MẶT NÓN - MẶT TRỤ - MẶT CẦU

I. MẶT NÓN TRÒN XOAY VÀ KHỐI NÓN

1) *Mặt nón tròn xoay.*

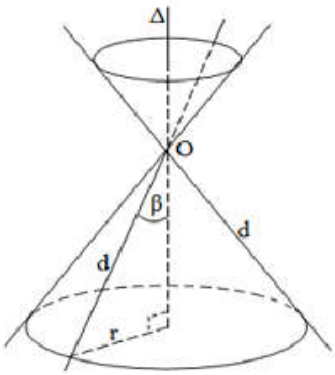
Đường thẳng d, Δ cắt nhau tại O và tạo thành góc β với $0^0 < \beta < 90^0$, $mp(P)$ chứa d, Δ. (P) quay quanh trục Δ với góc β không đổi

$\Rightarrow$ mặt nón tròn xoay đỉnh O.

+ Δ gọi là trục.

+ d được gọi là đường sinh.

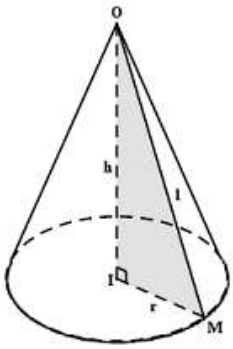
+ Góc 2β gọi là góc ở đỉnh.



2) *Khối nón*

+ Là phần không gian được giới hạn bởi một hình nón tròn xoay kể cả hình nón đó. Những điểm không thuộc khối nón gọi là những điểm ngoài của khối nón.

+ Những điểm thuộc khối nón nhưng không thuộc hình nón tương ứng gọi là những điểm trong của khối nón. Đỉnh, mặt đáy, đường sinh của một hình nón cũng là đỉnh, mặt đáy, đường sinh của khối nón tương ứng.



Cho hình nón có chiều cao h, đường sinh l và bán kính đáy r.

+ ***Diện tích xung quanh:*** của hình nón: $\boxed{S_{xq} = \pi rl}$.

+ ***Diện tích đáy (hình tròn):*** $\boxed{S_{đáy} = \pi r^2}$.

+ ***Diện tích toàn phần:*** của hình nón: $\boxed{S_{tp} = \pi rl + \pi r^2}$.

+ ***Thể tích khối nón:*** $\boxed{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$.

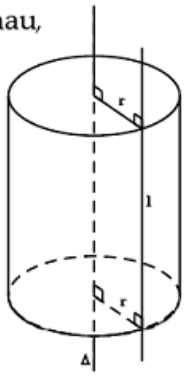
3)*Thiết diện khi cắt bởi mặt phẳng*

❖**Cắt mặt nón tròn xoay bởi mp (Q) đi qua đỉnh của mặt nón.**	
$mp(Q)$ cắt mặt nón theo 2 đường sinh.	Thiết diện là tam giác cân.
$mp(Q)$ tiếp xúc với mặt nón theo một đường sinh.	(Q) là mặt phẳng tiếp diện của hình nón.
❖**Cắt mặt nón tròn xoay bởi mp (Q) không đi qua đỉnh của mặt nón.**	
$mp(Q)$ vuông góc với trục hình nón.	Giao tuyến là 1 đường parabol.
$mp(Q)$ song song với 2 đường sinh hình nón.	Giao tuyến là 2 nhánh của 1 hypebol.
$mp(Q)$ song song với 1 đường sinh hình nón.	Giao tuyến là một đường tròn.

II. MẶT TRỤ TRÒN XOAY

1. Mặt trụ:

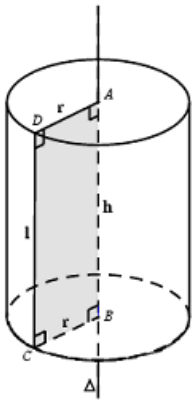
Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng Δ và l song song với nhau, cách nhau một khoảng bằng r. Khi quay mặt phẳng (P) xung quanh Δ thì đường thẳng l sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là mặt trụ tròn xoay, gọi tắt là mặt trụ.



- Đường thẳng Δ gọi là trục.
- Đường thẳng l là đường sinh.
- r là bán kính của mặt trụ đó.

