MỘT SỐ DẠNG TOÁN VÀ CÔNG THỨC GIẢI
BÀI TOÁN MẶT CẦU

I. Mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện

1/ Các khái niệm cơ bản

+ **Trục của đa giác đáy**: là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp của đa giác đáy và vuông góc với mặt phẳng chứa đa giác đáy $\Rightarrow$ Bất kì một điểm nào nằm trên trục của đa giác thì cách đều các đỉnh của đa giác đó.
+ **Đường trung trực của đoạn thẳng**: là đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó $\Rightarrow$ Bất kì một điểm nào nằm trên đường trung trực thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng.
+ **Mặt trung trực của đoạn thẳng**: là mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó $\Rightarrow$ Bất kì một điểm nào nằm trên mặt trung trực thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng.

2/ Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

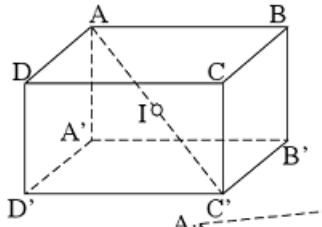
+ **Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp**: là điểm cách đều các đỉnh của hình chóp. Hay nói cách khác, nó chính là giao điểm I của trục *đường tròn ngoại tiếp mặt phẳng đáy* và *mặt phẳng trung trực của một cạnh bên* hình chóp.
+ **Bán kính**: là khoảng cách từ I đến các đỉnh của hình chóp.

3/ Cách xác định tâm và bán kính mặt cầu của một số hình đa diện

a/ Hình hộp chữ nhật, hình lập phương.

- **Tâm**: trùng với tâm đối xứng của hình hộp chữ nhật (hình lập phương) $\Rightarrow$Tâm là I là trung điểm của AC'.
- **Bán kính**: bằng nửa độ dài đường chéo hình hộp chữ nhật (hình lập phương).

$\Rightarrow$Bán kính: $R = \dfrac{AC'}{2}$.



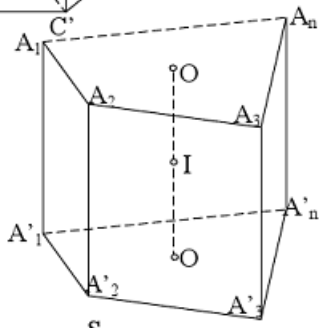
b/ Hình lăng trụ đứng có đáy nội tiếp đường tròn.

Xét hình lăng trụ đứng $A_1A_2A_3...A_n.A_1'A_2'A_3'...A_n'$,

trong đó có 2 đáy $A_1A_2A_3...A_n$ và $A_1'A_2'A_3'..A_n'$ nội tiếp đường tròn (O) và (O'). Lúc đó,

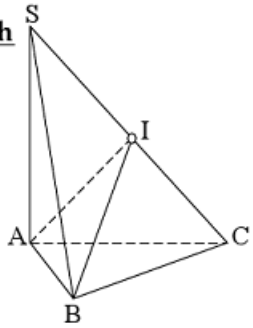
mặt cầu nội tiếp hình lăng trụ đứng có:

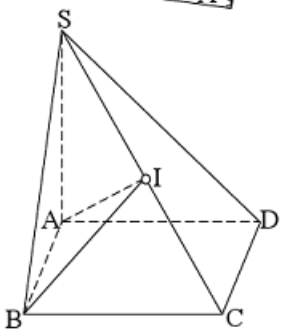
- **Tâm**: I với I là trung điểm của OO'.
- **Bán kính**: $R = IA_1 = IA_2 = ... = IA_n'$.



c/ Hình chóp có các đỉnh nhìn đoạn thẳng nối 2 đỉnh còn lại dưới 1 góc vuông.

- Hình chóp $S.ABC$ có $SAC = SBC = 90^0$.
  + Tâm: I là trung điểm của SC.
  + Bán kính: $R = \dfrac{SC}{2} = IA = IB = IC$.





- Hình chóp $S.ABCD$ có

$SAC = SBC = SDC = 90^0$.

+ Tâm: I là trung điểm của SC.

+ Bán kính: $R = \dfrac{SC}{2} = IA = IB = IC = ID$.

