$\Rightarrow$ AD là trung trực của KM $\Rightarrow$ AE $\perp$ KM

2. Chứng minh AD.AE = AB.AC

Chứng minh $\Delta ABD \sim \Delta AEC$ (g-g)

3. Chứng minh MK = AD .sin $\widehat{BAC}$

Vẽ KF $\perp$ AC tại F. Chứng minh $\Delta KFM \sim \Delta AKD$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{KF}{AK} = \frac{KM}{AD} \Rightarrow MK = AD.\frac{KF}{AK} = AD.\sin\widehat{BAC}$$

4. So sánh diện tích tứ giác AKEM và diện tích ΔABC

Ta có : $2S_{\Delta ABC} = AB.AC.\sin\widehat{BAC}$ (hs tự chứng minh)

và $2S_{AKEM} = AE.MK = AE.AD.\sin\widehat{BAC}$ ($MK = AD.\sin\widehat{BAC}$)

Mà AE.AD = AB.AC (cmt) $\Rightarrow 2S_{AKEM} = AB.AC.\sin\widehat{BAC} = 2S_{\Delta ABC}$

Vậy $S_{AKEM} = S_{\Delta ABC}$

Bài 52

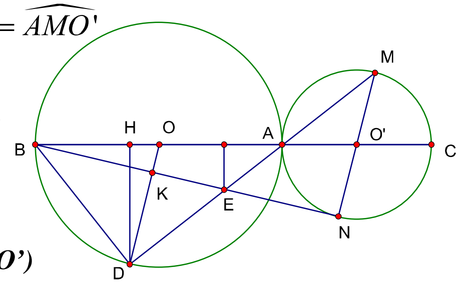
1. Chứng minh (O) và (O') tiếp xúc nhau

(Học sinh tự chứng minh)

2. Chứng minh OD // MN và tính OK theo R

Chứng minh $\widehat{ODA} = \widehat{OAD} = \widehat{MAO'} = \widehat{AMO'}$

$\Rightarrow$ OD // MN



Ta có : OK // O'N $\Rightarrow \dfrac{OK}{O'N} = \dfrac{BO}{BO'}$

$$\Rightarrow OK = \frac{BO.O'N}{O'B} = \frac{R.0,5R}{2,5R} = \frac{R}{5}$$

3. Chứng minh BN là tiếp tuyến của (O')

Chứng minh $\Delta BOK = \Delta DOH$ (c- g- c)

$\Rightarrow \widehat{OKB} = 90^0 \Rightarrow$ BN $\perp$ O'N $\Rightarrow$ BN là tiếp tuyến của (O')

4. Tính diện tích Δ BEA theo R

Tính $BK = DH = \dfrac{2R\sqrt{6}}{5}$ và $BD = \dfrac{2R\sqrt{10}}{5}$

Ta có : ΔADB vuông tại D $\Rightarrow DB^2 = BK.BE$

$$\Rightarrow BE = \frac{BD^2}{BK} = \frac{\frac{40R^2}{25}}{\frac{2R\sqrt{6}}{5}} = \frac{4R}{\sqrt{6}} = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$$

Ta có $DK = BH = \dfrac{4R}{5}$ (hs tự chứng minh)

$$S_{\Delta BDE} = \frac{1}{2}BE.DK = \frac{1}{2}.\frac{2R\sqrt{6}}{3}.\frac{4R}{5} = \frac{4R^2\sqrt{6}}{15}$$

$$S_{\Delta BDA} = \frac{1}{2}AB.DH = \frac{1}{2}.2R.\frac{2R\sqrt{6}}{5} = \frac{2R^2\sqrt{6}}{5}$$

$$S_{\Delta BAE} = S_{\Delta BDA} - S_{\Delta BDE} = \frac{2R^2\sqrt{6}}{5} - \frac{4R^2\sqrt{6}}{15} = \frac{2R^2\sqrt{6}}{15}$$

Bài 53

1. Chứng minh A $\in$ (C) và B $\in$ (D)

Chứng minh ΔACM và ΔBDM cân

$\Rightarrow$ CA = CM $\Rightarrow$ A $\in$ (C)

DB = DM $\Rightarrow$ B $\in$ (D)

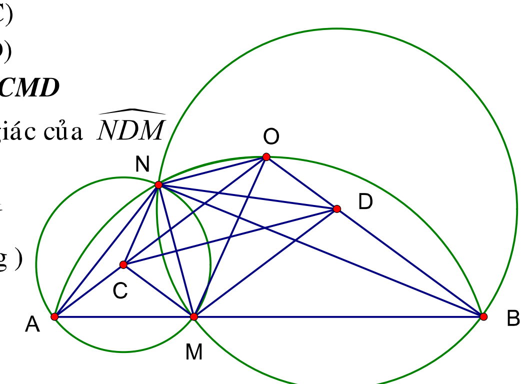
2. Chứng minh $\Delta ANB \sim \Delta CMD$