2. Hình trụ tròn xoay và khối trụ tròn xoay:

a) Ta xét hình chữ nhật $ABCD$. Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ xung quanh đường thẳng chứa một cạnh nào đó, chẳng hạn cạnh AB thì đường gấp khúc $ADCB$ sẽ tạo thành một hình gọi là hình trụ tròn xoay, hay gọi tắt là hình trụ.



+ Khi quay quanh AB, hai cạnh AD và BC sẽ vạch ra hai hình tròn bằng nhau gọi là hai đáy của hình trụ, bán kính của chúng gọi là bán kính của hình trụ.

+ Độ dài đoạn CD gọi là độ dài đường sinh của hình trụ.

+ Phần mặt tròn xoay được sinh ra bởi các điểm trên cạnh CD khi quay xung quanh AB gọi là mặt xung quanh của hình trụ.

+ Khoảng cách AB giữa hai mặt phẳng song song chứa hai đáy là chiều cao của hình trụ.

b) Khối trụ tròn xoay hay khối trụ là phần không gian được giới hạn bởi một hình trụ tròn xoay kể cả hình trụ tròn xoay đó. Những điểm không thuộc khối trụ gọi là những điểm ngoài của khối trụ. Những điểm thuộc khối trụ nhưng không thuộc hình trụ tương ứng gọi là những điểm trong của khối trụ. Mặt đáy, chiều cao, đường sinh, bán kính của một hình trụ cũng là mặt đáy, chiều cao, đường sinh, bán kính của khối trụ tương ứng.

Hình trụ có chiều cao h, đường sinh l và bán kính đáy r.

+ ***Diện tích xung quanh:*** $\boxed{S_{xq} = 2\pi rl}$.

+ ***Diện tích toàn phần:*** $\boxed{S_{tp} = 2\pi rl + 2\pi r^2}$.

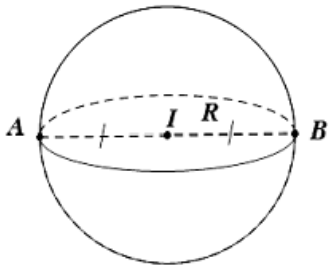
+ ***Thể tích:*** $\boxed{V = \pi r^2 h}$.

III. MẶT CẦU – KHỐI CẦU

1. Mặt cầu

Cho điểm I cố định và một số thực dương R.

Tập hợp tất cả những điểm M trong không gian cách I một khoảng R được gọi là mặt cầu tâm I, bán kính R.

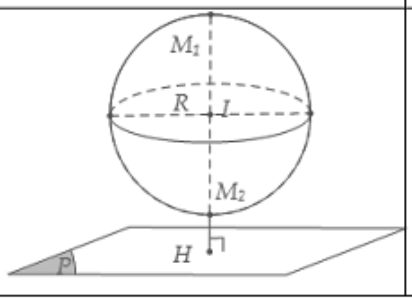
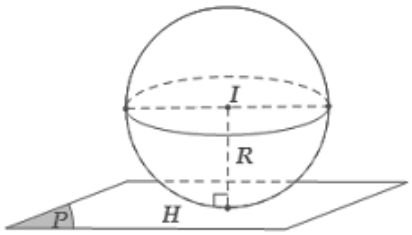
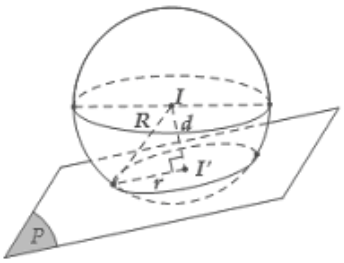


Kí hiệu: $S(I;R)$. Khi đó:

$$\boxed{S(I;R) = \{M \mid IM = R\}}$$

2. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng

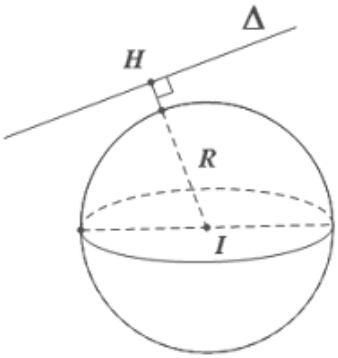
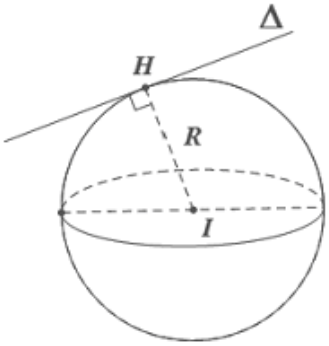
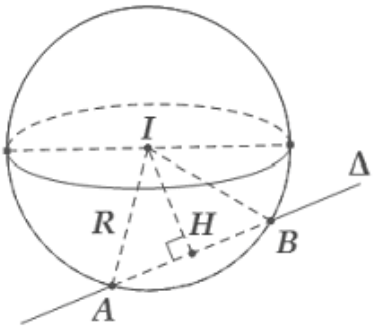
Cho mặt cầu $S(I;R)$ và mặt phẳng (P). Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên $(P) \Rightarrow d = IH$ là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P). Khi đó:

$d > R$	$d = R$	$d < R$
Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.	Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu: (P) là mặt phẳng **tiếp diện** của mặt cầu và H: **tiếp điểm.**	Mặt phẳng cắt mặt cầu theo thiết diện là *đường tròn* có tâm I' và bán kính $r = \sqrt{R^2 - IH^2}$
		

Lưu ý: Khi mặt phẳng (P) đi qua tâm I của mặt cầu thì mặt phẳng (P) được gọi là **<u>mặt phẳng kính</u>** và thiết diện lúc đó được gọi là **<u>đường tròn lớn.</u>**

3. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng

Cho mặt cầu $S(I;R)$ và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của I lên Δ. Khi đó:

$IH > R$	$IH = R$	$IH < R$
Δ không cắt mặt cầu.	Δ tiếp xúc với mặt cầu. Δ: **Tiếp tuyến** của (S) và H: **tiếp điểm.**	Δ cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt.
		

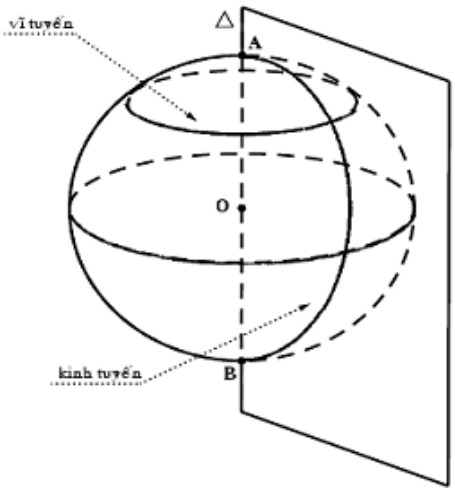
Δ cắt (S) tại 2 điểm A, B thì bán kính R của (S): $\begin{cases} d(I;\Delta) = IH \\ R = \sqrt{IH^2 + AH^2} = \sqrt{IH^2 + \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2} \end{cases}$.

4. Đường kinh tuyến và vĩ tuyến của mặt cầu:

+ Giao tuyến của mặt cầu với nửa mặt phẳng có bờ là trục của mặt cầu được gọi là kinh tuyến.

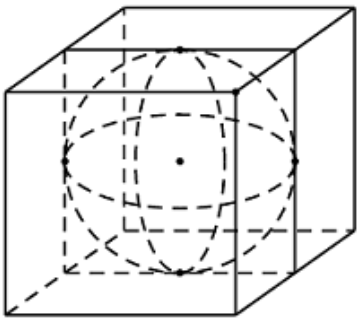
+ Giao tuyến (nếu có) của mặt cầu với các mặt phẳng vuông góc với trục được gọi là vĩ tuyến của mặt cầu.

+ Hai giao điểm của mặt cầu với trục được gọi là hai cực của mặt cầu



** Mặt cầu nội tiếp, ngoại tiếp hình đa diện:*

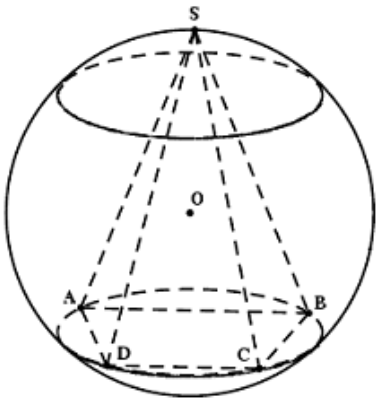
Mặt cầu nội tiếp hình đa diện nếu mặt cầu đó tiếp xúc với tất cả các mặt của hình đa diện. Còn nói hình đa diện ngoại tiếp mặt cầu.



Mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện nếu tất cả các đỉnh của hình đa diện đều nằm trên mặt cầu. Còn nói hình đa diện nội tiếp mặt cầu.

