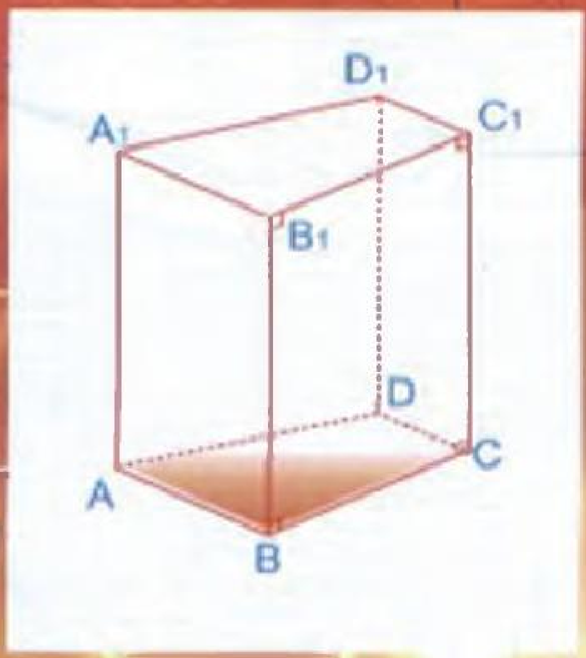
NGUYỄN ĐỨC TẤN - NGUYỄN ANH HOÀNG - LƯƠNG ANH VĂN
BÙI RUY TÂN - TRƯƠNG ĐỨC LONG - VŨ ĐỨC ĐOÀN

LỜI GIẢI ĐỀ THI

TOÁN 8

BỒI DƯỠNG HỌC SINH KHÁ GIỎI

(Tái bản lần thứ hai có bổ sung)



NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH

A. CÁC BỘ ĐỀ TOÁN

BỘ ĐỀ 1

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN 6, TPHCM – NĂM HỌC 1990 – 1991

Bài 1: Cho đa thức $P(x) = 2x^4 - 7x^3 - 2x^2 + 13x + 6$

1) Phân tích P(x) thành nhân tử.
2) Chứng minh rằng: $P(x) \vdots 6$ với mọi $x \in Z$.

Bài 2: Cho hình bình hành ABCD (AC > BD). Vẽ $CE \perp AB$ và $CF \perp AD$.

Chứng minh rằng: $AB.AE + AD.AF = AC^2$

Bài 3: Cho phân thức $F(x) = \dfrac{x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2}{x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2}$

1) Rút gọn phân thức.
2) Xác định x để phân thức có giá trị nhỏ nhất.

Bài 4: Cho tam giác vuông ABC, cạnh huyền BC = 289 và đường cao AH = 120. Tính hai cạnh AB và AC.

Bài 5: Cho ba số dương a, b, c.

1) Chứng minh: $(a + b + c)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) \geq 9$
2) Giải phương trình: $\dfrac{a + b - x}{c} + \dfrac{b + c - x}{a} + \dfrac{c + a - x}{b} + \dfrac{4x}{a + b + c} = 1$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $P(x) = 2x^4 - 7x^3 - 2x^2 + 13x + 6$

$= 2x^4 - 6x^3 - x^3 + 3x^2 - 5x^2 + 15x - 2x + 6$

$= 2x^3(x - 3) - x^2(x - 3) - 5x(x - 3) - 2(x - 3)$

$= (x - 3)(2x^3 - x^2 - 5x - 2) = (x - 3)(2x^3 - 4x^2 + 3x^2 - 6x + x - 2)$

$= (x - 3)[2x^2(x - 2) + 3x(x - 2) + (x - 2)]$

$= (x - 3)(x - 2)(2x^2 + 3x + 1) = (x - 3)(x - 2)(2x^2 + 2x + x + 1)$

$= (x - 3)(x - 2)[2x(x + 1) + (x + 1)] = (x - 3)(x - 2)(x + 1)(2x + 1)$

2) $P = (x - 3)(x - 2)(x + 1)(2x + 1) = (x - 3)(x - 2)(x + 1)(2x - 2 + 3)$

$= 3(x - 3)(x - 2)(x + 1) + 2(x - 3)(x - 2)(x + 1)(x - 1)$

chia hết cho 6. Vì x – 3, x – 2 là hai số nguyên liên tiếp nên có một số chia hết cho 2.

$\Rightarrow (x - 3)(x - 2)(x + 1) \vdots 2 \Rightarrow 3(x - 3)(x - 2)(x + 1) \vdots 6$

Và x – 3, x – 2, x – 1 là ba số nguyên liên tiếp nên có một số chia hết cho 2, một số chia hết cho 3 mà ước chung lớn nhất (2; 3) = 1; 2.3 = 6

$\Rightarrow (x-3)(x-2)(x-1) \vdots 6$

Vậy $P \vdots 6$ với mọi $x \in Z$

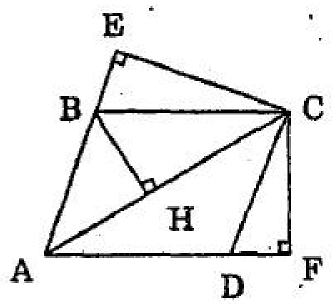
Bài 2: Vẽ $BH \perp AC$ ($H \in AC$)

Xét ΔABH và ΔACE có: $\widehat{ABH} = \widehat{AEC} = 90^0$

$\widehat{BAH}$ chung

Vậy $\Delta ABH \backsim \Delta ACE$ (g–g)

Cho ta $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AH}{AE}$ hay $AB.AE = AC.AH$ (1)



Xét ΔCBH và ΔACF có

$\widehat{BAH} = \widehat{CAF}$ (2 góc so le trong có BC // AD)

$\widehat{CHB} = \widehat{CFA} = 90^0$

Vậy $\Delta CBH \backsim \Delta ACF$ (g–g)

Cho ta $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{CH}{AF}$ hay $BC.AF = AC.CH$ (2)

Cộng vế theo vế (1) và (2) ta được:

$AB.AE + BC.AF = AC.AH + AC.CH$

$AB.AE + AD.AF = AC.(AH + CH) = AC^2$

Bài 3: $F(x) = \dfrac{x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2}{x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2}$

1) Ta có: $x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2 = x^4 + x^3 + x^2 - 2x^2 - 2x - 2$

$= x^2(x^2 + x + 1) - 2(x^2 + x + 1)$

$= (x^2 - 2)(x^2 + x + 1)$

$= x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$

$= x^4 - 2x^2 + 2x^3 - 4x + x^2 - 2$

$= x^2(x^2 - 2) + 2x(x^2 - 2) + x^2 - 2$

$= (x^2 - 2)(x^2 + 2x + 1) = (x^2 - 2)(x + 1)^2$

2) $F(x) = \dfrac{(x^2 - 2)(x^2 + x + 1)}{(x^2 - 2)(x + 1)^2}$ $(x \in Z, x \neq -1)$

$$= \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 1 - x - 1 + 1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2} - \frac{x+1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{3}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy F(x) đạt giá trị nhỏ nhất là $\dfrac{3}{4} \Leftrightarrow x = 1$.

Bài 4: Gọi x, y lần lượt là độ dài các cạnh AB, AC. Giả sử $x \geq y$.

Theo đầu bài ta có: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 289^2 \\ x.y = 289.120 \end{cases}$

Do đó: $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 289^2 + 2.289.120 \\ x^2 - 2xy + y^2 = 289^2 - 2.289.120 \end{cases}$

$\begin{cases} (x + y)^2 = 289(289 + 240) \\ (x - y)^2 = 289(289 - 240) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x + y)^2 = 289.259 \\ (x - y)^2 = 289.49 \end{cases}$

$\begin{cases} (x + y)^2 = 17^2.23^2 \\ (x - y)^2 = 17^2.7^2 \end{cases}$ nên $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 17.29 \\ x - y = 17.7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{17.(23+7)}{2} \\ y = \dfrac{17.(23-7)}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 255 \\ y = 136 \end{cases}$

Vậy cạnh AB là 255, cạnh AC là 136 hoặc AB là 136 và AC là 255.

Chú ý: Có thể giải như sau:

Gọi độ dài cạnh AB là x, ta có độ dài cạnh AC là $\dfrac{289.120}{x} = \dfrac{8670}{x}$

Theo định lý Pytago ta có: $x^2 + \left(\dfrac{8670}{x}\right)^2 = 289^2$

Bài 5: 1) Ta chứng minh bất đẳng thức sau $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \Leftrightarrow (x, y > 0)$ (*)

$\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$

$(a + b + c)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) = 3\ \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{a}{c} + \dfrac{c}{a}$

Ta có: $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2, \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{b} \geq 2, \dfrac{a}{c} + \dfrac{c}{a} \geq 2$ (a, b, c, > 0)

Vậy: $3 + \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{a}{c} + \dfrac{c}{a} \geq 3 + 2 + 2 + 2$

$3 + \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{a}{c} + \dfrac{c}{a} \geq 9$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Ta có: $(a + b + c)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) \geq (a, b, c > 0)$

2) $\dfrac{a+b-x}{c} + \dfrac{b+c-x}{a} + \dfrac{c+a-x}{b} + \dfrac{4x}{a+b+c} = 1$

$$\frac{a+b-x}{c}+1+\frac{b+c-x}{a}+1+\frac{c+a-x}{b}+1+\frac{4x}{a+b+c}+1=5$$

$$\frac{a+b+c-x}{c}+\frac{a+b+c-x}{a}+\frac{a+b+c-x}{b}+\frac{4x+a+b+c}{a+b+c}-5=0$$

$$\frac{a+b+c-x}{c}+\frac{a+b+c-x}{a}+\frac{a+b+c-x}{b}-\frac{4(a+b+c-x)}{a+b+c}=0$$

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{4}{a+b+c}\right)=0 \qquad (1)$$

Đặt $A=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{4}{a+b+c}$

Ta có: $(a+b+c).A=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{4}{a+b+c}\right)$ $(a, b, c > 0)$

Đặt $(a+b+c).A=B$

Ta có: $B=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-4$

mà $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$ $(a, b, c > 0)$

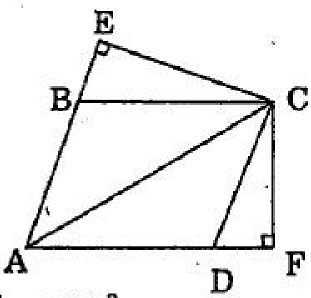
nên $B=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-4\geq 5>0$

Do đó: $A > 0$. Vậy phương trình (1) có một nghiệm duy nhất là

$x=a+b+c$

***Nhận xét*: Bài 2** có cách giải khác không cần vẽ thêm đường phụ BH.

Áp dụng định lý Pytago vào các tam giác vuông *AEC và AFC.*



Ta có: $AE^2+EC^2=AC^2$; $AF^2+CF^2=AC^2$

$\Rightarrow AF^2+FC^2+AE^2+EC^2=2AC^2$

$\Rightarrow (AD+DF)^2+FC^2+(AB+BE)^2+EC^2=2AC^2$

$\Rightarrow AD^2+2AD.DF+DF^2+FC^2+AB^2+2AB.BE+BE^2+EC^2=2AC^2$

$\Rightarrow AB^2+2AB.BE+BC^2+DC^2+AB.DF+AD^2+BC^2=2AC^2$

$\Rightarrow AB^2+2AB.BE+AD^2+AB^2+2AD.DF+AD^2=2AC^2$

$\Rightarrow 2AB^2+2AB.BE+2AD^2+2AD.DF=2AC^2$

$\Rightarrow 2(AB^2+AB.BE+AD^2+AD.DF)=2AC^2$

$\Rightarrow AB(AB+BE)+AD(AD+DF)=AC^2$

$\Rightarrow AB.AE+AD.AF=AC^2$

Bài 5: Từ bất đẳng thức ở câu 1 ta có thể chứng minh bất đẳng thức Nesbit sau đây:

Cho a, b, c là ba số dương. Chứng minh rằng $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$

Ta có thể phát biểu bài toán trên dưới dạng bài toán cực trị trong hình học.

Gọi a, b, c là số đo ba cạnh của tam giác ABC. Tam giác là tam giác gì để tổng $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

Hướng dẫn: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}+1+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}+1+1+1$

$\Leftrightarrow \frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b} \geq \frac{9}{2}$

$\Leftrightarrow 2(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) \geq 9$

$\Leftrightarrow [(b+c)+(c+a)+(a+b)]\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) \geq 9$ (bất đẳng đúng).

BỘ ĐỀ 2

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI GIẢI THƯỞNG LÊ QUÝ ĐÔN
QUẬN TÂN BÌNH, TPHCM – NĂM HỌC 1989 – 1990

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử

1) $a(x^2+1) - x(a^2+1)$ 2) $x - 1 + x^{n+3} - x^n$

Bài 2:

1) Thực hiện phép tính: $\left(\frac{x}{y^2 - xy}+\frac{y}{x^2 - xy}\right):\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2y + xy^2}\right)$

2) Rút gọn biểu thức: $\frac{|x|+|y|}{x+y}$

3) Tìm các giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức $\frac{x^2 - 3}{x-2}$ là số nguyên.

Bài 3: Cho hình vuông ABCD. Trên tia đối BA lấy một điểm E, trên tia đối của CB lấy một điểm F sao cho AE = CF.

1) Chứng minh tam giác EDF vuông cân.

2) Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD, gọi I là trung điểm EF. Chứng minh O, C, I thẳng hàng.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $a(x^2+1) - x(a^2+1) = ax^2 + a - a^2x - x = ax^2 - a^2 + a - x$
$= ax(x-a) + (a-x) = ax(x-a) - (x-a) = (x-a)(ax-1)$

2) $x - 1 + x^{n+3} - x^n = x - 1 + x^n(x^3-1) = x - 1 + x^n(x-1)(x^2+x+1)$
$= (x-1)(1 + x^{n+2} + x^{n+1} + x^n) = (x-1)(x^{n+2} + x^{n+1} + x^n + 1)$

Bài 2:

1) Đặt $A = \left(\dfrac{x}{y^2 - xy} + \dfrac{y}{x^2 - xy}\right) : \left(\dfrac{x^2 - y^2}{x^2y + xy^2}\right)$

Điều kiện để biểu thức A có nghĩa là:

$$\begin{cases} y^2 - xy \neq 0 \\ x^2 - xy \neq 0 \\ x^2 - y^2 \neq 0 \\ x^2y + xy^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(y - x) \neq 0 \\ x(x - y) \neq 0 \\ (x - y)(x + y) \neq 0 \\ xy(x + y) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 0, y \neq 0, x \neq y, x \neq -y$$

Ta có: $A = \left[\dfrac{x}{y(y - x)} + \dfrac{y}{x(x - y)}\right] : \dfrac{(x - y)(x + y)}{xy(x + y)} = \left[\dfrac{x^2 - y^2}{xy(y - x)}\right] : \dfrac{x - y}{xy}$

$$= \frac{(x - y)(x + y)xy}{xy(y - x)(x - y)} = -\frac{x + y}{x - y}$$

2) Đặt $B = \dfrac{|x| + |y|}{x + y}$

Điều kiện để biểu thức B có nghĩa là $x \neq -y$.

Nếu $x \geq 0$, $y \geq 0$ và x, y không đồng thời bằng không, ta có

$$B = \frac{x + y}{x + y} = 1$$

Nếu $x \geq 0$, $y \leq 0$ và $x \neq -y$, ta có $B = \dfrac{x - y}{x + y}$

Nếu $x \leq 0$, $y \geq 0$ và $x \neq -y$, ta có $B = \dfrac{y - x}{x + y}$

Nếu $x \leq 0$, $y \geq 0$ và x, y không đồng thời bằng không, ta có

$$B = \frac{-x - y}{x + y} = -1$$

3) Đặt $C = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2}$

Điều kiện để biểu thức C có nghĩa là $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ (*)

Ta có: $C = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2} = \dfrac{x^2 - 4 + 1}{x - 2} = \dfrac{(x - 2)(x + 2) + 1}{x - 2} = x + 2 + \dfrac{1}{x - 2}$

Biểu thức C có giá trị nguyên khi $x - 2$ là ước của 1.

Suy ra $x - 2 = 1$ hoặc $x - 2 = -1$. Do đó $x = 3$ hoặc $x = 1$

Cả hai giá trị trên đều thỏa điều kiện (*) nên nhận được.

Bài 3: 1) Chứng minh tam giác EDF vuông cân.

Xét hai tam giác vuông ADE và FCD

$\widehat{EAD} = \widehat{FCD} = 90^0$

AD = DC (ABCD là hình vuông)

AE = CF (giả thiết)

Vậy $\Delta AED = \Delta CFD$ (c–g–c)

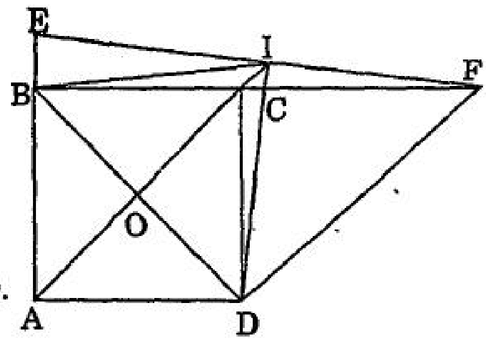
Suy ra $\widehat{ADE} = \widehat{CDF}$

Mà $\widehat{ADE} + \widehat{CDF} = \widehat{ADC} = 90^0$

Nên $\widehat{CDF} + \widehat{CDE} = \widehat{EDF} = 90^0$

mặt khác ED = DF ($\Delta AED = \Delta CFD$)

suy ra tam giác EDF vuông cân tại D.



2) Chứng minh O, C, I thẳng hàng.

Áp dụng tính chất trung tuyến ứng với cạnh huyền vào các tam giác vuông ABF và DEF, ta có:

$$IB = ID = \frac{1}{2} EF$$

mà CB = CD (ABCD là hình vuông)

và OB = OD (tính chất đường chéo hình vuông)

nên ba điểm I, C, O nằm trên đường trung trực của đoạn BD.

Suy ra ba điểm I, C, O thẳng hàng.

BỘ ĐỀ 3

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI GIẢI THƯỞNG LÊ QUÝ ĐÔN QUẬN TÂN BÌNH, TPHCM – NĂM HỌC 1990 – 1991

Bài 1:

1) Giải phương trình $(3x - 1)(x + 1) = 2(9x^2 - 6x + 1)$

2) Giải bất phương trình $\frac{x-1}{2} \geq \frac{4+x}{2} - 3$

Bài 2: Tính số trị của biểu thức sau: $\frac{2a-b}{3a-b} + \frac{5b-a}{3a+b}$

Biết $10a^2 - 3b^2 + 5ab = 0$ và $9a^2 - b^2 \neq 0$

Bài 3: Cho biểu thức $P = \frac{x^4 + x^3 + x + 1}{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1}$

1) Tìm các giá trị thích hợp của các biến số trong biểu thức P.

2) Rút gọn P.

3) Với giá trị nào của x thì biểu thức P (sau khi rút gọn) có giá trị bằng 2.

Bài 4:

1) Cho hình thang ABCD (BC//AD) với các góc $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACD}$ bằng nhau. Tính độ dài đường chéo AC, biết rằng hai đáy BC và AD theo thứ tự có độ dài 12m và 27m.

2) Cho tam giác ABC, M là trung điểm của cạnh BC. Từ một điểm E trên cạnh BC ta kẻ đường Ex//AM. Ex cắt tia CA ở F và tia BA ở G, chứng minh EF + EG = 2AM.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: 1) $(3x-1)(x+1) = 2(9x^2 - 6x + 1)$

$\Leftrightarrow (3x-1)(x+1) = 2(3x-1)^2 \Leftrightarrow (3x-1)(x+1) - 2(3x-1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (3x-1)(x+1-6x+2) = 0 \Leftrightarrow (3x-1)(-5x+3) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - 1 = 0 \\ -5x + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{3} \\ x = \dfrac{3}{5} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm số là $x_1 = \dfrac{1}{3}$, $x_2 = \dfrac{3}{5}$

2) $\dfrac{x-1}{2} \geq \dfrac{4+x}{2} - 3 \Leftrightarrow x - 1 \geq 4 + x - 6 \Leftrightarrow 0x \geq -1$

Suy ra x tùy ý.

Bài 2: Đặt $A = \dfrac{2a-b}{3a-b} + \dfrac{5b-a}{3a+b}$ $(9a^2 - b^2 \neq 0)$

Ta có: $A = \dfrac{6a^2 + 2ab - 3ab - b^2 + 15ab - 5b^2 - 3a^2 + ab}{9a^2 - b^2}$

$= \dfrac{3a^2 + 15ab - 6b^2}{9a^2 - b^2} = \dfrac{3a^2 + 3(3b^2 - 10a^2) - 6b^2}{9a^2 - b^2}$

(Từ điều kiện $10a^2 - 3b^2 + 5ab = 0$ suy ra $5ab = 3b^2 - 10a^2$)

$= \dfrac{3a^2 + 9b^2 - 30a^2 - 6b^2}{9a^2 - b^2} = \dfrac{-27a^2 + 3b^2}{9a^2 - b^2} = \dfrac{-3(9a^2 - b^2)}{9a^2 - b^2} = -3$

Bài 3: $P = \dfrac{x^4 + x^3 + x + 1}{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1}$

1) Ta có $x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1 = x^4 - x^3 + x^2 + x^2 - x + 1$

$= x^2(x^2 - x - 1) + (x^2 - x + 1) = (x^2 + 1)(x^2 - x + 1)$

$= (x^2 + 1)(x^2 - x + \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}) = (x^2 + 1)\left[\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}\right] > 0 \ \forall x$

Vậy biểu thức P có nghĩa với mọi giá trị của biến số x.

2) $x^4 + x^3 + x + 1 = x^3(x+1) + (x+1) = (x^3+1)(x+1)$

$= (x+1)^2(x^2 - x + 1)$

Vậy $P = \dfrac{(x+1)^2(x^2 - x + 1)}{(x^2+1)(x^2 - x + 1)} = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$

3) $P = 2 \Leftrightarrow \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 2x^2 + 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy với x = 1 thì biểu thức P có giá trị bằng 2.

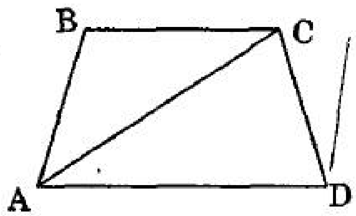
Bài 4:

1) Xét ΔABC và ΔACD ta có:

$\widehat{ABC} = \widehat{ACD}$ (giả thiết)

$\widehat{ACB} = \widehat{CAD}$ (cặp góc so le trong BC // AD)

Vậy $\Delta ABC \backsim \Delta DCA$ (g–g)



Suy ra $\dfrac{AC}{DA} = \dfrac{BC}{CA}$

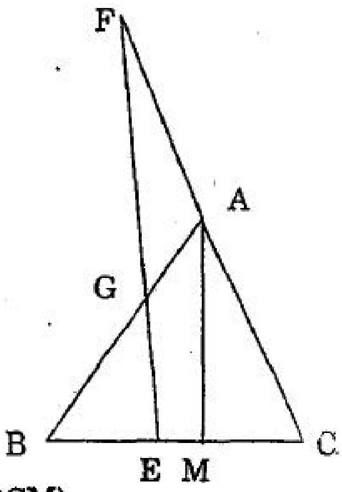
Hay $AC^2 = AD.BC$

$AC^2 = 27.12 \Rightarrow AC^2 = 384$

$\Rightarrow AC^2 = 18^2 \Rightarrow AC = 18$ (m)

2) Xét ΔEFC, ta có EF // AM (giả thiết)

Suy ra $\dfrac{EF}{AM} = \dfrac{EC}{CM}$ (1) (hệ quả định lý Talet)



Xét ΔABM, ta có EG // AM (giả thiết)

Suy ra $\dfrac{EG}{AM} = \dfrac{BE}{BM}$ (hệ quả định lý Talet)

Mà BM = CM (M là trung điểm BC)

Nên $\dfrac{EG}{AM} = \dfrac{BE}{CM}$ (2)

Cộng vế theo vế các hệ thức (1) và (2) ta có: $\dfrac{EF}{AM} + \dfrac{EG}{AM} = \dfrac{EC}{CM} + \dfrac{BE}{CM}$

hay $\dfrac{EF + EG}{AM} = \dfrac{BC}{CM} = 2$ (vì BE + EC = BC; BC = 2CM)

suy ra EF + EG = 2AM.

BỘ ĐỀ 4

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI GIẢI THƯỞNG LÊ QUÝ ĐÔN QUẬN TÂN BÌNH, TPHCM – NĂM HỌC 1991 – 1992

Bài 1:

1) Rút gọn biểu thức sau: $B = \dfrac{4a^2 + 12a + 9}{2a^2 - a - 6}$

2) Thực hiện phép tính: $\dfrac{0,5a^2 + a + 2}{1 + 0,5a} : \dfrac{a^3 - 8}{a + 2} + \dfrac{2}{a(2 - a)}$

Bài 2:

1) Giải bất phương trình: $(x - 2)(x + 1) < 0$

2) Giải phương trình: $x^2 + 2x + 2|x + 1| - 2 = 0$

Bài 3: Cho biểu thức $A = x^2 + 6x + 15$

1) Chứng minh A luôn luôn dương với mọi x.
2) Với giá trị nào của x thì A có giá trị nhỏ nhất hay lớn nhất, tìm giá trị nhỏ nhất hay lớn nhất đó.

Bài 4:

1) Cho tứ giác ABCD, gọi M, N là trung điểm hai cạnh đối diện BC và AD. Cho biết $MN = \frac{AB + DC}{2}$. Chứng minh tứ giác ABCD là hình thang.
2) Cho hình bình hành ABCD, trên đường chéo AC lấy một điểm I. Tia DI cắt đường thẳng AB tại M, cắt đường thẳng BC tại N.

Chứng minh: a) $\frac{AM}{AB} = \frac{DM}{DN} = \frac{CB}{CN}$; b) $ID^2 = IM.IN$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $B = \frac{4a^2 + 12a + 9}{2a^2 - a - 6}$

Điều kiện để biểu thức B có nghĩa là:

$2a^2 - a - 6 \neq 0 \Leftrightarrow 2a^2 - 4a + 3a - 6 \neq 0 \Leftrightarrow 2a(a - 2) + 3(a - 2) \neq 0$

$\Leftrightarrow (2a + 3)(a - 2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3 \neq 0 \\ a - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -\frac{3}{2} \\ a \neq 2 \end{cases}$

Ta có: $B = \frac{4a^2 + 12a + 9}{2a^2 - a - 6}\ (a \neq -\frac{3}{2}, a \neq 2) = \frac{(2a + 3)^2}{(2a + 3)(a - 2)} = \frac{2a + 3}{a - 2}$

2) Đặt $A = \frac{0{,}5a^2 + a + 2}{1 + 0{,}5a} : \frac{a^3 - 8}{a + 2} + \frac{2}{a(2 - a)}$

Điều kiện để biểu thức A có nghĩa là:

$\begin{cases} 1 + 0{,}5a \neq 0 \\ a^3 - 8 \neq 0 \\ a(2 - a) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -2 \\ (a - 2)(a^2 + 2a + 4) \neq 0 \\ a \neq 0 \text{ và } a \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow a \neq 0, a \neq 2, a \neq -2$

$(a^2 + 2a + 4 = (a + 1)^2 + 3 > 0)$

Ta có: $A = \frac{a^2 + 2a + 4}{a + 2} : \frac{(a - 2)(a^2 + 2a + 4)}{a + 2} + \frac{2}{a(2 - a)}\ (a \neq 0, a \neq \pm 2)$

$= \frac{(a^2 + 2a + 4)(a + 2)}{(a + 2)(a - 2)(a^2 + 2a + 4)} + \frac{2}{a(2 - a)}$

$= \frac{1}{a - 2} - \frac{2}{a(a - 2)} = \frac{a - 2}{a(a - 2)} = \frac{1}{a}$

Bài 2:

1) $(x-2)(x+1)<0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2<0 \\ x+1>0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x-2>0 \\ x+1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ x>1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x>2 \\ x<1 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x<2$

2) $x^2+2x+2|x+1|-2=0$ (1)

$\Leftrightarrow x^2+2x+1+2|x+1|-3=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+2|x+1|-3=0$

Đặt $t=|x+1|$ $(t \geq 0)$.