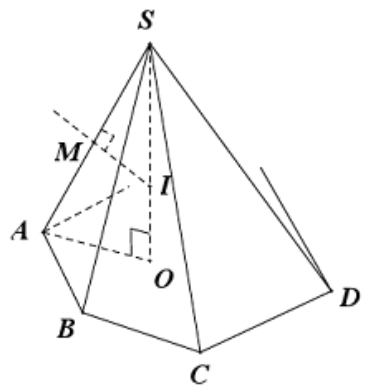
d/ <u>Hình chóp đều</u>.

Cho hình chóp đều $S.ABC...$

- Gọi O là tâm của đáy $\Rightarrow SO$ là trục của đáy.
- Trong mặt phẳng xác định bởi SO và một cạnh bên, chẳng hạn như $mp(SAO)$, ta vẽ đường trung trực của cạnh SA là Δ cắt SA tại M và cắt SO tại $I \Rightarrow I$ là tâm của mặt cầu.
- Bán kính:

Ta có: $\Delta SMI \sim \Delta SOA \Rightarrow \dfrac{SM}{SO} = \dfrac{SI}{SA} \Rightarrow$ Bán kính là:

$$R = IS = \frac{SM.SA}{SO} = \frac{SA^2}{2SO} = IA = IB = IC = ...$$



e/ <u>Hình chóp có cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy</u>.

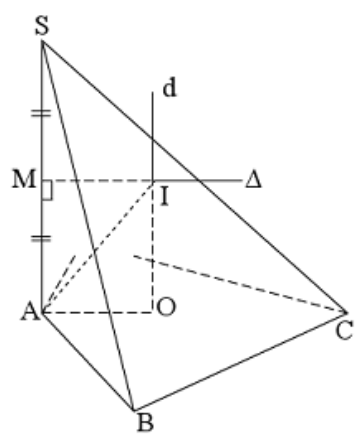
Cho hình chóp $S.ABC...$ có cạnh bên $SA \perp$ đáy $(ABC...)$ và đáy $ABC...$ nội tiếp được trong đường tròn tâm O. Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC...$ được xác định như sau:

- Từ tâm O ngoại tiếp của đường tròn đáy, ta vẽ đường thẳng d vuông góc với $mp(ABC...)$ tại O.
- Trong $mp(d, SA)$, ta dựng đường trung trực Δ của cạnh SA, cắt SA tại M, cắt d tại $I \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp và bán kính $R = IA = IB = IC = IS = ...$
- <u>Tìm bán kính</u>:

Ta có: $MIOB$ là hình chữ nhật.

Xét ΔMAI vuông tại M có:

$$R = AI = \sqrt{MI^2 + MA^2} = \sqrt{AO^2 + \left(\frac{SA}{2}\right)^2}.$$



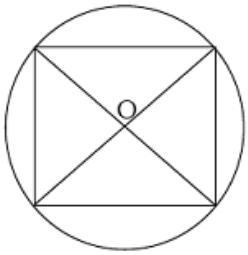
f/ <u>Hình chóp khác.</u>

- Dựng trục Δ của đáy.
- Dựng mặt phẳng trung trực (α) của một cạnh bên bất kì.
- $(\alpha) \cap \Delta = I \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.
- Bán kính: khoảng cách từ I đến các đỉnh của hình chóp.

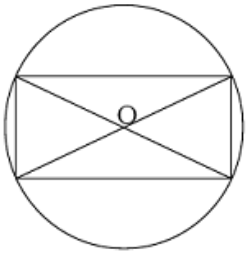
-

g/ **Đường tròn ngoại tiếp một số đa giác thường gặp.**

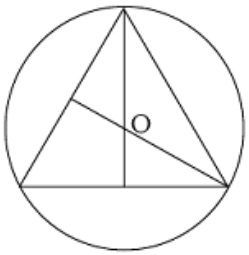
Khi xác định tâm mặt cầu, ta cần xác định trục của mặt phẳng đáy, đó chính là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng đáy tại tâm O của đường tròn ngoại tiếp đáy.



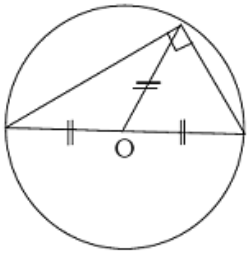
Hình vuông: O là giao điểm 2 đường chéo.