Chứng minh DC là phân giác của $\widehat{NDM}$

$\Rightarrow \widehat{NBM} = \widehat{CDM}$

Tương tự : $\widehat{NAM} = \widehat{DCM}$

$\Rightarrow \Delta ANB \sim \Delta CMD$ (g-g)



3. Chứng minh khi M di động trên AB thì N chạy trên một đường cố định

Ta có : $\widehat{CMD} = \widehat{AOB}$ (hình bình hành)

$\widehat{CMD} = \widehat{ANB}$ ($\Delta ANB \sim \Delta CMD$)

$\Rightarrow \widehat{ANB} = \widehat{AOB}$ không đổi , mà A , B cố định nên

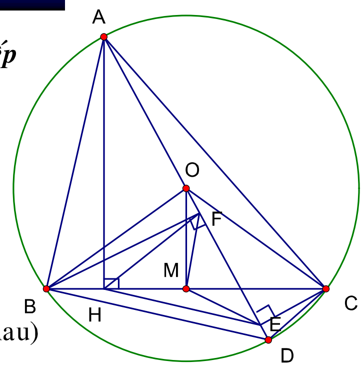
$\Rightarrow$ N $\in$ cung chứa góc $\widehat{AOB}$ dựng trên đoạn AB cố định

4. Chứng minh Δ ONM vuông

Chứng minh : $\widehat{NOC} = \widehat{NBA} = \widehat{MDC} = \widehat{OCD}$ $\Rightarrow$ ON // CD

Mà CD $\perp$ MN $\Rightarrow$ ON $\perp$ MN $\Rightarrow$ Δ ONM vuông tại N.

Bài 54



1. Chứng minh ABHF và BMFO nội tiếp

(Học sinh tự chứng minh)

2. Chứng minh HE // BD

Chứng minh tứ giác AHEC nội tiếp

$\Rightarrow$ $\widehat{CHE} = \widehat{CAD}$

Mà $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$ (chắn $\overset{\frown}{CD}$)

$\Rightarrow$ $\widehat{CHE} = \widehat{CBD}$

$\Rightarrow$ HE // DB (2 góc đồng vị bằng nhau)

3. Chứng minh $S_{\Delta ABC} = \dfrac{AB.AC.BC}{4R}$

Ta chứng minh : Δ ABH ~ Δ ADC (g-g) $\Rightarrow$ AH = $\dfrac{AB.AC}{AD}$

Ta có : $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AH.BC = \dfrac{1}{2}.\dfrac{AB.AC}{AD}.BC = \dfrac{AB.AC.BC}{4R}$

4. Chứng minh M là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔEFH

Ta cần chứng minh ME = MF = MH

Ta có tứ giác OM $\perp$ BC (M là trung điểm BC)

$\Rightarrow$ OMEC nội tiếp (hs tự chứng minh) $\Rightarrow$ $\widehat{OEM} = \widehat{OCB} = \widehat{OBC}$

Mà BOFM nội tiếp (cmt) $\Rightarrow$ $\widehat{OBC} = \widehat{MFE}$ $\Rightarrow$ $\widehat{MFE} = \widehat{OEM}$

$\Rightarrow$ ΔEMF cân tại M $\Rightarrow$ ME = MF (1)

Ta lại có $\widehat{FMC} = \widehat{MFH} + \widehat{MHF}$ (góc ngoài ΔMFH)

Mà $\widehat{FMC} = \widehat{BOD}$ (tứ giác BOFM nội tiếp)

$\Rightarrow$ $\widehat{BOD} = \widehat{MFH} + \widehat{MHF}$

Do : $\widehat{MHF} = \widehat{BAO}$ (tứ giác ABHF nội tiếp)

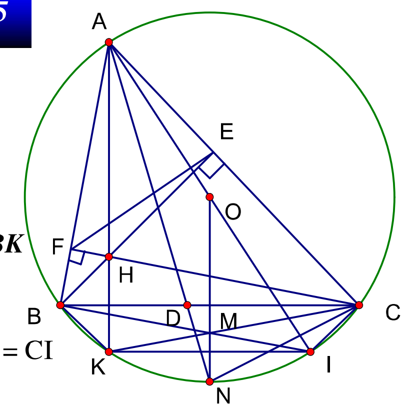
Và ΔAOB cân $\Rightarrow$ $\widehat{BOD} = 2\widehat{BAO}$ $\Rightarrow$ $2\widehat{BAO} = \widehat{MFH} + \widehat{BAO}$

$\Rightarrow$ $\widehat{MFH} = \widehat{BAO}$ $\Rightarrow$ $\widehat{MFH} = \widehat{MHF}$ $\Rightarrow$ ΔMHF cân tại M

$\Rightarrow$ MH = MF (2)

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh .

Bài 55



1. Chứng minh $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$

Chứng minh tứ giác BFEC nội tiếp

2. Chứng minh AB.NC = AN.BD

Chứng minh ΔABD ~ ΔANC (g-g)

3. Chứng minh BC.AK = AB.CK + AC.BK

Vẽ đường kính AI của (O).