Phương trình trên trở thành:

$t^2+2t-3 \Leftrightarrow t^2-t+3t-3=0 \Leftrightarrow t(t-1)+3(t-1)=0$

$\Leftrightarrow (t-1)(t+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t-1=0 \\ t+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \text{ (nhận)} \\ t=3 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow t=1$

Với $t=1 \Rightarrow |x+1|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=1 \\ x+1=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm số là $x_1=0$, $x_2=-2$.

Bài 3: 1) $A=x^2+6x+15=x^2+6x+9+6=(x+3)^2+6 \geq 6$

(Vì $(x+3)^2 \geq 0$ với mọi x)

suy ra $A>0$ với mọi x.

2) Ta có $A \geq 6$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$

Vậy A đạt giá trị nhỏ nhất bằng $6 \Leftrightarrow x=-3$

Biểu thức A không có giá trị lớn nhất.

Bài 4:

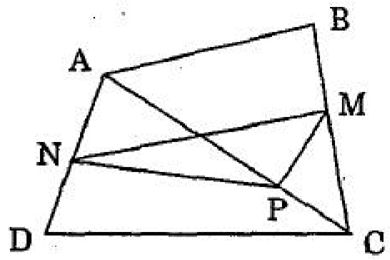
1) Gọi P là trung điểm của AC

Ta có: N là trung điểm của AD

Suy ra NP là đường trung bình của tam giác ADC.

Cho ta NP // DC và $NP=\frac{1}{2}DC$

Chứng minh tương tự ta có MP là đường trung bình của tam giác ABC, cho ta MP//AB và $MP=\frac{1}{2}AB$.



Ta có $MP+NP=\frac{AB+DC}{2}$

mà $MN=\frac{AB+CD}{2}$ (giả thiết)

nên $MN=MP+NP$

Suy ra ba điểm M, N, P thẳng hàng.

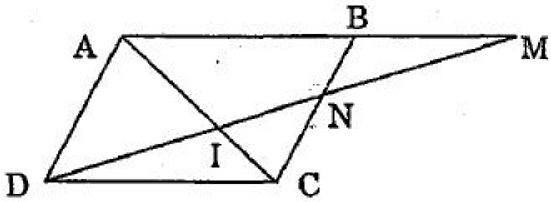
Từ NP // DC suy ra MP // DC mà MP // AB nên AB // CD

Vậy tứ giác ABCD là hình thang.

2) a/ Áp dụng hệ quả định lý Talet vào tam giác BMN với BM // DC ta có:

$\frac{MN}{ND} = \frac{BN}{NC} \Rightarrow \frac{MN + ND}{ND} = \frac{BN + NC}{NC}$ (tính chất tỉ lệ thức)

$\frac{MD}{NB} = \frac{BC}{NC}$ (1)



Áp dụng định lý Talet vào tam giác MAD

với BN // AD ta có: $\frac{AM}{AB} = \frac{DM}{DN}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AM}{AB} = \frac{DM}{DN} = \frac{CB}{CN}$

b/ Áp dụng hệ quả định lý Talet vào tam giác ADI với AD // NC

ta có: $\frac{ID}{IN} = \frac{IA}{IC}$ (1)

Áp dụng hệ quả định lý Talet vào tam giác DIC với DC // AM

ta có: $\frac{IM}{ID} = \frac{IA}{IC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{ID}{IN} = \frac{IM}{ID}$ hay $ID^2 = IM.IN$

BỘ ĐỀ 5

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN 6, TPHCM – NĂM HỌC 1991 – 1992

Bài 1:

Cho a, b, c là số đo ba cạnh của một tam giác, chứng minh rằng:

$a^2b + b^2c + c^2a + ca^2 + bc^2 + ab^2 - a^3 - b^3 - c^3 > 0$

Bài 2: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $A = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2}$

Bài 3: Giải phương trình: $|x - 1| + |2x + 3| = |x| + 4$

Bài 4: Cho hình thoi ABCD có góc B tù. Kẻ BM và BN lần lượt vuông góc các cạnh AD và CD tại M và N. Biết rằng $\frac{MN}{DB} = \frac{1}{2}$

Tính các góc của hình thoi ABCD.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: $a^2b + b^2c + c^2a + ca^2 + bc^2 + ab^2 - a^3 - b^3 - c^3 > 0$

Ta có a, b, c là số đo ba cạnh của một tam giác nên

$a + b - c > 0, b + c - a > 0, c + a - b > 0.$

$\Rightarrow c^2(a + b - c) > 0, a^2(b + c - a) > 0, b^2(c + a - b) > 0$

$\Rightarrow c^2(a + b - c) + a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) > 0$
$\Rightarrow c^2a + c^2b - c^3 + a^2b + a^2c - a^3 + b^2c + b^2a - b^3 > 0$
$\Rightarrow a^2b + b^2c + c^2a + ca^2 + ac^2 + ab^2 - a^3 - c^2 - b^2 > 0$

Bài 2: Ta có: $A = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2} = \dfrac{2x^2 + 4 - x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2} = 2 - \dfrac{(x-1)^2}{x^2 + 2} \le 2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy: max $A = 2 \Leftrightarrow x = 1$

Ta có:

$$A = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2} = \frac{2x^2 + 4x + 6}{2(x^2 + 2)} =$$

$$= \frac{x^2 + 2 + x^2 + 4x + 4}{2(x^2 + 2)} = \frac{1}{2} + \frac{(x+2)^2}{2(x^2+2)} \ge \frac{1}{2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Vậy min $A = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = -2$

Bài 3: $|x - 1| + |2x + 3| = |x| + 4$ (1)

- Với $x < -\dfrac{3}{2}$ phương trình (1) trở thành

  $1 - x - 2x - 3 = -x + 4 \Leftrightarrow 2x = -6 \Leftrightarrow x = -3$ (nhận).

- Với $-\dfrac{3}{2} \le x \le 0$ phương trình (1) trở thành

  $1 - x + 2x + 3 = -x + 4 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (nhận)

- Với $0 < x \le 1$ phương trình (1) trở thành

  $1 - x + 2x + 3 = x + 4 \Leftrightarrow 0x = 0 \Leftrightarrow x$ tùy ý.

  Phương trình có vô số nghiệm đó là các giá trị x thỏa $0 < x \le 1$

- Với $x > 1$ phương trình (1) trở thành

  $1 - x + 2x + 3 = x + 4 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$ (loại).

  Kết luận: phương trình (1) có các nghiệm là: $x = -3$, $0 \le x \le 1$

Bài 4: $\hat{B} > 90^0$ nên AC là đường chéo lớn.

Xét ΔBMD và ΔBND có: $\widehat{BMD} = \widehat{BND} = 90^0$ (giả thiết)

BD chung

$\widehat{BDM} = \widehat{BDN}$ (DB là phân giác của $\widehat{ADC}$)

Vậy $\Delta BMD = \Delta BND$ (cạnh huyền – góc nhọn)

Gọi I là trung điểm của đoạn BD. Theo tính chất trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông, ta có:

$IM = IN = IB = \dfrac{BD}{2}$

Mà $MN = \dfrac{BD}{2}$ nên $IM = IN = MN$

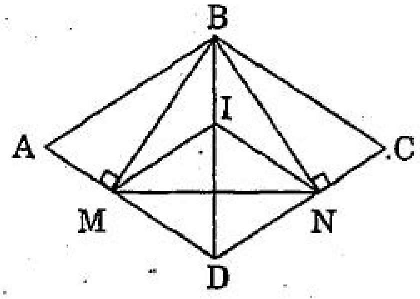
Suy ra ΔMIN đều

nên $\widehat{MIN} = 60^0$

mà IM = IN; DM = DN ($\Delta BMD = \Delta BND$)

nên ID là đường trung trực của ΔMIN.

Suy ra ID là tia phân giác của $\widehat{MIN}$



Cho ta $\widehat{MID} = \dfrac{\widehat{MIN}}{2} = \dfrac{60^0}{2} = 30^0$

ΔMIB cân tại I (IM = IB) nên IMB = IBM.

Mà $\widehat{MID} = \widehat{IMB} + \widehat{IBM}$ (tính chất góc ngoài tam giác)

$\widehat{MID} = 2\widehat{IBM} \Rightarrow \widehat{IBM} = \dfrac{\widehat{MID}}{2} = \dfrac{30^0}{2} = 15^0$

Suy ra $\widehat{MDB} = 90^0 - \widehat{IBM} = 90^0 - 15^0 = 75^0$

Cho ta $\widehat{ADC} = 2\widehat{MDB} = 2.75^0 = 150^0$

Suy ra $\widehat{A} = 180^0 - \widehat{ADC} = 180^0 - 150^0 = 30^0$

Do đó $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 150^0$, $\widehat{BCD} = \widehat{BAD} = 30^0$

BỘ ĐỀ 6

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI GIẢI THƯỞNG LÊ QUÝ ĐÔN QUẬN TÂN BÌNH, TPHCM – NĂM HỌC 1992 – 1993

Bài 1:

1) Biết a – b = 7. Tính giá trị của biểu thức sau:

$$a^2(a + 1) - b^2(b - 1) + ab - 3ab(a - b + 1)$$

2) Thực hiện phép tính bằng cách ngắn gọn nhất:

$$2\frac{7}{9}x^6 - \left(-1\frac{2}{3}x^3 - 6\right)^2$$

3) Thực hiện phép tính $\left(a + \dfrac{2}{1+0,5a}\right) : \dfrac{a^3-8}{a+2} + \dfrac{2}{2a-a^2}$

Bài 2: Giải phương trình: $(x - 2)(x + 2)(x^2 - 10) = 72$

Bài 3: Cho hình thang ABCD có độ dài hai đáy là AB = 5cm và CD = 15cm, độ dài hai đường chéo là AC = 16cm và BD = 12cm. Từ A vẽ đường thẳng song song với BD cắt CD tại E.

1) Chứng minh ACE là tam giác vuông tại A.

2) Tính diện tích hình thang ABCD.

Bài 4: Cho tam giác ABC, đường phân giác trong của C cắt cạnh AB tại D. Chứng minh $CD^2 < CA.CB$

Bài 5: Trong một bài kiểm tra toán bốn bạn An, Bảo, Cường, Đức được các điểm khác nhau từ 7 đến 10 nhưng không bạn nào nhớ chính xác điểm của mọi người. Hỏi điểm của từng bạn thì:

An trả lời: "Đức được 7, Bảo được 7, Cường được 9"

Bảo trả lời: "An được 8, Đức được 10, Cường được 8"

Cường trả lời: "An được 7, Đức được 7, Bảo được 7"

Đức trả lời: "An được 8, Cường được 8, Bảo được 8"

Biết rằng:

1) Không bạn nào được 2 bạn khác cùng nói đúng số điểm của mình.

2) Mỗi câu trả lời chỉ có một điểm đúng.

Hãy xem điểm của mỗi người là bao nhiêu?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $a^2(a+1) - b^2(b-1) + ab - 3ab(a-b+1)$

$= a^3 + a^2 - b^3 + b^2 + ab - 3a^2b + 3ab^2 - 3ab$

$= (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) + (a^2 - 2ab + b^2)$

$= (a-b)^3 + (a-b)^2$

$= (a-b)^2(a-b+1)$

$= 7^2.(7+1) = 49.8 = 392$

2) $2\frac{7}{9}x^6 - \left(-1\frac{2}{3}x^3 - 6\right)^2 = \frac{25}{9}x^6 - \left(-\frac{5}{3}x - 6\right)^2$

$= \left(\frac{5}{3}x^3\right)^2 - \left(-\frac{5}{3}x^3 - 6\right)^2 = -6\left(\frac{10}{3}x^3 + 6\right) = -20x^3 - 36$

3) Đặt $M = \left(a + \frac{2}{1+0,5a}\right) : \frac{a^3 - 8}{a+2} + \frac{2}{2a - a^2}$

Điều kiện để biểu thức M có nghĩa là:

$$\begin{cases} 1 + 0,5a \neq 0 \\ a^3 - 8 \neq 0 \\ a + 2 \neq 0 \\ 2a - a^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -2 \\ (a-2)(a^2 + 2a + 4) \neq 0 \\ a \neq -2 \\ a(2-a) \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -2 \\ a \neq 2 \text{ (vì } a^2 + 2a + 4 = (a+1)^2 + 3 > 0) \\ a \neq 0 \end{cases}$$

Ta có: $M = \left(a + \frac{4}{2+a}\right) : \frac{(a-2)(a^2+2a+4)}{a+2} + \frac{2}{a(2-a)}$ $(a \neq 0, a \neq \pm 2)$

$$= \frac{a^2 + 2a + 4}{2+a} . \frac{a+2}{(a-2)(a^2+2a+4)} + \frac{2}{a(2-a)} =$$

$$= \frac{1}{a-2} - \frac{2}{a(a-2)} = \frac{a-2}{a(a-2)} = \frac{1}{a}$$

Bài 2: *Cách 1:*

$(x-2)(x+2)(x^2-10)=72 \Leftrightarrow (x^2-4)(x^2-10)=72$ (1)

Đặt $t=x^2$ $(t \geq 0)$ phương trình (1) trở thành $(t-4)(t-10)=72$

$\Leftrightarrow t^2-10t-4t+40=72 \Leftrightarrow t^2-14t-32=0$

$\Leftrightarrow t^2-16t+2t-32=0$

$\Leftrightarrow t(t-16)+2(t-16)=0 \Leftrightarrow (t-16)(t+2)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t-16=0 \\ t+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=16 \text{ (nhận)} \\ t=-2 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow t=16$

Với $t=16 \Rightarrow x^2=16 \Leftrightarrow x^2-16=0 \Leftrightarrow (x-4)(x+4)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-4=0 \\ x+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-4 \end{array}\right.$

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm là $x_1=4$; $x_2=-4$

Cách 2: $(x-2)(x+2)(x^2-10)=72$

$\Leftrightarrow (x^2-4)(x^2-10)=72 \Leftrightarrow (x^2-7+3)(x^2-7-3)=72$

$\Leftrightarrow (x^2-7)^2-3^2=72$

$\Leftrightarrow (x^2-7)^2=72+3^2 \Leftrightarrow (x^2-7)^2=9^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-7=9 \\ x^2-7=-9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=16 \\ x^2=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 4 \\ x \in \phi \end{array}\right.$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x_1=4$; $x_2=-4$.

Bài 3:

1) Ta có AB // DE (AB // DC) và AE // BD (giả thiết).

Suy ra $AB = DE = 5$cm; $AE = BD = 12$cm.

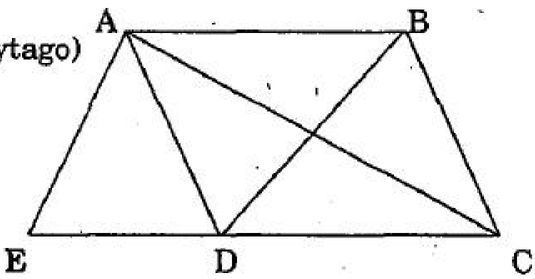
Ta có $CE = CD + DE = 15 + 5 = 20$cm

ΔAEC có $AE^2 + AC^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400$

$EC^2 = 20^2 = 400$

Suy ra $AE^2 + AC^2 = EC^2$

Vậy ΔAEC vuông tại A (định lý đảo Pytago)



2) ΔAED và ΔABC có $ED = AB$ và đường cao ứng với hai đáy ED và AB (hạ từ A xuống ED và từ C xuống AB) bằng nhau, và bằng đường cao của hình thang ABCE.

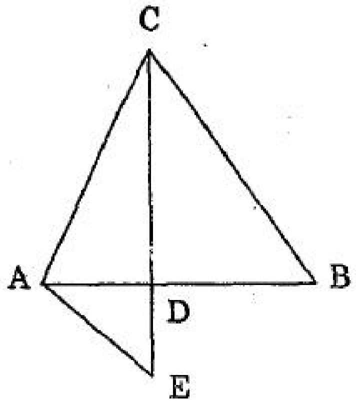
Suy ra: $S_{\Delta AED} = S_{\Delta ABC}$, $S_{\Delta AED} + S_{\Delta ADC} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ADC}$, $S_{\Delta AEC} = S_{ABCD}$

Mà: $S_{\Delta AEC} = \frac{1}{2} AE.AC = \frac{1}{2} 12.16 = 96$ (cm^2)

Vậy $S_{ABCD} = 96\text{cm}^2$.

Bài 4: *Cách 1:* $\widehat{BDC} > BAC$ (vì $\widehat{BDC}$ là góc ngoài của ΔADC), nên trên tia đối của tia DC có điểm E sao cho $\widehat{CAE} = \widehat{BDC}$.

Xét hai tam giác CAE và CDB có:



$\widehat{CAE} = \widehat{BDC}$ và $\widehat{ACE} = \widehat{BCB}$ (CD là phân giác)

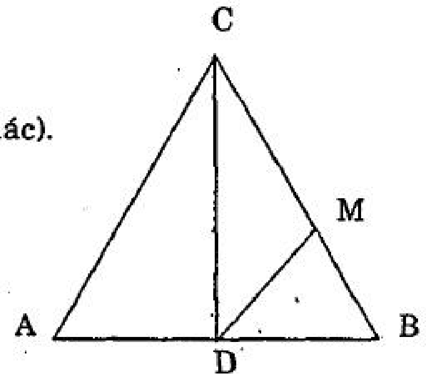
Vậy $\Delta CAE \backsim \Delta CDB$ (g–g)

Cho ta $\dfrac{CA}{CD} = \dfrac{CE}{CB}$ hay CD.CE = CA.CB

Do đó $CD^2 <$ CA.CB (Vì CD<CE).

Cách 2: $\widehat{CDB} > \widehat{CAD}$ ($\widehat{CDB}$ là góc ngoài của tam giác ADC).

Do đó tìm được điểm M trên cạnh BC sao cho $\widehat{CDM} = \widehat{CAD}$.



Ta có CM < CB (1)

Xét ΔADC và ΔDMC có:

$\widehat{CAD} = \widehat{CDM}$, $\widehat{ACD} = \widehat{DCM}$ (CD là phân giác).

Do đó $\Delta ADC \backsim \Delta DMC$ (g–g)

$\Rightarrow \dfrac{CA}{CD} = \dfrac{CD}{CM}$

$\Rightarrow CD^2 = CA.CM$ (2)

Từ (1) và (2) có $CD^2 < CA.CB$

Bài 5:

Theo giả thiết a, không bạn nào được hai bạn khác cùng nói đúng số điểm của mình, do đó dựa theo câu trả lời của bạn An và bạn Cường thì Đức được 7 điểm, Bảo được 7 điểm là sai, lại theo giả thiết b, mỗi câu trả lời chỉ có một điểm đúng, nên ta có Cường được 9 điểm, An được 7 điểm.

Tương tự, dựa vào câu trả lời của Bảo và Đức thì An được 8 điểm và Cường được 8 điểm là sai, do đó Đức được 10 điểm, Bảo được 8 điểm là đúng.

Vậy số điểm của các bạn là:

An được 7 điểm, Bảo được 8 điểm, Cường được 9 điểm, Đức được 10 điểm.

BỘ ĐỀ 7

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN 6, TPHCM – NĂM HỌC 1992 – 1993

Bài 1: a và b là hai số nguyên. Chứng minh:

1) Nếu a chia 13 dư 2 và b chia 13 dư 3 thì $a^2 + b^2$ chia hết cho 13.

2) $10a^2 + 5b^2 + 12ab + 4a - 6b + 13 \geq 0$

Dấu "=" xảy ra khi nào?

Bài 2: Ở bên ngoài của hình bình hành ABCD, vẽ hai hình vuông ABEF và ADGH. Chứng minh:

1) AC = FH và AC $\perp$ FH.

2) CEG là tam giác vuông cân.

Bài 3: Cho đa thức $P(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$; $x \in Z$

1) Phân tích P(x) thành nhân tử.

2) Chứng minh rằng P(x) chia hết cho 6.

Bài 4: Cho ΔABC, BD và CE là hai đường cao của tam giác ABC. DF và EG là hai đường cao của tam giác ADE. Chứng minh:

1) Hai tam giác ADE và ABC đồng dạng.

2) FG // BC.

Bài 5:

1) Chứng minh rằng phương trình $x^4 - x^3 + x - 1 = 0$ chỉ có hai nghiệm.

2) Tùy theo giá trị của m, giải phương trình $m^2x + 1 = x + m$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: 1) a chia cho 13 dư 2 nên $a = 13x + 2$ $(x \in Z)$

b chia cho 13 dư 3 nên $b = 13y + 3$ $(y \in Z)$

Suy ra:

$a^2 + b^2 = (13x + 2)^2 + (13y + 3)^2 = 169x^2 + 52x + 4 + 169y^2 + 78y + 9$

$= 169x^2 + 52x + 169y^2 + 78y + 13 = 13(13x^2 + 4x + 13y^2 + 4y + 1) \,\vdots\, 13$

2) $10a^2 + 5b^2 + 12ab + 4a - 6b + 13$

$= 9a^2 + 12ab + 4b^2 + a^2 + 4a + 4 + b^2 - 6b + 9$

$= (3a + 2b)^2 + (a + 2)^2 + (b - 3)^2 \geq 0$

Dấu "=" xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b = 0 \\ a + 2 = 0 \\ b - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(-2) + 2.3 = 0 \text{ (đúng)} \\ a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases}$$

Bài 2: Xét trường hợp AC < BD

1) ΔAHF và ΔBCA có:

AH = BC (= AD)

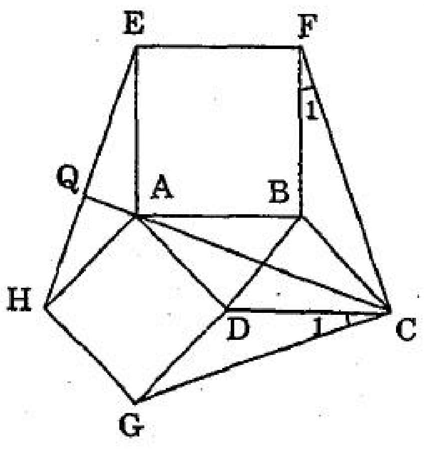
AF = AB (ABEF là hình vuông)

$\widehat{HAF} = \widehat{ABC}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc AF ⊥ AB, AH ⊥ BC).

Vậy ΔAHF = ΔBCA (c–g–c)

Cho ta HF = CA.

Giả sử AC cắt HF tại Q.



Ta có $\widehat{FAQ} + \widehat{FAB} + \widehat{BAC} = 180^0$

mà $\widehat{FAB} = 90^0$

nên $\widehat{FAQ} + \widehat{BAC} = 90^0$

mà $\widehat{BAC} = \widehat{AFQ}$ (ΔBCA = ΔAHF)

nên $\widehat{AFQ} + \widehat{FAQ} = 90^0$

Suy ra $\widehat{FQA} = 90^0$ hay AC ⊥ FH.

2) Xét ΔGDC và ΔCBE ta có:

$BE = CD$ (= AB)

$BC = GD$ (= AD)

$\widehat{EBC} = \widehat{GDC}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc $GD \perp BC$; $CD \perp BE$)

Vậy $\Delta GDC = \Delta CBE$ (c–g–c)

Cho ta $CG = CE$ và $\widehat{C}_1 = \widehat{E}_1$ (1)

Ta có: $\widehat{GCE} = \widehat{DCB} - = (180^0 - \widehat{CBA}) - \widehat{C}_1 - \widehat{C}_2$

$= 180^0 - (\widehat{CBA} + \widehat{E}_1 + \widehat{C}_2)$

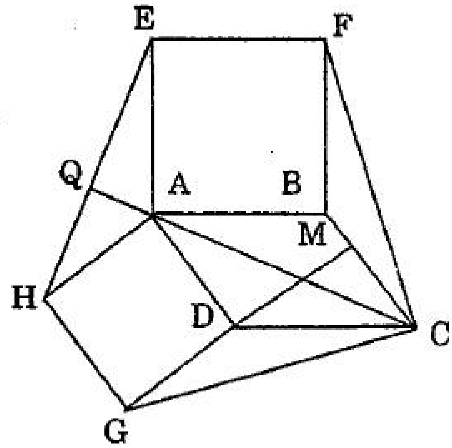
$= \widehat{ABE} = 90^0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra ΔGCE vuông cân tại C.

Xét trường hợp $AC < BD$

1) Chứng minh tương tự như trường hợp $AC < BD$ ta có $HF = CA$ và $HF \perp CA$

2) Chứng minh tương tự như trường hợp $AC < BD$ ta có $\Delta GDC = \Delta CBE$ Cho ta = và $CG = CE$ (1)



Giả sử GD cắt BC tại M suy ra $\widehat{GMC} = 90^0$

Ta có $\widehat{MCG} + \widehat{G}_1 = 90^0$

nên $\widehat{MCG} + \widehat{C}_1 = 90^0$ ($\widehat{G}_1 = \widehat{C}_1$)

hay $ECG = 90^0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tam giác GCE vuông cân tại C.

Bài 3:

1) $P(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$

$= x^4 - 3x^3 + 5x^3 - 15x^2 + 2x^2 - 6x - 8x + 24$

$= x^3(x - 3) + 5x^2(x - 3) + 2x(x - 3) - 8(x - 3)$

$= (x - 3)(x^3 + 5x^2 + 2x - 8) = (x - 3)(x^3 - x^2 + 6x^2 - 6x + 8x - 8)$

$= (x - 3)[x^2(x - 1) + 6x(x - 1) + 8(x - 1)]$

$= (x - 3)(x - 1)(x^2 + 6x + 8) = (x - 3)(x - 1)(x^2 + 2x + 4x + 8)$

$= (x - 3)(x - 1)[x(x + 2) + 4(x + 2)] = (x - 3)(x - 1)(x + 2)(x + 4)$

2) $P(x) = (x - 3)(x - 1)(x + 2)(x + 4) = (x - 3)(x - 1)(x + 2)(x - 2 + 6)$

$= (x - 3)(x - 2)(x - 1)(x + 2) + 6(x - 3)(x - 1)(x + 2)$

Trong ba số nguyên liên tiếp luôn có một số chia hết cho 2, một số chia hết cho 3, mà 2 và 3 là nguyên tố cùng nhau, nên tích của ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 2 và 3, tức chia hết cho 6.

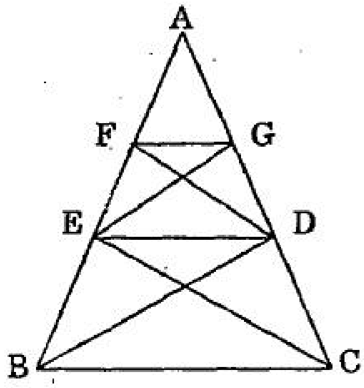
Ta có: $x - 3$; $x - 2$; $x - 1$ là ba số nguyên liên tiếp.

nên $(x - 3)(x - 2)(x - 1)(x + 2) \vdots 6$

mà $6(x - 3)(x - 1)(x + 2) \vdots 6$

nên $P(x) = (x - 3)(x - 2)(x - 1)(x + 2) + 6(x - 3)(x + 2)(x - 1) \vdots 6$

Bài 4: Xét trường hợp ΔABC có ba góc nhọn.