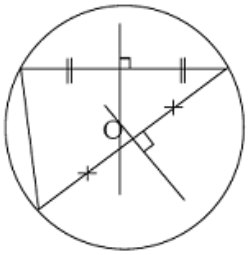
Hình chữ nhật: O là giao điểm của hai đường chéo.



Δ đều: O là giao điểm của 2 đường trung tuyến (trọng tâm).



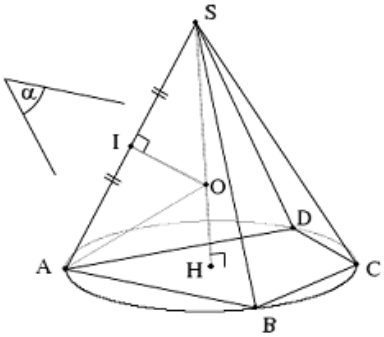
Δ vuông: O là trung điểm của cạnh huyền.



Δ thường: O là giao điểm của hai đường trung trực của hai cạnh Δ.

II. KỸ THUẬT XÁC ĐỊNH MẶT CẦU NGOẠI TIẾP CHÓP

Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ (thoả mãn điều kiện tồn tại mặt cầu ngoại tiếp). *Thông thường, để xác định mặt cầu ngoại tiếp hình chóp ta thực hiện theo hai bước:*



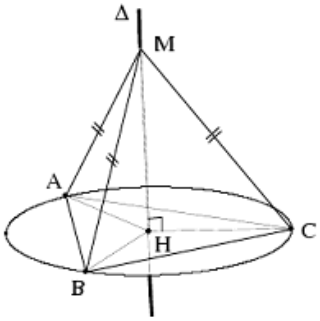
Bước 1: Xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy. Dựng Δ : trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

Bước 2: Lập mặt phẳng trung trực (α) của một cạnh bên.

Lúc đó : - Tâm O của mặt cầu: $\Delta \cap mp(\alpha) = \{O\}$

- Bán kính: $R = SA(= SO)$. Tuỳ vào từng trường hợp.

Lưu ý: Kỹ năng xác định trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.



1. Trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy: là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp đáy và vuông góc với mặt phẳng đáy.

Tính chất: $\forall M \in \Delta : \ MA = MB = MC$

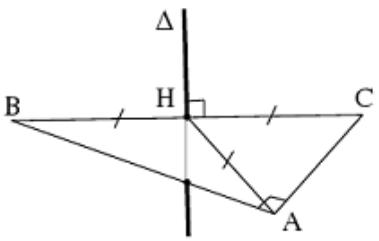
Suy ra: $MA = MB = MC \ \Leftrightarrow \ M \in \Delta$

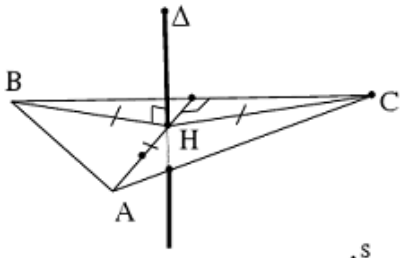
2. Các bước xác định trục:

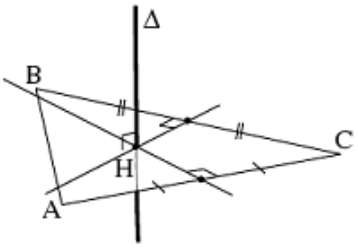
- Bước 1: Xác định tâm H của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.
- Bước 2: Qua H dựng Δ vuông góc với mặt phẳng đáy.

Một số trường hợp đặc biệt

Tam giác vuông | Tam giác đều | Tam giác bất kì

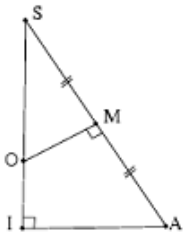






3. Kỹ năng tam giác đồng dạng

ΔSMO đồng dạng với $\Delta SIA \Rightarrow \dfrac{SO}{SA} = \dfrac{SM}{SI}$.