Chứng minh BKIC là hình thang cân

$\Rightarrow$ $S_{\Delta BKC} = S_{\Delta BCI}$ và BI = CK ; BK = CI

Mà $S_{ABKC} = S_{\Delta ABC} + \Delta_{BKC}$

$S_{ABIC} = S_{\Delta ABC} + \Delta_{BCI}$

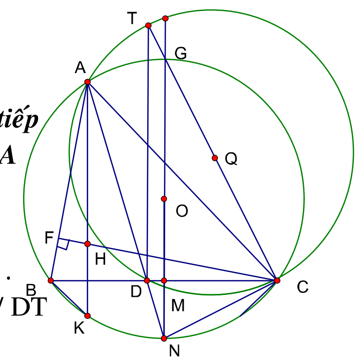
$\Rightarrow$ $S_{ABKC} = S_{ABIC}$

$2S_{ABKC} = 2S_{ABI} + 2S_{ACI}$

$\Leftrightarrow$ AK.BC = AB.BI + AC.CI

$\Leftrightarrow$ AK.BC = AB.KC + AC.BK đpcm

4. Chứng minh tâm Q của đường tròn ngoại tiếp ΔADC luôn thuộc một đường cố định khi A di chuyển trên cung lớn $\overset{\frown}{BC}$



Gọi Q là tâm đường tròn (ADC) .

Vẽ đường kính CT của (Q) cắt tia NO tại G .

Ta có : TD $\perp$ DC mà NO $\perp$ DC $\Rightarrow$ NG // DT

$\Rightarrow$ $\widehat{DTC} = \widehat{NGC}$

Mà $\widehat{DTC} = \widehat{DAC}$ (chắn $\overset{\frown}{DC}$ trong (Q))

$\Rightarrow$ $\widehat{NGC} = \widehat{NAC}$ $\Rightarrow$ tứ giác NAGC nội tiếp $\Rightarrow$ G $\in$ (O)

Mà NG ⊥ BC ⇒ G là điểm chính giữa cung lớn $\overset{\frown}{BC}$ của (O) ⇒ G cố định, Do đó Q ∈ đường thẳng CG cố định khi A chạy trên cung lớn $\overset{\frown}{BC}$.

Bài 56

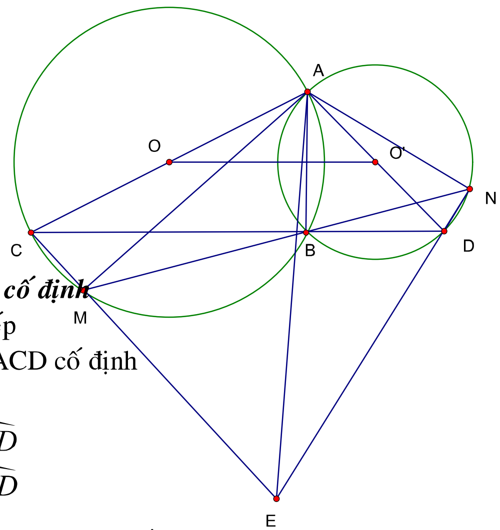
1. *Chứng minh C , B , D thẳng hàng. Tính tỉ số $\frac{AN}{AM}$ theo R và r*

Chứng minh $\widehat{ABC} = \widehat{ABD} = 90^0$

⇒ C , D , B thẳng hàng

Chứng minh Δ ACM ~ Δ AND

$\Rightarrow \frac{AN}{AM} = \frac{AD}{AC} = \frac{r}{R}$



2. *Chứng minh AMEN nội tiếp*

(hs tự chứng minh)

3. *Chứng minh điểm E thuộc đường cố định*

Chứng minh tứ giác ACED nội tiếp

⇒ E ∈ đường tròn ngoại tiếp Δ ACD cố định

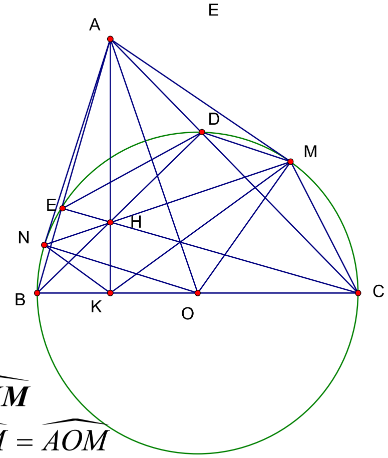
4. *Chứng minh Δ AMB ~ Δ AED*

Chứng minh $\widehat{MAB} = \widehat{BCM} = \widehat{EAD}$

$\widehat{AMB} = \widehat{ACD} = \widehat{AED}$

Từ đó ⇒ Δ AMB ~ Δ AED

Bài 57



1. *Chứng minh AD.AC = AE.AB*

Chứng minh Δ ABD ~ Δ ACE

2. *Chứng minh $\widehat{BHK} = \widehat{AED}$*

Chứng minh tứ giác AEHD nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{AHD} = \widehat{BHK}$

