Mà KA = KB $\Rightarrow$ K là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{AB}$ $\Rightarrow$ K cố định .

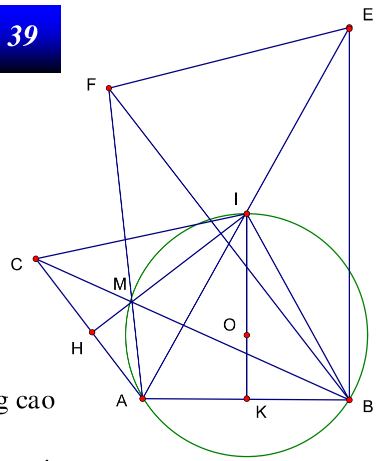
4. Tìm vị trí đường thẳng d để diện tích tứ giác AKBH lớn nhất

Ta có dt AKBH = dt ΔAKB + dt ΔAHB . Mà dt ΔAKB không đổi

Dó đó dt AKBH lớn nhất $\Leftrightarrow$ dt ΔAHB lớn nhất $\Leftrightarrow$ H $\equiv$ O

Khi đó đường thẳng d $\perp$ OK $\Leftrightarrow$ đường thẳng d // AB .

Bài 39



1. Chứng minh AHIK nội tiếp

(học sinh tự chứng minh)

2. Chứng minh ΔAMC cân

Ta có : $\widehat{CMH} = \widehat{IMB}$ (đ đ)

$\widehat{IMB} = \widehat{IAB} = \widehat{IBA}$ ($\overset{\frown}{IA} = \overset{\frown}{IB}$)

$\widehat{AHM} = \widehat{IBA}$ (AMIB nội tiếp)

Suy ra : $\widehat{CMH} = \widehat{AMH}$

Suy ra MH là phân giác vừa là đường cao của ΔCMA $\Rightarrow$ ΔCMA cân tại M.

3. Chứng minh C luôn thuộc một đường cố định

Ta có $\widehat{ACB} = 90^0 - \widehat{CMH} = 90^0 - \widehat{IBA}$ không đổi

$\Rightarrow$ C $\in$ cung chứa góc $\alpha = 90^0 - \widehat{IBA}$ dựng trên đoạn AB cố định

4. Chứng minh tứ giác AFEB nội tiếp

ΔFMB cân tại M (t/ c đối xứng) $\Rightarrow$ $\widehat{AMB} = 2\widehat{AFB}$ (góc ngoài Δ)

ΔAEB có IB = IA = IE $\Rightarrow$ ΔIBE cân tại I

$\Rightarrow$ $\widehat{AIB} = 2\widehat{AEB}$ (góc ngoài Δ)

Mà $\widehat{AMB} = \widehat{AIB}$ $\Rightarrow$ $\widehat{AFB} = \widehat{AEB}$ $\Rightarrow$ tứ giác AFEB nội tiếp .

5. Tìm vị trí M để chu vi ΔAMB lớn nhất

ΔABE vuông tại B (đường trung tuyến bằng nửa cạnh tương ứng)

$\Rightarrow$ tứ giác AFEB nội tiếp đường tròn (I) đường kính AE

$\Rightarrow$ dây AF $\le$ AE $\Leftrightarrow$ AM + MF $\le$ AE $\Leftrightarrow$ AM + MB $\le$ AE

Dấu = xảy ra khi F $\equiv$ E $\Leftrightarrow$ M $\equiv$ I . Vậy AM + MB lớn nhất khi M $\equiv$ I

Chu vi ΔAMB = AM + MB + AB lớn nhất khi AM + MB lớn nhất

(vì AB không đổi) tức là khi M $\equiv$ I là điểm chính giữa cung lớn $\overset{\frown}{AB}$)

6. Tìm vị trí M để chu vi ΔACM lớn nhất

Ta có chu vi ΔACM = CM + MA + AC = 2(MA + HA)

Mà ΔAHM vuông tại H $\Rightarrow$ HA = MA.sin $\widehat{HMA} = MA.\sin\widehat{AMB}$

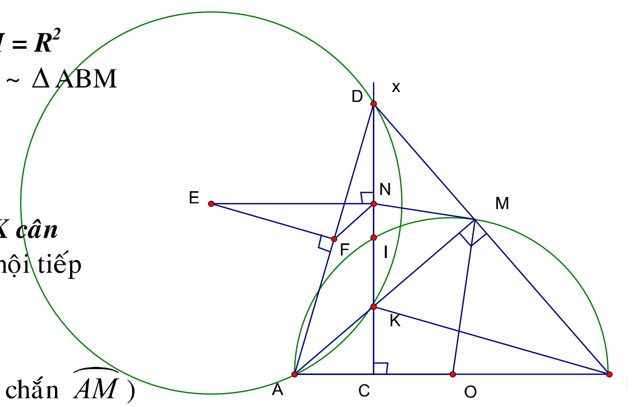
$\Rightarrow$ Chu vi ΔACM = 2(MA + MA.sin $\widehat{AMB}$) = 2MA.(1 + sin $\widehat{AMB}$)

Do $\widehat{AMB}$ không đổi nên chu vi ΔACM lớn nhất $\Leftrightarrow$ AM lớn nhất

$\Leftrightarrow$ AM là đường kính của đường tròn (O)

$\Leftrightarrow$ M là điểm đối xứng của A qua O.