4. <u>Nhận xét</u>:

$\exists M, S : \begin{cases} MA = MB = MC \\ SA = SB = SC \end{cases} \Rightarrow SM$ là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

*** KỸ THUẬT SỬ DỤNG HAI TRỤC XÁC ĐỊNH TÂM MẶT CẦU NGOẠI TIẾP ĐA DIỆN**

Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ (thõa mãn điều kiện tồn tại mặt cầu ngoại tiếp). **Thông thường, để xác định mặt cầu ngoại tiếp hình chóp ta thực hiện theo hai bước:**

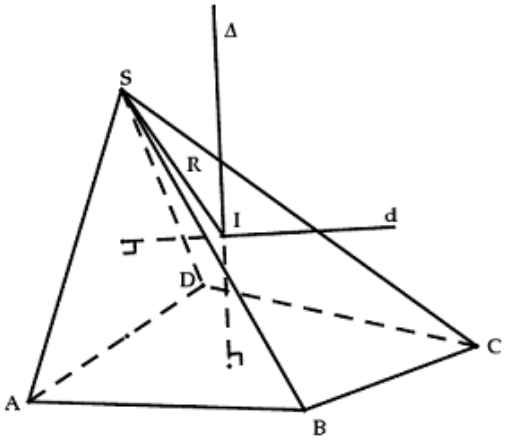
<u>Bước 1:</u> Xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy. Dựng Δ: trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

<u>Bước 2:</u> Xác định trục *d* của đường tròn ngoại tiếp một mặt bên (*dễ xác định*) của khối chóp.

Lúc đó:

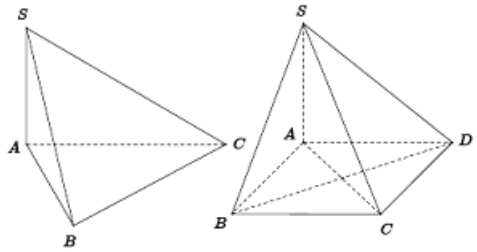
+ Tâm *I* của mặt cầu: $\Delta \cap d = \{I\}$

+ Bán kính: $R = IA(= IS)$. *Tuỳ vào từng trường hợp.*

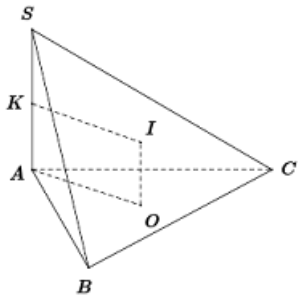


TỔNG KẾT CÁC DẠNG TÌM TÂM VÀ BÁN KÍNH MẶT CẦU (ĐTD)

Loại 1: Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $ABC = 90^0$ khi đó $\boxed{R = \frac{SC}{2}}$ và tâm là trung điểm SC.



Loại 2: Cạnh bên SA vuông góc đáy và bất kể đáy là hình gì, chỉ cần tìm được bán kính đường tròn ngoại tiếp của đáy là R_D, khi đó : $\boxed{R^2 = R_D^2 + \frac{SA^2}{4}}$.



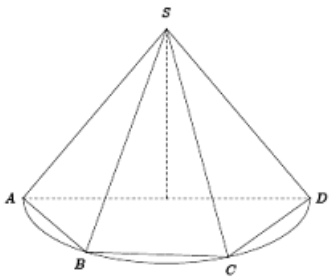
+ $\boxed{R_D = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}}$ (p: nửa chu vi).

+ Nếu $\Delta\ ABC$ vuông tại A thì: $\boxed{R^2 = \frac{1}{4}\left(AB^2 + AC^2 + AS^2\right)}$.

+ Đáy là hình vuông cạnh a thì $R_D = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, nếu đáy là tam giác đều cạnh a thì $R_D = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Loại 3: Chóp có các cạnh bên bằng nhau:

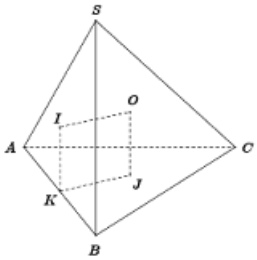
$SA = SB = SC = SD$: $\boxed{R = \frac{SA^2}{2SO}}$.



+ $ABCD$ là hình vuông, hình chữ nhật, khi đó O là giao hai đường chéo.
+ ΔABC vuông, khi đó O là trung điểm cạnh huyền.
+ ΔABC đều, khi đó O là trọng tâm, trực tâm.

