}}$$

4. Chứng minh ABCF là hình thang cân

$\widehat{MED} = \widehat{MAD} = \widehat{AFD}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{MD}$ trong (I) và chắn $\overset{\frown}{AD}$ trong (O)

$\Rightarrow$ AF // BC $\Rightarrow$ ABCF là hình thang

Mà ABCF nội tiếp (O) $\Rightarrow$ ABCF là hình thang cân

Bài 11

1. Chứng minh tứ giác ACIO nội tiếp . Suy ra số đo $\widehat{OID}$

C là điểm chính giữa $\overset{\frown}{AB}$ $\Rightarrow$ CO $\perp$ AB tại O

Ta có $\widehat{AOC} = \widehat{AIC} = 90^0$ $\Rightarrow$ tứ giác ACIO nội tiếp

Suy ra : $\widehat{OID} = \widehat{ACB} = 45^0$

2. Chứng minh OI là tia phân giác của $\widehat{COM}$

Ta có $\widehat{AIO} = \widehat{ACO} = 45^0$ $\Rightarrow$ $\widehat{AIO} = \widehat{OID}$ $\Rightarrow$ đpcm

3. *Chứng minh $\Delta CIO \sim \Delta CMB$. Tính tỉ số $\frac{IO}{BM}$*

Chứng minh $\widehat{OCI} = \widehat{OAI} = \widehat{MCB}$ và $\widehat{COI} = \widehat{CAM} = \widehat{CBM}$

Suy ra $\Delta CIO \sim \Delta CMB$ (g-g) $\Rightarrow \frac{IO}{MB} = \frac{CO}{CB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(do ΔCOB vuông cân)

4. *Tính tỉ số $\frac{AM}{MB}$ và tính MA và MB theo R*

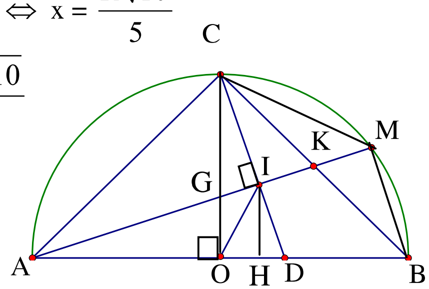
Chứng minh G là trọng tâm của $\Delta ABC \Rightarrow \frac{GO}{OC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{OG}{OA} = \frac{1}{3}$

Chứng minh $\Delta AOG \sim \Delta AMB \Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{OG}{OA} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AM}{BM} = 3$

Đặt BM = x (x > 0) .
Suy ra AM = 3x . Ta có $AM^2 + BM^2 = AB^2 = 4R^2$

$\Leftrightarrow (3x)^2 + x^2 = 4R^2 \Leftrightarrow 10x^2 = 4R^2 \Leftrightarrow x = \frac{R\sqrt{10}}{5}$

Vậy : $MB = \frac{R\sqrt{10}}{5}$ và $AM = \frac{3R\sqrt{10}}{5}$



5. *Khi M là điểm chính giữa $\overset{\frown}{BC}$.*
Tính diện tích tứ giác ACIO theo R

M là điểm chính giữa $\overset{\frown}{BC}$
$\Rightarrow$ AI là phân giác của ΔCAD
$\Rightarrow$ ΔCAD cân tại A $\Rightarrow$ AD = AC = $R\sqrt{2}$
$\Rightarrow$ OD = AD – AO = $R\sqrt{2} - R$

Ta có : $S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}CO.AD = \frac{1}{2}R.R\sqrt{2} = \frac{R^2\sqrt{2}}{2}$

Kẻ đường cao IH của $\Delta OID \Rightarrow IH = \frac{1}{2}OC = \frac{R}{2}$

Ta có : $S_{\Delta OID} = \frac{1}{2}IH.OD = \frac{1}{2}.\frac{R}{2}.R(\sqrt{2}-1) = \frac{R^2(\sqrt{2}-1)}{4}$