Bài 40



1. Chứng minh AK.AM = R²

Chứng minh ΔAKC ~ ΔABM

$\Rightarrow$ AK.AM = AC.AB

$= \frac{R}{2}.2R = R^2$

2. Chứng minh ΔNMK cân

Chứng minh CKMB nội tiếp

$\Rightarrow$ $\widehat{NKM} = \widehat{MBA}$

Mà $\widehat{KMN} = \widehat{MBA}$ (chắn $\overset{\frown}{AM}$)

$\Rightarrow$ $\widehat{NMK} = \widehat{NKM}$

$\Rightarrow$ ΔKNM cân tại N

3. Khi K là trung điểm CI .Tính diện tích ΔABD theo R

Ta có CK = $\frac{1}{2}CI = \frac{1}{2}\sqrt{OI^2 - OC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{4}$

Chứng minh CK.CD = CA.CB $\Leftrightarrow$ CD = $\frac{CA.CB}{CK} = \frac{\frac{R}{2}.\frac{3R}{2}}{\frac{R\sqrt{3}}{4}} = R\sqrt{3}$

S Δ ABD = $\frac{1}{2}CD.AB = \frac{1}{2}R\sqrt{3}.2R = R^2\sqrt{3}$

4. Chứng minh khi K di động trên đoạn CI thì tâm đường tròn (ADK) thuộc một đường cố định

Gọi E là tâm đường tròn (ADK) ta có EN // AB (cùng ⊥ CD)
FN // AK (FN là đường trung bình của ΔDAK
EF // BK (cùng ⊥ AD)

Suy ra ΔENF ~ ΔBAK $\Rightarrow \dfrac{EN}{AB} = \dfrac{FN}{AK} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ EN = $\dfrac{1}{2}AB = R$

Do đó E thuộc đường thẳng d song song với đường thẳng CD cố định và cách đường thẳng này một khoảng bằng R.Vậy E luôn thuộc đường thẳng cố định.

Bài 41

1. Chứng minh tứ giác IKMB nội tiếp

(Học sinh tự chứng minh)

2. Chứng minh đường thẳng AC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp ΔCMK

Vẽ đường kính CE của đường tròn (F) ngoại tiếp ΔCMK.

Ta có : $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AC}$ (đường kính AB ⊥ dây CD).

$\Rightarrow \widehat{CMK} = \widehat{ACD}$

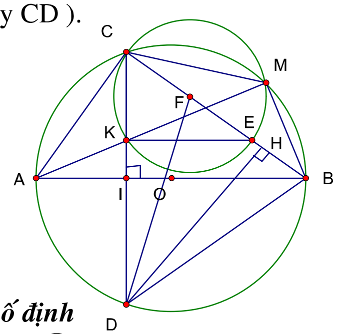
Mà $\widehat{CMK} = \widehat{CEK}$ (chắn $\overset{\frown}{CK}$)

$\Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{CEK}$

Mà $\widehat{CEK} + \widehat{KCE} = 90^0$ (ΔCKE vuông)

$\Rightarrow \widehat{ACD} + \widehat{KCE} = 90^0 \Rightarrow$ AC ⊥ CE

$\Rightarrow$ AC tiếp xúc với (F) tại C



3. Chứng minh F luôn thuộc đường thẳng cố định

Ta có KE // AB (cùng ⊥ DC) $\Rightarrow \widehat{MKE} = \widehat{MAB}$ (đv)

Mà $\widehat{MCE} = \widehat{MKE}$ (chắn $\overset{\frown}{ME}$ trong (F))

và $\widehat{MAB} = \widehat{MCB}$ (chắn $\overset{\frown}{MB}$ trong (O))

$\Rightarrow \widehat{MCE} = \widehat{MCB} \Rightarrow$ C, B , E thẳng hàng

$\Rightarrow$ F ∈ đường thẳng CB cố định

4. Tính khoảng cách nhỏ nhất của đoạn DF

Ta có : CI = $\sqrt{CO^2 - IO^2} = \sqrt{R^2 - \dfrac{R^2}{9}} = \dfrac{2R\sqrt{2}}{3} \Rightarrow$ CD = $\dfrac{4R\sqrt{2}}{3}$

CB^2 = BI.BA = $\dfrac{4R}{3}.2R = \dfrac{8R^2}{3} \Rightarrow$ CB = $\dfrac{2R\sqrt{6}}{3}$

Vẽ DH ⊥ CB tại H $\Rightarrow$ DH không đổi .

Ta có : DF nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ DF = DH .