Loại 4: Hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) vuông góc với nhau và có giao tuyến AB. Khi đó ta gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác SAB và ABC. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp:

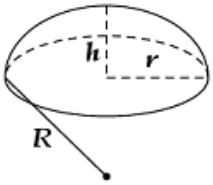
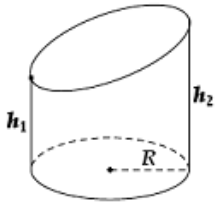
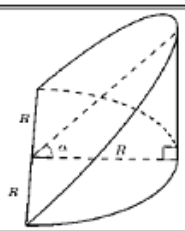
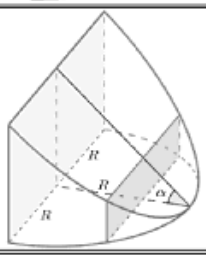
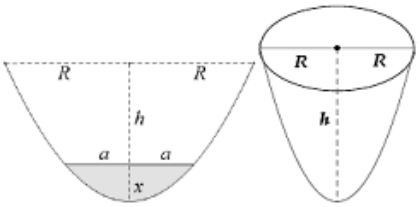
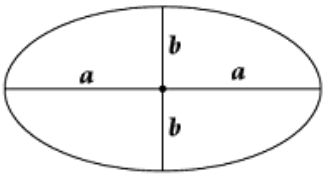
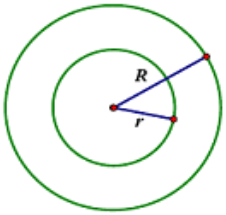
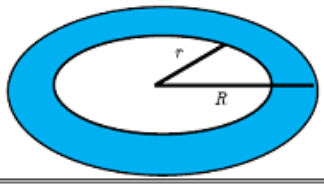
$$\boxed{R^2 = R_1^2 + R_2^2 - \frac{AB^2}{4}}$$



Loại 5 : Chóp $S.ABCD$ có đường cao SH, tâm đường tròn ngoại tiếp đáy là O. Khi đó ta giải phương trình: $(SH - x)^2 + OH^2 = x^2 + R_D^2$. Với giá trị x tìm được ta có: $\boxed{R^2 = x^2 + R_D^2}$.

Loại 6: Bán kính mặt cầu nội tiếp: $\boxed{r = \frac{3V}{S_{tp}}}$.

TỔNG HỢP CÁC CÔNG THỨC ĐẶC BIỆT VỀ KHỐI TRÒN XOAY

Chỏm cầu:	$\begin{cases} S_{xq} = 2\pi Rh = \pi\left(r^2 + h^2\right) \\ V = \pi h^2\left(R - \dfrac{h}{3}\right) = \dfrac{\pi h}{6}\left(h^2 + 3r^2\right) \end{cases}$	
Hình trụ cụt: ***(phiến trụ)***	$\begin{cases} S_{xq} = \pi R\left(h_1 + h_2\right) \\ V = \pi R^2\left(\dfrac{h_1 + h_2}{2}\right) \end{cases}$	
Hình nêm loại 1:	$V = \dfrac{2}{3}R^3 \tan\alpha$	
Hình nêm loại 2:	$V = \left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2}{3}\right)R^3 \tan\alpha$	
Parabol bậc hai. Parabol tròn xoay.	$\begin{cases} S_{parabol} = \dfrac{4}{3}Rh; \quad \dfrac{S'}{S} = \left(\sqrt{\dfrac{x}{h}}\right)^3 = \left(\dfrac{a}{R}\right)^3 \\ V = \dfrac{1}{2}\pi R^2 h = \dfrac{1}{2}V_{trụ} \end{cases}$	
Diện tích Elip và Thể tích khối tròn xoay sinh bởi Elip	$\begin{cases} S_{elip} = \pi ab \\ V_{xoay\ quanh\ 2a} = \dfrac{4}{3}\pi ab^2 \\ V_{xoay\ quanh\ 2b} = \dfrac{4}{3}\pi a^2 b \end{cases}$	
Hình xuyến	Diện tích hình vành khăn $S = \pi\left(R^2 - r^2\right)$ Thể tích hình xuyến (phao) $V = 2\pi^2\left(\dfrac{R+r}{2}\right)\left(\dfrac{R-r}{2}\right)^2$	 

PHẦN VII. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN OXYZ

A. HỆ TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN

1. Trong không gian cho ba trục *Ox, Oy, Oz* phân biệt và vuông góc từng đôi một. Gốc tọa độ *O*, trục hoành *Ox*, trục tung *Oy*, trục cao *Oz*, các mặt tọa độ *Oxy*, *Oyz*,*Ozx*.