1) Xét ΔABD và ΔACE, ta có $\widehat{A}$ chung.

$\widehat{ADB} = \widehat{AEC} = 90^0$ (gt)

Vậy $\Delta ABD \backsim \Delta ACE$ (g–g)

ΔAED và ΔACB có:

$\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AD}{AB}$ ($\Delta ABD \backsim \Delta ACE$)

$\widehat{BAD}$ chung

Vậy $\Delta ADE \backsim \Delta ABC$ (c–g–c)

2) Chứng minh tương tự câu a ta có ΔADE đồng dạng ΔAEG suy ra $\Delta AFG \backsim \Delta ABC$ cho ta $\widehat{AFG} = \widehat{ABC}$ nên $FG \,//\, BC$. Các trường hợp khác, chứng minh tương tự như trường hợp này.

Bài 5:

1) $x^4 - x^3 + x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^3(x - 1) + (x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^3 + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 1)(x^3 - x + 1) = 0$

Ta có: $x^2 - x + 1 = x^2 - x + \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$

Do đó phương trình $(x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow x - 1 = 0$ hoặc $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -1$

Vậy phương trình $x^4 - x^3 + x - 1 = 0$ chỉ có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = -1$.

2) $m^2x + 1 = x + m \Leftrightarrow m^2x - x = m - 1$

$(m^2 - 1)x = m - 1 \Leftrightarrow (m - 1)(m + 1)x = m - 1$ (1)

- Nếu $m = 1$ phương trình (1) trở thành $0x = 0 \Leftrightarrow$ tùy ý
- Nếu $m = -1$ phương trình (1) trở thành $0x = -2 \Leftrightarrow x \in \varnothing$
- Nếu $m \neq \pm 1$ phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{1}{m+1}$

Kết luận:

– Nếu $m = 1$ phương trình đã cho có vô số nghiệm.

– Nếu $m = -1$ phương trình đã cho vô nghiệm.

– Nếu $m \neq \pm 1$ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{1}{m+1}$

BỘ ĐỀ 8

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI GIẢI THƯỞNG LÊ QUÝ ĐÔN QUẬN TÂN BÌNH, TPHCM – NĂM HỌC 1993 – 1994

Bài 1: Cho phân thức $A = \dfrac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^3 - 3x - 2}$

1) Tìm điều kiện của x để A có nghĩa.

2) Rút gọn A.

3) Tính x để A < 1.

Bài 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của phân thức $E = \dfrac{3}{-x^2 + 2x - 4}$

Bài 3: Giải phương trình $\left|\dfrac{1}{x(x-1)}\right| = \dfrac{1}{2}$

Bài 4: Cho hình bình hành ABCD với đường chéo AC > BD. Gọi E và F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ C đến các đường thẳng AB và AD; gọi G là chân đường vuông góc kẻ từ B đến AC.

1) Chứng minh tam giác CBG đồng dạng với tam giác ACF.

2) Chứng minh $AB.AE + AD.AF = AC^2$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: $A = \dfrac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^3 - 3x - 2}$

1) Vì $x^3 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 - x - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) - 2(x + 1) = 0$

$x(x - 1)(x + 1) - 2(x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)(x^2 + x - 2x - 2) = 0$

$(x + 1)[x(x + 1) - 2(x + 1)] = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 (x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Vậy biểu thức A có nghĩa khi $x \neq -1$ và $x \neq 2$

2) Ta có $x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 = (x - 1)^2 (x + 1)^2$

Vậy $A = \dfrac{(x-1)^2(x+1)^2}{(x+1)^2(x-2)} \; \dfrac{(x-1)^2}{x-2}$ ($x \neq -1; x \neq 2$)

3) $A < 1 \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)^2}{x-2} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x-2} - 1 < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 2x + 1 - x + 2}{x-2} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x-2} < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 3x + \frac{9}{4} + \frac{3}{4}}{x-2} < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}{x-2} < 0 \Leftrightarrow x - 2 < 0$ (vì $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$)

$\Leftrightarrow x < 2$

Phối hợp với điều kiện $x \neq -1$ và $x \neq 2$, ta được $x < 2$ và $x \neq -1$

Vậy với $x < 2$ và $x \neq -1$ thì $A < 1$.

Bài 2: $E = \dfrac{3}{-x^2 + 2x - 4} = \dfrac{-3}{x^2 - 2x + 4}$

Ta có $x^2 - 2x + 4 = (x^2 - 2x + 1) + 3 = (x - 1)^2 + 3 \geq 3$

Do đó $\dfrac{3}{(x-1)^2 + 3} \leq \dfrac{3}{3} \Leftrightarrow \dfrac{-3}{(x-1)^2 + 3} \geq -1$

Vậy $E \geq -1$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của E là $-1 \Leftrightarrow x = 1$

Bài 3: $\left|\dfrac{1}{x(x-1)}\right| = \dfrac{1}{2}$ (1)

Điều kiện $x \neq 0, x \neq 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x(x-1)} = \dfrac{1}{2}$ (a)

hoặc $\dfrac{1}{x(x-1)} = -\dfrac{1}{2}$ (b)

Giải phương trình (a): $\dfrac{1}{x(x-1)} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x(x - 1) = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x(x + 1) - 2(x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Giải phương trình (b): $\dfrac{1}{x(x-1)} = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x(x - 1) = -2 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x + \dfrac{1}{4} + \dfrac{7}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{4} = 0$

Phương trình vô nghiệm.

Trả lời: Phương trình (1) có nghiệm $x = -1$ hay $x = 2$.

Bài 4:

1) ΔCBG và ACF có: $\widehat{CGB} = \widehat{CFA} = 90^0$

$\widehat{BCG} = \widehat{CAF}$ (hai góc so le trong và BC//AD)

Vậy $\Delta CBG \backsim \Delta ACF$ (g–g)

2) ΔABG và ACF có:

Cách 1: $\widehat{BAG}$ chung

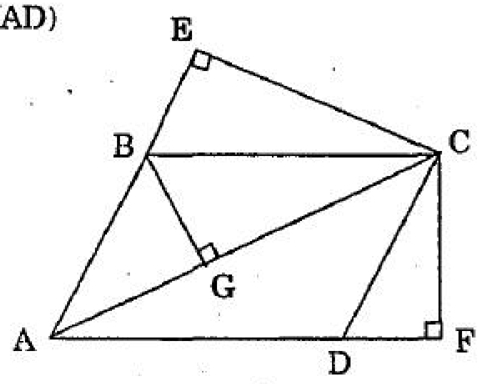
$\widehat{AGB} = \widehat{AFC} = 90^0$

Vậy $\Delta ABG \backsim \Delta ACE$ (g–g)

Suy ra $\dfrac{AG}{AE} = \dfrac{AB}{AC}$ hay

$AG.AC = AB.AE$ (1)

Từ $\Delta CBG \backsim \Delta ACF$ suy ra $\dfrac{CG}{AF} = \dfrac{CB}{AC}$



hay CG.AC = CB.AF

hay CG.AC = AD.AF (2) (vì CB = AD) (2)

Cộng vế theo vế (1) và (2) ta có:

AG.AC + CG.AC = AB.AE + AD.AF

AC.(AG + CG) = AB.AE + AD.AF

AC^2 = AB.AE + AD.AF

Cách 2: Xem cách giải bài 2 ở đề 1 (Đề thi HSG Quận 6, TPHCM – năm học 1990 – 1991.

MỘT SỐ BÀI TẬP TƯƠNG TỰ BÀI 4

1) Cho ΔABC có ba góc nhọn, hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Chứng minh rằng $BH.BD + CH.CE = BC^2$

2) Cho ΔABC, vẽ phân giác trong AD. Chứng minh rằng $AD^2 = AB.AC + DB.DC$.

3) Cho ΔABC, BC = a, CA = b, AB = c. Chứng minh rằng $\widehat{A} = 2\widehat{B} \Leftrightarrow a^2 = b^2 + bc$.

4) Cho ΔABC. Biết rằng đường phân giác ngoài của góc $\widehat{A}$ cắt cạnh BC kéo dài tại E. Chứng minh rằng $AE^2 = EB.EC + AB.AC$.

BỘ ĐỀ 9

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN 6, TPHCM – NĂM HỌC 1993 – 1994

Bài 1: Cho đa thức $P(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 9x + 6$

1) Trong trường hợp x là một số nguyên dương. Chứng minh rằng $P(x) \vdots 6$

2) Giải phương trình P(x) = 0.

Bài 2: Cho tứ giác ABCD có chu vi là 2p và M là một điểm ở trong tứ giác. Chứng minh:

1) $p < AC + BD < 2p$ 2) $p < MA + MB + MC + MD < 3p$.

Bài 3: Cho $a + b + c = 1$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

1) Nếu $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, chứng minh rằng $xy + yz + zx = 0$.

2) Nếu $a^3 + b^3 + c^3 = 1$. Tìm giá trị của a, b, c.

Bài 4: Cho ΔABC (AB < AC). Hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H.

1) So sánh hai góc $\widehat{BAH}$ và $\widehat{CAH}$.

2) So sánh hai đoạn thẳng BD và CE.

3) Chứng minh hai tam giác ADE và ABC đồng dạng.

Bài 5: Giải phương trình:

1) $\frac{x-a}{bc} + \frac{x-b}{ca} + \frac{x-c}{ab} = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$

2) $|x + 1| - 2|x - 1| = x$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $P(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 9x + 6 = x^4 - x^3 - 2x^3 + 2x^2 + 3x^2 - 3x - 6x + 6$

$= x^3(x - 1) - 2x^2(x - 1) + 3x(x - 1) - 6(x - 1)$

$= (x - 1)(x^3 - 2x^2 + 3x - 6) = (x - 1)[x^2(x - 2) + 3(x - 2)]$

$= (x - 1)(x - 2)(x^2 + 3) = x^2(x - 1)(x - 2) + 3(x - 1)(x - 2)$

Trong ba số nguyên liên tiếp luôn có một số chia hết cho 2, một số chia hết cho 3, mà 2 và 3 là nguyên tố cùng nhau, nên tích của ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 2, 3 tức chia hết cho 6.

$x, x - 1, x - 2$ là ba số nguyên liên tiếp nên $x(x - 1)(x - 2) \vdots 6$ và $3(x - 1)(x - 2) \vdots 6$

Suy ra $P(x) = x^2(x - 1)(x - 2) + 3(x - 1)(x - 2) \vdots 6$

2) $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 2)(x^2 + 3) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{array}\right.$ (vì $x^2 + 3 > 0$) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Bài 2:

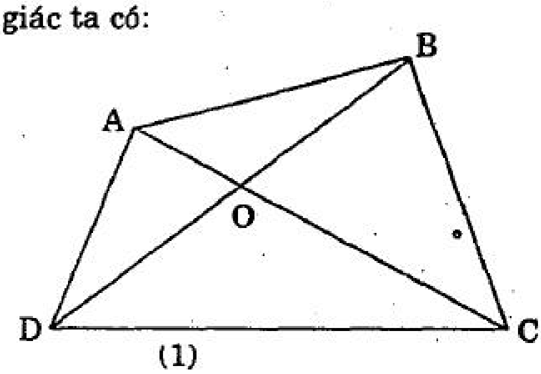
1) Áp dụng bất đẳng thức trong tam giác ta có:

$AB < OA + OB$ (xét ΔOAB)

$BC < OB + OC$ (xét ΔOBC)

$CD < OC + OD$ (xét ΔOCD)

$DA < OD + OA$ (xét ΔODA)



Do đó $AB + BC + CD + DA$

$< 2(OA + OB + OC + OD)$

$\Rightarrow 2p < 2(AC + BD)$

$\Rightarrow p < AC + BD$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức trong tam giác ta có:

$BD < AB + AD$; $BD < BC + CD$; $AC < AB + BC$; $AC < AD + CD$

$\Rightarrow 2(AC + BD) < 2(AB + BC + CD + DA)$

$\Rightarrow AC + BD < 2p$ (2)

2) Giả sử DM cắt BC tại N.

Ta có $MC < MN + NC$ (bất đẳng thức tam giác)

Suy ra $MD + MC < MD + MN + NC$ hay $MD + MC < DN + NC$

Mà $DN < DA + AB + BN$ nên $DN + NC < DA + AB + BN + NC$

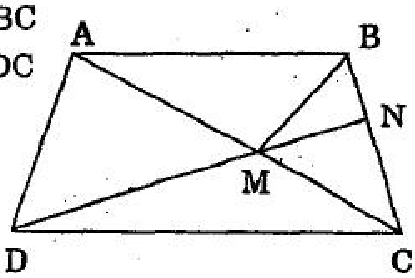
nên $MD + MC < DN + NC < DA + AB + BC$

Do đó ta có $DC < MD + MC < DA + AB + BC$

$BC < MB + MC < BA + AD + DC$

$AC < MC + MA < AB + BC + CD$

$AB < MA + MB < AC + CD + DA$



Suy ra: $DC + BC + AC + AB <$

$2(MA + MB + MC + MD)$

$< 3(AB + BC + CD + DA)$

hay $2p < 2(MA + MB + MC + MD) < 6p$

Vậy $p < MA + MB + MC + MD < 3p$

Bài 3:

1) Ta có $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x+y+z}{a+b+c} = x + y + z$ (vì $a + b + c = 1$)

Do đó: $(x + y + z)^2 = \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2} = x^2 + y^2 + z^2$

(vì $a^2 + b^2 + c^2 = 1$)

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = x^2 + y^2 + z^2$

$\Rightarrow 2xy + 2yz + 2zx = 0$

$\Rightarrow xy + yz + zx = 0$

2) *Cách 1:*

Từ $a + b + c = 1 \Rightarrow (a + b + c)^2 = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = 1$

$\Rightarrow 1 + 2ab + 2bc + 2ca = 1 \Rightarrow 2ab + 2bc + 2ca = 0$

$\Rightarrow ab + bc + ca = 0$ (1)

Ta có: $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) = 1$

$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3\ ab^2 + ac^2 + ba^2 + bc^2 + ca^2 + cb^2 = 1$

$\Rightarrow 1 + ab^2 + ac^2 + ba^2 + bc^2 + ca^2 + cb^2 = 1$

$\Rightarrow ab^2 + ba^2 + ac^2 + ca^2 + bc^2 + cb^2 = 0$

$\Rightarrow ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) = 0$

$\Rightarrow ab(1 - c) + bc(1 - a) + ca(1 - b) = 0$ (vì $a + b + c = 1$)

$\Rightarrow ab - abc + bc - abc + ca - abc = 0$

$\Rightarrow ab + bc + ca - 3abc = 0 \Rightarrow 3abc = 0 \Rightarrow abc = 0$

Vậy ít nhất một trong ba thừa số a, b, c bằng 0, giả sử $a = 0$.

Thay $a = 0$ vào (1) ta có $bc = 0$

Vậy ít nhất một trong hai thừa số b, c bằng 0, giả sử $b = 0$

Vì $a + b + c = 1$ mà $a = b = 0$ nên ta có $c = 1$.

Vậy $a = b = 0, c = 1$.

Lý luận tương tự ta được $a = c = 0, b = 1, b = c = 0, a = 1$

Cách 2: Áp dụng hằng đẳng thức $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

Ta có: $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$

$= (a + b)^3 + c^3 + 3(a + b)c(a + b + c) - a^3 - b^3 - c^3$

$= a^3 + b^3 + 3ab(a + b) + 3(a + b)c(a + b + c) - a^3 - b^3$

$= 3(a + b)(ab + ac + bc + c^2) = 3(a + b)[a(b + c) + c(b + c)]$

$= 3(a + b)(b + c)(a + c)$

Vậy: $(a + b + c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3) = 3(a + b)(b + c)(a + c)$

Do $a + b + c = 1$ và $a^3 + b^3 + c^3 = 1$

nên $3(a + b)(b + c)(a + c) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a + b = 0 \\ b + c = 0 \\ a + c = 0 \end{array}\right.$

Xét $a + b = 0 \Rightarrow c = 1$

mà $a^2 + b^2 + c^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

Lý luận tương tự $b + c = 0$ thì $a = 1$; $b = c = 0$

$a + c = 0$ thì $b = 1$; $a = c = 0$

Kết luận: Các bộ giá trị (a,b,c) cần tìm là (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0).

Bài 4:

1) ΔABC có $AB < AC \Rightarrow \widehat{ACB} < \widehat{ABC}$

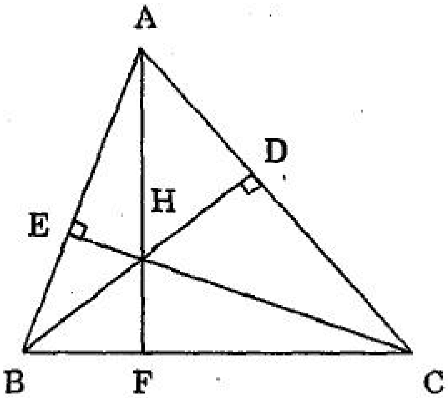
Vì H là giao điểm của hai đường cao BD và CE của ΔABC.

nên H là trực tâm của $\Delta ABC \Rightarrow AH \perp BC$.

Gọi F là giao điểm của AH và BC, $AH \perp BC$ tại F.

Suy ra: $\widehat{BAH} + \widehat{ABC} = 90^0$, $\widehat{CAH} + \widehat{ACB} = 90^0$

Mà $\widehat{ACB} < \widehat{ABC}$ nên $\widehat{BAH} < \widehat{CAH}$



2) $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC.BD = \frac{1}{2}AB.CE$ mà

$AC > AB$ nên $BD < CE$

3) Xét hai tam giác ABD và ACE ta có:

$\widehat{ADB} = \widehat{AEC} = 90^0$, $\widehat{BAD}$ chung

Do đó $\Delta ABD \backsim \Delta ACE$ (g–g)

$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$hhh

Xét hai tam giác ADE và ABC ta có:

$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$, $\widehat{DAE}$ (chung)

Vậy $\Delta ADE \backsim \Delta ABC$ (c–g–c)

Bài 5:

1) *Cách 1:* $\frac{x-a}{bc} + \frac{x-b}{ac} + \frac{x-c}{ab} = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ (a, b, c ≠ 0)

$\Leftrightarrow \frac{ax - a^2 + bx - b^2 + cx - c^2}{abc} = \frac{2ab + 2bc + 2ca}{abc}$

$\Leftrightarrow (a + b + c)x = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc + 2ca + 2ab$

$\Leftrightarrow (a + b + c)x = (a + b + c)^2$

Nếu $a + b + c \neq 0$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = a + b + c$

Nếu $a + b + c = 0$ phương trình có dạng $0x = 0 \Leftrightarrow x$ tùy ý.

Cách 2: $\frac{x-a}{bc} + \frac{x-b}{ca} + \frac{x-c}{ab} = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x-a}{bc} - \frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{x-b}{ca} - \frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) + \left(\frac{x-c}{ab} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{x-a-b-c}{bc} + \frac{x-b-a-c}{ca} + \frac{x-c-b-a}{ab} = 0$

$$\Leftrightarrow (x-a-b-c)\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-a-b-c)(a+b+c)=0$$

Nếu $a+b+c\neq 0$ ta có $x-a-b-c=0 \Leftrightarrow x=a+b+c$

Nếu $a+b+c=0$ ta có $0x=0 \Leftrightarrow x$ tùy ý.

Từ lời giải bài toán này cho ta lời giải các bài toán sau:

Giải phương trình sau:

a/ $\dfrac{x-a}{b+c}+\dfrac{x-b}{c+a}+\dfrac{x-c}{a+b}=3$

b/ $\dfrac{x-ab}{a+b}+\dfrac{x-bc}{b+c}+\dfrac{x-ca}{c+a}=a+b+c$

c/ $\dfrac{a+b-x}{c}+\dfrac{b+c-x}{a}+\dfrac{c+a-x}{b}+\dfrac{4x}{a+b+c}=1$

2) $|x+1|-2|x-1|=x$ (1)

– Nếu $x<-1$ phương trình (1) trở thành $-x-1+2x-2=x$

$\Leftrightarrow 0x=3 \Leftrightarrow x\in\varnothing$

– Nếu $-1\le x\le 1$ phương trình (1) trở thành $x+1+2x-2=x$

$\Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ (nhận)

– Nếu $x>1$ phương trình (1) trở thành $x+1-2x+2=x$

$\Leftrightarrow 2x=3 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$ (nhận)

Kết luận: Vậy phương trình có nghiệm số là $x_1=\dfrac{1}{2}$; $x_2=\dfrac{3}{2}$

BỘ ĐỀ 10

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI GIẢI THƯỞNG LÊ QUÝ ĐÔN QUẬN TÂN BÌNH, TPHCM – NĂM HỌC 1994 – 1995

Bài 1: Giải phương trình: $x^4+2x^3-4x^2-5x-6=0$

Bài 2: Thực hiện phép tính: $A=\dfrac{x^2+y^2-xy}{x^2-y^2}:\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2-2xy}$

Bài 3: Chứng tỏ bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x:

$$\frac{-4}{x^2-2x+2}-5<0$$

Bài 4: Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=\dfrac{x^2-4x+1}{x^2}$

Bài 5: Cho tam giác ABC vuông tại A (AC > AB), đường cao AH. Trong nửa mặt phẳng bờ AH có chứa C vẽ hình vuông AHKE.

1) Chứng minh $\hat{B} > 45^0$.

2) Gọi P là giao điểm của AC và KE. Chứng minh tam giác ABP vuông cân.

3) Gọi Q là đỉnh thứ tư của hình bình hành APQB, gọi I là giao điểm của BP và AQ. Chứng minh H, I, E thẳng hàng.

4) Chứng minh HE // QK.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x^4 - 2x^3 + 4x^3 - 8x^2 + 4x^2 - 8x + 3x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x^3(x-2) + 4x^2(x-2) + 4x(x-2) + 3(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^3 + 4x^2 + 4x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^3 + 3x^2 + x^2 + 3x + x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)[x^2(x+3) + x(x+3) + (x+3)] = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+3)(x^2 + x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ x + 3 = 0 \\ x^2 + x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -3 \\ \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 3 \\ x \in \phi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -3 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm số là $x_1 = 2$ và $x_2 = -3$.

Bài 2: $A = \dfrac{x^2 + y^2 - xy}{x^2 - y^2} : \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2 - 2xy}$.

Điều kiện để biểu thức A có nghĩa là:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 \neq 0 \\ x^3 + y^3 \neq 0 \\ x^2 + y^2 - 2xy \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y) \neq 0 \\ (x+y)(x^2 - xy + y^2) \neq 0 \\ (x-y)^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y \neq 0 \\ x + y \neq 0 \\ x^2 + y^2 - xy \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq y \\ x \neq -y \end{cases}$$

$$A = \frac{x^2 + y^2 - xy}{x^2 - y^2} : \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2 - 2xy} \quad (x \neq \pm y)$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - xy}{(x-y)(x+y)} : \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{(x^2 - xy + y^2)(x-y)^2}{(x-y)(x+y)^2(x^2 - xy + y^2)} = \frac{x-y}{(x+y)^2}$$

Bài 3: Ta có $x^2 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 1 + 1 = (x-1)^2 + 1 > 0$ với mọi x

Do đó $\dfrac{-4}{x^2-2x+2} = \dfrac{-4}{(x-1)^2+1} < 0$ với mọi x

Suy ra $\dfrac{-4}{x^2-2x+2} - 5 < 0$ với mọi x

Bài 4: Ta có:

$$A = \frac{x^2-4x+1}{x^2} = 1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = -3 + 4 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = -3 + \left(2 - \frac{1}{x}\right)^2 \ge -3$$

Dấu "=" xảy ra khi $2 - \dfrac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

Vậy biểu thức A đạt giá trị nhỏ nhất bằng $-3 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

Bài 5: 1) ΔABC có $AC > AB$ (giả thiết)

$\Rightarrow \hat{B} > \hat{C}$ (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác)

$\Rightarrow 2\hat{B} > \hat{C} + \hat{B} \Rightarrow 2\hat{B} > 90^0 \Rightarrow \hat{B} = 45^0$

2) ΔABH và ΔAPE có $AHB = \widehat{AEP} = 90^0$; $\widehat{BAH} = \widehat{PAE}$

(góc có cạnh tương ứng vuông góc $AB \perp AP$, $AH \perp AE$), $AH = AE$

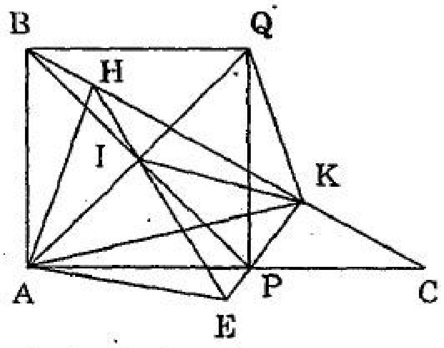
(AHKE là hình vuông).

Vậy $\Delta ABH = \Delta APE$ (g–c–g)

Suy ra $AB = AP$, mà ΔABP có $\widehat{BAP} = 90^0$ nên ΔABP vuông cân tại A.

3) Ta có $IB = IP$ (I là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành APQB).

Xét các tam giác vuông ABP và BKP ta có:



$IA = IK = \dfrac{1}{2}BP$ (tính chất trung tuyến ứng với cạnh huyền)

Mà $HA = HK$, $EA = EK$ (vì tứ giác AHKE là hình vuông)

Suy ra ba điểm H, I, E nằm trên đường trung trực của đoạn AK.

Do đó ba điểm H, I, E thẳng hàng.

4) Hình bình hành APQB có $\widehat{BAP} = 90^0$ nên là hình chữ nhật nên $AQ = BP$ (tính chất đường chéo hình chữ nhật).

mà $KI = \dfrac{1}{2}BP$ (cmt)

nên $KI = \dfrac{1}{2}AQ$ mà KI là trung tuyến của ΔAKQ.

Suy ra ΔAKQ vuông tại K. Hay $AK \perp KQ$

Ta lại có: $IE \perp AK$ (IE là đường trung trực của đoạn AK)

Do đó $IE \parallel KQ$ hay $HE \parallel KQ$.

BỘ ĐỀ 11

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN 3, TPHCM – NĂM HỌC 1994 – 1995

Bài 1: Chứng minh rằng biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

$$\frac{(x^2+a)(1+a)+a^2x^2+1}{(x^2-a)(1-a)+a^2x^2+1}$$

Bài 2: Giải các phương trình sau:

1) $\dfrac{1+8x}{4+8x}-\dfrac{4x}{12x-6}+\dfrac{32x^2}{3(4-16x^2)}=0$

2) $x^3+12=3x^2+4x$

Bài 3: Cho ba phân thức:

$$A=\frac{4xy-z^2}{xy+2z^2},\quad B=\frac{4yz-x^2}{yz+2x^2},\quad C=\frac{4zx-y^2}{zx+2y^2}$$

(Với $x \neq y$, $y \neq z$, $z \neq x$)

Chứng minh rằng nếu $x+y+z=0$ thì $A.B.C=1$

Bài 4: Cho hình thang ABCD có đáy lớn là CD. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt đường chéo BD tại M và cắt CD tại I. Qua B kẻ đường thẳng song song với AD cắt cạnh CD ở K. Qua K kẻ đường thẳng song song với BD cắt BC ở P. Chứng minh: MP // DC.