Ta chứng minh DH.CB = BI.CD

$\Rightarrow$ DH = $\dfrac{BI.CD}{CB} = \dfrac{\dfrac{4R}{3}.\dfrac{4R\sqrt{2}}{3}}{\dfrac{2R\sqrt{6}}{3}} = \dfrac{8R\sqrt{2}}{3\sqrt{6}} = \dfrac{8R\sqrt{3}}{9}$

Bài 42

1. Chứng minh $\widehat{ADC} = \widehat{ACM}$

Ta có : $\widehat{AMB} = \widehat{ADC} + \widehat{MBC}$ (góc ngoài ΔBMD)

Mà $\widehat{AMB} = \widehat{ABC}$ ($\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$)

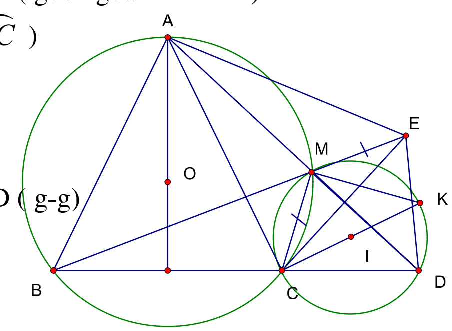
$\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{ABM} + \widehat{MBC}$

$\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{ABM} = \widehat{ACM}$

2. Chứng minh AC^2 = AM.AD

Chứng minh ΔAMC ~ ΔACD (g-g)

$\Rightarrow$ AC^2 = AM.AD



3. Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔMCD

Gọi I là tâm đường tròn (MCD) . Vẽ đường kính CK của đường tròn (I)

Chứng minh CK ⊥ AC (tương tự câu 2 bài 41)

4. Chứng minh tứ giác ABDE nội tiếp. Suy ra E và D luôn thuộc một cung tròn cố định.

Ta có $\widehat{EMD} = \widehat{AMB} = \widehat{ACB} = \widehat{ABC} = \widehat{CMD}$ (hs tự chứng minh)

$\Rightarrow \widehat{AME} = \widehat{AMC} \Rightarrow \Delta$AME = ΔAMC $\Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{ACM} = \widehat{ADB}$

$\Rightarrow$ tứ giác ABDE nội tiếp

5. Chứng minh E thuộc cung tròn cố định . Xác định tâm cung tròn này.

Chứng minh AE = AB = AC $\Rightarrow$ E ∈ cung tròn tâm A , bán kính AB

Bài 43

1. Chứng minh MAOH nội tiếp

(hs tự chứng minh)

2. Chứng minh IH.IO =IA.IB

Chứng minh AMBO nội tiếp

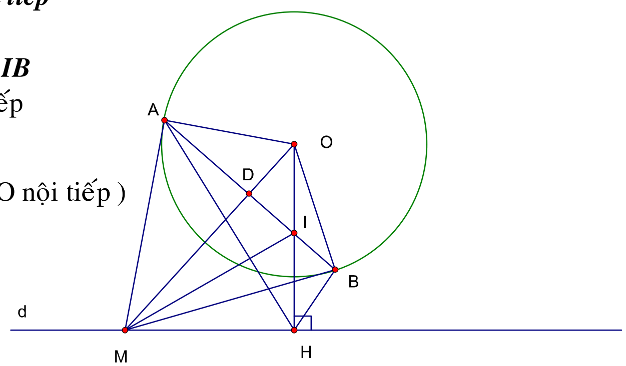
$\Rightarrow \widehat{OBA} = \widehat{OMA}$

Mà $\widehat{OHA} = \widehat{OMA}$ (AMHO nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{OHA} = \widehat{OBA}$

$\Rightarrow \Delta AIH \sim \Delta OIB$ (g-g)

$\Rightarrow$ IO.IH = IA.IB



3. Chứng minh I là điểm cố địnhkhi M chạy trên đường thẳng d

Gọi D là giao điểm của OM và AB . Ta chứng minh DMHI nội tiếp

Suy ra OI.OH = OD.OM = OA^2 = R^2 $\Rightarrow$ OI = $\dfrac{R^2}{OH}$ không đổi

Mà O cố định và I $\in$ OH cố định $\Rightarrow$ I là điểm cố định.

4. Cho OH = a, OM = 2R. Tính diện tích ΔIAM theo a và R.

Khi OM = 2R ta tính được : MA = AB = $R\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ AD = $\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Và MD = $\sqrt{MA^2 - AD^2} = \sqrt{3R^2 - \dfrac{3R^2}{4}} = \dfrac{3R}{2}$

Ta có : MH = $\sqrt{OM^2 - OH^2} = \sqrt{4R^2 - a^2}$

Ta có : $\Delta ODI \sim \Delta OHM \Rightarrow \dfrac{DI}{MH} = \dfrac{OI}{OM}$

$$\Rightarrow DI = \frac{OI.MH}{OM} = \frac{\frac{R^2}{a}.\sqrt{4R^2 - a^2}}{2R} = \frac{R\sqrt{4R^2 - a^2}}{2a}$$

$$\Rightarrow AI = AD + DI = \frac{R\sqrt{3}}{2} + \frac{R\sqrt{4R^2 - a^2}}{2a} = \frac{R(a\sqrt{3} + \sqrt{4R^2 - a^2})}{2a}$$

$$S_{\Delta IMA} = \frac{1}{2} AI.MD$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{R(a\sqrt{3} + \sqrt{4R^2 - a^2})}{2a}.\frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}(a\sqrt{3} + \sqrt{4R^2 - a^2})}{8a}$$