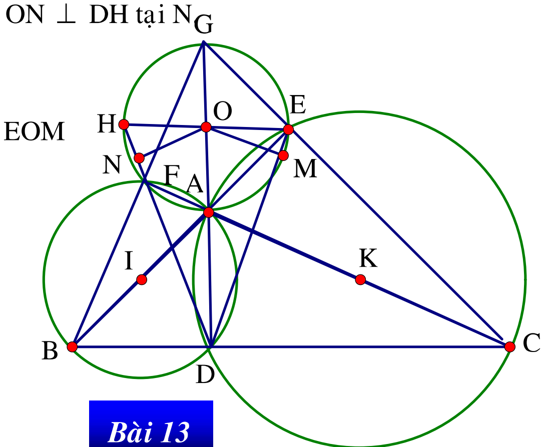
$S_{ACIO} = S_{\Delta ACD} - S_{\Delta OID} = \frac{R^2\sqrt{2}}{2} - \frac{R^2(\sqrt{2}-1)}{4} = \frac{R^2(\sqrt{2}+1)}{4}$

Bài 12

1. *Chứng minh B , C , D thẳng hàng*
Chứng minh AD ⊥ BD và AD ⊥ DC

2. *Chứng minh tứ giác BFEC nội tiếp*
(học sinh tự chứng minh)

3. *So sánh DH và DE*
Gọi G là giao điểm BF và CE . Chứng minh được A , D , G thẳng hàng .
Từ đó suy ra H thuộc đường tròn (O) ngoại tiếp tứ giác AEGF
Chứng minh : $\overset{\frown}{HDO} = \overset{\frown}{EDO}$
Vẽ OM ⊥ DE tại M , vẽ ON ⊥ DH tại N
Suy ra : OM = ON
$\Rightarrow \overset{\frown}{MOD} = \overset{\frown}{NOD}$
Chứng minh $\Delta HON = \Delta EOM$
$\Rightarrow \overset{\frown}{HON} = \overset{\frown}{EOM}$
$\Rightarrow \overset{\frown}{HOD} = \overset{\frown}{EOD}$
$\Rightarrow \Delta HOD = \Delta EOD$
$\Rightarrow$ DH = DE

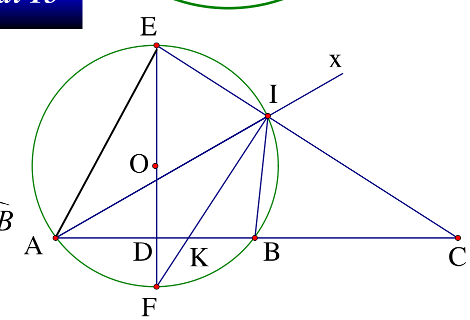


Bài 13

1. *Chứng minh EDKI nội tiếp*
(Học sinh tự chứng minh)

2. *Chứng minh CI.CE = CK.CD*
Chứng minh $\Delta CIK \sim \Delta CDE$ (g-g)

3. *Chứng minh IC là tia phân giác $\widehat{xIB}$*
$\overset{\frown}{xIC} = \overset{\frown}{EIA}$ (đ đ)
$\overset{\frown}{CIB} = \overset{\frown}{EAB}$ (EIBA nội tiếp)



$\widehat{EIA} = \widehat{EAB}$ ($\widehat{EA} = \widehat{EB}$)

$\Rightarrow \widehat{xIC} = \widehat{CIB}$

$\Rightarrow$ Tia IC là phân giác của $\widehat{xIB}$

4. Đường thẳng FI luôn đi qua điểm cố định

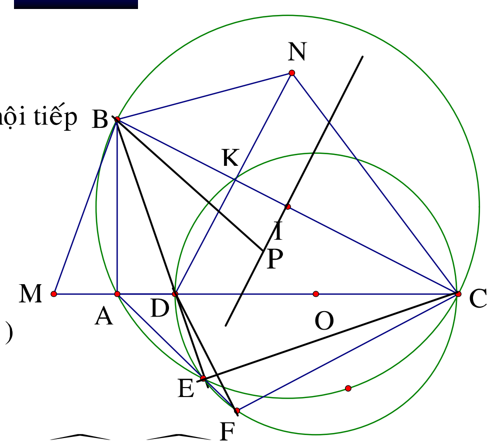
Chứng minh CK.CD = CI.CE = CB.CA $\Rightarrow$ CK = $\dfrac{CA.CB}{CD}$

Do D là trung điểm AB $\Rightarrow$ D cố định $\Rightarrow$ CD không đổi

$\Rightarrow$ CK không đổi $\Rightarrow$ K là điểm cố định .