Bài 5: Cho tam giác ABC. Gọi O là một điểm thuộc miền trong của tam giác. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng OB, OC, AC, AB.

1) Chứng minh tứ giác MNPQ là hình bình hành.
2) Để tứ giác MNPQ là hình chữ nhật thì điểm O nằm trên đường đặc biệt nào của tam giác ABC? Giải thích vì sao?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: $\dfrac{(x^2+a)(1+a)+a^2x^2+1}{(x^2-a)(1-a)+a^2x^2+1}=\dfrac{x^2+x^2a+a+a^2+a^2x^2+1}{x^2-x^2a-a+a^2+a^2x^2+1}$

$$=\frac{x^2+x^2a+a^2x^2+a^2+a+1}{x^2-x^2a+a^2x^2+a^2-a+1}=\frac{x^2(1+a+a^2)+(1+a+a^2)}{x^2(1-a+a^2)+(1-a+a^2)}$$

$$=\frac{(x^2+1)(1+a+a^2)}{(x^2+1)(1-a+a^2)}=\frac{1+a+a^2}{1-a+a^2}\text{ (vì } x^2+1>0 \text{ với mọi x)}$$

Vậy biểu thức không phụ thuộc vào x.

Bài 2: 1) $\dfrac{1+8x}{4+8x}-\dfrac{4x}{12x-6}+\dfrac{32x^2}{3(4-16x^2)}=0$ (1)

$4+8x=4(1+2x)$

$12x-6=6(2x-1)$

$3(4 - 16x^2) = 12(1 - 4x^2) = 12(1 - 2x)(1 + 2x)$

$MTC = 12(1 - 2x)(1 + 2x)$

Điều kiện để phương trình có nghĩa là $x \neq \pm\dfrac{1}{2}$

Với điều kiện trên phương trình (1) tương đương với

$$\frac{1+8x}{4(1+2x)} - \frac{4x}{6(2x-1)} + \frac{32x^2}{12(1-2x)(1+2x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(1-2x)(1+8x) + 2(1+2x)4x + 36x^2}{12(1-2x)(1+2x)} = 0$$

$\Leftrightarrow 3(1 + 6x - 16x^2) + 8x(1 + 2x) + 32x^2 = 0$

$\Leftrightarrow 3 + 18x - 48x^2 + 8x + 16x^2 + 32x^2 = 0 \Leftrightarrow 26x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{26}$ (nhận)

Vậy phương trình (1) có một nghiệm số là $x = -\dfrac{3}{26}$

2) $x^3 + 12 = 3x^2 + 4x$ (1)

$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 5x^2 - 10x + 6x + 12 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x + 2) - 5x(x + 2) + 6(x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x + 2)(x^2 - 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x^2 - 2x - 3x + 6) = 0$

$\Leftrightarrow (x + 2)[x(x - 2) - 3(x - 2)] = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 2)(x - 3) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 2 = 0 \\ x - 2 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình (1) có ba nghiệm số là $x_1 = -2$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$.

Bài 3: *Cách 1:* Ta chứng minh bài toán sau:

Nếu $x + y + z = 0$ thì $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

Thật vậy ta có $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y)^3 - 3xy(x + y) + z^3 - 3xyz$

$= (x + y + z)[(x + y)^2 - z(x + y) + z^2] - 3xy(x + y + z)$

$= (x + y + z)(x^2 + 2xy + y^2 - xz - yz + z^2 - 3xy)$

$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - zy)$

Nếu $x + y + z = 0$ thì $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0 \Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

Đặt $A.B.C = \dfrac{M}{N}$

Xét tích các tử thức của các phân thức A, B, C ta có:

$M = (4xy - z^2)(4yz - x^2)(4zx - y^2) = (16x^2y^2z^2 - 4x^3y - 4yz^3 + z^2x)(4zx - y^2)$

$= 64x^2y^2z^2 - 16xy^4z - 16x^4yz + 4x^3y^3 - 16xyz^4 + 4y^3z^3 + 4x^3z^3 - x^2y^2z^2$

$= 63x^2y^2z^2 - 16xyz(x^3 + y^3 + z^3) + 4(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3)$

$= 63x^2y^2z^2 - 16xyz.3xyz + 4(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3)$

$= 63x^2y^2z^2 - 48x^2y^2z^2 + 4(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3)$

Vậy $M = 15x^2y^2z^2 + 4(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3)$ (1)

Xét tích các mẫu thức của các phân thức A, B, C ta có:

$N = (xy + 2z^2)(yz + 2x^2)(zx + 2y^2)$

$= xy^2z + 2x^3y + 2yz^3 + 4x^2z^2)(zx + 2y^2)$

$= x^2y^2z^2 + 2xy^4z + 2x^4yz + 4x^3y^3 + 2xyz^4 + 4y^3z^3 + 4x^3z^3 + 8x^2y^2z^2$

$= 9x^2y^2z^2 + 2xyz(x^3 + y^3 + z^3) + 4(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3)$

$= 9x^2y^2z^2 + 2xyz.3xyz + 4(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3)$ (2)

So sánh (1) và (2) ta có M = N.

Vậy $A.B.C = \dfrac{M}{N} = 1$

Cách 2: $x + y + z = 0 \Rightarrow z = -(x + y)$

Do đó $4xy - z^2 = 4xy - (x + y)^2$

$= 4xy - x^2 - 2xy - y^2 = -(x^2 - 2xy + y^2) = (x - y)^2$

Tương tự $4yz - x^2 = -(y - z)^2$, $4zx - y^2 = -(z - x)^2$

Mặt khác: $xy + 2z^2 = z^2 + xy + z^2$

$z[-(x + y)] + xy + z^2 = -xz - yz + xy + z^2$

$= (-xz + z^2) + (-yz + xy) = -z(x - z) + y(x - z) = (x - z)(y - z)$

$yz + 2x^2 = (y - x)(z - x)$

$zx + 2y^2 = (z - y)(x - y)$

Vậy $A.B.C = \dfrac{-(x - y)^2}{(x - z)(y - z)}.\dfrac{-(x - y)^2}{(y - x)(z - x)}.\dfrac{-(z - x)^2}{(z - y)(x - y)}$

$= \dfrac{-(x - y)^2.(y - z)^2.(z - x)^2}{-(z - x)(y - z)(x - y)(z - x)(y - z)(x - y)} = 1$

Bài 4:

Tứ giác ABCD có AB // DK; BK // AD nên là hình bình hành, suy ra DK = AB (1)

Tứ giác ABCI có AB//CI, AI//BC nên là hình bình hành, suy ra

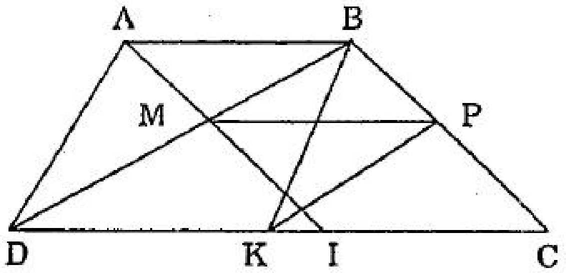
CI = AB (2)

Từ (1) và (2) ta có DK = CI.

Suy ra DK + KI = CI + KI hay DI = KC (3)

Áp dụng định lý Talet vào tam giác ABM với AB // DI, ta có:

$\dfrac{BM}{MD} = \dfrac{AB}{DI}$ (4)



Áp dụng định lý Talet vào tam giác CBD với KP // BD, ta có:

$\dfrac{BP}{PC} = \dfrac{DK}{KC}$ hay $\dfrac{BP}{PC} = \dfrac{AB}{KC}$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\dfrac{BM}{MD} = \dfrac{BP}{PC}$

cho ta MP // DC (Định lý Talet đảo)

Bài 5:

1) Tam giác BOC có: M là trung điểm của đoạn OB, N là trung điểm của đoạn OC.

Suy ra MN là đường trung bình của tam giác BOC.

Cho ta MN // BC và MN = $\frac{1}{2}$ BC (1)

Chứng minh tương tự ta có PQ là đường trung bình của tam giác ABC.

Cho ta PQ // BC và PQ = $\frac{1}{2}$ BC (2)

Từ (1) và (2) suy ra MN // PQ và MN = PQ. Vậy tứ giác MNPQ là hình bình hành.

2) Chứng minh tương tự câu 1) ta có QM // AO

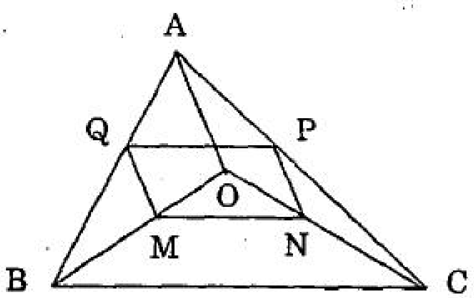
Hình bình hành MNPQ là hình chữ nhật, suy ra QM⊥MN, nhưng QM//AO; PQ//BC suy ra AO//BC

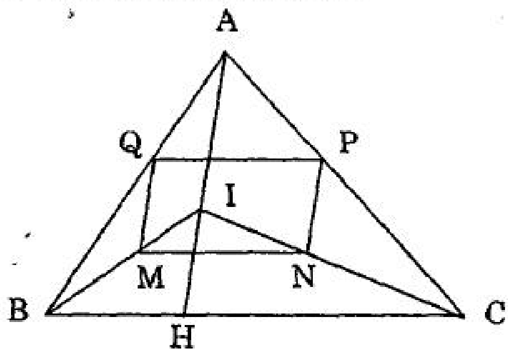
Suy ra điểm O nằm trên đường cao AH của tam giác ABC.

Ngược lại, nếu điểm O nằm trên đường cao AH của tam giác ABC, ta có AH ⊥ BC, mà QM//AH, MN//BC.

Suy ra QM ⊥ MN hay $\widehat{QMN} = 90^0$

Hình bình hành MNPQ có: $\widehat{QMN} = 90^0$ nên là hình chữ nhật.





BỘ ĐỀ 12

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN 6, TPHCM – NĂM HỌC 1994 – 1995

Bài 1:

1) Phân tích đa thức thành nhân tử $P(x) = 6x^3 + 13x^2 + 4x - 3$

2) Với giá trị nào của x thì biểu thức $A = (x - 1)(x + 2)(x + 3)(x + 6)$ đạt giá trị nhỏ nhất?

Bài 2:

1) Cho $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

2) Giải phương trình $(4x + 3)^3 + (5 - 7x)^3 + (3x - 8)^3 = 0$

Bài 3: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

1) Chứng minh bất đẳng thức: $ab + bc + ca \le a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$

2) Chứng minh rằng nếu $(a + b + c)^2 = 3(ab + bc + ca)$ thì tam giác đó là tam giác đều.

Bài 4: Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh BC lấy một điểm M tùy ý. Đường thẳng vuông góc với AM tại M cắt CD tại E và AB tại F.

Chứng minh: AM = EF.

Bài 5: Trong tam giác ABC kẻ trung tuyến AM, K là một điểm trên AM sao cho $\frac{AK}{AM} = \frac{1}{3}$, BK cắt AC tại N.

1) Tính diện tích tam giác AKN. Biết diện tích tam giác ABC là S.

2) Một đường thẳng qua K cắt các cạnh AB và AC lần lượt tại I và J. Chứng minh: $\frac{AB}{AI} + \frac{AC}{AJ} = 6$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $P(x) = 6x^3 + 13x^2 + 4x - 3 = 6x^3 + 7x^2 + 7x - 3x - 3$

$= 6x^2(x + 1) + 7x(x + 1) - 3(x + 1) = (x + 1)(6x^2 + 7x - 3)$

$= (x + 1)(6x^2 + 9x - 2x - 3) = (x + 1)[3x(2x + 3) - (2x + 3)]$

$= (x + 1)(2x + 3)(3x - 1)$

2) $A = (x - 1)(x + 2)(x + 3)(x + 6) = (x - 1)(x + 6)(x + 2)(x + 3)$

$= (x^2 + 5x - 6)(x^2 + 5x + 6) = (x^2 + 5x)^2 - 36 \geq -36$

Dấu "=" xảy ra $\Rightarrow x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(x + 5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -5 \end{array}\right.$

Vậy min A = –36 $\Leftrightarrow$ x = 0 hoặc x = –5

Bài 2:

1) $a^3 + b^3 + c^3 = (a^3 + b^3) + c^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3$

$= (a + b + c)[(a + b)^2 - c(a + b) + c^2] - 3ab(a + b)$

$= -3ab(a + b)$ (vì $a + b + c = 0$)

$= -3ab(-c)$ (vì $-c = a + b$) $= 3abc$.

2) $(4x + 3)^2 + (5 - 7x)^3 + (3x - 8)^3 = 0$ (1)

Ta có $4x + 3 + 5 - 7x + 3x - 8 = 0$

Do đó: $(4x + 3)^3 + (5 - 7x)^3 + (3x - 8)^3 = 3(4x + 3)(5 - 7x)(3x - 8)$

Vậy phương trình (1) trở thành $3(4x + 3)(5 - 7x)(3x - 8) = 0$ (câu a)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x + 3 = 0 \\ 5 - 7x = 0 \\ 3x - 8 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{3}{4} \\ x = \frac{5}{7} \\ x = \frac{8}{3} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình (1) có ba nghiệm số là $x_1 = -\frac{3}{4}$; $x_2 = \frac{5}{7}$; $x_3 = \frac{8}{3}$

Bài 3:

1) Ta có $ab + bc + ca \le a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow 2ab + 2bc + 2ca \le 2a^2 + 2b^2 + 2c^2$

$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ac + a^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \ge 0$ (bất đẳng thức đúng)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow$ Tam giác có độ dài ba cạnh bằng a, b, c là tam giác đều.

Theo bất đẳng thức trong tam giác ta có:

$$\begin{cases} a < b + c \\ b < a + c \\ c < b + a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 < ab + ac \\ b^2 < ba + bc \\ c^2 < cb + ca \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$$

Vậy $ab + bc + ca \le a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$ (a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác).

2) $(a + b + c)^2 = 3(ab + bc + ca)$

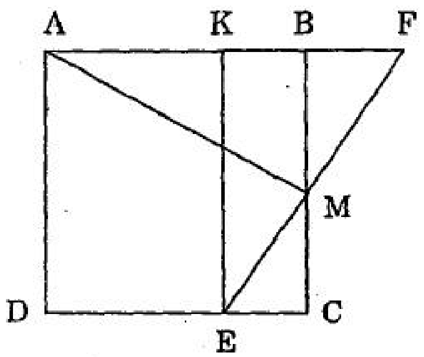
$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 3ab + 3bc + 3ca.$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$

Theo câu a đẳng thức trên dúng khi a = b = tức tam giác đó là tam giác đều.

Bài 4:

Cách 1: Vẽ $EK \perp AB$ ($K \in AB$)



Tứ giác KBCE có $\widehat{EKB} = \widehat{KBC} = \widehat{BCE} = 90^0$ nên là hình chữ nhật.

Suy ra KE = BC

Xét ΔMAB và ΔFEK có:

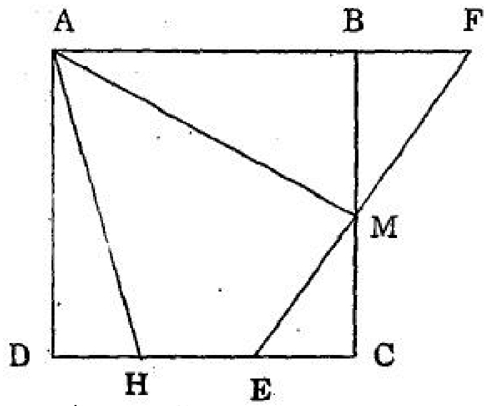
$\widehat{AMB} = \widehat{EFK}$ (cặp góc có cạnh tương ứng vuông góc) AB = KE (vì cùng bằng BC)

$\widehat{ABM} = \widehat{EKF}$ ($= 90^0$)

Do đó $\Delta MAB = \Delta FEK$ (g–c–g)

Suy ra AM = EF.

Cách 2:



Dễ thấy $\widehat{DAB} = 90^0 > \widehat{AFE}$

Vẽ tia AH nằm giữa hai tia AB, AD và $\widehat{BAH} = \widehat{AFE}$, $H \in DC$

Tứ giác AFCH là hình thang (HC // AF)

Có $\widehat{BAH} = \widehat{AFE}$ nên là hình thang cân

Suy ra AH = EF (1)

$\widehat{DAH} + \widehat{HAF} = \widehat{DAB} = 90^0$

$\widehat{BAM} + \widehat{AFE} = 90^0$ (ΔAMF vuông tại A)

Do đó $\widehat{DAH} = \widehat{BAM}$

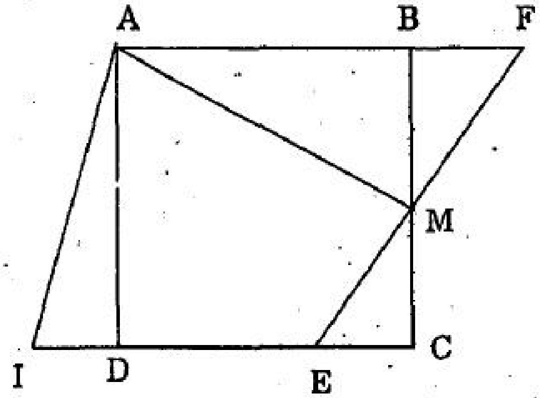
Xét ΔDAH và ΔBAM

Có $\widehat{DAH} = \widehat{ABH}$ (= 90^0), AD = AB, $\widehat{DAH} = \widehat{BAM}$.

Do đó $\Delta DAH = \Delta BAM$ (g–c–g)

Suy ra AH = AM (2)

Từ (1) và (2) có AM = EF.



Cách 3: Đường thẳng vuông góc AM tại A cắt CD tại I. AI ⊥ AM, EF ⊥ AM (gt) suy ra AI // EF

Tứ giác AFEI có AF = IE, AI // EF nên là hình bình hành.

Suy ra AI = EF.

Xét ΔADI và ΔABM có:

$\widehat{ADI} = \widehat{ABM}$ (= 90^0); AD = AB;

$\widehat{DAI} = \widehat{BAM}$ (cặp góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc)

Do đó $\Delta ADI = \Delta ABM$ (g–c–g)

Suy ra AI = AM

Vậy AM = EF.

Chú ý: Bài này còn nhiều cách giải khác nữa. Chẳng hạn:

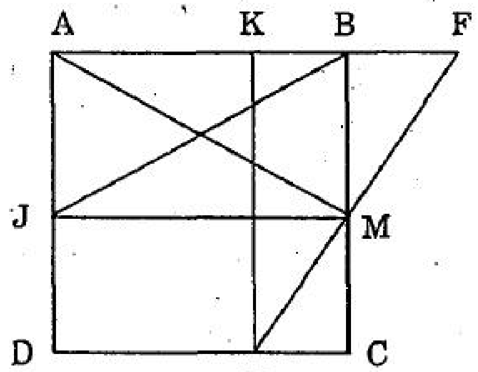
Cách 4: Vẽ MJ ⊥ AD, EK ⊥ AB (J ∈ AD, K ∈ AB)

Chứng minh được: JB = AM, JB = EF, để có AM = EF.

Cách 5: BF // EC $\Rightarrow \dfrac{MC}{MB} = \dfrac{ME}{MF}$

$\Rightarrow \dfrac{MC + MB}{MB} = \dfrac{MF + ME}{MF}$ hay $\dfrac{BC}{MB} = \dfrac{EF}{MF}$ (*)

$\Delta ABM \backsim \Delta MBF \Rightarrow \dfrac{AB}{MB} = \dfrac{AM}{MF}$ (**)



Mà AB = BC.

Từ (*) và (**) ta có: AM = EF

Cách 6: ΔJAM đồng dạng ΔKFE

Suy ra $\dfrac{AM}{EF} = \dfrac{JM}{KE} = 1$ vì JM = KE

Và từ các cách giải trên cho ta bài toán tổng quát sau.

Bài toán 1:

Cho hình vuông ABCD, E, F, M, N lần lượt trên các cạnh (hoặc đường thẳng chứa cạnh) DC, AB, BC, AD sao cho MN ⊥ EF.

Chứng minh rằng MN = EF.

Điều thú vị là tứ giác ở cách giải 6 cho ta bài toán tổng quát của bài toán 1.

Bài toán 2:

Cho hình chữ nhật ABCD, có AB = mBC (m > 0). E, F, M, N lần lượt trên các cạnh (hoặc đường thẳng chứa cạnh) DC, AB, BC, AD sao cho $MN \perp EF$. Chứng minh rằng MN = mEF.

Thử nghĩ đến bài toán ngược.

Bài Toán 3:

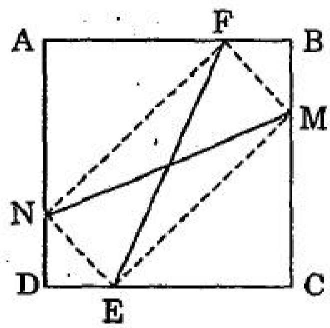
Cho hình vuông ABCD. E, F, M, N lần lượt trên các cạnh (hoặc đường thẳng chứa các cạnh) DC, AB, BA, AD sao cho MN = EF. Chứng minh $MN \perp EF$, có đúng chăng?

Tưởng chừng mọi chuyện đã êm đẹp, và ta cho rằng với kết quả suy đoán của bài toán trên là đúng!

Xét thử ví dụ sau:

Xét hình vuông ABCD, gọi E, F, M, N lần lượt trên DC, AB, BC, AD sao cho:

$DN = DE = BF = BM \neq \frac{a}{2}$ trong đó a là độ dài cạnh hình vuông.



Ta nối NF, FM, ME và NE.

Suy ra $\Delta DNE = \Delta BMF$ (c–g–c)

và $\Delta CME = \Delta ANF$ (c–g–c)

Suy ra NE = MF và NF = ME

Suy ra MENF là hình bình hành.

Mặt khác $\widehat{FNE} = 180^0 - (\widehat{DNE} + \widehat{ANE}) = 180^0 - (45^0 + 45^0) = 90^0$

Vậy MENF là hình chữ nhật, nên EF = MN mà rõ ràng EF và MN không vuông góc nhau.

Vậy các bạn hãy bổ sung giả thiết để mệnh đề đảo MN = EF thì $MN \perp EF$ đúng.

Bài 5:

1) Goi P là trung điểm của đoạn NC. Ta có MP là đường trung bình của ΔBNC. Cho ta MP // BN suy ra KN // MP.

Theo định lý Talet ta có: $\frac{AK}{AM} = \frac{KN}{MP} = \frac{1}{3}$

Vẽ $AH \perp KN$, $AK \perp MP$.

Suy ra $\frac{AH}{AK} = \frac{AK}{AM} = \frac{1}{3}$

Cho ta $\frac{S_{AKN}}{S_{AMP}} = \frac{\frac{1}{2}KN.AH}{\frac{1}{2}MP.AK} = \frac{1}{9} \Rightarrow S_{AKN} = \frac{1}{9}S_{AMP}$ (1)

Ta có: NP = PC; $AN = \frac{1}{3}AP = \frac{1}{2}NP$

$\Rightarrow AC = AN + NP + PC = AN + 2AN + 2AN = 5AN$

$\Rightarrow AP = AN + NP = AN + 2AN = 3AN \Rightarrow \frac{AP}{AC} = \frac{3}{5}$

$\Rightarrow \frac{S_{AMP}}{S_{AMC}} = \frac{AP}{AC} = \frac{3}{5}$

(Hai tam giác có chung đường cao xuất phát từ đỉnh M)

hay $S_{AMP} = \frac{3}{5} S_{AMC}$ (2)

mà $\frac{S_{AMC}}{S_{ABC}} = \frac{MC}{BC} = \frac{1}{2}$

(Hai tam giác có chung đường cao xuất phát từ đỉnh A)

hay $S_{AMC} = \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{1}{2} S$ (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow S_{AKN} = \frac{1}{9} S_{AMP} = \frac{1}{9}\frac{3}{5}.S_{AMC} = \frac{1}{9}\frac{3}{5}\frac{1}{2}S = \frac{1}{30}S$

2) Gọi P là trung điểm NC.

Ta có MP là đường trung bình của tam giác BNC cho ta MP//BN, KN//MP.

AN = NP = PC

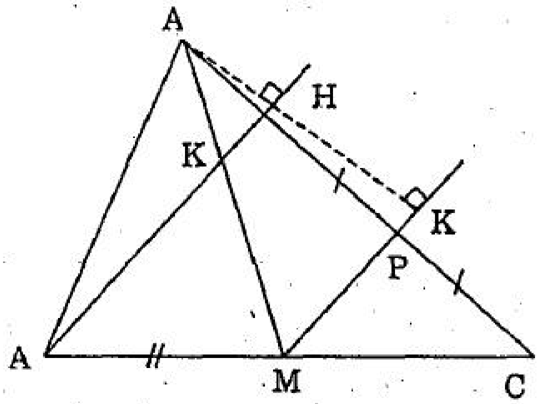
$\Rightarrow \Delta AKN \backsim \Delta AMP$

$\Rightarrow \frac{S_{AKN}}{S_{AMP}} = \frac{1}{9} \Rightarrow S_{AKN} = \frac{1}{9} S_{AMP}$

$S_{AMP} = \frac{1}{2} S_{AMC}$ và $S_{AMC} = \frac{1}{2} S_{ABC}$

Do đó $S_{AKN} = \frac{1}{9} S_{AMP} = \frac{1}{9}.\frac{2}{3} S_{AMC}$

$= \frac{1}{9}.\frac{2}{3}\frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{1}{27} S$



Vẽ BD // IJ; CE // IJ (D,E ∈ AM)

Dễ dàng chứng minh

ΔBMD = ΔCME (g–c–g)

Cho ta EM = MD.

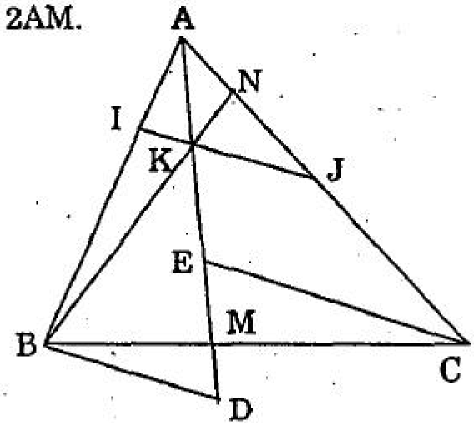
Ta có AE + AD = AM – ME + AM + MD = 2AM.

Áp dụng định lý Talet vào các tam giác AIK, AKJ với IK//BD; KJ//CE, ta có:

$\frac{AB}{AI} = \frac{AD}{AK}; \frac{AC}{AJ} = \frac{AE}{AK}$

Suy ra:

$\frac{AB}{AI} + \frac{AC}{AJ} = \frac{AD + AE}{AK} = \frac{2AM}{AK} = 6$



BỘ ĐỀ 13

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN I, TPHCM – NĂM HỌC 1994 – 1995

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử:

1) $(x^2 + x)^2 - 2(x^2 + x) - 15$

2) $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$

Bài 2: Giải phương trình:

$$\frac{2}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{x + 1} + \frac{2x - 1}{x^3 + 1}$$

Bài 3: Giả sử $a \geq b$, $c \geq d$. Chứng minh: $ac + bd \geq bc + ad$

Bài 4: Cho hình vuông ABCD, điểm E thuộc cạnh CD, điểm F thuộc cạnh BC. Biết $\widehat{EAF} = 45^0$. Chứng minh chu vi ΔCEF bằng nửa chu vi hình vuông ABCD.