Bài 44

1. Chứng minh M , C , O , A cùng thuộc một đường tròn

(học sinh tự chứng minh)

2. Chứng minh M , E , O , D cùng thuộc một đường tròn

Chứng minh $\widehat{BCO} = \widehat{BEO}$

Mà $\widehat{BCO} = \widehat{OMD} \Rightarrow \widehat{BEO} = \widehat{OMD}$

$\Rightarrow$ MDOE nội tiếp

3. Chứng minh A là trung điểm MD

Ta có :

$\widehat{DBA} = \widehat{DOA}$ (BOAD nội tiếp)

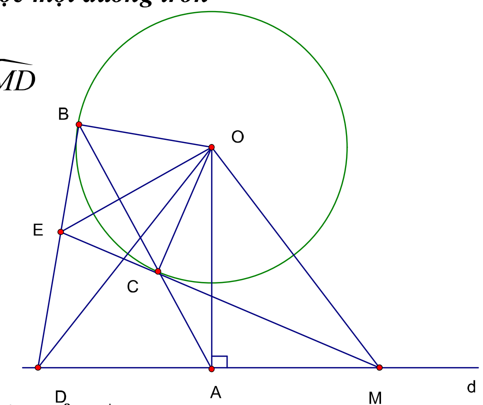
$\widehat{DBA} = \widehat{ECB}$ (EB = EC)

$\widehat{ECB} = \widehat{ACM}$ (đ đ)

$\widehat{ACM} = \widehat{AOM}$ (ACOM nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{DOA} = \widehat{MOA} \Rightarrow$ OA là phân giác của ΔDOM

Mà OA là đường cao $\Rightarrow$ ΔDOM cân tại A $\Rightarrow$ A là trung điểm DM.



4. Chứng minh $\Delta EOD \sim \Delta COA$

(Học sinh tự chứng minh)

5. Cho OM = 2R và OA = a. Tính DE theo a và R.

Chứng minh $\Delta OBE \sim \Delta OAM \Rightarrow \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{OE}{OM} \Rightarrow OE = \dfrac{OB.OM}{OA} = \dfrac{2R^2}{a}$

ΔOBE vuông $\Rightarrow$ EB = $\sqrt{OE^2 - OB^2} = \sqrt{\dfrac{4R^2}{a^2} - R^2} = \dfrac{R}{a}\sqrt{4 - a^2}$

ΔOBD vuông $\Rightarrow$ DB = $\sqrt{OD^2 - OB^2} = \sqrt{4R^2 - R^2} = R\sqrt{3}$

Suy ra ED = BD – BE = $R\sqrt{3} - \dfrac{R}{a}\sqrt{4 - a^2} = \dfrac{R(a\sqrt{3} - \sqrt{4 - a^2})}{a}$

Bài 45

1. *Chứng minh AE là phân giác của $\widehat{AHD}$*

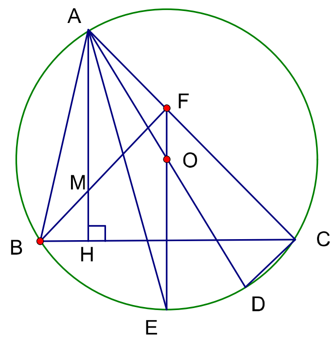
Ta có : OE ⊥ BC (dk – dc)

$\Rightarrow$ OE // AH $\Rightarrow$ $\widehat{AEO} = \widehat{EAH}$

Mà $\widehat{AEO} = \widehat{DAE}$ (do ΔAEO cân)

$\Rightarrow$ $\widehat{HAE} = \widehat{EAD}$

$\Rightarrow$ AE là phân giác của $\widehat{AHD}$



2. *Chứng minh AB.AC = AH.AD*

Chứng minh ΔAHB ~ ΔACD (g – g)

3. *Chứng minh $\widehat{HAD} = \widehat{ABC} - \widehat{ACB}$*

Ta có : $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$; $\widehat{BAH} = \widehat{DAC}$ (ΔAHB ~ ΔACD)

$\widehat{ABC} = 90^0 - \widehat{BAH}$

$\widehat{ACB} = 90^0 - \widehat{HAC} = 90^0 - (\widehat{HAD} + \widehat{DAC})$

$\Rightarrow \widehat{ABC} - \widehat{ACB} = (90^0 - \widehat{BAH}) - 90^0 + (\widehat{HAD} + \widehat{DAC}) = \widehat{HAD}$

4. *Chứng minh ΔAFM cân*

$\widehat{EFC} = \widehat{HAC}$ (đ v) và $\widehat{MFE} = \widehat{FMA}$ (slt)

Mà $\widehat{BFE} = \widehat{CFE}$ (F ∈ trung trực của BC)

Suy ra : $\widehat{FAM} = \widehat{AMF}$ $\Rightarrow$ ΔAMF cân tại F

5. *Cho AB = 4 , AC = 5 ; R = 3. Tính BC (lấy 1 chữ số thập phân)*

Ta có AH = $\dfrac{AB.AC}{AD} = \dfrac{4.5}{2.3} = \dfrac{10}{3}$

HC = $\sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{5^2 - \left(\dfrac{10}{3}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{125}{9}} = \dfrac{5\sqrt{5}}{3}$

