PHẦN V. KHỐI ĐA DIỆN

I- KHÁI NIỆM VỀ HÌNH ĐA DIỆN VÀ KHỐI ĐA DIỆN:

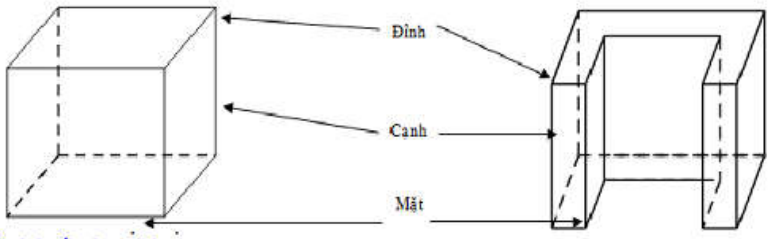
1. Khái niệm về hình đa diện:

• Hình đa diện (gọi tắt là đa diện) là hình được tạo bởi một số hữu hạn các đa giác thỏa mãn hai tính chất:

a) Hai đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không có điểm chung, hoặc chỉ có một đỉnh chung, hoặc chỉ có một cạnh chung.

b) Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác.

• Mỗi đa giác gọi là một mặt của hình đa diện. Các đỉnh, cạnh của các đa giác ấy theo thứ tự được gọi là các đỉnh, cạnh của hình đa diện.

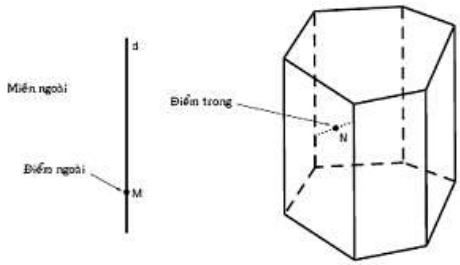


2. Khái niệm về khối đa diện:

• Khối đa diện là phần không gian được giới hạn bởi một hình đa diện, kể cả hình đa diện đó.

• Những điểm không thuộc khối đa diện được gọi là điểm ngoài của khối đa diện. Những điểm thuộc khối đa diện nhưng không thuộc hình đa diện đó được gọi là điểm trong của khối đa diện. Tập hợp các điểm trong được gọi là miền trong, tập hợp những điểm ngoài được gọi là miền ngoài của khối đa diện.

• Mỗi hình đa diện chia các điểm còn lại của không gian thành hai miền không giao nhau là miền trong và miền ngoài của hình đa diện, trong đó chỉ có miền ngoài là chứa hoàn toàn một đường thẳng nào đó.



III- HAI ĐA DIỆN BẰNG NHAU:

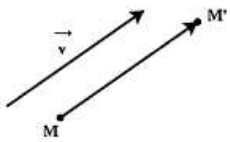
1. Phép dời hình trong không gian:

Trong không gian, quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' xác định duy nhất được gọi là một phép biến hình trong không gian.

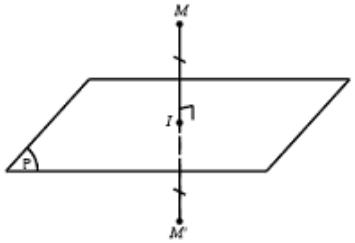
Phép biến hình trong không gian được gọi là phép dời hình nếu nó bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm tùy ý.

** Một số phép dời hình trong không gian:*

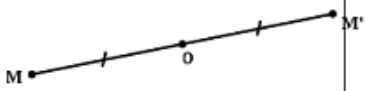
a) Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$:

Là phép biến hình biến mỗi điểm M thành M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.	