Bài 5: Lấy một điểm O trong ΔABC. Các tia AO, BO, CO cắt BC, AC, AB lần lượt tại P, Q, R. Chứng minh $\frac{OA}{AP} + \frac{OB}{BQ} + \frac{OC}{CR} = 2$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử:

1) $(x^2 + x)^2 - 2(x^2 + x) - 15 = (x^2 + x)^2 - 2(x^2 + x) + 1 - 16$

$= (x^2 + x - 1)^2 - 4^2 = (x^2 + x - 1 - 4)(x^2 + x - 1 + 4)$

$= (x^2 + x + 3)(x^2 + x - 5)$

$= (x^2 + x + 3)[(x^2 + x + \frac{1}{4}) - \frac{21}{4}] = (x^2 + x + 3)[(x + \frac{1}{2})^2 - (\frac{\sqrt{21}}{2})^2]$

$= (x^2 + x + 3)(x + \frac{1 + \sqrt{21}}{2})(x + \frac{1 - \sqrt{21}}{2})$

$= \frac{1}{4}(x^2 + x + 3)(2x + 1 + \sqrt{21})(2x + 1 - \sqrt{21})$

2) $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$

Cách 1: $= (a + b)^3 + c^3 + 3(a + b).c(a + b + c) - a^3 - b^3 - c^3$

Áp dụng: $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

$= a^3 + b^3 + 3ab(a + b) + 3(a + b)(ac + bc + c^2) - a^3 - b^3$

$= 3(a + b)(ab + ac + bc + c^2) = 3(a + b)[a(b + c) + c(b + c)]$

$= 3(a + b)(b + c)(a + c)$

Cách 2: Xem $P = (a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$ là đa thức biến a.

Khi $a = -b$ thì $P = 0$ do đó $P \vdots (a + b)$

Trong P vai trò a, b, c như nhau nên cũng có $P \vdots (b + c)$, $P \vdots (c + a)$.

Do đó $P = (a + b)(b + c)(c + a)Q$

Vì P là đa thức bậc hai đối với a, b, c nên Q là hằng số.

Cho $a = 0, b = c = 1$ ta có $2Q = x^3 - 2 \Leftrightarrow Q = 3$

Vậy $P = 3(a + b)(b + c)(c + a)$

Bài 2: Điều kiện $x \neq -1$

Phương trình đã cho được viết: $2(x + 1) = x^2 - x + 1 + 2x - 1$

$\Leftrightarrow 2x + 2 = x^2 - x + 1 + 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) + (x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \text{ (loại)} \\ x = 2 \text{ (nhận)} \end{array}\right.$

Kết luận: Nghiệm của phương trình là $x = 2$

Bài 3: Ta có: $ac + bd \geq bc + ad \Leftrightarrow ac - ad + bd - bc \geq 0$

$\Leftrightarrow a(c - d) - b(c - d) \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)(c - d) \geq 0$ (đúng)

Vì $a \geq b$ và $c \geq d \Rightarrow \begin{cases} a - b \geq 0 \\ c - d \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (a - b)(c - d) \geq 0$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$ hoặc $c = d$.

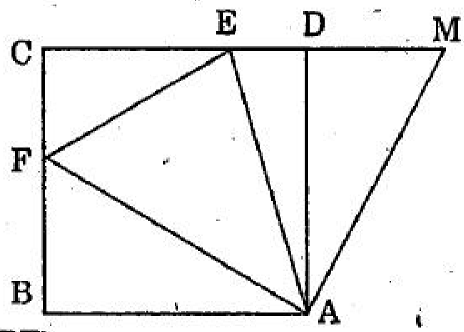
Bài 4: Trên tia đối của tia DE, lấy điểm M sao cho MD = BF

$\Rightarrow \Delta ABF = \Delta ADM$ (BF = MD, AB = AD cạnh hình vuông, $\widehat{ABF} = \widehat{ADM} = 90^0$)

$\Rightarrow AF = AM$ và $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$

Ta có: $\widehat{EAM} = \widehat{EAD} + \widehat{A}_2 = \widehat{EAD} + \widehat{A}_1 = \widehat{BAD} - \widehat{EAF} = 45^0$

$\Rightarrow EAF = EAM = 45^0$



Vậy $\Delta FAE = \Delta MAE$ (AE cạnh chung; $\widehat{EAF} = \widehat{EAM}$, AF = AM)

$\Rightarrow EF = EM$.

Gọi P_{CEF} là chu vi ΔCEF, ta có:

$P_{CEF} = CE + CF + EF = CE + CF + ME = CE + CF + ED + DM$

$= (CE + ED) + (CF + BF)$ (vì DM = BF)

$= CD + BC = 2a = \dfrac{P_{ABCD}}{2}$

với a là độ dài cạnh hình vuông và P_{ABCD} là chu vi của hình vuông ABCD.

Bài 5:

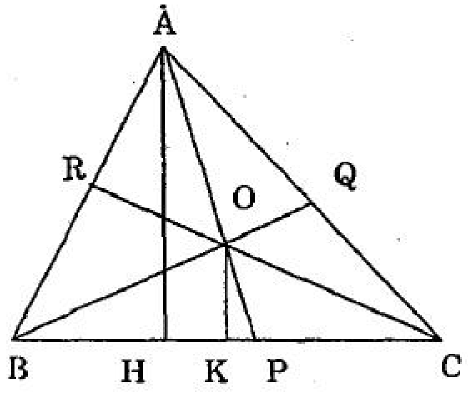
Cách 1: Đặt $S_1 = S_{OBC}$; $S_2 = S_{OAC}$; $S_3 = S_{OAB}$; $S = S_{ABC}$

Kẻ $AH \perp BC$ và $OK \perp BC \Rightarrow AH \parallel OK$

Áp dụng hệ quả định lí Talet trong tam giác AHP có:

$$\frac{OP}{AP} = \frac{OK}{AH} = \frac{\frac{1}{2}OK.BC}{\frac{1}{2}AH.BC} = \frac{S_1}{S}$$

$$\Rightarrow \frac{AP - OP}{AP} = \frac{S - S_1}{S} \Rightarrow \frac{OA}{AP} = \frac{S_2 + S_3}{S}$$



Lý luận tương tự ta có: $\frac{OB}{BQ} = \frac{S_1 + S_3}{S}$

và $\frac{OC}{CR} = \frac{S_1 + S_2}{S}$

Vậy: $\frac{OA}{AP} + \frac{OB}{BQ} + \frac{OC}{CR} =$

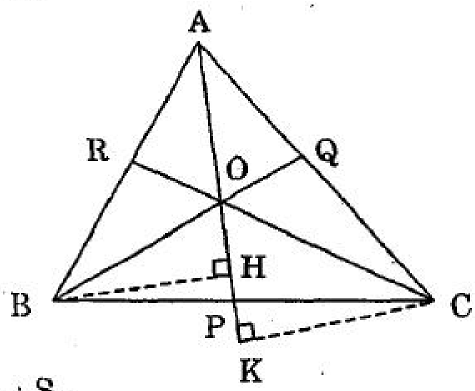
$$= \frac{S_2 + S_3}{S} + \frac{S_1 + S_3}{S} + \frac{S_1 + S_2}{S} =$$

$$= \frac{2(S_1 + S_2 + S_3)}{S} = \frac{2S}{S} = 2$$

Cách 2: Đặt $S_1 = S_{OBC}$, $S_2 = S_{OAC}$, $S_3 = S_{OAB}$, $S = S_{ABC}$

Kẻ BH và CK cùng vuông góc với đường AH.

Ta có:



$$\begin{cases} \frac{OA}{AP} = \dfrac{\frac{1}{2}OA.BH}{\frac{1}{2}AP.BH} = \frac{S_{OAB}}{S_{ABP}} \\ \frac{OA}{AP} = \dfrac{\frac{1}{2}OA.CK}{\frac{1}{2}AP.CK} = \frac{S_{OAC}}{S_{APC}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{AO}{AP} = \frac{S_{OAB}}{S_{ABP}} = \frac{S_{OAC}}{S_{APC}} = \frac{S_{OAB} + S_{OAC}}{S_{ABP} + S_{APC}} = \frac{S_2 + S_3}{S}$$

(Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau)

Lý luận tương tự ta có: $\frac{OB}{BQ} = \frac{S_1 + S_3}{S}$ và $\frac{OC}{CR} = \frac{S_1 + S_3}{S}$

Vậy $\frac{OA}{AP} + \frac{OB}{BQ} + \frac{OC}{CR} = \frac{2(S_1 + S_2 + S_3)}{S} = \frac{2S}{S} = 2$

(Đây là bài toán của Giecgôn – nhà toán học người Pháp thế kỉ 19)

Nhận xét: Ta dễ dàng chứng minh bất đẳng thức:

$(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9$ với $x, y, z > 0$

nên ta có: $\left(\frac{OA}{AP} + \frac{OB}{BQ} + \frac{OC}{CR}\right)\left(\frac{AP}{OA} + \frac{BQ}{OB} + \frac{CR}{OC}\right) \geq 9$

do đó: $\frac{AP}{OA} + \frac{BQ}{OB} + \frac{CR}{OC} \geq \frac{9}{2}$

Từ đó ta có bài toán:

Lấy một điểm O nằm trong tam giác ABC. Các tia AO, BO, CO cắt BC, AC, AB lần lượt tại P,Q, R.

Tìm vị trí của O để: $\frac{AP}{OA}+\frac{BQ}{OB}+\frac{CR}{OC}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Các bạn đã tìm được lời giải bài toán *HAY VÀ KHÓ* sau:

Cho tam giác ABC, O là điểm nằm trong tam giác ABC. Các tia AO, BO, CO cắt BC, AC, AB lần lượt tại P, Q, R.

Xác định vị trí của O để:

1) $\frac{OA}{OP}+\frac{OB}{OQ}+\frac{OC}{OR}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

2) $\frac{OA}{OP}.\frac{OB}{OQ}.\frac{OC}{OR}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

3) $\frac{OP}{OA}+\frac{OQ}{OB}+\frac{OR}{OC}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

4) $\frac{OP.OQ.OR}{OA.OB.OC}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

BỘ ĐỀ 14

ĐỀ THI HỌC BỔNG MARIE CURIE TRƯỜNG THCS NGUYỄN DU QUẬN I, TPHCM – NĂM HỌC 1994 – 1995

Bài 1: Cho ba số a, b, c khác 0, thỏa mãn $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1$

Tính giá trị của biểu thức: $(a^{23}+b^{23})(b^5+c^5)(a^{1995}+c^{1995})$

Bài 2: Xác định đa thức bậc ba sao cho khi chia đa thức ấy lần lượt cho các nhị thức (x – 1), (x – 2), (x – 3) đều có số dư là 6 và tại x = –1 thì đa thức nhận giá trị tương ứng là –18. .

Bài 3: Cho hình vuông ABCD có độ dài bằng 1. Trên các cạnh AB, AD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho chu vi của tam giác AMN bằng 2. Tính số đo góc $\widehat{MCN}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: *Cách 1:* Với a, b, c khác 0, ta có:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1 \Leftrightarrow (a+b+c)\ \frac{ab+bc+ac}{abc}=1$$

$\Leftrightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=0$

$\Leftrightarrow (a+b)(ab+bc+ca)+abc+c(bc+ac)-abc=0$

$\Leftrightarrow (a+b)(ab+bc+ac)+c^2(a+b)=0$

$\Leftrightarrow (a+b)(ab+bc+ac+c^2)=0$

$\Leftrightarrow (a + b)[b(a + c) + c(a + b)] = 0$

$$\Leftrightarrow (a + b)(b + c)(a + c) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a + b = 0 \\ b + c = 0 \\ a + c = 0 \end{array}\right.$$

Đặt $P = (a^{23} + b^{23})(b^5 + c^5)(a^{1995} + c^{1995})$

- Nếu $a + b = 0$ thì $a = -b \Leftrightarrow a^{23} = -b^{23} \Leftrightarrow a^{23} + b^{23} = 0$.

  Vậy $P = 0$

- Nếu $b + c = 0$ thì $b = -c \Leftrightarrow b^5 = -c^5 \Leftrightarrow b^5 + c^5 = 0$.

  Vậy $P = 0$.

- Nếu $a + c = 0$ thì $a = -c \Leftrightarrow a^{1995} = -c^{1995} \Leftrightarrow a^{1995} + c^{1995} = 0$.

  Vậy $P = 0$

Kết luận: với điều kiện đã cho: $P = 0$

Cách 2: $(a + b + c)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a + b + c} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a + b + c} - \frac{1}{c} \Leftrightarrow \frac{a + b}{ab} = \frac{c - (a + b + c)}{c(a + b + c)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a + b}{ab} = \frac{-(a + b)}{c(a + b + c)}$$

$\Leftrightarrow (a + b)c(a + b + c) = -(a + b)ab \Leftrightarrow (a + b)[c(a + b + c) + ab] = 0$

$\Leftrightarrow (a + b)[c(b + c) + ca + ab] = 0 \Leftrightarrow (a + b)[c(b + c) + a(b + c)] = 0$

$\Leftrightarrow (a + b)(b + c)(c + a) = 0$

Tiếp tục giải như cách 1.

Hãy giải bài toán sau:

Tìm a, b, c thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

$a + b + c = 3;\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{3}$ *và* $2a^2 + b = 1$

Bài 2: *Cách 1:* Xét đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f(x)$ chia cho $(x - 1)$ có số dư là 6 nên $f(x) = (x - 1)\,q_1(x) + 6$ với mọi x.

Tại $x = 1$: $f(1) = 6 \Leftrightarrow a + b + c + d = 6$ (1)

$f(x)$ chia cho $(x - 2)$ có số dư là 6 nên $f(x) = (x - 2)q_2(x) + 6$ với mọi x.

Tại $x = 2$: $f(2) = 6 \Leftrightarrow 8a + 4b + 2c + d = 6$ (2)

$f(x)$ chia cho $(x - 3)$ có số dư là 6 nên $f(x) = (x - 3)q_3(x) + 6$ với mọi x.

Tại $x = 3$: $f(3) = 6 \Leftrightarrow 27a + 9b + 3c + d = 6$ (3)

Mặt khác theo đề bài $f(-1) = -18 \Leftrightarrow a + b - c + d = -18$ (4)

Từ (1) và (4) có: $2(b + d) = -12 \Leftrightarrow b + d = -6 \Leftrightarrow d = -6 - b$

Thay vào (1) ta được: $a + c = 12 \Leftrightarrow c = 12 - a$

Từ (1) và (2) có: $7a + 3b + c = 0 \Leftrightarrow 6a + 3b + (a + c) = 0$

$\Leftrightarrow 3(2a + b) = -12$

$\Leftrightarrow a = \dfrac{-4 - b}{2}$

Thay các giá trị a, c, d được tính theo b vào (3) ta được:

$$27\left(\frac{-4-b}{2}\right) + 9b + 3(12 - a) - 6 - b = 6$$

$$\Leftrightarrow -108 - 27b + 18b + 6(12 + \frac{4+b}{2}) - 2b - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow -132 - 11b + 72 + 12 + 3b = 0 \Leftrightarrow -8b - 48 = 0 \Leftrightarrow b = -6$$

Với b = 6 thì d = 0; $a = \frac{-4+6}{2} = 1$ và c = 12 – 1 = 11.

Vậy đa thức cần tìm là $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x$.

Cách 2:

Do f(x) chia cho các nhị thức (x – 1); (x – 2) và (x – 3) đều có dư là 6 nên f(x) – 6 chia hết cho x – 1, x – 2 và x – 3. Vì f(x) là da thức bậc ba nên f(x) – 6 = m(x – 1)(x – 2)(x – 3) với m là hằng số.

f(–1) = 18 nên 18 – 6 = m(–2)(–3)(–4) ⇔ m = 1.

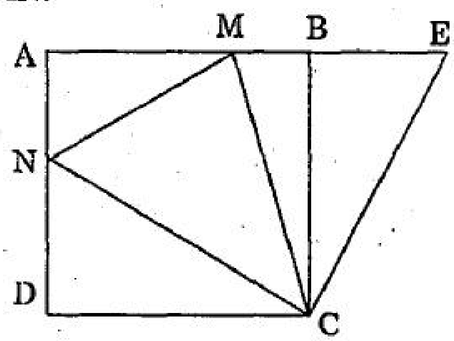
Vậy $f(x) - 6 = (x-2)(x-3)(x-1) = (x^2 - 5x + 6)(x - 1)$

$$= x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6$$

$$= x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x.$$

Bài 3: *Cách 1:* Gọi P_{AMN} là chu vi tam giác ΔMN.



ta có: $P_{AMN} = 2$

⇒ AM + AN + MN = AD + AB

⇒ AM + AN + MN =

= AM + MB + AN + ND

⇒ MN = MB + ND (1)

Trên tia đối của tia BM, lấy điểm E: BE = DN.

⇒ ME = MB + BE = MB + DN = MN.

Vậy ΔCDN = ΔCBE (DN = BE, $\widehat{NDC} = \widehat{ABE} = 90^0$, CD = CB)

⇒ CN = CE và $C_1 = C_2$

Ta có: $\widehat{NCE} = \widehat{NCB} + \hat{C}_2 = \widehat{NCB} + \hat{C}_1 = \widehat{DCB} = 90^0$

ΔCNM = ΔCEM (CN = CE, MN chung, MN = ME ⇒ NCM = MCE)

Vậy $\widehat{MCN} = \frac{\widehat{NCE}}{2} = \frac{90^0}{2} = 45^0$

Cách 2: Tương tự với cách 1 ta có MN = MB + ND (1)

Kẻ CH ⊥ MN , ta được MH + NH = MB + ND

Áp dụng định lý Pytago đối với các tam giác vuông ΔCHM và ΔBMC có:

$MH^2 = MC^2 - CH^2 = MB^2 + BC^2 - HC^2$ (2)

Áp dụng định lý Pytago đối với các tam giác vuông ΔHCN và ΔDNC có:

$NH^2 = NC^2 - HC^2 = ND^2 + CD^2 - CH^2$ (3)

Trừ vế với vế (2) và (3) ta được:

$MH^2 - NH^2 = MB^2 - ND^2$ (vì BC = CD cạnh hình vuông)

$\Rightarrow (MH - NH)(MH + NH) = (MB - ND)(ND + MB)$

$\Rightarrow MN - NH = MB - ND$ (do $MH + NH = ND + MB$)

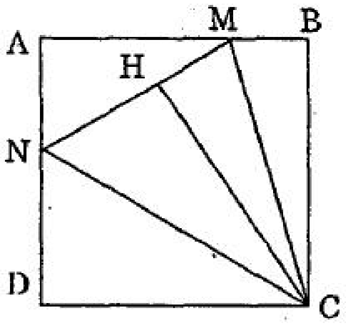
Kết hợp: $MH + NH = MB + ND$

$\Rightarrow MH = MB, NH = ND$

$\Rightarrow$ CN và CM là phân giác $\widehat{DCH}$ và $\widehat{BCH}$.

Vậy $\widehat{MCN} = \widehat{NCH} + \widehat{HCM} =$

$\dfrac{\widehat{DCH} + \widehat{BCH}}{2} = \dfrac{\widehat{DCB}}{2} = \dfrac{90^0}{2} = 45^0$



Nhận xét: Ta nối đường chéo BD lần lượt cắt CM, CN tại Q, P.

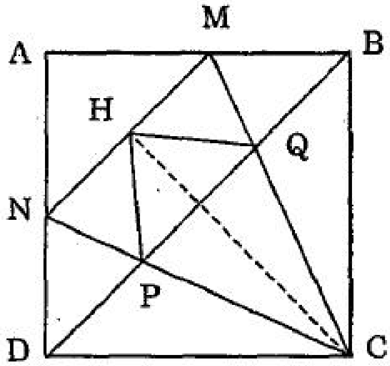
Do tính chất đối xứng ta được DP = PH và BQ = HQ

Và $\widehat{CBQ} = \widehat{CHQ}$; $\widehat{CDP} = \widehat{CHP}$

$\Rightarrow \widehat{PHQ} = \widehat{CHQ} + \widehat{CHP} =$

$\widehat{CPQ} + \widehat{CDP} = 90^0$

Vậy $PQ^2 = PH^2 + HQ^2 = DP^2 + QB^2$



Từ đó ta có bài toán:

Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng đơn vị. Trên các cạnh AB, AD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho chu vi của tam giác AMN bằng 2. Chứng minh rằng CM và CN chia đường chéo BD thành ba đoạn mà độ dài ba cạnh một tam giác vuông.

BỘ ĐỀ 15

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI GIẢI THƯỞNG LÊ QUÝ ĐÔN QUẬN TÂN BÌNH TPHCM – NĂM HỌC 1995 – 1996

Bài 1: Cho biểu thức: $A = \dfrac{2a-1}{3a-1} + \dfrac{5-a}{3a+1}$

1) Tính giá trị của A khi: $a = -\dfrac{1}{2}$

2) Tính giá trị của A khi: $10a^2 + 5a = 3$

Bài 2: Giải phương trình: $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x - 12 = 0$

Bài 3: Cho đoạn thẳng AB, gọi O là trung điểm của AB.

Vẽ về một phía của AB các tia Ax, By vuông góc với AB.

Lấy C trên tia Ax, D trên tia By sao cho $\widehat{COD} = 90^0$

1) Chứng minh tam giác ACO và tam giác BDO đồng dạng.

2) Chứng minh CD = AC + BD

3) Kẻ OM ⊥ CD tại M, gọi N là giao điểm của AD với BC. Chứng minh MN // AC.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: $A = \dfrac{2a-1}{3a-1} + \dfrac{5-a}{3a+1}$

1) Thay $a = -\dfrac{1}{2}$ vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{2.\left(-\frac{1}{2}\right)-1}{3.\left(-\frac{1}{2}\right)-1} + \frac{5-\left(-\frac{1}{2}\right)}{3.\left(-\frac{1}{2}\right)+1} = \frac{-1-1}{-\frac{3}{2}-1} + \frac{5+\frac{1}{2}}{-\frac{3}{2}+1} = \frac{-2}{-\frac{5}{2}} + \frac{\frac{11}{2}}{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{4}{5} - 11 = -10\frac{1}{5}$$

2) $A = \dfrac{2a-1}{3a-1} + \dfrac{5-a}{3a+1} \quad (a \neq \pm\dfrac{1}{3})$

$$= \frac{(2a-1)(3a+1)+(5-a)(3a-1)}{(3a-1)(3a+1)}$$

$$= \frac{6a^2+2a-3a-1+15a-5-3a^2+a}{9a^2-1}$$

$$= \frac{3a^2+15a-6}{9a^2-1} = \frac{3(a^2+5a-2)}{9a^2-1} \qquad (1)$$

Từ điều kiện $10a^2 + 5a = 3 \Rightarrow 5a = 3 - 10a^2$

Thay $5a = 3 - 10a^2$ vào (1) ta được:

$$A = \frac{3(a^2+3-10a^2-2)}{9a^2-1} = \frac{3(1-9a^2)}{9a^2-1} = -3 \quad (a \neq \pm\frac{1}{3})$$

Bài 2: *Cách 1:* $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x - 12 = 0$

$\Leftrightarrow x^4 - 1 + 2x^3 - 2 + 5x^2 - 5 + 4x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 1) + 2(x^3 - 1) + 5(x^2 - 1) + 4(x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 1) + 2(x^3 - 1) + 5(x^2 - 1) + 4(x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1 + 2x^2 + 2x + 2 + 5x + 5 + 4) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x^3 + 3x^2 + 8x + 12) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x^3 + 2x^2 + x^2 + 2x + 6x + 12) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)[x^2(x + 2) + x(x + 2) + 6(x + 2)] = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+2)(x^2+x+6)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+2)\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+5\frac{3}{4}\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x+2=0 \end{array}\right.$ (vì $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+5\frac{3}{4}\neq 0$)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có hai nghiệm số: $x_1 = 1$, $x_2 = -2$

Cách 2: $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x - 12 = 0$

$\Leftrightarrow x^4 + x^3 - 2x^2 + x^3 + x^2 - 2x - 6x^2 + 6x - 12 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x^2+x-2) + x(x^2+x-2) + 6(x^2+x-2) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2+x-2)(x^2+x+6)=0$

$\Leftrightarrow (x^2-x+2x-2)\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+5\frac{3}{4}\right]=0$

$\Leftrightarrow [x(x-1)+2(x-1)]\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+5\frac{3}{4}\right]=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+2)\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+5\frac{3}{4}\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x+2=0 \end{array}\right.$ vì $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+5\frac{3}{4}\neq 0)$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có hai nghiệm số là: $x_1 = 1$, $x_2 = -2$.

Bài 3: 1) Xét ΔACO và ΔBDO ta có:

$\widehat{CAO} = \widehat{DBO} = 90^0$ (giả thiết)

$\widehat{ACO} = \widehat{ODB}$

Vậy $\Delta ACO \backsim \Delta BOD$ (g–g)

2) CO cắt tia DB tại điểm E

Xét ΔACO và ΔBOE ta có:

$\widehat{OAC} = \widehat{OBE}$ $(=90^0)$

$\widehat{AOC} = \widehat{BOE}$ (góc đối đỉnh)

OA = OB (O là trung điểm AB)

Vậy $\Delta AOC = \Delta BOE$ (g – c – g)

Suy ra OC = OE ; AC = BE

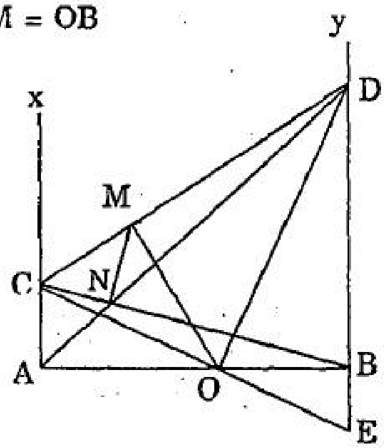
ΔDCE có DO vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao nên ΔDCE cân tại D.

Cho ta DC = DE

mà $\quad DE = DB + BE = DB + AC$

nên $\quad DC = AC + DB$

3) ΔCDE cân tại D



nên đường cao DO cũng là đường phân giác, $OM = OB$

suy ra $\quad OM = OA$ $(OA = OB)$

ΔACO và ΔMOC

có $\widehat{CAO} = \widehat{OMC} = 90^0$,

$OM = OA$, $OC = OC$

Vậy $\Delta AOC = \Delta MOC$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

Suy ra $MC = CA$

Chứng minh tương tự ta có:

$\Delta ODM = \Delta ODB$

Suy ra $MD = DB$

Tam giác CAN có $AC \,//\, BD$ (cùng vuông góc với AB)

nên $\dfrac{AN}{ND} = \dfrac{AC}{BD}$ (hệ quả định lý Talet)

hay $\dfrac{AN}{ND} = \dfrac{CM}{MD}$ $(AC = CB,\ BD = MD)$

Suy ra $MN \,//\, AC$ (Định lý Talet đảo và ΔDCA)

BỘ ĐỀ 16

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN 6, TPHCM – NĂM HỌC 1995 – 1996

Bài 1: n là số tự nhiên

1) Xác định n để $A = \dfrac{5n-11}{4n-13}$ số tự nhiên.