BH = $\sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{16 - \dfrac{100}{9}} = \dfrac{2\sqrt{11}}{3}$

$\Rightarrow$ BC = BH + HC = $\dfrac{2\sqrt{11}}{3} + \dfrac{5\sqrt{5}}{3} = \dfrac{(2\sqrt{11} + 5\sqrt{5})}{3} = 5,9$

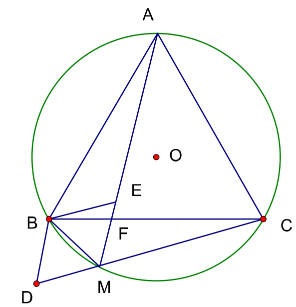
Bài 46

1. *Chứng minh ΔMBE đều*

Ta có MB = ME (gt) $\Rightarrow$ ΔMBE cân

Mà $\widehat{BME} = \widehat{ACB} = 60^0$ (chắn $\overset{\frown}{AB}$)

$\Rightarrow$ ΔMBE là tam giác đều



2. *Chứng minh ΔCBM = ΔABE*

Ta có : $\widehat{MBC} = \widehat{EBM} - \widehat{EBC} = 60^0 - \widehat{EBC}$

$\widehat{ABE} = \widehat{ABC} - \widehat{EBC} = 60^0 - \widehat{EBC}$

Do đó : $\widehat{MBC} = \widehat{ABE}$

Từ đó chứng minh : ΔABE = ΔCBM (c-g-c)

3. *Tìm vị trí M để tổng MA + MB + MC lớn nhất*

Từ ΔABE = ΔCBM $\Rightarrow$ AE = MC và ME = MB

Suy ra : MA + MB + MC = MA + ME + EA = MA + MA = 2MA

Vậy tổng MA + MB + MC lớn nhất $\Leftrightarrow$ MA lớn nhất

$\Leftrightarrow$ AM là đường kính $\Leftrightarrow$ M là điểm chính giữa cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$

4. *Khi M chạy trên cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$ thì E chạy trên đường cố định nào ?*

Tính được $\widehat{BEA} = 120^0$ $\Rightarrow$ E thuộc cung chứa góc 120^0 dựng trên đoạn AC cố định

5. *Chứng minh $\dfrac{1}{MF} = \dfrac{1}{MB} + \dfrac{1}{MC}$*

Ta có : $\dfrac{1}{MF} = \dfrac{1}{MB} + \dfrac{1}{MC} \Leftrightarrow \dfrac{MF}{MB} + \dfrac{MF}{MC} = 1$

Ta chứng minh : $\dfrac{MF}{MB} = \dfrac{FC}{AB} = \dfrac{FC}{BC}$ (ΔMFC ~ ΔMBA)

$\dfrac{MF}{MC} = \dfrac{BF}{AB} = \dfrac{BF}{BC}$ (ΔMFC ~ ΔBFA)

Suy ra : $\dfrac{MF}{MB} + \dfrac{MF}{MC} = \dfrac{FB}{BC} + \dfrac{FC}{BC} = \dfrac{BC}{BC} = 1$ $\Rightarrow$ đpcm

6. *Chứng minh $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$*

Trên tia đối của tia MC lấy điểm D sao cho MD = MB. $\Rightarrow$ MA = CD

Ta chứng minh được ΔBMD đều $\Rightarrow \widehat{BDM} = 60^0$

Ta có $(MB + MC)^2 = MA^2 \Leftrightarrow -MB.MC = \dfrac{MB^2 + MC^2 - MA^2}{2}$

Áp dụng định lý hàm số cosin trong ΔBDC ta có :

$BC^2 = BD^2 + DC^2 - 2DB.DC.\cos\widehat{BDC}$

$\Leftrightarrow 3R^2 = BM^2 + AM^2 - 2BM.MA.\cos 60^0$

$\Leftrightarrow 3R^2 = BM^2 + AM^2 - 2BM.MA.\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 3R^2 = BM^2 + AM^2 - BM.AM$

$\Leftrightarrow 3R^2 = BM^2 + AM^2 - BM(BM + MC)$

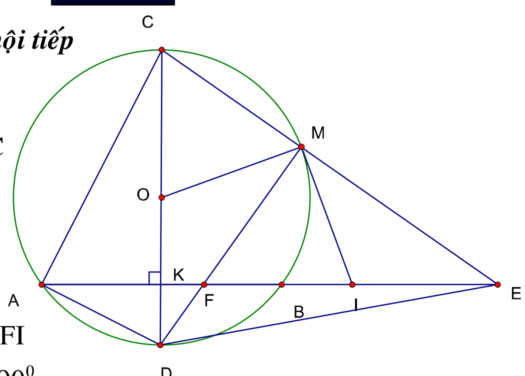
$\Leftrightarrow 3R^2 = BM^2 + AM^2 - BM^2 - BM.MC$