Mặt cầu tâm O bán kính r ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ khi và chỉ khi:

$OA = OB = OC = OD = OS = r$



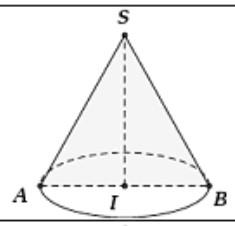
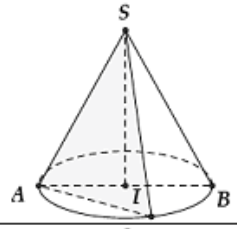
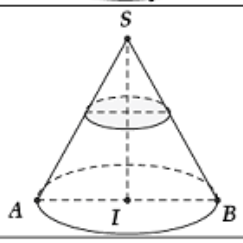
Cho mặt cầu $S(I;R)$

+ Diện tích mặt cầu: $\boxed{S = 4\pi R^2}$.

+ Thể tích khối cầu: $\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$.

MỘT SỐ DẠNG TOÁN VÀ CÔNG THỨC GIẢI BÀI TOÁN MẶT NÓN

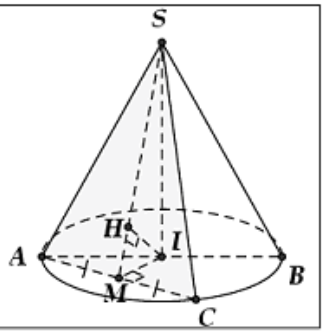
Dạng 1. Thiết diện của hình nón cắt bởi một mặt phẳng

Thiết diện qua trục *của hình nón là tam giác cân.*	
Thiết diện qua đỉnh *của hình nón là những tam giác cân có hai cạnh bên là hai đường sinh của hình nón.*	
Thiết diện vuông góc với trục *của hình nón là những đường tròn có tâm nằm trên trục của hình nón.*	

Dạng 2. Bài toán liên quan đến thiết diện qua đỉnh của hình nón

Cho hình nón có chiều cao là h, bán kính đáy r và đường sinh l.

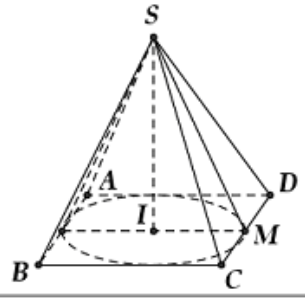
Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là d.

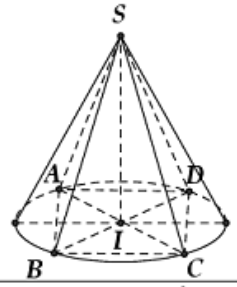
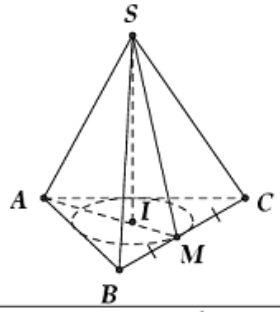
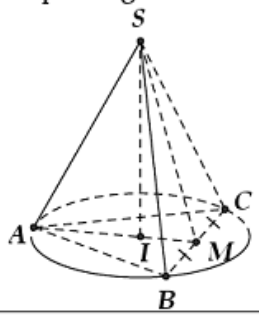
Gọi M là trung điểm của AC. Khi đó: + $AC \perp (SMI)$ + Góc giữa (SAC) và (ABC) là góc SMI. + Góc giữa (SAC) và SI là góc MSI. + $d(I,(SAC)) = IH = d$.	

Diện tích thiết diện:

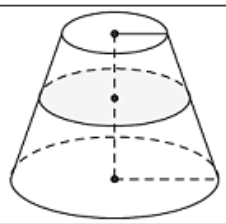
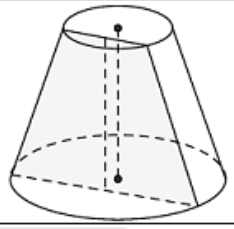
$$S_{td} = S_{\Delta SAC} = \frac{1}{2}SM.AC = \frac{1}{2}\sqrt{SI^2 + IM^2}.2\sqrt{AI^2 - IM^2} = \sqrt{r^2 - \frac{h^2d^2}{h^2 - d^2}}.\sqrt{h^2 + \frac{h^2d^2}{h^2 - d^2}}$$