2) Chứng minh rằng: $B = n^3 + 6n^2 - 19n - 24$ chia hết cho 6

3) Tính tổng $S(n) = \dfrac{1}{2,5} + \dfrac{1}{5,8} + \ldots + \dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}$

Bài 2: Cho hình bình hành ABCD, đường chéo lớn AC. Tia Dx cắt AC, AB, CB lần lượt ở I, M, N. Vẽ CE vuông góc với AB, CF vuông góc với AD, BG vuông góc với AC. Gọi K là điểm đối xứng của D qua I. Chứng minh:

1) $IM.IN = ID^2$ $\qquad$ 2) $\dfrac{KM}{KN} = \dfrac{DM}{DN}$

3) $AB.AE + AD.AF = AC^2$

Bài 3:

1) Giải phương trình $|x-1| + |x+2| + |x-3| = 14$.

2) Tìm giá trị nguyên của x và y trong đẳng thức $2x^3 + xy = 7$.

3) Cho bốn số dương a, b, c, d. Chứng minh:

$$1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$$

Bài 4: Cho tam giác ABC có BC = a và đường cao AH = h. Từ một điểm M trên đường cao AH vẽ đường thẳng song song với BC cắt hai cạnh AB và AC tại P và Q. Vẽ PS và QR vuông góc với BC.

1) Tính diện tích của tứ giác PQRS theo a, h, x (AM = x)

2) Xác định vị trí của M trên AH để diện tích này lớn nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $A = \dfrac{5n-11}{4n-13}$ là số tự nhiên

$\Rightarrow (5n - 11) \,⋮\, (4n - 13) \Rightarrow 4(5n - 11) \,⋮\, (4n - 13)$

$\Rightarrow (20n - 44) \,⋮\, (4n - 13) \Rightarrow [5(4n - 13) = 21] \,⋮\, (4n - 13)$

$\Rightarrow 21 \,⋮\, (4n - 13) \Rightarrow 4n - 13 \in P(21)$

mà $4n - 13 = 4(n - 3) - 1$ chia cho 4 dư -1 (hay 3)

Do đó:

$4n - 13 \in \{-1; 3; 7; -21\} \Leftrightarrow 4n \in \{12; 16; 20 -8\} \Leftrightarrow n \in \{3; 4; 5; -2\}$

Với n = 3 ta có: $A = \dfrac{5.3 - 11}{4.3 - 11} = -4 \notin N$ (loại)

Với n = 4 ta có: $A = \dfrac{5.4 - 11}{4.4 - 11} = 3$

Vớ n = 5 ta có $A = \dfrac{5.5 - 11}{4.5 - 11} = 2$

Với $n = -2 \notin N$ (loại)

Vậy n = 4 hoặc n = 5 thì A là số tự nhiên

2) $B = n^3 + 6n^2 - 19n - 24 = n^3 - n + 6n^2 - 18n - 24$

$= n(n^2 - 1) + 6(n^2 - 3n - 4)$

$= n(n - 1)(1 + n) + 6(n^2 - 3n - 4)$

Trong ba số nguyên liên tiếp luôn có một số chia hết cho 2 và một số chia hết cho 3; mà 2 và 3 là hai số nguyên tố cùng nhau nên tích của ba số nguyên liên tiếp chia hết cho tích 2.3, tức chia hết cho 6.

Ta có: $(n - 1).n(n + 1) \,⋮\, 6$ và $6(n^2 - 3n - 4) \,⋮\, 6$

Do đó: $B = n(n - 1)(n + 1) + 6(n^2 - 3n - 4) \,⋮\, 6$ $(n \in N)$

3) $S = \dfrac{1}{2,5} + \dfrac{1}{5,8} + ... + \dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}$

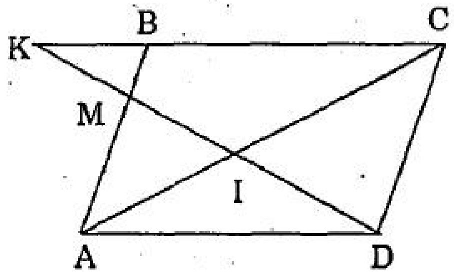
$= \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{3}{2,5} + \dfrac{3}{5,8} + ... + \dfrac{3}{(3n-1)(3n+2)}\right]$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n-2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2}\right) = \frac{1}{3}.\frac{3n+2-2}{2(3n+2)} = \frac{n}{2(3n+2)}$$

Bài 2: 1) Áp dụng hệ quả định lý Talet vào ΔAID với $AD // NC$

Ta có: $\frac{ID}{IN} = \frac{IA}{IC}$ (1)



Áp dụng hệ quả định lý Talet vào ΔMIA với $AM // DC$

Ta có $\frac{IM}{ID} = \frac{IA}{IC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{ID}{IN} = \frac{IM}{ID}$ hay

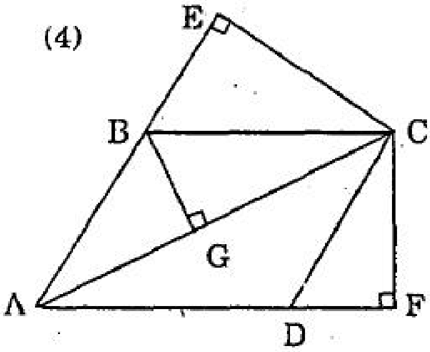
$IM.IN = ID^2$

2) Ta có: $\frac{ID}{IN} = \frac{IM}{ID}$ hay $\frac{KI}{IN} = \frac{IM}{KI}$ $(KI = ID)$

Suy ra: $\frac{KI}{IN} = \frac{IM}{KI} = \frac{KI - IM}{IN - KI} = \frac{KM}{KN}$

Do đó $\frac{ID}{IN} = \frac{KM}{KN}$ (3)

Mặt khác ta có: $\frac{ID}{IN} = \frac{IM}{ID} = \frac{ID + IM}{IN + ID} = \frac{DM}{DN}$ (4)



Từ (3) và (4) suy ra $\frac{KM}{KN} = \frac{DM}{DN}$

3) ΔABG và ΔACE có:

$\widehat{AGB} = \widehat{AEC} = 90^0$

$\widehat{A}$ chung

Vậy $\Delta ABG \backsim \Delta ACE$ (g – g)

Cho ta $\frac{AB}{AC} = \frac{AG}{AE}$ hay $AB.AE = AC.AG$ (1)

ΔCBG và ΔACF có:

$\widehat{BCG} = \widehat{CAF}$ (hai góc so le trong có BC // AD)

$\widehat{CGB} = \widehat{CFA} = 90^0$

Vậy $\Delta CBG \backsim \Delta ACF$ (g–g)

Cho ta: $\frac{BC}{AC} = \frac{CG}{AF}$ hay $BC.\ AF = AC\ .\ CG$ (2)

Cộng vế theo vế (1) và (2) ta được:

$AB.AE + BC.AF = AG.AC + AC.CG$

$AB.AE + BC.AF = AC(AG + CG) = AC^2$

Bài 3: 1) $|x-1|+|x+2|+|x-3|=14 \qquad (1)$

- Nếu $x < -2$ phương trình (1) trở thành

$$1 - x - x - 2 + 3 - x = 14 \Leftrightarrow -3x = 12 \Leftrightarrow x = -4 \text{ (nhận)}$$

- Nếu $-2 \le x < 1$ phương trình (1) trở thành

$$1 - x + x + 2 + 3 - x = 14 \Leftrightarrow -x = 8 \Leftrightarrow x = -8 \text{ (loại)}$$

- Nếu $1 \le x < 3$ phương trình (1) trở thành

$$x - 1 + x + 2 + 3 - x = 14 \Leftrightarrow x = 10 \text{ (loại)}$$

- Nếu $x \ge 3$ phương trình (1) trở thành

$$x - 1 + x + 2 + x - 3 = 14 \Leftrightarrow 3x = 16x = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3} \text{ (nhận)}$$

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm số là $x_1 = -4$, $x_2 = 5\frac{1}{3}$.

2) $2x^3 + xy = 7$ $(x, y \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x(2x^2 + y) = 7$

mà $7 = (-1).(-7) = 1.7$

Ta có các trường hợp sau:

$$\begin{cases} x = -1 \\ 2x^2 + y = -7 \end{cases};\ \begin{cases} x = 7 \\ 2x^2 + y = -1 \end{cases};\ \begin{cases} x = 1 \\ 2x^2 + y = 7 \end{cases};\ \begin{cases} x = 7 \\ 2x^2 + y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -9 \end{cases};\ \begin{cases} x = 7 \\ y = -99 \end{cases};\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases};\ \begin{cases} x = 7 \\ y = -97 \end{cases}$$

Vậy giá trị nguyên x, y cần tìm là:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -9 \end{cases};\ \begin{cases} x = 7 \\ y = -99 \end{cases};\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases};\ \begin{cases} x = 7 \\ y = -97 \end{cases}$$

3) *Cách 1:* Với $a, b, c, d > 0$

Ta có:

$$\frac{a}{a+b+c} > \frac{a}{a+b+c+d} \text{ và } \frac{a}{a+b+c} < \frac{a+d}{a+b+c+d}$$

$$\frac{b}{b+c+d} > \frac{b}{a+b+c+d} \text{ và } \frac{b}{b+c+d} < \frac{b+a}{a+b+c+d}$$

$$\frac{c}{c+d+a} > \frac{c}{a+b+c+d} \text{ và } \frac{c}{c+d+a} < \frac{c+b}{a+b+c+d}$$

$$\frac{d}{d+a+b} > \frac{d}{a+b+c+d} \text{ và } \frac{d}{d+a+b} < \frac{d+c}{a+b+c+d}$$

Suy ra $\dfrac{a}{a+b+c} + \dfrac{b}{b+c+d} + \dfrac{c}{c+d+a} + \dfrac{d}{d+a+b} > \dfrac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = 1$

Và $\dfrac{a}{a+b+c} + \dfrac{b}{b+c+d} + \dfrac{c}{c+d+a} + \dfrac{d}{d+a+b} < \dfrac{2(a+b+c+d)}{a+b+c+d} = 2$

Ta chứng minh nhận xét sau nếu $x, y, z > 0$ và $x < y$

thì $\dfrac{x}{y} < \dfrac{x+y}{y+z}$ $\qquad$ (1)

Thật vậy bất đẳng thức (1) tương đương với bất đẳng thức sau:

$xy + xz < xy + yz \Leftrightarrow xz < yz \Leftrightarrow xz - yz < 0 \Leftrightarrow z(x - y) < 0$

(Bất đẳng thức đúng vì ta có $z > 0$ và $x - y < 0$)

Vậy bất đẳng thức (1) đúng

Cách 2: Vì a, b, c, d > 0 ta có:

$$\frac{a}{a+b+c+d} < \frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+c}$$

$$\frac{c}{a+b+c+d} < \frac{c}{c+d+a} < \frac{a}{c+a}$$

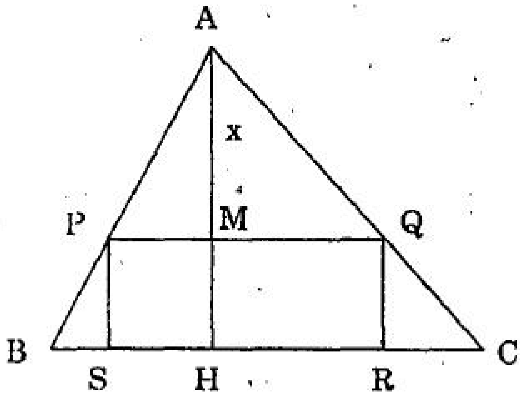
$$\frac{b}{a+b+c+d} < \frac{b}{b+c+d} < \frac{b}{b+d}$$

$$\frac{d}{a+b+c+d} < \frac{d}{d+a+b} < \frac{d}{d+b}$$

Do đó: $\frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < \frac{a+c}{c+a} + \frac{b+d}{d+b}$

$$\Rightarrow 1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$$

Bài 4: 1) Đặt PQ = y



Ta có $MH = AH - AM = h - x$

Ta có $S_{APQ} + S_{BPQC} = S_{ABC}$

Suy ra $\frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}(h - x)(y + a) = \frac{1}{2}ah$

hay $xy + hy - xy + ah - ax = ah$

cho ta $hy - ax = 0$ hay $hy = ax$

Suy ra $y = \frac{ax}{h}$

Vậy $S_{PQRS} = y.(h - x) = \frac{ax(h-x)}{h} = \frac{a}{h}x(h - x)$

2) *Cách 2:* Ta có: $x > 0$ mà $x + (h - x) = h$ (không đổi)

Do đó tích $x(h - x)$ lớn nhất $\Leftrightarrow x = h - x \Leftrightarrow x = \frac{h}{2}$

$\Leftrightarrow$ M là trung điểm của đoạn AH

Vậy max $S_{PQRS} = \frac{ah}{4} \Leftrightarrow$ M là trung điểm của đoạn thẳng AH

Cách 2: $S_{PQRS} = \frac{a}{h}x(h - x) = \frac{a}{h}\left[\frac{h^2}{4} - \left(\frac{h}{2} - x\right)^2 \le \frac{ah}{4}\right]$

Vậy max $S_{PQRS} = \frac{ah}{4} \Leftrightarrow x = \frac{h}{2}$, M là trung điểm của đoạn thẳng AH.

BỘ ĐỀ 17

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN 3, TPHCM – NĂM HỌC 1995 – 1996

(VÒNG 1)

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^3 - 7x - 6$

Bài 2: Một trường tổ chức lần lượt cho các lớp trồng cây: lớp thứ nhất trồng được 18 cây và thêm $\frac{1}{11}$ số cây còn lại, rồi đến lớp thứ hai trồng 36 cây và thêm $\frac{1}{11}$ số cây còn lại. Tiếp theo lớp thứ ba trồng 54 cây và thêm $\frac{1}{11}$ số cây còn lại. Cứ như thế các lớp trồng hết số cây và số cây trồng được của mỗi lớp bằng nhau. Hỏi trường đó đã trồng được bao nhiêu cây?

Bài 3: Cho biểu thức $\dfrac{\dfrac{x-1}{x+1} - \dfrac{x+1}{x-1}}{1 + \dfrac{x^3}{1 - x^3}}$

Hãy viết biểu thức trên dưới dạng tổng của một biểu thức nguyên và một phân thức với bậc của tử thấp hơn bậc của mẫu.

Bài 4: Chứng minh rằng "Tổng độ dài ba trung tuyến của một tam giác thì lớn hơn $\frac{3}{4}$ chu vi và nhỏ hơn chu vi của chính tam giác ấy".

Bài 5: Gọi O là một điểm ở miền trong tứ giác lồi MNPQ. Nếu bốn tam giác MON, NOP, POQ, QOM có diện tích bằng nhau.

1) MP cắt NO ở A, chứng minh là A là trung điểm của MP.

2) Hãy chứng minh rằng điểm O nằm trên đường chéo NQ hoặc đường chéo MP của tứ giác MNPQ.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: $x^3 - 7x - 6 = x^3 - x - 6x - 6 = x(x^2 - 1) - 6(x + 1)$

$= x(x - 1)(x + 1) - 6(x + 1) = (x + 1)(x^2 - x - 6)$

$= (x + 1)(x^2 - 3x + 2x - 6)$

$= (x + 1)\,[(x(x - 3x + 2(x - 3)] = (x + 1)(x + 2)(x - 3)$

Bài 2: *Cách 1:*

Theo đầu bài, một lớp trồng được một số cây (A cây) và một phần số cây còn lại. Xét hai trường hợp cuối cùng. Lớp trước lớp cuối cùng được phân công trồng A + $\frac{1}{11}$B. Lớp cuối cùng được chia số cây còn lại tức là $\frac{10}{11}$ B.

Theo quy luật của bài toán, số chia cho mỗi lớp là tổng của hai số hạng số cây thứ nhất được xác định bằng 18, 36, 54 cây, số hạng thứ hai được xác định bằng số cây còn lại. Như vậy lớp cuối cùng sẽ có số cây được chia tính theo lớp trước đó là (A + 18) + 0 (không còn số còn lại).

Vậy $A + \frac{1}{11}B = A + 18$ hay $\frac{1}{11}\ B = 18$

Từ đó B = 198. Ta đã xác định lớp cuối cùng được chia $\frac{10}{11}$ B nghĩa là:

$$\frac{10}{11}.198 = 180 \text{ (cây)}$$

Các lớp được trồng số cây bằng nhau nên lớp đầu tiên cũng được trồng 180 cây.

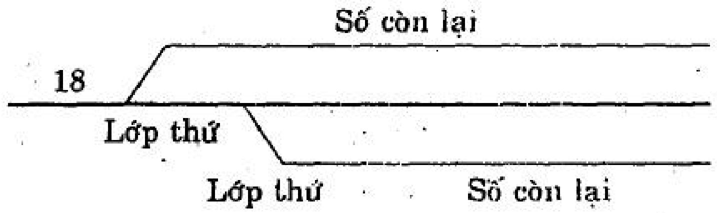
Theo đầu bài: $180 = 18\ \frac{1}{11}$ (số cây)

Suy ra số cây còn lại sau khi lớp thứ nhất đã trồng được 18 cây sẽ là:

$$(180 - 18) \cdot 11 = 1782 \text{ (cây)}$$

Vậy số cây trường đó trồng được là: 1782 + 18 = 1800 (cây)

Cách 2: Ta có thể biểu diễn đề bài đó theo sơ đồ sau:



Lớp thứ 1 trồng được 18 cây và $\frac{1}{11}$ số cây còn lại lần thứ nhất (CL 1)

Lớp thứ 2 trồng 36 cây $\frac{1}{11}$ số cây còn lại lần thứ hai (CL 2)

Vì số cây trồng của hai lớp bằng nhau nên $\frac{1}{11}$ CL 1 lớn hơn $\frac{1}{11}$ CL 2 là:

$$36 - 18 = 18 \text{ (cây)}$$

Do đó số cây còn lại lần thứ nhất hơn số cây còn lại lần thứ hai là:

$$18 \cdot 11 = 198 \text{ (cây)}$$

Theo sơ đồ ta thấy: $\frac{1}{11}$ CL 1 là : $198 - 36 = 162$ (cây)

Vậy số cây của lớp thứ nhất (cũng là số cây của mỗi lớp) là:

$$18 + 162 = 180 \text{ (cây)}$$

Tổng số cây của trường đó trồng là :

$$18 + 11 \cdot 162 = 18 + 1782 = 1800 \text{ (cây)}$$

Cách 3: Gọi x là số lớp đã tham gia lao động trồng cây

(Đơn vị là lớp. Điều kiện x nguyên, $x > 1$)

Vì các lớp trồng hết số cây đã giao nên với lớp sau cùng (nghĩa là lớp thứ x) thì số cây được giao trồng vừa hết, và lớp này trồng được: 18x (cây).

Số cây trồng được ở mỗi lớp bằng nhau, nên số cây được giao trồng là 18x . x (cây) hay $18x^2$ (cây)

Số cây trồng của lớp thứ nhất là $(18 + \frac{18x^2 - 18}{11})$ cây

Từ đó ta có phương trình:

$18 + \frac{18x^2 - 18}{11} = 18x \Leftrightarrow 198 + 18x^2 - 18 = 198x$

$\Leftrightarrow 18x^2 - 198x + 180 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x - x + 10 = 0$

$\Leftrightarrow x(x - 10) - (x - 10) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 10) = 0$

$\Leftrightarrow x = 10$ (vì $x > 1 \Leftrightarrow x - 1 > 0$ nghĩa là $x - 1 \neq 0$)

Vậy trường đã tổ chức 10 lớp tham gia lao động trồng cây.

Số cây trường đã trồng được là 18.100 = 1800 (cây).

Bài 3: $A = \dfrac{\dfrac{x-1}{x+1} - \dfrac{x+1}{x-1}}{1 + \dfrac{x^3}{1-x^3}} = \dfrac{\dfrac{(x-1)^2 - (x+1)^2}{(x+1)(x-1)}}{\dfrac{1}{1-x^3}}$

$= \dfrac{\dfrac{x^2 - 2x + 1 - x^2 - 2x - 1}{(x-1)(x+1)}}{\dfrac{1}{1-x^3}} = \dfrac{-4x(1-x^3)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{4x(x-1)(x^3+x+1)}{(x-1)(x+1)}$

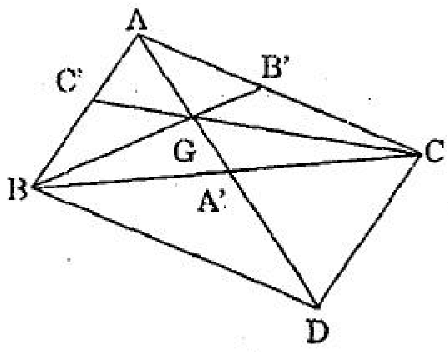
$= \dfrac{4x(x^2+x+1)}{x+1} = \dfrac{4(x^3+x^2+x+1) - 4}{x+1} = \dfrac{4\left[x^2(x+1) + x + 1\right] - 4}{x+1}$

$= \dfrac{4(x+1)(x^2+1) - 4}{x+1} = 4(x^2+1) - \dfrac{4}{x+1}$ (với $x \neq \pm 1$)

Bài 4: Gọi AA', BB', CC' là trung tuyến của tam giác ABC và G là trọng tâm của tam giác ABC. Ta có:

GB + GC > BC (bất đẳng thức trong tam giác BGC)

hay $\frac{2}{3}BB' + \frac{2}{3}CC' > BB' + CC' > \frac{3}{2}BC$



Chứng minh tương tự ta có:

$AA' + BB' > \frac{3}{2}AB$

$AA' + CC' > \frac{3}{2}AC$

Từ các kết quả trên ta suy ra :

$2(AA' + BB' + CC') > \frac{3}{2}(AB + BC + AC)$

hay $AA' + BB' + CC' > \frac{3}{4}(AB + BC + AC)$ (1)

Trên tia đối của tia AA' lấy điểm D sao cho A'D = AA'

Suy ra tứ giác ABCD là hình bình hành và có hai đường chéo AD và BC cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, suy ra CD = AB.

Từ AD < AC + CD (bất đẳng thức tam giác) suy ra 2AA' < AC + AB

hay $AA' < \dfrac{AC + AB}{2}$

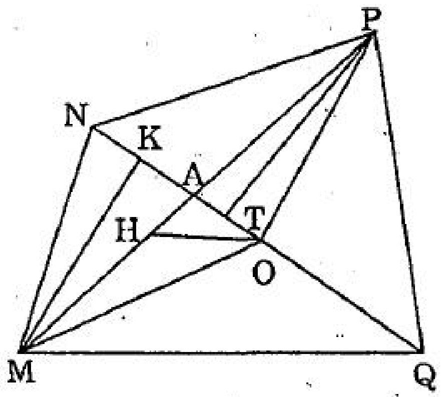
Chứng minh tương tự ta có: $BB' < \dfrac{AC + BC}{2}$ và $CC' < \dfrac{BC + AC}{2}$

Từ các kết quả trên suy ra: $AA' + BB' + CC' < AB + BC + CA$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\dfrac{3}{4}(AB + BC + CA) < AA' + BB' + CC'$

$< AB + BC + CA$

Bài 5: 1) Theo đề bài ta có $S_{MON} = S_{NOP}$



Suy ra $\dfrac{1}{2}$ PT.NO = $\dfrac{1}{2}$ MK.NO

(với PT, MK lần lượt là đường cao của tam giác NOP và MON)

Suy ra PT = MK

Dễ dàng chứng minh được hai tam giác vuông MAK và PAT bằng nhau. Suy ra MA = AP hay A là trung điểm của MP.

2) Giả sử đường chéo MP cắt OQ tại H. Chứng minh tương tự câu 1) ta có H là trung điểm MP. Suy ra A ≡ H.

– Nếu O ≠ A thì bốn điểm N, A, O, Q nằm trên một đường thẳng nghĩa là O nằm trên đường chéo NQ của tứ giác MNPQ.

– Nếu ⇔ O ≡ A thì O nằm trên đường chéo MP của tứ giác MNPQ. Như vậy O nằm trên đường chéo MP hoặc NQ của tứ giác MNPQ.

BỘ ĐỀ 18

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN 3, TPHCM – NĂM HỌC 1995 – 1996

(VÒNG 2)

Bài 1: Rút gọn biểu thức: $A = 75(4^{1993} + 4^{1992} + ... + 4^2 + 5) + 25$

Bài 2: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số: $y = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$

Bài 3: Chứng minh rằng nếu abc = a + b + c và $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 2$ thì

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 2$$

Bài 4: Tìm các số nguyên dương n để $n^{1988} + n^{1987} + 1$ là số nguyên tố.

Bài 5: Cho tam giác ABC với AB = 5cm, AC = 6cm, BC = 7cm. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, O là giao điểm của hai tia phân giác trong của tam giác ABC. Chứng minh GO//AC.

Bài 6: Cho hình vuông ABCD trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = \frac{BC}{3}$, trên tia đối của tia CD lấy N sao cho $CN = \frac{AD}{2}$. I là giao điểm của tia AM và BN. Chứng minh năm điểm A, B, I, C, D cùng cách đều một điểm.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

$A = 75(4^{1993} + 4^{1992} + ... + 4^2 + 5) + 25$

$A = 25.3(4^{1993} + 4^{1992} + ... + 4^2 + 4 + 1) + 25$

$A = 25(4 - 1)(4^{1993} + 4^{1992} + ... + 4^2 + 4 + 1) + 25$

$A = 25(4^{1994} + 4^{1993} + ... + 4^3 + 4^2 + 4 - 4^{1993} - 4^{1992} - ... - 42 - 4 - 1) + 25$

$A = 25.(4^{1994} - 1) + 25$

$A = 25.(4^{1994} - 1 + 1)$

$A = 25.4^{1994}$

Bài 2: Ta có: $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \leq \frac{4}{3} \text{ hay } y \leq \frac{4}{3}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

Vậy max $y = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

Bài 3: Ta có:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{a}.\frac{1}{b} + \frac{1}{b}.\frac{1}{c} + \frac{1}{c}.\frac{1}{a}\right)$$

$$= 4 - 2.\frac{a+b+c}{abc} = 4 - 2 = 2$$

Bài 4:

- $n = 1$ ta có $n^{1988} + n^{1987} + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$ là số nguyên tố
- $n \geq 2$ ta có $n^{1988} + n^{1987} + 1 > n^2 + n + 1$,

Mặt khác, ta có $n^{1998} - n^2 = n^2(n^{1986} - 1) = n^2[(n^3)^{662} - (1^3)^{662}]$

Chia hết cho $n^3 - 1^3$ mà $n^3 - 1^3 = (n - 1)(n^2 + n + 1)$

Áp dụng $(a^n - b^n) \vdots (a - b)$

Vậy $(n^{1998} - n^2) \vdots (n^2 + n + 1)$

Tương tự $n^{1987} - n = n(n^{1986} - 1) \vdots (n^2 + n + 1)$

Do đó: $n^{1988} + n^{1987} + 1 = (n^{1988} - n^2) + (n^{1987} - n) + (n^2 + n + 1)$ chia hết cho $n^2 + n + 1$

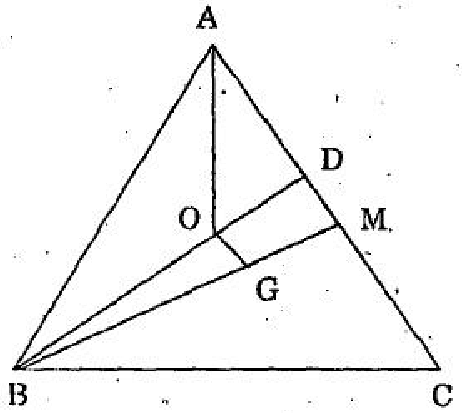
Vậy $n^{1988} + n^{1987} + 1$ có nhiều hơn hai ước.