$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ là các vecto đơn vị

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$$

Chú ý: $\vec{a}^2 = \left|\vec{a}\right|^2$

$$\vec{i}\vec{j} = \vec{i}\vec{k} = \vec{j}\vec{k} = 0$$

2. Tọa độ véc tơ: $\vec{u} = (x;y;z) \Leftrightarrow \vec{u}(x;y;z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

3. Tọa độ điểm: $M(x;y;z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

4. Các công thức tọa độ cần nhớ: Cho $\vec{u} = (a;b;c)$, $\vec{v} = (a';b';c')$

a) $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \end{cases}$

b) $\vec{u} \mp \vec{v} = \left(a \pm a';b \pm b';c \pm c'\right)$

c) $k\vec{u} = (ka;kb;kc)$

d) $\vec{u}.\vec{v} = \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\cos(\vec{u},\vec{v}) = aa' + bb' + cc'$

e) $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|} = \dfrac{aa' + bb' + cc'}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|}$

f) $\left|\vec{u}\right| = \sqrt{\vec{u}^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

g) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

h) $\overrightarrow{AB} = \left(x_B - x_A;y_B - y_A;z_B - z_A\right)$

i) $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 + \left(z_B - z_A\right)^2}$

5. Chú ý: góc của 2 véc tơ $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ là góc hình học (nhỏ) giữa 2 tia mang vectơ có giá trị trong đoạn $\left[0;\pi\right]$. $\sin\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\vec{u},\vec{v}\right)} \geq 0$

6. <u>**Chia tỉ lệ đoạn thẳng**</u>: *M* chia *AB* theo tỉ số *k* nghĩa là $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$

Công thức tọa độ của M là : $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k} \\ y_M = \dfrac{y_A - ky_B}{1-k} \\ z_M = \dfrac{z_A - kz_B}{1-k} \end{cases}$

M là trung điểm AB: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}\Rightarrow\begin{cases}x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}\\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}\\ z_M=\dfrac{z_A+z_B}{2}\end{cases}$

7. <u>G là trọng tâm tam giác ABC:</u>

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Rightarrow\begin{cases}x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}\\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}\\ z_G=\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}\end{cases}$$

8. <u>G là trọng tâm tứ diện ABCD:</u>

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\Rightarrow\begin{cases}x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4}\\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4}\\ z_G=\dfrac{z_A+z_B+z_C+z_D}{4}\end{cases}$$

9. <u>Tích có hướng 2 véc tơ:</u> Cho 2 véc tơ $\vec{u}=(a;b;c)$ và $\vec{v}=(a';b';c')$ ta định nghĩa tích có hướng của 2 véc tơ đó là một véc tơ, kí hiệu $\left[\vec{u},\vec{v}\right]$ hay $\vec{u}\wedge\vec{v}$ có toạ độ:

$$\left[\vec{u},\vec{v}\right]=\left(\begin{vmatrix}b & c\\ b' & c'\end{vmatrix};\begin{vmatrix}c & a\\ c' & a'\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}\right)=\left(bc'-b'c;ca'-ac';ab'-ba'\right)$$

10. <u>Tính chất tích có hướng 2 véc tơ:</u>

a. $\boxed{\left[\vec{u},\vec{v}\right] \text{ vuông góc với } \vec{u} \text{ và } \vec{v}}$

b. $\left|\left[\vec{u},\vec{v}\right]\right|=\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\sin(\vec{u},\vec{v})$

c. $\left[\vec{u},\vec{v}\right]=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{u},\vec{v}$ cùng phương

11. <u>Ứng dụng tích có hướng 2 véc tơ:</u>

a. <u>Diện tích hình bình hành ABCD</u>: $S=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\right|$

b. <u>Diện tích tam giác ABC</u>: $S=\dfrac{1}{2}.\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$

c. Ba véc tơ $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ <u>đồng phẳng:</u> $\left[\vec{u},\vec{v}\right].\vec{w}=0$

d. <u>Thể tích khối hộp</u> có đáy hình bình hành $ABCD$ và cạnh bên AA': $V=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$

e. <u>Thể tích khối tứ diện S.ABC:</u> $V=\dfrac{1}{6}.\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{SA}\right|$