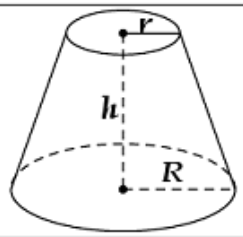
Dạng 3. Bài toán hình nón ngoại tiếp và nội tiếp hình chóp

Hình nón ***nội tiếp*** hình chóp $S.ABCD$ đều là hình nón có đỉnh là S, đáy là đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$. Khi đó hình nón có: + Bán kính đáy $r = IM = \frac{AB}{2}$, + Đường cao $h = SI$, đường sinh $l = SM$.	Hình chóp tứ giác **đều** $S.ABCD$ 

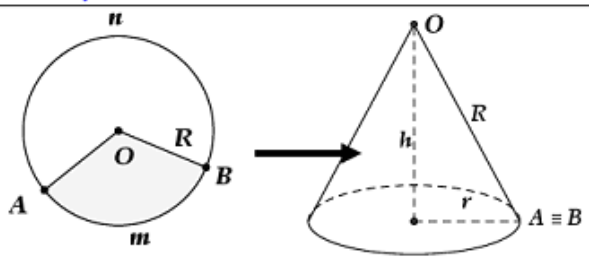
Hình nón ***ngoại tiếp*** hình chóp $S.ABCD$ đều là hình nón có đỉnh là S, đáy là đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$. Khi đó hình nón có: + Bán kính đáy: $r = IA = \frac{AC}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{2}$. + Chiều cao: $h = SI$. + Đường sinh: $l = SA$.	Hình chóp tứ giác **đều** $S.ABCD$ 
Hình nón ***nội tiếp*** hình chóp $S.ABC$ đều là hình nón có đỉnh là S, đáy là đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Khi đó hình nón có + Bán kính đáy: $r = IM = \frac{AM}{3} = \frac{AB\sqrt{3}}{6}$. + Chiều cao: $h = SI$. + Đường sinh: $l = SM$.	Hình chóp tam giác **đều** $S.ABC$ 
Hình nón ***ngoại tiếp*** hình chóp $S.ABC$ đều là hình nón có đỉnh là S, đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khi đó hình nón có: + Bán kính đáy: $r = IA = \frac{2AM}{3} = \frac{AB\sqrt{3}}{3}$. + Chiều cao: $h = SI$. + Đường sinh: $l = SA$.	Hình chóp tam giác **đều** $S.ABC$ 

Dạng 4. Bài toán hình nón cụt

Khi cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đáy thì phần mặt phẳng nằm trong hình nón là một hình tròn. Phần hình nón nằm giữa hai mặt phẳng nói trên được gọi là ***hình nón cụt***.	
+ Khi cắt hình nón cụt bởi một mặt phẳng song song với đáy thì được mặt cắt là một hình tròn.	
+ Khi cắt hình nón cụt bởi một mặt phẳng song song với trục thì được mặt cắt là một hình thang cân.	
Cho hình nón cụt có R, r, h lần lượt là bán kính đáy lớn, bán kính đáy nhỏ và chiều cao.	*Diện tích xung quanh* của hình nón cụt: $\boxed{S_{xq} = \pi l\left(R + r\right)}$. Diện tích đáy (hình tròn): $\boxed{\begin{cases} S_{đáy1} = \pi r^2 \\ S_{đáy2} = \pi R^2 \end{cases} \Rightarrow \sum S_{đáy} = \pi\left(r^2 + R^2\right)}$.

	*Diện tích toàn phần* của hình nón cụt: $\boxed{S_{tp} = \pi l\left(R + r\right) + \pi r^2 + \pi R^2}$. *Thể tích* khối nón cụt: $\boxed{V = \frac{1}{3}\pi h\left(R^2 + r^2 + Rr\right)}$.

Dạng 5. Bài toán hình nón tạo bởi phần còn lại của hình tròn sau khi cắt bỏ đi hình quạt

Từ hình tròn $\left(O;R\right)$ cắt bỏ đi hình quạt AmB. Độ dài cung AnB bằng x. Phần còn lại của hình tròn ghép lại được một hình nón. Tìm bán kính, chiều cao và độ dài đường sinh của hình nón đó.	 Hình nón được tạo thành có $\begin{cases} l = R \\ 2\pi r = x \Rightarrow r = \frac{2\pi}{x} \\ h = \sqrt{l^2 - r^2} \end{cases}$.