Suy ra $n^{1988} + n^{1987} + 1$ là hợp số.

Vậy $n = 1$ là số nguyên dương duy nhất thỏa mãn $n^{1988} + n^{1987} + 1$ là số nguyên tố.

Bài 5: Gọi BD, BM lần lượt là phân giác, trung tuyến của tam giác ABC

Theo tính chất phân giác của tam giác, ta có:



$$\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} \text{ hay } \frac{DA}{DC} = \frac{5}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{DA}{DC + DA} = \frac{5}{7+5} \Rightarrow \frac{DA}{AC} = \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow DA = \frac{5}{12}.AC = \frac{5}{12}.6 = \frac{5}{2}(cm)$$

AO là phân giác của tam giác ABD nên ta có:

$$\frac{OD}{OB} = \frac{DA}{AB} \text{ hay } \frac{OD}{OB} = \frac{\frac{5}{2}}{5} = \frac{1}{2}$$

mà $\frac{GM}{GB} = \frac{1}{2}$ (tính chất trọng tâm tam giác)

Suy ra tam giác BDM có $\frac{OD}{OB} = \frac{GM}{GB}\left(= \frac{1}{2}\right)$

nên OG//DM (Định lý Talet đảo hay OC//AC).

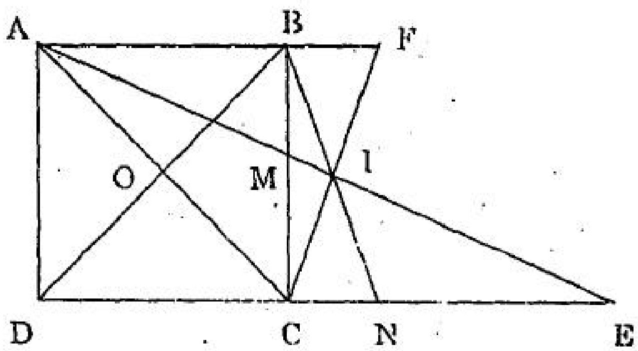
Bài 6: *Cách 1:*

Gọi E là giao điểm của AI với DC và F là giao điểm của CI với AB. Áp dụng hệ quả định lý Talet vào ΔABM với AB // CE ta có:

$$\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{CE} = \frac{1}{2} \text{ (và } MB = \frac{1}{3}BC\text{)}$$

Suy ra $CE = 2AB$ mà $CN = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}AB$ nên $NE = \frac{3}{2}AB$

Và $DE = DC + CE = 3AB$



Áp dụng hệ quả định lý Talet vào ΔABI với AB//NE, ta có:

$$\frac{IB}{IN} = \frac{IA}{IE} = \frac{AB}{NE} = \frac{2}{3} \text{ (vì } NE = \frac{3}{2}AB) \Rightarrow \frac{IA}{IE+IA} = \frac{2}{3+2} \Rightarrow \frac{IA}{AE} = \frac{2}{5}$$

Áp dụng hệ quả định lý Talet vào ΔBIF với BF // CN, ta có:

$$\frac{IF}{IC} = \frac{IB}{IN} = \frac{BF}{CN} = \frac{2}{3} \text{ suy ra } BF = \frac{2}{3}CN = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}AB = \frac{1}{3}AB$$

và $\dfrac{IF+IC}{IC} = \dfrac{2+3}{3}$ hay $\dfrac{CF}{IC} = \dfrac{5}{3}$ do đó $\dfrac{IC}{CF} = \dfrac{3}{5}$

Áp dụng định lý Pytago vào tam giác vuông EAD, ta có:

$$AE^2 = AD^2 + DE^2 = AB^2 + 9AB^2 = 10AB^2$$

Từ $\dfrac{IA}{AE} = \dfrac{2}{5} \Rightarrow \dfrac{IA^2}{AE^2} = \dfrac{4}{25} \Rightarrow IA^2 = \dfrac{4}{25}AB^2 = \dfrac{8}{5}AB^2$

Áp dụng định lý Pytago vào tam giác vuông CBF, ta có:

$$CF^2 = CB^2 + BF^2 = AB^2 + \frac{1}{9}AB^2 = \frac{10}{9}AB^2$$

Từ $\dfrac{IC}{CF} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \dfrac{IC^2}{CF^2} = \dfrac{9}{25} \Rightarrow IC^2 = \dfrac{9}{25}.\dfrac{10}{9}AB^2 = \dfrac{2}{5}AB^2$

Suy ra $IA^2 + IC^2 = \dfrac{8}{5}AB^2 + \dfrac{2}{5}AB^2 = 2AB^2$

Áp dụng định lý Pytago vào tam giác vuông ABC, ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = AB^2 + AB^2 = 2AB^2$$

ΔAIC có $AC^2 = AI^2 + IC^2$ ($= 2AB^2$)

nên ΔAIC vuông tại I (định lý Pytago đảo).

Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD của hình vuông ABCD ta có:

$$OA = OB = OC = OD = \frac{1}{2}AC$$

(Tính chất trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông AIC)

Vậy OA = 0B = OC = OD = OI

Nên năm điểm A, B, C, D, I cùng cách đều điểm O.

Cách 2:

Gọi E là giao điểm của AI với DC và F là giao điểm của CI với AB

Chứng minh được $BF = \dfrac{AB}{3}$ (xem cách 1)

Xét ΔABM và ΔCBF có:

$AB = BC$, $\widehat{ABM} = \widehat{CBF}$ (90^0), $BM = BF$ ($BM = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{BC}{3} = BM$)

Do đó $\Delta ABM = \Delta CBF$ (c-g-c)

Suy ra $\widehat{BAM} = \widehat{BCF}$

Xét ΔMAB và ΔMCI có:

$\widehat{BAM} = \widehat{MCI}$, $\widehat{AMB} = \widehat{IMC}$ (đối đỉnh)

Do đó $\Delta MAB \backsim \Delta MCI$ (g–g)

Suy ra $\widehat{ABM} = \widehat{CIM}$

Mà $\widehat{ABM} = 90^0$ nên $\widehat{CIM} = 90^0$

Tứ giác ABCD là hình vuông nên OA = OB = OC = OD

ΔIAC vuông tại I, IO là trung tuyến nên OI = OA = OC

Vậy OA = OB = OC = OD = OI

Suy ra năm điểm A, B, C, D, I cùng cách đều điểm O.

BỘ ĐỀ 19

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 8 TRƯỜNG THCS NGUYỄN DU QUẬN 1, TPHCM – NĂM HỌC 1995 – 1996

(ĐỀ THỨ NHẤT)

Bài 1: Chứng minh $21^{30} + 39^{21}$ chia hết cho 45.

Bài 2: Cho a, b, c là ba số dương.

Chứng minh $\dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{b^2}{a+c} + \dfrac{c^2}{b+a} \geq \dfrac{a+b+c}{2}$

Bài 3: Chứng minh rằng nếu x + y + z = 0 thì:

$$2(x^5 + y^5 + z^5) = 5xyz\,(x^2 + y^2 + z^2)$$

Bài 4: Cho tam giác ABC, trung tuyến CM. Qua điểm Q trên AB vẽ đường thẳng d song song với CM. Đường thẳng d cắt BC tại R và cắt AC tại P. Chứng minh nếu QA . QB = QP. QR thì tam giác ABC vuông tại C.

Bài 5: Trên các cạnh AB < BC < CA của tam giác ABC cố định, người ta lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho: $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{BN}{NC} = \dfrac{CP}{PA} = k\ (k>0)$

Tính S_{MNP} theo S_{ABC} và theo k.

Tính k sao cho S_{MNP} đạt giá trị nhỏ nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: Đặt $x = 21^{30} + 39^{21}$

Nhận xét 45 = 9.5 và 9 và 5 là nguyên tố cùng nhau.

Vậy để chứng minh $x \,\vdots\, 45$ ta cần chứng minh $x \,\vdots\, 9$ và $x \,\vdots\, 5$

Thật vậy: $21 \,\vdots\, 3 \Rightarrow 21^{30} \,\vdots\, 9$, $39 \,\vdots\, 3 \Rightarrow 39^{21} \,\vdots\, 9$

Do đó $x \,\vdots\, 9$

Mặt khác $x = 21^{30} + 39^{21} = (21^{30} - 1)^{30} + [\,39^{21} - (-1)^{21}] \,\vdots\, 5$

Vì $(21^{30} - 1^{30}) \,\vdots\, (21 - 1) \,\vdots\, 5$, $[39^{21} - (-1)^{21}]\,[39 - (-1)] \,\vdots\, 5$

Vận dụng: $(a^n - b^n) \,\vdots\, (a - b)$

Bài 2: *Cách 1:*

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{a+b+c}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b+c}+a+\frac{b^2}{a+c}+b+\frac{c^2}{a+b}+c\ge\frac{3}{2}(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+a(b+c)}{b+c}+\frac{b^2+b(a+c)}{a+c}+\frac{c^2+c(a+b)}{a+b}\ge\frac{3}{2}(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(a+b+c)}{b+c}+\frac{b(a+b+c)}{a+c}+\frac{c(a+b+c)}{a+b}\ge\frac{3}{2}(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}\ \text{(do a, b, c > 0 nên a + b + c > 0)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{a+c}+1+\frac{c}{a+b}+1\ge\frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{a+c}+\frac{a+b+c}{a+b}\ge\frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\right)\ge 9 \qquad (1)$$

vì đặt $x = a + b > 0$; $y = b + c > 0$ và $z = a + c > 0$

và $x + y + z = 2(a + b + c)$

$$(1) \Leftrightarrow (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 9$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+1+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+1\ge 9$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)\ge 6$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}-2\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}-2\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}-2\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{xy}+\frac{(y-z)^2}{yz}+\frac{(x-z)^2}{xz}\ge 0\ \text{(đúng)}$$

Vì $x, y, z > 0$ và $(x-y)^2 \ge 0$; $(y-z)^2 \ge 0$, $\forall x, y, z$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 2:

Với $a, b, c > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}\ge a \Leftrightarrow 4a^2+(b+c)^2\ge 4a(b+c)$$

$$\Leftrightarrow 4a^2-4a(b+c)+(b+c)^2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow [2a-(b+c)]^2\ge 0\ \text{(đúng)}$$

Lý luận tương tự ta có :

$$\begin{cases} \dfrac{b^2}{a+c} + \dfrac{a+c}{4} \geq b \\ \dfrac{c^2}{a+b} + \dfrac{a+b}{4} \geq c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} + \frac{a+b+c}{2} \geq a+b+c$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Bài 3: Ta có: $x + y + z = 0$ nên $x + y = -z$; $x + y = y$ và $y + z = -x$

Khi ấy: $x^3 + y^3 + x^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) + z^3$

$= (-z)^3 - 3xy(-z) + z^3$ (vì $x + y = -z$)

$= 3xyz$

Suy ra: $(x^3 + y^3 + z^3)(x^2 + y^2 + z^2) = 3xyz\,(x^2 + y^2 + z^2)$

$\Leftrightarrow x^5 + y^5 + z^5 + x^2y^2(x+y) + x^2z^2(x+z) + y^2z^2(y+z) =$

$= 3xyz\,(x^2 + y^2 + z^2)$ (*)

Do $(x+y+z)^2 = 0$ nên $2(xy + yz + zx) = x^2 + y^2 + z^2$

$\Rightarrow -2xyz(xy + yz + zx) = xyz(x^2 + y^2 + z^2)$

Thay vào (*) ta được:

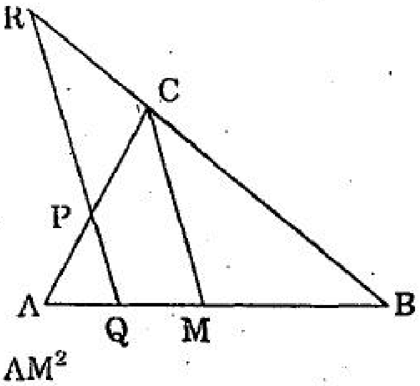
$x^5 + y^5 + z^5 - xyz(xy + yz + zx) = 3xyz(x^2 + y^2 + z^2)$

$\Rightarrow 2(x^5 + y^5 + z^5) - 2xyz(xy + yz + xz) = 6xyz(x^2 + y^2 + z^2)$

$\Rightarrow 2(x^5 + y^5 + z^5) + xyz(x^2 + y^2 + z^2) = 6xyz(x^2 + y^2 + z^2)$

$\Rightarrow 2(x^5 + y^5 + z^5) = 5xyz(x^2 + y^2 + z^2)$ (đpcm)

Bài 4: Trong ΔBRQ có $CM // QR$ nên $\dfrac{CM}{QR} = \dfrac{MB}{QB}$ (hệ quả định lý Talet)



$\Rightarrow CM = \dfrac{QR}{QB}.MB = \dfrac{QA}{QP}.MB$

(do $QA.QB = QP.QR$ (gt) $\Rightarrow \dfrac{QR}{QB} = \dfrac{QA}{QP}$

Mặt khác, trong tam giác ACM có $PQ // CM$

nên: $\dfrac{QA}{QP} = \dfrac{AM}{CM}$

Suy ra : $CM = \dfrac{AM}{CM}.MB \Rightarrow CM^2 = AM.MB = AM^2$

(vì $AM = MB$ – M là trung điểm AB) $\Rightarrow CM = AM = MB$

Tam giác CAB có CM trung tuyến và $CM = \dfrac{AB}{2} \Rightarrow \Delta CAB$ vuông tại C.

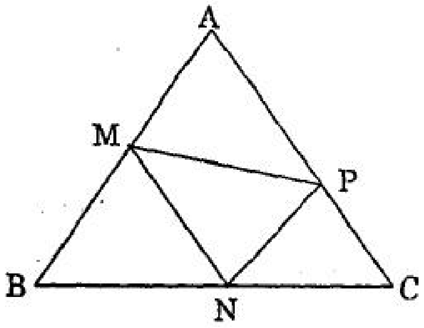
Bài 5: Xét bài toán:

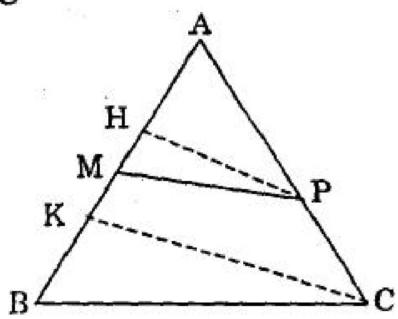
Trên AB, AC của ΔABC ta lấy thứ tự các điểm M và P thì:

$$\frac{S_{AMP}}{S_{ABC}} = \frac{AM.AP}{AB.AC}$$

Thật vậy: Kẻ PH ⊥ AB và CK ⊥ AB ⇒ HP//CK

Áp dụng hệ quả định lý Talet, ta có: $\frac{HP}{CK} = \frac{AP}{AC}$





$$\frac{S_{AMP}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}AM.HP}{\frac{1}{2}AB.CK} = \frac{AM}{AB}.\frac{HP}{CK} = \frac{AM}{AB}.\frac{AP}{AC}$$

Vì $\frac{AM}{MB} = \frac{CP}{PA} = k\ \ (k > 0) \Rightarrow \begin{cases} \frac{AM}{AB} = \frac{k}{k+1} \\ \frac{AP}{CP} = \frac{1}{k} \text{nên} \frac{AP}{AC} = \frac{1}{k+1} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{S_{AMP}}{S_{ABC}} = \frac{k}{(k+1)^2}$$

Áp dụng kết quả trên và lý luận tương tự ta có:

$$\frac{S_{BMN}}{S_{ABC}} = \frac{BM.BN}{AB.AC} = \frac{k}{(k+1)^2} \text{ và } \frac{S_{CNP}}{S_{ABC}} = \frac{CN.CP}{BC.AC} = \frac{k}{(k+1)^2}$$

Suy ra $S_{MNP} = S_{ABC} - (S_{AMP} + S_{BMN} + S_{CNP})$

$$= S_{ABC} - \frac{3k}{(k+1)^2} S_{ABC} = \left[1 - \frac{3k}{(k+1)^2}\right] S_{ABC}$$

Do S_{ABC} không đổi nên S_{MNP} nhỏ nhất khi và chỉ khi $\left(1 - \frac{3k}{(k+1)^2}\right)$ nhỏ nhất.

Ta có: $(k+1)^2 \geq 4k \Rightarrow \frac{3k}{(k+1)^2} \leq \frac{3}{4} \Rightarrow 1 - \frac{3k}{(k+1)^2} \geq 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

Vậy $S_{MNP} \geq \frac{1}{4} S_{ABC}$

$S_{MNP} = \frac{1}{4} S_{ABC} \Leftrightarrow k = 1 \Leftrightarrow$ M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, AC của tam giác ABC.

Nhận xét: Ở bài toán 2 xin được giới thiệu một bất đẳng thức mà khi vận dụng nó ta nhanh chóng tìm ra lời giải.

Bất đẳng thức : $\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \frac{a_3^2}{b_3} \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{b_1 + b_2 + b_3}$

Áp dụng: với x, y, z > 0

Chứng minh rằng: $\frac{x^4}{y+z} + \frac{y^4}{z+z} + \frac{z^4}{x+y} > \frac{x^3 + y^3 + z^3}{2}$

Ta có: $\frac{x^4}{y+z} + \frac{y^4}{z+z} + \frac{z^4}{x+y} > \frac{x^6}{x^2(y+z)} + \frac{x^6}{y^2(z+z)} + \frac{z^6}{z^2(x+y)}$

$$\geq \frac{(x^3 + y^3 + z^3)^2}{x^2(y+z) + z^2(x+y) + y^2(z+x)}$$

$$= \frac{(x^3 + y^3 + z^3)^2}{xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x)} > \frac{x^3 + y^3 + z^3}{2}$$

Vì $\begin{cases} x^3 + y^3 \geq xy(x+y) \\ y^3 + z^3 \geq yz(y+z) \text{ với } x, y, z > 0 \\ z^3 + x^3 > zx(z+x) \end{cases}$

$\Rightarrow 2(x^3 + y^3 + z^3) \geq xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x)$

Suy ra $\frac{1}{xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x)} > \frac{1}{2(x^3 + y^3 + z^3)}$

Ta có điều phải chứng minh.

BỘ ĐỀ 20

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 8 TRƯỜNG THCS NGUYỄN DU QUẬN 1, TPHCM – NĂM HỌC 1995 – 1996

(BÀI THỨ HAI)

Bài 1: Biết m + n + p = 0. Tính giá trị của biểu thức:

$$S = \left(\frac{m-n}{p} + \frac{n-p}{m} + \frac{p-m}{n}\right)\left(\frac{p}{m-n} + \frac{m}{n-p} + \frac{n}{p-m}\right)$$

Bài 2: Cho biết tích của hai số tự nhiên bằng 1985^{1986}. Hỏi tổng của hai số đó có bội là 1986 hay không?

Bài 3: Một người đi xe gắn máy từ thành phố A đến thành phố B cách nhau 200km. Cùng lúc đó có một người đi xe gắn máy khác từ B đến A. Sau 5 giờ hai xe gặp nhau. Nếu sau khi đi được 1 giờ 15 phút mà người đi từ A dừng lại 40 phút rồi đi tiếp thì phải sau 5 giờ 22 phút kể từ lúc khởi hành, hai người mới gặp nhau. Tìm vận tốc của mỗi người.

Bài 4: Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại O. Chứng minh rằng nếu các tam giác AOB, BOC, COD và DOA có chu vi bằng nhau thì tứ giác ABCD là hình thoi.

Bài 5: Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại O. Ký hiệu S là diện tích. Cho $S_{AOB} = a^2$ (cm^2) và $S_{COD} = b^2$ (cm^2) với a, b là hai số cho trước.

1) Hãy tìm giá trị bé nhất của S_{ABCD}?

2) Giả sử S_{ABCD} bé nhất. Hãy tìm đường chéo BD điểm M sao cho đường thẳng qua M song song với AB bị hai cạnh AD, BC và hai đường chéo AC, BD chia thành ba phần bằng nhau.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: *Cách 1:* Với $m + n + p = 0$

Điều kiện $mnp(m - n)(n - p)(p - m) \neq 0$

Đặt $A = \dfrac{m-n}{p} + \dfrac{n-p}{m} + \dfrac{p-m}{n}$

$$= \frac{1}{mnp}[mn(m - n) + np(n - p) + mp(p - m)]$$

$$= \frac{1}{mnp}[mn(m - n) + n^2p - np^2 + mp^2 - m^2p]$$

$$= \frac{1}{mnp}[mn(m - n) + p^2(m - n) - p(m^2 - n^2)]$$

$$= \frac{1}{mnp}[mn(m - n) + p(m - n) - p(m - n)(m + n)]$$

$$= \frac{1}{mnp}(m - n)(mn + p^2 - mp - np)$$

$$= \frac{1}{mnp}(m - n)[m(n - p) - p(n - p)] = \frac{(m-n)(n-p)(m-p)}{mnp}$$

$$B = \frac{p}{m-n} + \frac{m}{n-p} + \frac{n}{p-m}$$

$$= \frac{m(m-n) + n(n-m)(n-p) + p(p-n)(p-m)}{(m-n)(n-p)(m-p)}$$

Mặt khác:

$m(m - n)(m - p) = m[m^2 - (n + p)m + np] = m^3 - (n + p)m^2 + mnp$

$= m^3 + m^3 + mnp$ (do $m + n + p = 0 \Rightarrow n + p = - m$)

$= 2m^3 + mnp$

Lý luận tương tự ta có:

$n(n - m)(n - p) = 2n^3 + mnp$

$p(p - n)(p - m) = 2p^3 + mnp$

Suy ra:

$$B = \frac{2(m^3 + n^3 + p^3) + 3mnp}{(m-n)(n-p)(m-p)} = \frac{2(m^3 + n^3 + p^3 - 3mnp) + 9mnp}{(m-n)(n-p)(m-p)}$$

Do: $m + n + p = 0$

$\Rightarrow m + n = -p \Rightarrow m^3 + n^3 + 3nm(m + n) = -p^3$

$\Rightarrow m^3 + n^3 + p^3 - 3mnp = 0$ (vì $m + n = -p$) (*)

Vậy $B = \dfrac{9mnp}{(m-n)(n-p)(m-p)}$

$$AB = \frac{(m-n)(n-p)(m-p)}{mnp} \cdot \frac{9mnp}{(m-n)(n-p)(m-p)} = 9$$

Cách 2: Điều kiện $mnp(m-n)(n-p)(p-m) \neq 0$

Đặt $\dfrac{m-n}{p} = x; \dfrac{n-p}{m} = y; \dfrac{p-m}{n} = z$

Ta có: $S = (x + y + z)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right) = 3 + \dfrac{x+y}{z} + \dfrac{y+z}{x} + \dfrac{z+x}{y}$

Mà: $\dfrac{y+z}{x} = \dfrac{p}{m-n}\left(\dfrac{n-p}{m} + \dfrac{p-m}{n}\right) = \dfrac{p}{m-n} \cdot \dfrac{(n^2 - np + mp - m^2)}{mn}$

$= \dfrac{p}{m-n} \cdot \dfrac{(n-m)(n+m) - p(n-m)}{mn} = \dfrac{p}{m-n} \cdot \dfrac{(m-n)(m+n-p)}{mn}$

$= \dfrac{p}{mn}(-m - n + p) = \dfrac{p}{mn}(-m - n - p + 2p) = \dfrac{2p^2}{mn}$ (do $m + n + p = 0$)

Lý luận tương tự: $\dfrac{x+y}{z} = \dfrac{2n^2}{mp}$ và $\dfrac{x+y}{z} = \dfrac{2m^2}{np}$

Vậy $S = 3 + \dfrac{2n^2}{mp} + \dfrac{2p^2}{mn} + \dfrac{2m^2}{np} = 3 + \dfrac{2(m^3 + n^3 + p^3)}{mnp} = 3 + \dfrac{2.3mnp}{mnp} = 9$

Vì $m + n + p = 0 \Rightarrow m^3 + n^3 + p^3 = 3mnp$ (theo (*) ở cách 1)

Cách 3: Gọi hai số tự nhiên đó là a và b, ta có:

$ab = 1985^{1986} = [1985^{1986} - (-1)^{1986}] + 1$ chia cho 3 dư 1

vì $[1985^{1986} - (-1)^{1986}] \vdots [1985 - (-1)] \vdots 3$

$\Rightarrow$ a, b đều không chia hết cho 3.

Đặt $a = 3x + r$, $b = 3y + t$ $(x, y \in N;\ r = 1; 2;\ t = 1; 2)$

$ab = (3x + r)(3y + t) = 3xy + 3xt + 3yr + rt$ chia cho 3 dư 1

nên rt chia cho 3 dư 1

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} r = t = 1 \\ r = t = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} a + b = 3(xy + xt + 3yr + rt) + 1 \\ a + b = 3(xy + xt + 3yr + rt) + 4 \end{array}\right. \Rightarrow (a + b) \not\vdots\, 3$$

$\Rightarrow (a + b) \,/\, 1986$

Vậy a + b không là bội của 1986.

Bài 3: Đổi ra giờ: $5g22' = 5\dfrac{11}{30} = \dfrac{161}{30}$ (h); $40' = \dfrac{40}{60} = \dfrac{2}{3}$ h

Do khởi hành cùng một lúc ở hai thành phố A và B cách nhau 200km, gặp nhau sau 5 giờ nên tổng vận tốc của hai xe gắn máy là 200 : 5 = 40km/h

Gọi x (km/h) là vận tốc của xe gắn máy đi từ thành phố A đến B (điều kiện: $0 < x < 40$).

Vận tốc đi xe gắn máy từ thành phố B đến thành phố A là : 40 – x km/h

Theo đầu bài ta có phương trình:

$$\left(\frac{161}{30}-\frac{2}{3}\right)x+\frac{161}{30}(40-x)=200$$

$$\Leftrightarrow 141x + 6440 - 161x = 6000 \Leftrightarrow 20x = 440 \Leftrightarrow x = \frac{440}{20} = 22$$

Trả lời: Vận tốc người đi xe gắn máy từ thành ph A là 22km/h

Vận tốc người đi xe gắn máy từ thành phố B là 18km/h.

Bài 4: Không mất tính tổng quát, ta giả sử $OC \geq OA$, $OD \geq OB$

Trên OC đặt OF = OA, trên OD đặt OE = OB

$\Rightarrow$ Tứ giác ABEF là hình bình hành

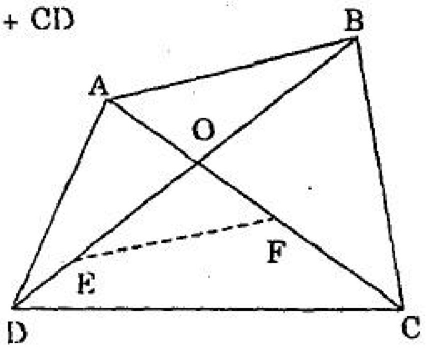
$\Rightarrow AB = EF$

Vì chu vi tam giác AOB bằng chu vi tam giác COD nên:

$AB + OA + OB = OD + OC + CD$

$\Rightarrow AB + OA + OB = OE + DE + OF + CF + CD$

$\Rightarrow AB = ED + DC + CF$



nghĩa là $EF = ED + DC + CF$. Điều này chỉ xảy ra khi $E \equiv D$ và $F \equiv C$; suy ra $AO = OC$ và $OB = OD$.

Khi ấy ABCD là hình bình hành.