Vậy đường thẳng FI luôn đi qua điểm K cố định .

Bài 14



1. Chứng minh ABCE nội tiếp

$\widehat{BAC} = \widehat{BEC} = 90^0 \Rightarrow$ ABEC nội tiếp

2. Chứng minh $\widehat{BCA} = \widehat{ACF}$

$\widehat{CED} = 90^0$; $\widehat{CEB} = 90^0$

Suy ra E ,D , B thẳng hàng

$\widehat{BCA} = \widehat{BEA}$ (chắn $\widehat{BA}$)

$\widehat{BEA} = \widehat{ACF}$ (DCFE nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{ACF}$

3. Chứng minh BMCN nội tiếp

Chứng minh ΔMBD cân tại B $\Rightarrow \widehat{BMC} = \widehat{BDM}$

D và N đối xứng nhau qua BC $\Rightarrow \widehat{BNC} = \widehat{BDC}$

Suy ra $\widehat{BNC} + \widehat{BMC} = \widehat{BDM} + \widehat{BDC} = 90^0 \Rightarrow$ BMCN nội tiếp

4. Xác định vị trí của D để đường tròn (BMCN) có bán kính nhỏ nhất

Gọi P là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác BMNC $\Rightarrow$ P thuộc đường trung trực của BC. Ta có BP $\geq$ BI (BI không đổi) . Vậy PB nhỏ nhất khi P trùng với I . Mà IB = IA và IB = IM $\Rightarrow$ IM = IA

$\Rightarrow$ M $\equiv$ A $\Leftrightarrow$ D $\equiv$ A

Bài 15

1. Chứng minh H $\in$ BC

Chứng minh $\widehat{AHB} = 90^0$ và $\widehat{AHC} = 90^0 \Rightarrow$ B , H , C thẳng hàng

2. Tứ giác BCNM là hình gì ? Tại sao ?

(Học sinh tự chứng minh)

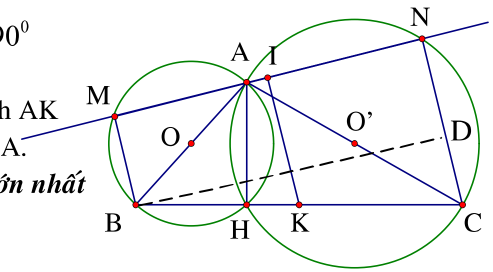
4. Chứng minh A , H , I , K cùng thuộc một đường tròn.

Suy ra quỹ tích của I

Chứng minh $\widehat{AHK} = \widehat{AIK} = 90^0$

$\Rightarrow$ AHKI nội tiếp

$\Rightarrow$ I $\in$ đường tròn đường kính AK cố định khi d quay quanh A.



4. Xác định vị trí của d để MN lớn nhất

Vẽ BD $\perp$ NC tại D.

Suy ra MN = BD $\leq$ BC .

Vậy MN lớn nhất khi khi MN = BC .

Khi đó D $\equiv$ C $\Leftrightarrow$ MN // BC hay d // BC

Bài 16

1. Chứng minh AE = AF

Hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau trong hai đường tròn bằng nhau

2. Chứng minh AEKF và ACKD nội tiếp

AB $\perp$ CD $\Rightarrow$ AC và AD là hai đường kính của (O) và (O')

Suy ra : $\widehat{AEK} = \widehat{AFK} = 90^0 \Rightarrow$ AEKF nội tiếp

Do AE = AF $\Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{AF} \Rightarrow \widehat{ACE} = \widehat{ADF} \Rightarrow$ ACKD nội tiếp

3. Chứng minh ΔEKF cân

$\widehat{FEK} = \widehat{CAB}$ (ABEC nội tiếp)

$\widehat{EFK} = \widehat{DAB}$ (ABDF nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FEK} = \widehat{EFK} \Rightarrow \Delta$EKF cân tại K

4. Chứng minh I , A , K thẳng hàng

ΔEAF cân $\Rightarrow$ AI $\perp$ EF và ΔEKF cân

$\Rightarrow$ KI $\perp$ EF .

Suy ra A , I , K thẳng hàng

5. Khi EF quay quanh B thì I và K di chuyển trên đường nào ?