3. *Chứng minh KA là phân giác của $\widehat{NKM}$*

Chứng minh AKOM nội tiếp ⇒ $\widehat{AKM} = \widehat{AOM}$

Chứng minh AOKN nội tiếp ⇒ $\widehat{AON} = \widehat{AKN}$

Mà $\widehat{AOM} = \widehat{AON}$ ⇒ $\widehat{AKN} = \widehat{AKM}$. Do đó KA là phân giác $\widehat{MKN}$

4. *Chứng minh M , N , H thẳng hàng*

Chứng minh KHDC nội tiếp ⇒ AD.AC = AH.AK

Chứng minh AM^2 = AD.AC ⇒ AM^2 = AH.AK

⇒ Δ AHM ~ Δ AMK (c-g-c) ⇒ $\widehat{AKM} = \widehat{AMH}$

Mà $\widehat{AKM} = \widehat{AOM} = \frac{1}{2}\widehat{MON}$ ⇒ $\widehat{AMH} = \frac{1}{2}\widehat{MON}$

Mặt khác : $\widehat{AMN} = \frac{1}{2}\widehat{MON}$ ⇒ $\widehat{AMH} = \widehat{AMN}$

⇒ M , H , N thẳng hàng

Bài 58

1. *Chứng minh K thuộc đường tròn (O)*

Chứng minh EKFM nội tiếp ⇒ $\widehat{FKB} = \widehat{AMB}$

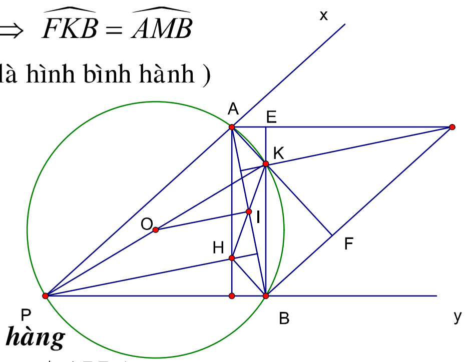
Mà : $\widehat{AMB} = \widehat{APB}$ (PAMB là hình bình hành)

⇒ $\widehat{FKB} = \widehat{APB}$

⇒ APBK nội tiếp

⇒ K ∈ đường tròn (APB)

Hay K ∈ (O)



2. *Chứng minh H , I , K , thẳng hàng*

Ta có BH ⊥ AP (H là trực tâm Δ APB)

AK ⊥ BM (K là trực tâm Δ AMB)

Mà : AP // BM ⇒ BH // AK

Ta chứng minh : AH // BK (cùng ⊥ Ay)

Suy ra : AKBH là hình bình hành . Mà I là trung điểm AB

⇒ I là trung điểm HK ⇒ K , H , I thẳng hàng .

3. *Chứng minh H thuộc một đường cố định*

Ta có BK ⊥ PB ⇒ PK là đường kính của (O) ⇒ O là trung điểm PK

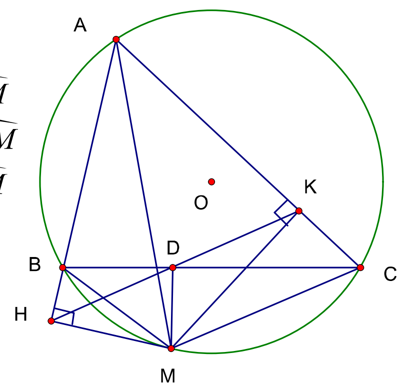
Mà I là trung điểm KH $\Rightarrow$ OI là đường trung bình của ΔKPH

$\Rightarrow$ PH = 2OI

Do $\overset{\frown}{APB}$ không đổi $\Rightarrow$ AB không đổi $\Rightarrow$ OI không đổi $\Rightarrow$ PH không đổi

Vậy H chạy trên đường tròn tâm P cố định có bán kính PH không đổi .

Bài 59



1. Chứng minh $\Delta BMC \sim \Delta HMK$

Chứng minh AKMH nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{HKM} = \widehat{HAM}$ và $\widehat{KHM} = \widehat{KAM}$

Mà : $\widehat{HAM} = \widehat{BCM}$ và $\widehat{KAM} = \widehat{CBM}$

$\Rightarrow \widehat{KHM} = \widehat{CBM}$ và $\widehat{HKM} = \widehat{BCM}$

Do đó ΔBCM ~ ΔHKM (g-g)

2. Chứng minh MD $\perp$ BC

Học sinh tự chứng minh

3. Tìm vị trí M để KH lớn nhất

Ta có : $\dfrac{HK}{BC} = \dfrac{HM}{BM} = \sin\widehat{HBM} \Rightarrow HK = BC.\sin\widehat{HBM}$

Do BC cố định $\Rightarrow$ HK lớn nhất $\Leftrightarrow$ $\sin\widehat{HBM}$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ $\widehat{HBM}$ = 90^0

$\Leftrightarrow \widehat{ACM} = 90^0 \Leftrightarrow$ AM là đường kính của (O)

Bài 60

1. Chứng minh I , O , M thẳng hàng

Tứ giác ABCD là hình thang nội tiếp (O) $\Rightarrow$ ABCD là thẳng hàng cân

M là giao điểm hai đường chéo $\Rightarrow$ MA = MD

Mà IA = ID (hai tiếp tuyến cắt nhau)