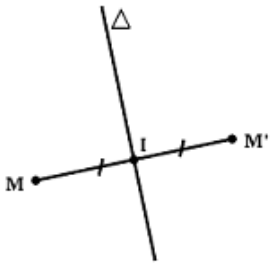
b) Phép đối xứng qua mặt phẳng (P):

Là phép biến hình biến mỗi điểm thuộc (P) thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc (P) thành điểm M' sao cho (P) là mặt phẳng trung trực của MM'. Nếu phép đối xứng qua mặt phẳng (P) biến hình (H) thành chính nó thì (P) được gọi là mặt phẳng đối xứng của (H).	

c) Phép đối xứng qua tâm O:

Là phép biến hình biến điểm O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho O là trung điểm MM'. Nếu phép đối xứng tâm O biến hình (H) thành chính nó thì O được gọi là tâm đối xứng của (H)	

d) Phép đối xứng qua đường thẳng Δ (phép đối xứng trục Δ):

Là phép biến hình biến mọi điểm thuộc đường thẳng Δ thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc Δ thành điểm M' sao cho Δ là đường trung trực của MM'. Nếu phép đối xứng trục Δ biến hình (H) thành chính nó thì Δ được gọi là trục đối xứng của (H)	

* *Nhận xét:*

- *Thực hiện liên tiếp các phép dời hình sẽ được một phép dời hình.*
- *Phép dời hình biến đa diện (H) thành đa diện (H'), biến đỉnh, cạnh, mặt của (H) thành đỉnh, cạnh, mặt tương ứng của (H').*

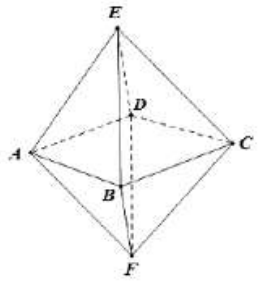
2. Hai hình bằng nhau:

Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

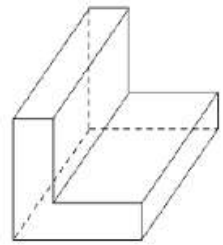
KHỐI ĐA DIỆN LỒI

I. Khối đa diện lồi

Khối đa diện được gọi là *khối đa diện lồi* nếu với bất kì hai điểm A và B nào của nó thì mọi điểm của đoạn AB cũng thuộc khối đó.



Khối đa diện lồi



Khối đa diện không lồi

II. Khối đa diện đều

1. Định nghĩa: *Khối đa diện đều* là một khối đa diện lồi có hai tính chất sau đây:

+ Các mặt là những đa giác đều n cạnh.
+ Mỗi đỉnh là đỉnh chung của đúng p cạnh.

Khối đa diện đều như vậy gọi là khối đa diện đều loại $\{n, p\}$.

2. Bảng tóm tắt của năm loại khối đa diện đều

Khối đa diện đều		***Số đỉnh***	***Số cạnh***	***Số mặt***	***Loại***	***Số MPĐX***
Tứ diện đều		4	6	4	$\{3;3\}$	6
Khối lập phương		8	12	6	$\{4;3\}$	9
Bát diện đều		6	12	8	$\{3;4\}$	9
Mười hai mặt đều		20	30	12	$\{5;3\}$	15
Hai mươi mặt đều		12	30	20	$\{3;5\}$	15

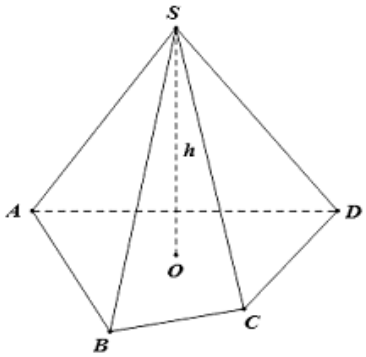
Khối đa diện đều loại $\{n, p\}$ có Đ đỉnh, C cạnh và M mặt: $\boxed{pĐ = 2C = nM}$.

THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

Thể tích khối chóp: $\boxed{V = \frac{1}{3} S_{đáy}.h}$

+ $S_{đáy}$: Diện tích mặt đáy.
+ h : Độ dài chiều cao khối chóp.

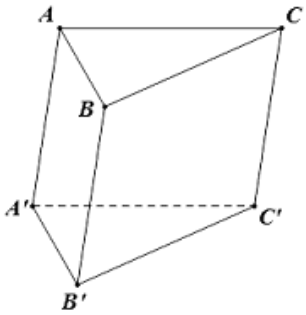
$$\boxed{V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} d_{(S,(ABCD))}.S_{ABCD}}$$

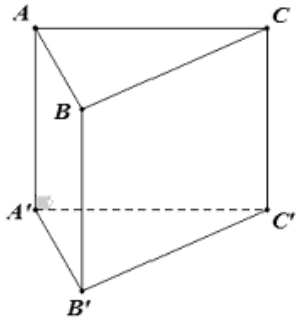


Thể tích khối lăng trụ: $\boxed{V = S_{đáy}.h}$

+ $S_{đáy}$: Diện tích mặt đáy.
+ h : Chiều cao của khối chóp.