$\Leftrightarrow 3R^2 = AM^2 + \dfrac{MB^2 + MC^2 - MA^2}{2}$

$\Leftrightarrow 6R^2 = 2AM^2 + MB^2 + MC^2 - MA^2$

$\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$

Bài 47



1. Chứng minh tứ giác CKFM nội tiếp

(học sinh tự chứng minh)

2. Chứng minh DF.DM = AD²

Chứng minh DF.DM = DK.DC

và DK.DC = AD^2

Suy ra : DF.DM = AD^2

3. Chứng minh IE = IF

Ta có : $\widehat{MFI} = \widehat{DCM} = \widehat{DMI}$

$\Rightarrow \Delta MIF$ cân tại I $\Rightarrow$ MI = FI

Ta có $\widehat{IME} + \widehat{IMF} = \widehat{EMF} = 90^0$

$\widehat{MFI} + \widehat{MEI} = 90^0$ (ΔFME vuông tại M)

Mà : $\widehat{IMF} = \widehat{MFI}$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{IME} = \widehat{IEM} \Rightarrow \Delta MIE$ cân tại I

$\Rightarrow$ IE = IM . Vậy IF = IE .

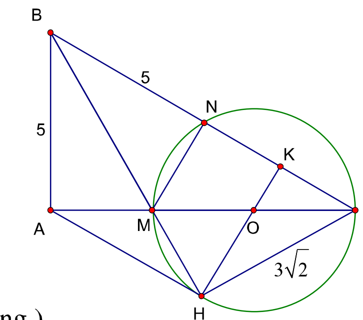
4. Chứng minh $\boldsymbol{\dfrac{FB}{EB} = \dfrac{KF}{KA}}$

Ta có : F là trực tâm của $\Delta CDE \Rightarrow KE.KF = KC.KD = KB^2$

$\Leftrightarrow (KB + BE)KF = KC.KD \Leftrightarrow KF.EB = KB^2 - KF.KB$

$\Leftrightarrow KF.EB = KB.(KB - KF) \Leftrightarrow KF.EB = KA.BF \Leftrightarrow \dfrac{FB}{EB} = \dfrac{KF}{KA}$

Bài 48



1. Chứng minh tứ giác BAHC nội tiếp

(học sinh tự chứng minh)

2. Chứng minh HC² = HM.HB

Chm $\Delta HMC \sim \Delta HCB$ (g-g)

3. Chứng minh K là trung điểm NC

Ta có : $\widehat{MCH} = \widehat{MBC}$ ($= \widehat{MBA}$)

Mà : $\widehat{MCH} = \widehat{KHC}$ (ΔHOC cân)

$\Rightarrow \widehat{MBC} = \widehat{KHC}$

Do : $\widehat{MBC} + \widehat{BCH} = 90^0$ (ΔBHC vuông)

$\Rightarrow \widehat{KHC} + \widehat{BCH} = 90^0 \Rightarrow \Delta HKC$ vuông tại K $\Rightarrow HK \perp NC$

$\Rightarrow$ K là trung điểm NC (tính chất đường kính – dây cung)

4. Cho AB = 5 cm , HC = 3$\sqrt{2}$ cm . Tính độ dài cạnh BC.

Chứng minh BN = AB = 5 cm ($\Delta BAM = \Delta BNM$)

Ta có BN.BC = BM. BH (hs tự chứng minh)

5.BC = (BH – MH).BH $\Leftrightarrow 5BC = BH^2 - BH.MH$

$\Leftrightarrow 5BC = BH^2 - HC^2 \Leftrightarrow 5BC = BC^2 - HC^2 - HC^2$

$\Leftrightarrow 5BC = BC^2 - 2HC^2 \Leftrightarrow BC^2 - 5BC - 36 = 0$ ($HC = 3\sqrt{2}$)

Giải ra ta được : BC = 9 cm

Bài 49

1. Chứng minh $\Delta NOBE$ nội tiếp

(Học sinh tự chứng minh)

2. Chứng minh AN.AE = 2R²

Chứng minh AN.AE = AO.AB = R.2R = $2R^2$

3. Chứng minh $\Delta ANC \sim \Delta MCA$

Ta có : $\widehat{EAC} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{EB} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{BC})$ và $\widehat{AMC} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{EB} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{AC})$

Mà : $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC} \Rightarrow \widehat{EAC} = \widehat{AMC}$

Ta lại có : $\widehat{ACD} = \widehat{BAC}$ ($\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$)

$\Rightarrow \Delta ANC \sim \Delta MCA\ (g-g)$

$\Rightarrow$ AM.NC = $AC^2 = 2R^2 \Rightarrow S_{ANMC} = R^2$

$S_{\Delta ENM} = S_{\Delta EAC} - S_{ANMC} = S_{\Delta EAC} - R^2$

Do đó :

$S_{\Delta ENM}$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ $S_{\Delta EAC}$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ E là điểm chính giữa $\overset{\frown}{DB}$