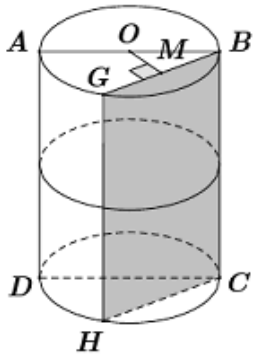
MỘT SỐ DẠNG TOÁN VÀ CÔNG THỨC GIẢI BÀI TOÁN MẶT TRỤ

Dạng 1. Thiết diện của hình trụ cắt bởi một mặt phẳng

+ Thiết diện ***vuông góc trục*** là một đường tròn bán kính R.

+ Thiết diện ***chứa trục*** là một hình chữ nhật $ABCD$ trong đó $AB = 2R$ và $AD = h$. Nếu thiết diện qua trục là một hình vuông thì $h = 2R$.

+ Thiết diện ***song song với trục*** và ***không chứa trục*** là hình chữ nhật $BGHC$ có khoảng cách tới trục là: $d\left(OO';\left(BGHC\right)\right) = OM$



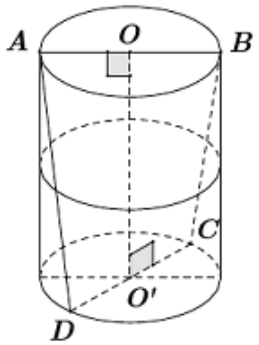
Dạng 2. Thể tích khối tứ diện có 2 cạnh là đường kính 2 đáy

Nếu như AB và CD là hai đường kính bất kỳ trên hai đáy của hình trụ thì:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB.CD.OO'.\sin\left(AB,CD\right)$$

* Đặc biệt: Nếu AB và CD vuông góc nhau thì:

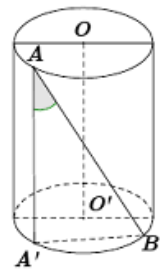
$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB.CD.OO'.$$



Dạng 3. Xác định góc khoảng cách

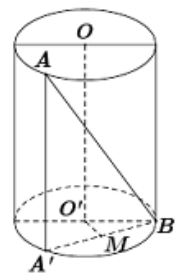
+ Góc giữa AB và trục OO':

$$\left(AB;OO'\right) = A'AB.$$



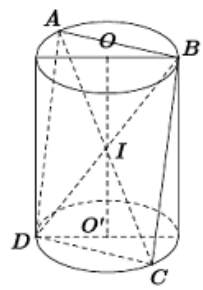
+ Khoảng cách giữa AB và trục OO':

$$d\left(AB;OO'\right) = OM.$$



+ Nếu $ABCD$ là một hình vuông nội tiếp trong hình trụ thì đường chéo của hình vuông cũng bằng đường chéo của hình trụ.

Nghĩa là cạnh hình vuông: $AB\sqrt{2} = \sqrt{4R^2 + h^2}$.

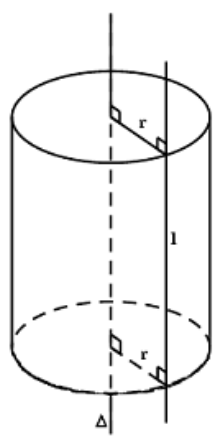


Dạng 4. Xác định mối liên hệ giữa diện tích xung quanh, toàn phần và thể tích khối trụ trong bài toán tối ưu

Một khối trụ có thể tích V không đổi.

+ Tìm bán kính đáy và chiều cao hình trụ để diện tích toàn phần nhỏ nhất:

$$S_{tp}\min \Leftrightarrow \begin{cases} R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}} \\ h = \sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}} \end{cases}$$



+ Tìm bán kính đáy và chiều cao hình trụ để diện tích xung quanh cộng với diện tích 1 đáy và nhỏ nhất:

$$S\min \Leftrightarrow \begin{cases} R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}} \\ h = \sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}} \end{cases}$$

Dạng 5. Hình trụ ngoại tiếp, nội tiếp một hình lăng trụ đứng

+ Cho hình lăng trụ tam giác đều nội tiếp trong một hình trụ. Thể tích khối lăng trụ là V thì thể tích khối trụ là $V_{(T)} = \dfrac{4\pi V}{9}$

+ Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ *ngoại tiếp trong một hình trụ. Diện tích xung quanh hình trụ là S thì diện tích xung quanh của hình lăng trụ là* $S_{xq} = \dfrac{2S}{\pi}$