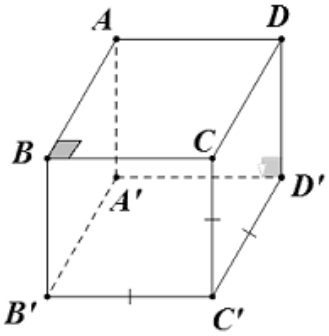
Lưu ý: Lăng trụ đứng có chiều cao chính là cạnh bên.

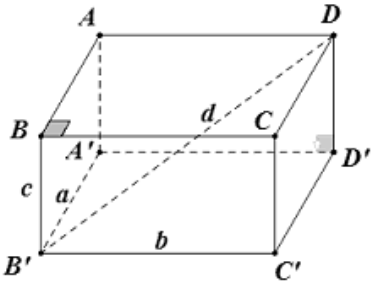




Thể tích khối hộp chữ nhật: $\boxed{V = a.b.c}$

Thể tích khối lập phương: $\boxed{V = a^3}$





* ***Chú ý:***

- *Đường chéo của hình vuông cạnh a là $a\sqrt{2}$*
- *Đường chéo của hình lập phương cạnh a là : $a\sqrt{3}$*
- *Đường chéo của hình hộp chữ nhật có 3 kích thước a, b, c là : $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$*
- *Đường cao của tam giác đều cạnh a là: $\frac{a\sqrt{3}}{2}$*

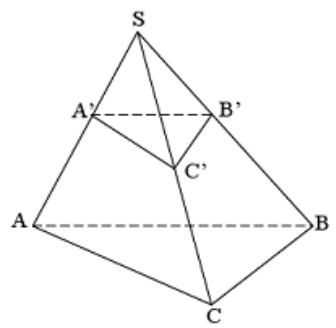
Tỉ số thể tích:

$$\boxed{\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}}$$

Hình chóp cụt $ABC.A'B'C'$

$$\boxed{V = \frac{h}{3}\left(B + B' + \sqrt{BB'}\right)}$$

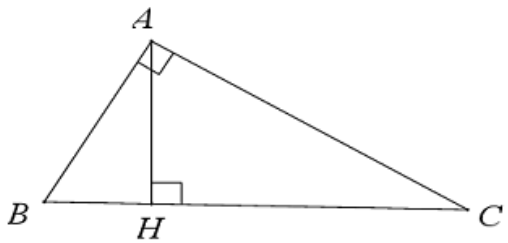
Với B, B', h là diện tích hai đáy và chiều cao.



CÁC CÔNG THỨC HÌNH PHẲNG

1. Hệ thức lượng trong tam giác

a) Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH.



- $AB^2 + AC^2 = BC^2$
- $AB^2 = BH.BC$
- $AC^2 = CH.BC$
- $AH.BC = AB.AC$
- $AH^2 = BH.HC$
- $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$
- $AB = BC.\sin C = BC.\cos B = AC.\tan C = AC.\cot B$

b) Cho ΔABC có độ dài ba cạnh là: *a, b, c độ dài các trung tuyến là* m_a, m_b, m_c *bán kính đường tròn ngoại tiếp R; bán kính đường tròn nội tiếp r nửa chu vi p.*

- Định lí hàm số cosin:

  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A;\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca.\cos B;\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$

- Định lí hàm số sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$
- Độ dài trung tuyến: $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4};\ m_b^2 = \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4};\ m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$

2. Các công thức tính diện tích

a) Tam giác:

- $S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c$
- $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca.\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$
- $S = \frac{abc}{4R}$
- $S = pr$
- CT He-ron: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
- ΔABC *vuông tại A*: $S = \frac{AB.AC}{2} = \frac{BC.AH}{2}$
- ΔABC *đều, cạnh a*: $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

b) Hình vuông: $S = a^2$ *(a: cạnh hình vuông)*

c) Hình chữ nhật: $S = ab$ *(a, b: hai kích thước)*

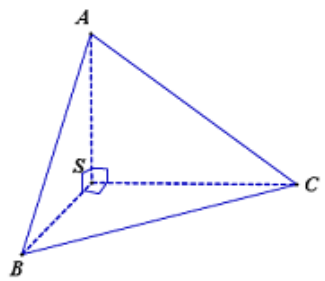
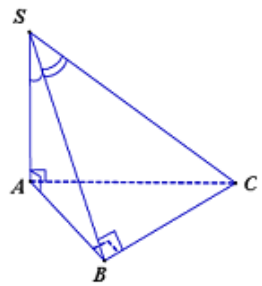
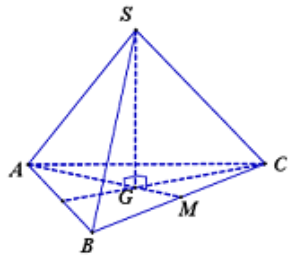
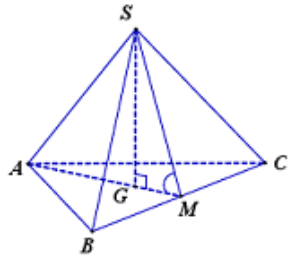
d) Hình bình hành: $S = \text{đáy} \times \text{cao} = AB.AD.\sin BAD$

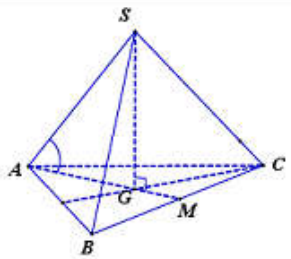
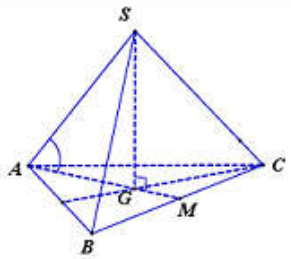
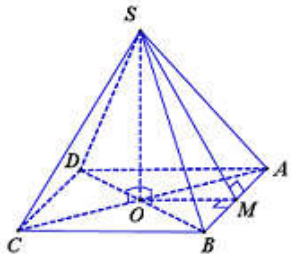
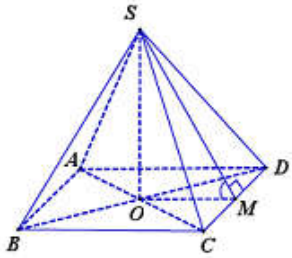
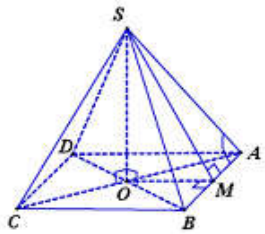
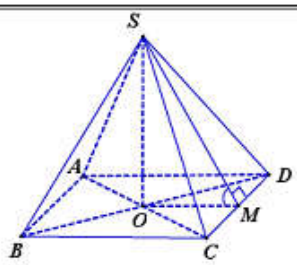
e) Hình thoi: $S = AB.AD.\sin BAD = \frac{1}{2}AC.BD$

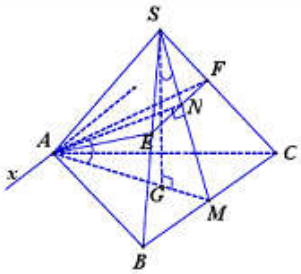
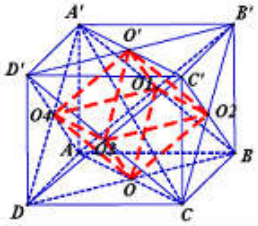
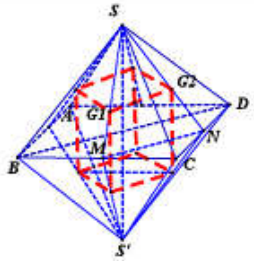
f) Hình thang: $S = \frac{1}{2}(a+b)h$ *(a, b: hai đáy, h: chiều cao)*