Và OA = OD (bán kính)

$\Rightarrow$ M , O , I thuộc đường trung trực của AD $\Rightarrow$ M , I , O thẳng hàng

2. Chứng minh bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔDMC không đổi

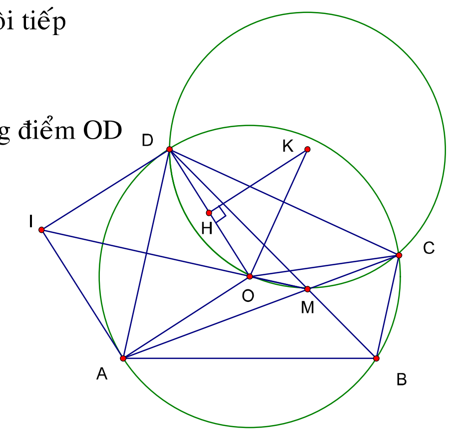
Ta có : $\widehat{DOI} = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{DOA}$ và $\widehat{DCM} = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{DOA}$

$\Rightarrow \widehat{DOI} = \widehat{DCM}$ $\Rightarrow$ DOMC nội tiếp

Gọi K là tâm đường tròn (DCM)

$\Rightarrow$ K là tâm đường tròn (DOC)

Vẽ KH $\perp$ OD tại H $\Rightarrow$ H là trung điểm OD



Ta có DO = R $\Rightarrow$ HO = $\dfrac{R}{2}$

Lại có CD = AB không đổi

$\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{CD}$ của (K) không đổi

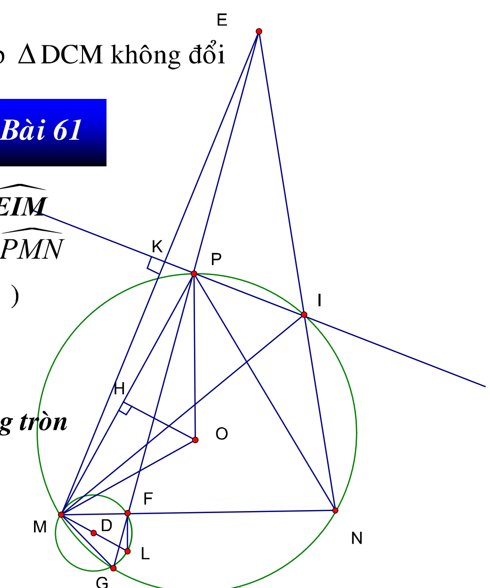
$\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{DO}$ = $\dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{CD}$ không đổi

$\Rightarrow \widehat{HKO}$ không đổi

$\Rightarrow$ KO = $\dfrac{HO}{\sin\widehat{HKO}}$ không đổi .

Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔDCM không đổi

Bài 61



1. Chứng minh IP là phân giác của $\widehat{EIM}$

Tứ giác MPIN nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EIP} = \widehat{PMN}$

Mà $\widehat{PMN} = \widehat{PIM}$ (do $\overset{\frown}{PM} = \overset{\frown}{PN}$)

$\Rightarrow \widehat{EIP} = \widehat{PIM}$

$\Rightarrow$ IP là phân giác của $\widehat{EIM}$

2. Chứng minh E luôn thuộc một cung tròn cố định

Chứng minh PI = PM = PM

$\Rightarrow$ E thuộc cung tròn tâm P có bán kính là PM

3. Chứng minh PM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔMFG

Chứng minh $\widehat{PMF} = \widehat{PGM}$

Vẽ đường kính ML của đường tròn (MFG)

Chứng minh PM $\perp$ ML

$\Rightarrow$ PM là tiếp tuyến của đường tròn (MFG)

4. Tính tích PF.PG theo R và $\alpha = \widehat{PMN}$

Chứng minh ΔPMF ~ ΔPGM (g-g) $\Rightarrow$ PF.PG = PM^2

Vẽ OH $\perp$ PM $\Rightarrow$ $\widehat{POH} = \widehat{PNM} = \alpha$ $\Rightarrow$ PH = OP.sinα = R.sinα

$\Rightarrow$ PM = 2R.sinα $\Rightarrow$ PF.PG = 4R^2.sin$^2\alpha$

Bài 62

1. Chứng minh QBOA nội tiếp và OQ $\perp$ AB

(Học sinh tự chứng minh)

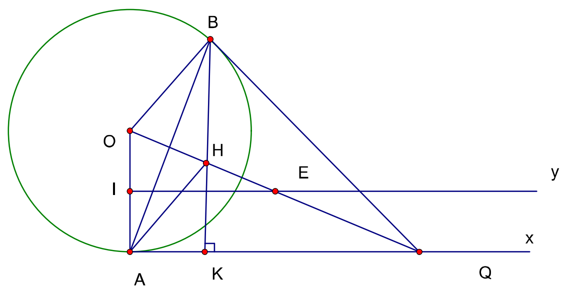
2. Tìm quỹ tích của E khi Q di chuyển trên tia Ax