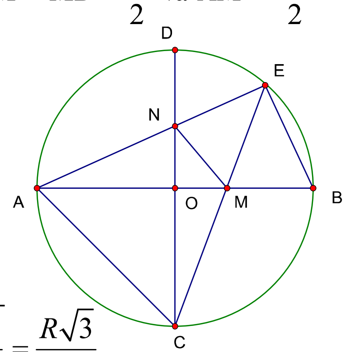
4. Biết AM = 3BM. Tính DN và EB theo R

Từ AM = 3BM và AM + BM = 2R $\Rightarrow$ AM = $MB = \frac{R}{2}$ và AM = $\frac{3R}{2}$

Ta có : NC.MA = $AC^2 = 2R^2$ (cmt)

$\Rightarrow NC = \frac{2R^2}{MA} = \frac{2R^2}{\frac{3R}{2}} = \frac{4R}{3}$

$\Rightarrow DN = 2R - \frac{4R}{3} = \frac{2R}{3}$



$MC = \sqrt{OC^2 - OM^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \sqrt{\frac{3R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

Ta có : $\Delta MBE \sim \Delta MCA \Rightarrow EB = \frac{MB.MC}{AC} = \frac{\frac{R}{2}\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2}}{R\sqrt{2}} = \frac{R\sqrt{6}}{8}$

Bài 50

1. Chứng minh tứ giác MAKO nội tiếp

(Học sinh tự chứng minh)

2. Chứng minh $MA^2 = MB.MC$

(Học sinh tự chứng minh)

3. Chứng minh MA = ME

Chứng minh : $\widehat{MEA} = \widehat{MAE} \Rightarrow \Delta AME$ cân tại M $\Rightarrow$ MA = ME

4. Chứng minh đường thẳng FE và đường thẳng DO cắt nhau tại một điểm thuộc đường tròn (O)

Ta có : ΔEMF cân tại M $\Rightarrow \widehat{MEF} = \widehat{MFE}$

$\widehat{BCF} = \widehat{BFM}$ (chắn $\overset{\frown}{BF}$)

Mà : $\widehat{EFC} = \widehat{MEF} - \widehat{BCF}$ (góc ngoài ΔEFC)

$\widehat{EFB} = \widehat{EFM} - \widehat{BFM}$ Do đó : $\widehat{EFC} = \widehat{EFB}$

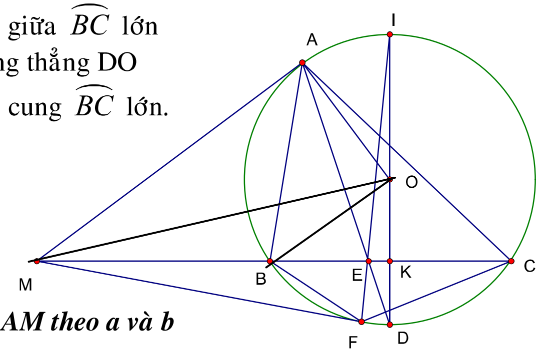
$\Rightarrow$ Tia FE là phân giác $\widehat{BFC}$

$\Rightarrow$ Tia FE đi qua điểm chính giữa $\overset{\frown}{BC}$ lớn

Mặt khác : D là điểm chính giữa $\overset{\frown}{BC}$ nhỏ

$\Rightarrow$ tia DO đi qua điểm chính giữa $\overset{\frown}{BC}$ lớn

Vậy đường thẳng FE và đường thẳng DO cắt nhau tại điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BC}$ lớn.



5. Cho BE = a và EC = b. Tính AM theo a và b

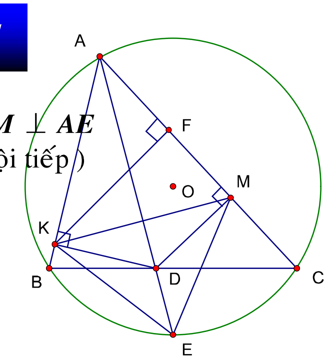
Đặt MA = x $\Rightarrow$ ME = x

MB = ME – EB = x – a và MC = ME + EC = x + b

Ta có : $MA^2 = MB.MC \Leftrightarrow x^2 = (x-a)(x+b) \Leftrightarrow x^2 = x^2 + (b-a)x - ab$

$\Leftrightarrow x = \frac{ab}{b-a}$ (do AB < AC $\Rightarrow$ a < b). Vậy $MA = \frac{ab}{b-a}$

Bài 51



1. Chứng minh tứ giác AKDM nội tiếp và KM ⊥ AE

(học sinh tự chứng minh tứ giác AKDM nội tiếp)

Ta có AD là phân giác của $\widehat{BAC}$

Mà DK ⊥ AB và DM ⊥ AC

$\Rightarrow \Delta AKD = \Delta AMD$

$\Rightarrow$ DK = DM và AK = AM

$\Rightarrow$ AD là trung trực của KM $\Rightarrow$ AE $\perp$ KM

2. Chứng minh AD.AE = AB.AC

Chứng minh ΔABD ~ ΔAEC (g-g)

3. Chứng minh MK = AD .sin $\widehat{BAC}$

Vẽ KF $\perp$ AC tại F. Chứng minh ΔKFM ~ ΔAKD (g-g)