g) Tứ giác có hai đường chéo vuông góc: $S = \frac{1}{2}AC.BD$

MỘT SỐ CÔNG THỨC TÍNH NHANH THỂ TÍCH KHỐI CHÓP THƯỜNG GẶP

TÍNH CHẤT	HÌNH VẼ
Cho hình chóp $SABC$ với các mặt phẳng $(SAB),(SBC),(SAC)$ vuông góc với nhau từng đôi một, diện tích các tam giác SAB, SBC, SAC lần lượt là S_1, S_2, S_3. Khi đó: $V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{2S_1.S_2.S_3}}{3}$	
Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với (ABC), hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau, $BSC = \alpha, ASB = \beta$. Khi đó: $V_{S.ABC} = \frac{SB^3.\sin 2\alpha.\tan\beta}{12}$	
Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, cạnh bên bằng b. Khi đó: $V_{S.ABC} = \frac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{12}$	
Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và mặt bên tạo với mặt phẳng đáy góc α. Khi đó: $V_{S.ABC} = \frac{a^3\tan\alpha}{24}$	

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh bên bằng b và cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy góc β. Khi đó: $V_{S.ABC} = \dfrac{\sqrt{3}b^3.\sin\beta\cos^2\beta}{4}$	
Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh đáy bằng a, cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy góc β. Khi đó: $V_{S.ABC} = \dfrac{a^3.\tan\beta}{12}$	
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, và $SA = SB = SC = SD = b$. Khi đó: $V_{S.ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{4b^2-2a^2}}{6}$	
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc tạo bởi mặt bên và mặt phẳng đáy là α. Khi đó: $V_{S.ABCD} = \dfrac{a^3.\tan\alpha}{6}$	
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, $SAB = \alpha$, với $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$ Khi đó: $V_{S.ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{\tan^2\alpha-1}}{6}$	
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng a, góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy là α với $\alpha \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Khi đó: $V_{S.ABCD} = \dfrac{4a^3.\tan\alpha}{3\sqrt{\left(2+\tan^2\alpha\right)^3}}$	

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A song song với BC và vuông góc với (SBC), góc giữa (P) với mặt phẳng đáy là α. Khi đó: $V_{S.ABCD} = \dfrac{a^3 \cot\alpha}{24}$	
Khối tám mặt đều có đỉnh là tâm các mặt của hình lập phương cạnh a. Khi đó: $V = \dfrac{a^3}{6}$	
Cho khối tám mặt đều cạnh a. Nối tâm của các mặt bên ta được khối lập phương. Khi đó: $V = \dfrac{2a^3\sqrt{2}}{27}$	

CÁC CÔNG THỨC ĐẶC BIỆT THỂ TÍCH TỨ DIỆN (ĐTD):

ĐIỀU KIỆN TỨ DIỆN	CÔNG THỨC
$\begin{cases} SA = a, SB = b, SC = c \\ ASB = \alpha, BSC = \beta, CSA = \varphi \end{cases}$	$V_{S.ABC} = \dfrac{abc}{6}\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\varphi + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\varphi}$ *Công thức tính khi biết 3 cạnh, 3 góc ở đỉnh 1 tứ diện*
$\begin{cases} AB = a, CD = b \\ d(AB, CD) = d, (AB, CD) = \alpha \end{cases}$	$V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}abd\sin\alpha$ *Công thức tính khi biết 2 cạnh đối, khoảng cách và góc 2 cạnh đó*
$\begin{cases} S_{\Delta SAB} = S_1, S_{\Delta SAC} = S_2, SA = a \\ ((SAB), (SAC)) = \alpha \end{cases}$	$V_{SABC} = \dfrac{2S_1S_2\sin\alpha}{3a}$ *Công thức tính khi biết một cạnh, diện tích và góc giữa 2 mặt kề*
$\begin{cases} SA = a, SB = b, SC = c \\ ((SAB), (SAC)) = \alpha \\ ASB = \beta, ASC = \varphi \end{cases}$	$V_{S.ABC} = \dfrac{abc}{6}\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi$ *Công thức tính khi biết 3 cạnh, 2 góc ở đỉnh và 1 góc nhị diện*
Tứ diện đều tất cả các cạnh bằng a	$V_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$
Tứ diện gần đều $\begin{cases} AB = CD = a \\ AC = BD = b \\ AD = BC = c \end{cases}$	$V_{ABCD} = \dfrac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)}$