Gọi I là trung điểm OA

$\Rightarrow$ I cố định và IA = $\frac{R}{2}$

Ta có IE // Ax

(đường trung bình)



Vậy E chạy trên tia Ay // Ax cố định và cách tia Ax một đoạn bằng $\frac{R}{2}$

3. Tìm quỹ tích của H

Chứng minh AH // OB và BH // OA $\Rightarrow$ BOAH là hình bình hành

Mà OA = OB $\Rightarrow$ BOAH là hình thoi $\Rightarrow$ AH = OA = R

Vậy H di chuyển trên đường tròn tâm A cố định và có bán kính R

4. Cho AQ = 2R. Tính KH theo R

ΔOAQ có KH // OA $\Rightarrow$ $\frac{KQ}{HK} = \frac{AQ}{AO} = \frac{2R}{R} = 2$ $\Rightarrow$ KQ = 2HK

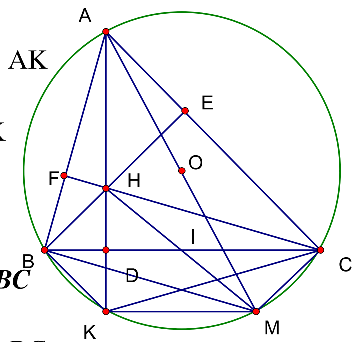
Đặt : HK = x (0 < x < R vì HK < AH = R) .

$\Rightarrow$ QK = 2x $\Rightarrow$ AK = 2(R – x)

ΔAHK vuông tại K $\Rightarrow$ AH^2 = HK^2 + AK^2 $\Leftrightarrow$ R^2 = x^2 + 4(R – x)^2

$\Leftrightarrow$ 5x^2 – 8Rx + 3R^2 = 0 $\Leftrightarrow$ x = R (loại) và x = $\frac{3R}{5}$. Vậy HK = $\frac{3R}{5}$

Bài 63



1. Chứng minh MK // BC và DH = DK

Chứng minh MK và BC cùng vuông góc với AK

$\Rightarrow$ MK // BC

Chứng minh CB là tia phân giác của ΔHCK

$\Rightarrow$ ΔHCK cân tại C

$\Rightarrow$ CB là trung trực của HK

$\Rightarrow$ DH = DK

2. Chứng minh HM đi qua trung điểm I của BC

Chứng minh BHCM là hình bình hành

$\Rightarrow$ HM và BC cắt nhau tại trung điểm I của BC

3. Chứng minh $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1$

2S$_{\Delta BHC}$ = HD.BC ; 2S$_{\Delta AHC}$ = HE.AC ; 2S$_{\Delta AHB}$ = HF.AB ;

2S$_{\Delta ABC}$ = AD.BC = BE.AC = CF.AB

Từ đó ta có : 2S$_{\Delta BHC}$ + 2S$_{\Delta AHC}$ + 2S$_{\Delta AHB}$ = 2S$_{\Delta ABC}$

$\Leftrightarrow \frac{2S_{\Delta BHC}}{2S_{\Delta ABC}} + \frac{2S_{\Delta AHC}}{2S_{\Delta ABC}} + \frac{2S_{\Delta AHB}}{2S_{\Delta ABC}} = 1 \Leftrightarrow \frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1$

4. Chứng minh $\frac{AD}{HD} + \frac{BE}{HE} + \frac{CF}{HF} \geq 9$

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức :

$(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9$ (với x ; y ; z $\geq$ 0)

Thật vậy theo BĐT Cauchy ta có : $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$

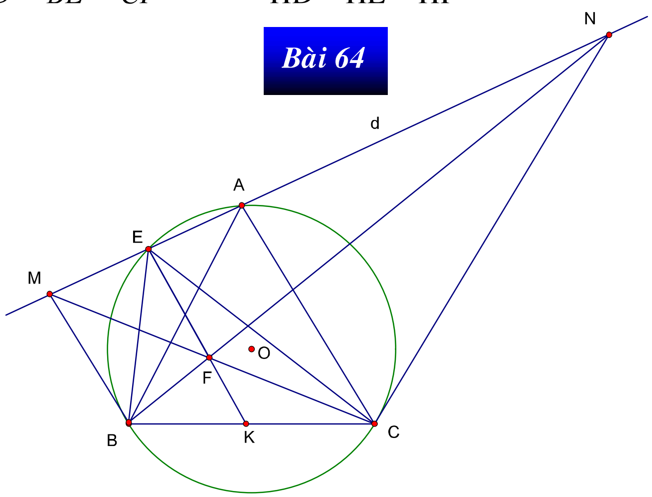
Và : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$

Nhân hai BĐT trên theo từng vế ta có : $(x + y + z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9$

Áp dụng ta có : $\left(\frac{HD}{AD}+\frac{HE}{BE}+\frac{HF}{CF}\right)\left(\frac{AD}{HD}+\frac{BE}{HE}+\frac{CF}{HF}\right) \geq 9$