$\Rightarrow \frac{KF}{AK} = \frac{KM}{AD} \Rightarrow$ MK = AD. $\frac{KF}{AK}$ = AD. sin $\widehat{BAC}$

4. So sánh diện tích tứ giác AKEM và diện tích ΔABC

Ta có : $2S_{\Delta ABC}$ = AB.AC.sin $\widehat{BAC}$ (hs tự chứng minh)

và $2S_{AKEM}$ = AE.MK = AE.AD.sin $\widehat{BAC}$ (MK = AD.sin $\widehat{BAC}$)

Mà AE.AD = AB.AC (cmt) $\Rightarrow$ $2S_{AKEM}$ = AB.AC.sin $\widehat{BAC}$ = $2S_{\Delta ABC}$

Vậy $S_{AKEM} = S_{\Delta ABC}$

Bài 52

1. Chứng minh (O) và (O') tiếp xúc nhau

(Học sinh tự chứng minh)

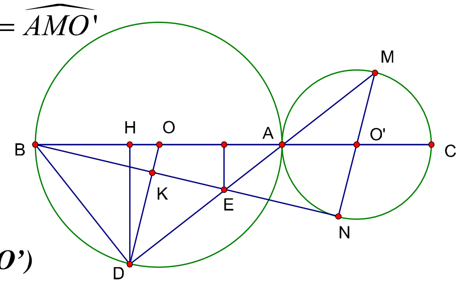
2. Chứng minh OD // MN và tính OK theo R

Chứng minh $\widehat{ODA} = \widehat{OAD} = \widehat{MAO'} = \widehat{AMO'}$

$\Rightarrow$ OD // MN

Ta có : OK // O'N $\Rightarrow \frac{OK}{O'N} = \frac{BO}{BO'}$

$\Rightarrow$ OK = $\frac{BO.O'N}{O'B} = \frac{R.0,5R}{2,5R} = \frac{R}{5}$



3. Chứng minh BN là tiếp tuyến của (O')

Chứng minh ΔBOK = ΔDOH (c- g- c)

$\Rightarrow \widehat{OKB} = 90^0 \Rightarrow$ BN $\perp$ O'N $\Rightarrow$ BN là tiếp tuyến của (O')

4. Tính diện tích Δ BEA theo R

Tính BK = DH = $\frac{2R\sqrt{6}}{5}$ và BD = $\frac{2R\sqrt{10}}{5}$

Ta có : ΔADB vuông tại D $\Rightarrow$ DB^2 = BK.BE

$$\Rightarrow BE = \frac{BD^2}{BK} = \frac{\frac{40R^2}{25}}{\frac{2R\sqrt{6}}{5}} = \frac{4R}{\sqrt{6}} = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$$

Ta có DK = BH = $\frac{4R}{5}$ (hs tự chứng minh)

$$S_{\Delta BDE} = \frac{1}{2}BE.DK = \frac{1}{2}.\frac{2R\sqrt{6}}{3}.\frac{4R}{5} = \frac{4R^2\sqrt{6}}{15}$$

$$S_{\Delta BDA} = \frac{1}{2}AB.DH = \frac{1}{2}.2R.\frac{2R\sqrt{6}}{5} = \frac{2R^2\sqrt{6}}{5}$$

$$S_{\Delta BAE} = S_{\Delta BDA} - S_{\Delta BDE} = \frac{2R^2\sqrt{6}}{5} - \frac{4R^2\sqrt{6}}{15} = \frac{2R^2\sqrt{6}}{15}$$

Bài 53

1. Chứng minh A $\in$ (C) và B $\in$ (D)

Chứng minh ΔACM và ΔBDM cân

$\Rightarrow$ CA = CM $\Rightarrow$ A $\in$ (C)

DB = DM $\Rightarrow$ B $\in$ (D)

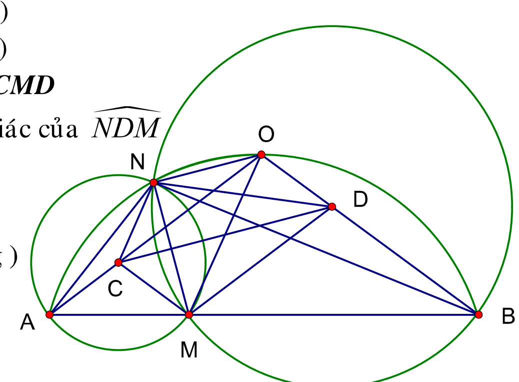
2. Chứng minh ΔANB ~ ΔCMD

Chứng minh DC là phân giác của $\widehat{NDM}$

$\Rightarrow \widehat{NBM} = \widehat{CDM}$

Tương tự : $\widehat{NAM} = \widehat{DCM}$

$\Rightarrow$ ΔANB ~ ΔCMD (g-g)



3. Chứng minh khi M di động trên AB thì N chạy trên một đường cố định

Ta có : $\widehat{CMD} = \widehat{AOB}$ (hình bình hành)

$\widehat{CMD} = \widehat{ANB}$ (ΔANB ~ ΔCMD)

$\Rightarrow \widehat{ANB} = \widehat{AOB}$ không đổi , mà A , B cố định nên