Mà : $\frac{HD}{AD}+\frac{HE}{BE}+\frac{HF}{CF}=1 \Rightarrow \frac{AD}{HD}+\frac{BE}{HE}+\frac{CF}{HF} \geq 9$

Bài 64



1. Chứng minh $\Delta MBA \sim \Delta ACN$

Ta có : $\widehat{MBA} = \widehat{ACN}$ (do $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$)

Ta có : $\widehat{ACN} = \widehat{BAC} = 60^0 \Rightarrow$ AB // CN $\Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{ANC}$ (đv)

Do đó : ΔMBA ~ ΔACN (g-g)

2. Chứng minh tích MB.CN không đổi

Từ ΔMBA ~ ΔACN $\Rightarrow \frac{MB}{AB} = \frac{AC}{CN} \Leftrightarrow \frac{MB}{BC} = \frac{BC}{CN}$

$\Rightarrow$ MB.CN = BC^2 không đổi

3. Chứng minh tứ giác BMEF nội tiếp

Ta chứng minh : $\widehat{MBC} = \widehat{BCN} = 120^0$ và $\frac{MB}{BC} = \frac{BC}{CN}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta$MBC ~ ΔBCN $\Rightarrow \widehat{FBC} = \widehat{FMB}$

Mà $\widehat{FCB} + \widehat{FMB} = 180^0 - \widehat{MBC} = 60^0 \Rightarrow \widehat{FBC} + \widehat{FCB} = 60^0$

Do $\widehat{MFB} = \widehat{FBC} + \widehat{FCB}$ (góc ngoài ΔFBC) $\Rightarrow \widehat{MFB} = 60^0$

Ta có $\widehat{MEB} = \widehat{ACB} = 60^0$ (BEAC nội tiếp) $\Rightarrow \widehat{MFB} = \widehat{MEB} = 60^0$

$\Rightarrow$ tứ giác BMEF nội tiếp

4. Chứng minh đường thẳng EF đi qua điểm cố định

Ta có : $\widehat{BEK} = \widehat{BMF} = \widehat{FBK}$ và $\widehat{EKB}$ là góc chung

$\Rightarrow \Delta$EBK ~ ΔBFK $\Rightarrow$ KB^2 = KF.KE (1)

Tương tự ta có : $\widehat{FKC} = \widehat{EFM} = \widehat{MBE} = \widehat{ECB}$ và $\widehat{EKC}$ là góc chung

$\Rightarrow \Delta$FKC ~ ΔCKE $\Rightarrow$ CK^2 = CF.CE (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ KC = KB $\Rightarrow$ K là trung điểm BC .

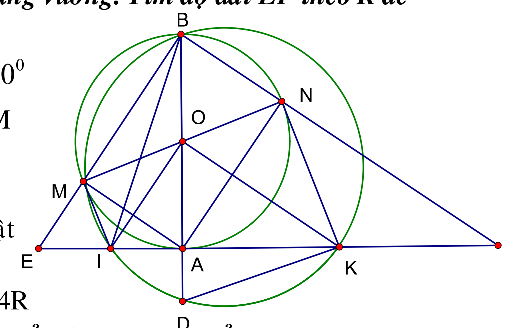
Vậy đường thẳng EF luôn đi qua trung điểm K của BC cố định.

Bài 65

1. Chứng minh tứ giác EMNF nội tiếp

Chứng minh $\widehat{BMN} = \widehat{BFA}$

2. Chứng minh IMNA là hình thang vuông. Tìm độ dài EF theo R để IMNA là hình chữ nhật



Chứng minh $\widehat{BNM} + \widehat{KNF} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{MNK} = 90^0 \Rightarrow$ KN $\perp$ NM

Tương tự : IM $\perp$ MN

$\Rightarrow$ IMNA là hình thang vuông

❖ Để IMNA là hình chữ nhật thì IK = MN

$\Leftrightarrow$ EF = 2MN $\Leftrightarrow$ EF = 4R

3. Chứng minh tích AI.AK không đổi khi MN thay đổi

Chứng minh KO // BF và IO // BE $\Rightarrow$ IO $\perp$ OK $\Rightarrow \Delta$IOK vuông

Mà OA là đường cao $\Rightarrow$ AI.AK = $OA^2 = R^2$

4. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp ΔIBK đi qua điểm cố định khác B

Gọi D là giao điểm của đường tròn (BIK) và đường thẳng BA (D $\neq$ B)

Ta chứng minh AB.AD = AI.AK = $R^2 \Rightarrow$ AD = $\frac{R}{2}$.

Vậy D là điểm cố định (vì D $\in$ đường thẳng AB cố định và AD = $\frac{R}{2}$)

Bài 66

1. ***Chứng minh DE là tiếp tuyến của (O)*** (hs tự chứng minh)
2. ***Chứng minh EC là phân giác của $\widehat{AED}$*** (hs tự chứng minh)
3. ***Chứng minh MH $\perp$ AH***

Ta có M là trung điểm AE ; I là trung điểm AK $\Rightarrow$ IM // BE

$\Rightarrow \widehat{IMA} = \widehat{BEA}$

Mà $\widehat{BEA} = \widehat{AHI}$ (cùng chắn $\widehat{AB}$) $\Rightarrow \widehat{IHA} = \widehat{IMA}$

Suy ra tứ giác IMHA nội tiếp .

Ta lại có : IM $\perp$ AK (do IM // BE và AK $\perp$ BE) $\Rightarrow$ AH $\perp$ MH

4. ***Chứng minh tứ giác EMHD nội tiếp***

Ta có : $\widehat{AMH} = \widehat{AIH} = \widehat{BIK}$ (tứ giác IMHA nội tiếp)

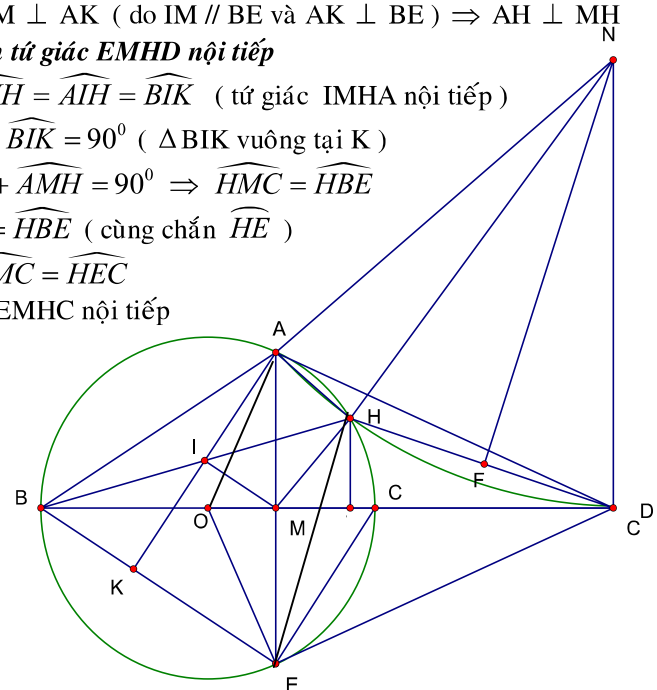
Do : $\widehat{HBE} + \widehat{BIK} = 90^0$ (ΔBIK vuông tại K)

Và : $\widehat{HMC} + \widehat{AMH} = 90^0 \Rightarrow \widehat{HMC} = \widehat{HBE}$

mà $\widehat{HEC} = \widehat{HBE}$ (cùng chắn $\widehat{HE}$)

suy ra : $\widehat{HMC} = \widehat{HEC}$

$\Rightarrow$ tứ giác EMHC nội tiếp



5. ***Chứng minh đường thẳng BD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔAHD***

Gọi N là tâm đường tròn (AHD) $\Rightarrow$ Δ NHD cân tại N

Vẽ đường cao NF của ΔNHD $\Rightarrow$ NF là phân giác của $\widehat{HND}$

$\Rightarrow \widehat{FND} = \frac{1}{2}\widehat{HND}$

Mà $\widehat{DAH} = \frac{1}{2}\widehat{HND}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm của đường tròn (N))

$\Rightarrow \widehat{FND} = \widehat{DAH}$

Ta lại có : $\widehat{DAH} = \widehat{AEH}$ (cùng chắn cung AH trong (O))

Và : $\widehat{AEH} = \widehat{HDM}$ (tứ giác EMHD nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{FND} = \widehat{HDM}$

Mà $\widehat{FND} + \widehat{FDN} = 90^0 \Rightarrow \widehat{HDM} + \widehat{FDN} = 90^0 \Rightarrow \widehat{MDN} = 90^0$

Suy ra : BD $\perp$ ND tại D $\Rightarrow$ BD là tiếp tuyến của đường tròn (AHD)

6. ***Khi M là trung điểm OC. Tính diện tích ΔMHC theo R***

Khi M là trung điểm OC. Chứng minh được ΔABE đều cạnh là R$\sqrt{3}$

Chứng minh AK đi qua O và KE = BK = $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ IM = $\frac{R\sqrt{3}}{4}$

Ta lại có : AK = BM = $\frac{3R}{2}$ $\Rightarrow$ IK = $\frac{3R}{4}$

BI = $\sqrt{IK^2 + BK^2} = \sqrt{\frac{9R^2}{16} + \frac{3R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{21}}{4}$

Chứng minh ΔBIM ~ ΔBMH (g – g)

$\Rightarrow \frac{IM}{MH} = \frac{BI}{BM} \Rightarrow MH = \frac{IM.BM}{BI} = \frac{3R}{2\sqrt{7}}$

Chứng minh ΔAHM ~ ΔMGH (HG là đường cao của ΔMHD)

$\Rightarrow$ MH^2 = GH.AM $\Rightarrow$ HG = $\frac{MH^2}{AM} = \frac{9R}{14\sqrt{3}}$

Vậy diện tích ΔMHD = $\frac{1}{2}GH.MD = \frac{9R^2\sqrt{3}}{56}$

Bài 67