Mặt khác, chu vi tam giác AOD bằng chu vi tam giác BOA nên

$AD + OA + OD = AB + OA + OB$

$\Rightarrow AD = AB$ (Do $OB = OD$)

Hình bình hành ABCD có AB = AD, nên ABCD là hình thoi.

Bài 5: 1) Tìm GTNN của S_{ABCD}?

Ta có: $S_{ABCD} = (S_{AOB} + S_{COD}) + (S_{BOC} + S_{AOD}) = a^2 + b^2 + (S_{BOC} + S_{AOD})$

Mặt khác:

$$\frac{S_{OAB}}{S_{OAD}} = \frac{\frac{1}{2}OB.AH}{\frac{1}{2}OD.AH} = \frac{OB}{OD} \text{ và } \frac{S_{OBC}}{S_{OCD}} = \frac{\frac{1}{2}OB.CK}{\frac{1}{2}OD.CK} = \frac{OB}{OD}.$$

$$\frac{S_{OAB}}{S_{OAD}} = \frac{S_{OBC}}{S_{OCD}} \Rightarrow S_{OAD} . S_{OBC} = S_{OAB} . S_{ODC} = a^2b^2$$

Áp dụng bất đẳng thức: $(x + y)^2 \geq 4xy$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$

Ta có:

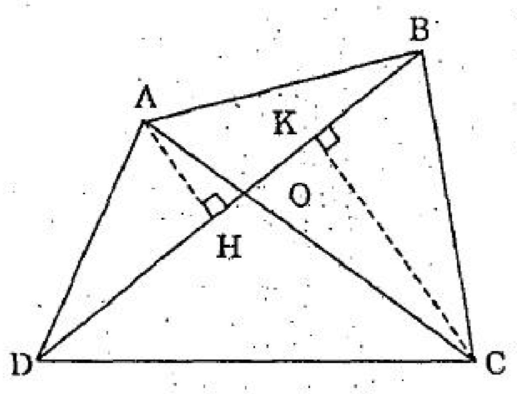
$$(S_{OBC} + S_{OAD})^2 \geq 4S_{OBC} . S_{OAD} = 4a^2b^2 \Rightarrow S_{OBC} + S_{OAD} \geq 2|ab|$$

vậy $S_{ABCD} \geq a^2 + b^2 + 2|ab| = (|a| + |b|)^2$

$S_{ABCD} = (|a| + |b|)^2 \Leftrightarrow S_{OBC} = S_{OAD}$

$\Leftrightarrow S_{DAB} = S_{CAB} \Leftrightarrow AB \,//\, CD$

min $S_{ABCD} = (\sqrt{|a|} + \sqrt{|b|})^2$ khi và chỉ khi tứ giác ABCD là hình thang (AB//CD).



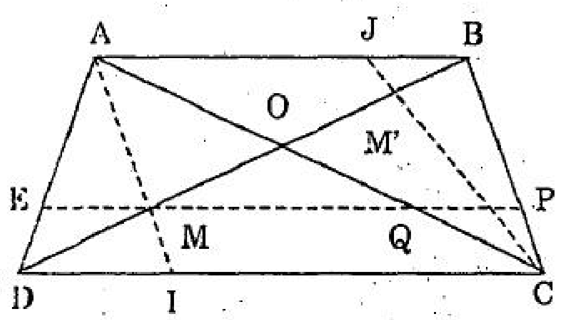
2) Trường hợp S_{ABCD} nhỏ nhất, nghĩa là tứ giác ABCD là hình thang. Giả sử có điểm M ∈ OD thỏa mãn yêu cầu của đề bài và đường thẳng AM cắt DC ở I.

Áp dụng định lý Talet, ta có: $\dfrac{ME}{DI} = \dfrac{AM}{AI} = \dfrac{MQ}{IC}$ nếu ME = MQ

$\Rightarrow$ DI = IC.

Từ đó ta có cách dựng điểm M ∈ OD như sau.

Gọi I là trung điểm của DC. Đoạn thẳng AI cắt OD tại M. Giả sử đường thẳng qua M và song song với AB, CD cắt AD, AC, BC lần lượt E, Q và P.



Áp dụng định lý Talet, ta có:

$$\frac{ME}{AB} = \frac{DM}{DB} = \frac{CP}{CB} = \frac{QP}{AB}$$

Suy ra ME = QP

Mặt khác : $\dfrac{ME}{DI} = \dfrac{AM}{AI} = \dfrac{MQ}{IC}$. do DI = IC (THEO cách dựng)

$\Rightarrow$ ME = MQ

Vậy điểm M thỏa yêu cầu bài toán : ME = MQ = QP

Tương tự, gọi J là trung điểm của AB Và CJ cắt OB ở M'.

Lý luận tương tự như trên. điểm M' cũng thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

BỘ ĐỀ 21

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN 1, TPHCM NĂM HỌC 1995 – 1996

Bài 1: Chứng minh rằng với x, y nguyên thì :

$A = (x + y)(x + 2y)(x + 3y)(x + 4y) + y^4$ là số chính phương.

Bài 2: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(a - x)y^3 - (a - y)x^3 + (x - y)a^3$.

Bài 3: Giải phương trình:

1) $\dfrac{1}{x^2 + 4x + 3} + \dfrac{1}{x^2 + 8x + 15} = \dfrac{1}{6}$

2) $x^4 + 2x^3 + 8x^2 + 10x + 15 = 0$

14 — 16 + 32 →

Bài 4: Cho tam giác ABC cân tại A với A là góc nhọn; CD là đường phân giác góc ACB (D thuộc AB) qua D kẻ đường vuông góc với CD; đường này cắt đường thẳng CB tại E. Chứng minh: $BD = \frac{1}{2}EC$.

Bài 5: Cho tam giác ABC (AB = AC) có góc ở đỉnh bằng 20^0; cạnh đáy là a, cạnh bên là b. Chứng minh $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: *Cách 1:* $A = (x + y)(x + 2y)(x + 3y)(x + 4y) + y^4$

$= [(x + y)(x + 4y)][(x + 2y)(x + 3y)] + y^4$

$= (x^2 + 5xy + 4y^2)(x^2 + 5xy + 6y^2) + y^4$

$= (x^2 + 5xy + 5y^2 - y^2)(x^2 + 5xy + 5y^2 + y^2) + y^4$

$= (x^2 + 5xy + 5y^2)^2 - y^4 + y^4 = (x^2 + 5xy + 5y^2)^2$

Do $x, y \in Z$ nên $x^2 + 5xy + 5y^2 \in Z \Rightarrow A$ là số chính phương.

Cách 2: $A = [(x + y)(x + 2y)][(x + 3y)(x + 4y)] + y^4$

$= (x^2 + 3xy + 2y^2)(x^2 + 7xy + 12y^2) + y^4$

$= x^4 + 10x^3y + 35x^2y^2 + 50xy^3 + 25y^4$

$= (x^4 + 10x^3y + 25x^2y^2) + (10x^2y^2 + 50xy^3) + 25y^4$

$= (x^2 + 5xy)^2 + 10y^2(x^2 + 5xy) + (5y^2)^2 = (x^2 + 5xy + 5y^2)^2$

Do $x, y \in Z$ nên $x^2 + 5xy + 5y^2 \in Z \Rightarrow A$ là 1 số chính phương.

Bài 2: *Cách 1:*

Ta có: $(a - x)y^3 - (a - y)x^3 + (x - y)a^3$

$= (a - x)y^3 + (x - y)a^3 + (y - a)x^3 = ay^3 - xy^3 + xa^3 - ya^3 + yx^3 - ax^3$

$= (ay^3 - ax^3) + (xa^3 - ya^3) + (yx^3 - xy^3)$

$= a(y^3 - x^3) + a^3(x - y) + xy(x^2 - y^2)$

$= (x - y)a^3 - a(x - y)(x^2 + xy + y^2) + xy(x - y)(x + y)$

$= (x - y)[a^3 - a(x^2 + xy + y^2) + xy(x + y)]$

$= (x - y)(a^3 - ax^2 - axy - ay^2 + x^2y + xy^2)$

$= (x - y)[(x - a)y^2 - (x^2 - a^2)a + (x - a)xy]$

$= (x - y)(x - a)[y^2 - a(x + a) + xy] = (x - y)(x - a)(y^2 - ax - a^2 + xy)$

$= (x - y)(x - a)[x(y - a) + (y + a)(y - a)]$

$= (x - y)(x - a)(y - a)(x + y + a)$

Cách 2: Ta có: $(a - x)y^3 - a(a - y)x^3 + (x - y)a^3$

$= (a - y)y^3 - [(a - x) + (x - y)]x^3 - (x - y)a^3$

$= (a - x)y^3 - (a - x)x^3 - (x - y)x^3 + (x - y)a^3$

$= (a - x)(y^3 - x^3) + (a^3 - x^3)(x - y)$

$= (x - a)(x - y)(x^2 + xy + y^2) - (x - a)(x^2 + ax + a^2)(x - y)$

$= (x - a)(x - y)(x^2 + xy + y^2 - x^2 - ax - a^2)$

$= (x - y)(x - a)(y^2 - ax - a^2 + xy)$

$= (x - y)(x - a)[x(y - a) + (y + a)(y - a)] = (x - y)(x - a)(y - a)(x + y + a)$

Bài 3:

1) *Nhận xét:*

$x^2 + 4x + 3 = x^2 + x + 3x + 3 = x(x + 1) + 3(x + 1) = (x + 1)(x + 3)$

$x^2 + 8x + 15 = x^2 + 3x + 5x + 15 = x(x + 3) + 5(x + 3) = (x + 3)(x + 5)$

Điều kiện: $x \neq -1$, $x \neq -3$, $x \neq -5$

Phương trình đã cho được viết: $\dfrac{1}{(x+1)(x+3)} + \dfrac{1}{(x+3)(x+5)} = \dfrac{1}{6}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+3}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+3} - \dfrac{1}{x+5}\right) = \dfrac{1}{6} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+5} = \dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow 3(x + 5 - x - 1) = (x + 1)(x + 5) \Leftrightarrow x^2 + 6x + 5 = 12$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = 16 \Leftrightarrow (x + 3)^2 = 4^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 3 = 4 \\ x + 3 = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \text{ (nhận)} \\ x = -7 \text{ (nhận)} \end{array}\right.$

Kết luận $S = \{1; -7\}$

2) $x^4 + 2x^3 + 8x^2 + 10x + 15 = 0$

$\Leftrightarrow x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 5x^2 + 10x + 15 = 0$

$\Leftrightarrow (x^4 + 5x^2) + (2x^3 + 10x) + (3x^2 + 15) = 0$

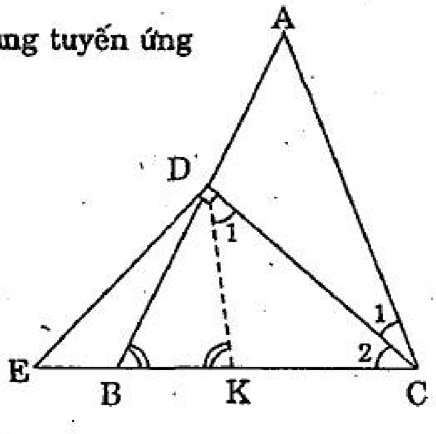
$\Leftrightarrow x^2(x^2 + 5) + 2x(x^2 + 5) + 3(x^2 + 5) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 5)(x^2 + 2x + 3) = 0$: phương trình vô nghiệm.

Vì $\begin{cases} x^2 + 5 \geq 5, \text{ với mọi } x \\ x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2 \geq 2 \text{ với mọi } x \end{cases}$

$\Rightarrow (x^2 + 5)(x^2 + 2x + 3) > 0$ với mọi x

Bài 4: Gọi K là trung điểm EC.



Tam giác vuông EDC vuông tại D có KD là trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $DK = \dfrac{EC}{2}$ và DK = KC.

Vậy tam giác KDC cân tại K $\Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{C}_2$

Mà $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ (do CD phân giác $\widehat{ACD}$)

$\Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{C}_1 = \hat{C}_2$

Ta có: $\widehat{DKB} = \hat{D}_1 + \hat{C}_2 = \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = \widehat{ACB}$

(góc ngoài tại đỉnh K của tam giác DKC)

= DBC (do tam giác ABC cân tại A)

$\Rightarrow$ tam giác DKB cân tại D $\Rightarrow BD = DK = \dfrac{EC}{2}$

Bài 5: *Cách 1:*

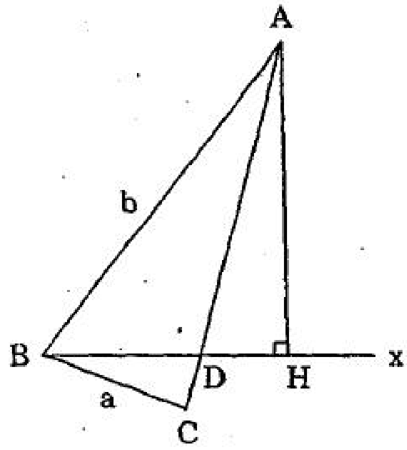
Dựng tia BX ở nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm A; $\widehat{CBx} = 20^0$, tia Bx cắt AC ở D, kẻ AH ⊥ Bx.

Tam giác ABC cân tại A, có:

$A = 20^0 \Rightarrow B = C = 80^0 \Rightarrow \widehat{ABH} = \widehat{ABC} - \widehat{CBx} = 80^0 - 20^0 = 60^0$

Vậy tam giác ABH là nửa tam giác đều và tam giác BDC cân tại B ($\widehat{BCD} = \widehat{BDC} = 80^0$).

Suy ra $BH = \frac{b}{2}$



$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = b^2 - \frac{b^2}{4} = \frac{3b^2}{4}$$

$$DH = BH - BD = \frac{b}{2} - a$$

Ta có $\Delta ABC \backsim \Delta BDC$

(hai tam giác cân có góc ở đỉnh bằng nhau)

$$\Rightarrow \frac{BC}{CD} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow CD = \frac{BC^2}{AC} = \frac{a^2}{b}$$

$$AD = AC - CD = b - \frac{a^2}{b}$$

mà $AD^2 = AH^2 + DH^2 = \frac{3b^2}{4} + \left(\frac{b}{2} - a\right)^2 = b^2 - ab + a^2$

vậy $\left(b - \frac{a^2}{b}\right)^2 = b^2 - ab + a^2 \Rightarrow b^4 + a^4 - 2a^2b^2 = b^4 - ab^3 + a^2b^2$

$\Rightarrow a(a^3 + b^3) = 3a^2b^2 \Rightarrow a^3 + b^3 = 3ab^2$

Cách 2: Dựng ΔABE đều sao cho E và C nằm cùng phía so với AB

Dựng ΔACD cân tại A : $\widehat{CAD} = 20^0$

$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta CAD = \Delta ADE$ (c – g – c)

Gọi F và G là giao điểm của BE với AD và AC.

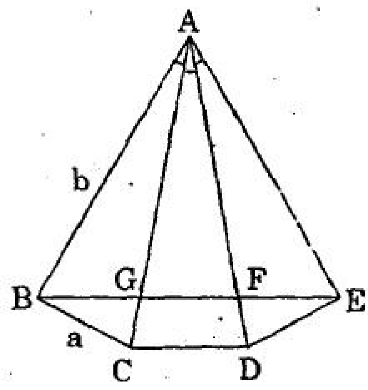
Khi đó $BG = EF = a$

Vì $\widehat{ABE} = 60^0$

nên $\widehat{ABG} = \widehat{ABC} - \widehat{ABE} = 20^0$ và ΔCBG cân tại B

$\Rightarrow \Delta BAC \backsim \Delta CBG$ (g–g) $\Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{CG}{BG} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{CG}{a} \Rightarrow CG = \frac{a^2}{b}$

và $AG = AC - CG = b - \frac{a^2}{b}$



ta có FG // CD nên theo định lý Talet ta có:

$$\frac{GF}{CD} = \frac{AG}{AC} \Rightarrow \frac{GF}{a} = \frac{b - \frac{a^2}{b}}{b} \Rightarrow GF = \frac{ab^2 - a^3}{b^2}$$

Vậy $BE = BG + GF + FE$

$$\Rightarrow b = 2a + \frac{ab^2 - a^3}{b^2}$$

$\Rightarrow b^3 = 2ab^2 - ab^2 - a^3 \Rightarrow a^3 + b^3 = 3ab^2$ (đpcm)

BỘ ĐỀ 22

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN TRƯỜNG LÊ QUÝ ĐÔN
QUẬN TÂN BÌNH, TPHCM – NĂM HỌC 1996 – 1997

Bài 1: Giải các phương trình:

1) $\left|2|2x - 5| - 3\right| = 7$

2) $\dfrac{315 - x}{105} + \dfrac{313 - x}{103} + \dfrac{311 - x}{101} = 3$

Bài 2: Cho biểu thức: $A = \dfrac{x^4 + x^3 + x + 1}{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1}$

1) Rút gọn A.

2) Chứng tỏ rằng A không âm với mọi giá trị của x.

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của A và giá trị tương ứng của x khi đó.

Bài 3: Cho hình vuông ABCD độ dài cạnh là a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC. Các đường thẳng DN và CM cắt nhau tại I.

1) Chứng minh tam giác CIN vuông.

2) Tính diện tích tam giác CIN theo a.

3) Chứng minh tam giác AID cân.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $\left|2|2x - 5| - 3\right| = 7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2|2x - 5| - 3 = 7 & (1) \\ 2|2x - 5| - 3 = -7 & (2) \end{array}\right.$

Giải phương trình (1):

$2|2x - 5| - 3 = 7 \Leftrightarrow 2|2x - 5| = 10 \Leftrightarrow |2x - 5| = 5$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 5 = 5 \\ 2x - 5 = -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 10 \\ 2x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x = 5 \\ x = 0 \end{array}\right.$

Phương trình (1) có hai nghiệm số là $x_1 = 5$; $x_2 = 0$

Giải phương trình (2): $2|2x - 5| - 3 = -7 \Leftrightarrow 2|2x - 5| = -4$

$\Leftrightarrow |2x - 5| = -2$

Vậy phương trình (2) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x_1 = 5$; $x_2 = 0$

2) $\dfrac{315 - x}{105} + \dfrac{313 - x}{103} + \dfrac{311 - x}{101} = 3$ (1)

$\Leftrightarrow \dfrac{315 - x}{105} - 1 + \dfrac{313 - x}{103} - 1 + \dfrac{311 - x}{101} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{210 - x}{105} + \dfrac{210 - x}{103} - 1 + \dfrac{210 - x}{101} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (210 - x)\left(\frac{1}{105} + \frac{1}{103} + \frac{1}{101}\right) = 0$

$\Leftrightarrow 210 - x = 0$ (vì $\frac{1}{105} + \frac{1}{103} + \frac{1}{101} > 0$)

$\Leftrightarrow x = 210$

Vậy phương trình (1) có một nghiệm số là $x = 210$

Bài 2: 1) $A = \frac{x^4 + x^3 + x + 1}{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1}$

Mẫu thức của biểu thức A là:

$x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1 = x^4 - x^3 + x^2 + x^2 - x + 1$

$= x^2(x^2 - x + 1) + (x^2 - x + 1) = (x^2 + 1)(x^2 - x + 1)$

Ta có $x^2 + 1 > 0$ với mọi x

$x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$, với mọi x

Do đó: $(x^2 + 1)(x^2 - x + 1) > 0$ với mọi x.

Vậy biểu thức A luôn có nghĩa với mọi giá trị của x.

1) Ta có:

$x^4 + x^3 + x + 1 = x^3(x + 1) + (x + 1) = (x + 1)(x^3 + 1)$

$= (x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1) = (x + 1)^2(x^2 - x + 1)$

Do đó: $A = \frac{(x + 1)^2(x^2 - x + 1)}{(x^2 + 1)(x^2 - x + 1)} = \frac{(x + 1)^2}{x^2 + 1}$

Ta có: $\begin{cases} (x + 1)^2 \geq 0 \text{ với mọi } x \\ x^2 + 1 > 0 \text{ với mọi } x \end{cases}$

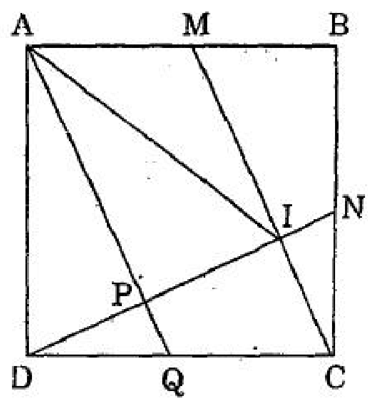
Do đó : $\frac{(x + 1)^2}{x^2 + 1} \geq 0$ hay $A \geq 0$ với mọi x.

2) Ta có: $\frac{(x + 1)^2}{x^2 + 1} \geq 0$ với mọi x.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Vậy biểu thức A đạt giá trị nhỏ nhất bằng 0 khi $x = -1$.

Bài 3:



1) Ta có : $BM = \frac{AB}{2}$; $CN = \frac{CB}{2}$

Mà AB = CB (ABCD là hình vuông)

nên BM = CN

Xét hai tam giác vuông OBM và CDN ta có:

BM = CN, BC = CD (ABCD là hình vuông)

nên $\Delta BMC = \Delta CND$ (c – g – c)

Suy ra $\widehat{BCM} = \widehat{NDC}$

mà $\widehat{NDC} + \widehat{CND} = 90^0$ (ΔCDN vuông tại C)

nên $\widehat{BCM} + \widehat{CND} = 90^0$

hay $\widehat{NCI} + \widehat{CNI} = 90^0$

Suy ra $\widehat{NIC} = 90^0$

hay ΔNIC vuông tại I.

2) Áp dụng định lý Pytago vào tam giác vuông CBM ta có:

$$CM^2 = CB^2 + BM^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$$

ΔCIN và ΔCBM có $\widehat{C}$ chung, $\widehat{CIN} = \widehat{CBM} = 90^0$

nên $\Delta CIN \backsim \Delta CBM$ (g – g)

Suy ra $$\frac{S_{\Delta CIN}}{S_{\Delta CBM}} = \frac{CN^2}{CM^2} = \frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{5a^2}{4}} = \frac{1}{5}$$

Do đó $$S_{\Delta CIN} = \frac{1}{5}S_{\Delta CBM} = \frac{1}{5}.\frac{1}{2}CB.BM = \frac{1}{5}.\frac{1}{2}.a.\frac{a}{2} = \frac{a^2}{20} \text{ (đvdt)}$$

3) Gọi Q là trung điểm của CD, AQ cắt DI tại P

Tứ giác AMCQ có AM//CQ (AB//CD) và

$AM = CQ$ ($AM = \frac{AB}{2}$; $CQ = \frac{CD}{2}$; $AB = CD$)

nên tứ giác AMCQ là hình bình hành.

Suy ra AQ // CM

mà $CM \perp DN$ (kết quả câu 1) nên $AQ \perp DN$

hay $AP \perp DI$

Tam giác DCI có Q là trung điểm CD; QP//CI (QA//CM), nên P là trung điểm của DI.

Tam giác ADI có AP vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến nên tam giác ADI cân tại A.

BỘ ĐỀ 23

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN 3, TPHCM – NĂM HỌC 1996 – 1997

Bài 1: Cho phân thức:

$$M = \frac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 3x + 6}{x^2 + 2x - 8}$$

1) Tìm tập xác định của M.

2) Tìm các giá trị của x để M = 0

3) Rút gọn M.

Bài 2: Tính x để A có giá trị nhỏ nhất:

$$A = \frac{x^2 - 2x + 1995}{x^2} \text{ với } x > 0$$

Bài 3: Chứng minh rằng: $(10n - 9n - 1) \vdots 27$ ($n \in N^*$)

Bài 4: Cho tứ giác lồi ABCD với bốn điều kiện sau đây:

- AB // CD
- AB < CD
- AB = BC = DA
- BD ⊥ BC

1) Tứ giác ABCD là hình gì? Tại sao?
2) Tính các góc trong của tứ giác ABCD.
3) So sánh diện tích của tam giác ABD với diện tích của tứ giác ABCD.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) M có nghĩa $\Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 \neq 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 + 9 \neq 9 \Leftrightarrow (x + 1)^2 \neq 9$

$\Leftrightarrow x + 1 \neq 3,\ x + 1 \neq -3 \Leftrightarrow x \neq 2,\ x \neq -4$

TXĐ = $\{x \setminus x \neq 2;\ x \neq -4\}$

2) TXĐ: $x \neq 2,\ x \neq -4$

M = 0 nên $x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 3x + 6 = 0$

$x^4(x - 2) + 2x^2(x - 2) - 3(x - 2) = 0$

$(x - 2)(x^4 + 2x^2 - 3) = 0$

$(x - 2)[(x^4 + 2x^2 + 1) - 4] = 0$

$(x - 2)[(x^2 + 1)^2 - 4] = 0$

$(x - 2)(x^2 + 1 + 2)(x^2 + 1 - 2) = 0$

$(x - 2)(x^2 + 3)(x^2 - 1) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ x^2 + 3 = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x \in \phi \\ x^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$$

$x = 2 \notin$ TXĐ (loại)

$x = 1 \in$ TXĐ (nhận)

$x = -1 \in$ TXĐ (nhận)

Do đó để M = 0 thì x = 1 hoặc x = −1

3) $M = \dfrac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 3x + 6}{x^2 + 2x - 8}$

$$= \frac{(x - 2)(x^2 + 3)(x^2 - 1)}{x^2 + 2x - 8} = \frac{(x - 2)(x^2 + 3)(x^2 - 1)}{(x^2 + 2x + 1) - 9}$$

$$= \frac{(x - 2)(x^2 + 3)(x^2 - 1)}{(x + 1 + 3)(x + 1 - 3)} = \frac{(x^2 + 3)(x^2 - 1)}{x + 4}$$

Bài 2: $A = \dfrac{x^2 - 2x + 1995}{x^2} = \dfrac{1995(x^2 - 2x + 1995)}{1995x^2}$

$= \dfrac{1995x^2 - 2x.1995 + 1995^2}{1995x^2} = \dfrac{1994x^2 + x^2 - 2x.1995 + 1995^2}{1995x^2}$

$= \dfrac{1994}{1995} + \dfrac{(x - 1995)^2}{1995x^2} \geq \dfrac{1994}{1995}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x - 1995 = 0 \Leftrightarrow x = 1995$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là: $\dfrac{1994}{1995} \Leftrightarrow x = 1995$

Bài 3:

Với n = 1 ta có $10^n - 9n - 1 = 0 \vdots 27$ đúng

Giả sử bài toán đúng khi n = k.

Ta có: $(10^k - 9k - 1) \vdots 27$

Cần chứng minh bài toán đúng khi n = k + 1

Ta có: $10^{k+1} - 9(k+1) - 1 = 10^{k+1} - 9k - 9 - 1$

$= 10(10^k - 9k - 1) + 81k$

Chia hết cho 27 vì $(10^k - 9k - 1) \vdots 27$ và $81k \vdots 27$

Vậy $(10^n - 9n - 1) \vdots 27$ với n = k + 1

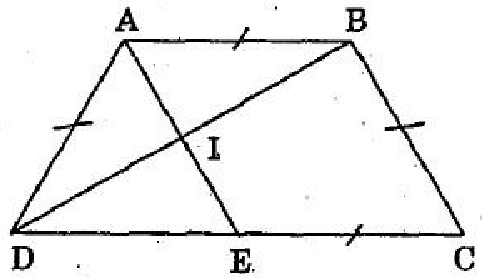
Do vậy $(10^n - 9n - 1) \vdots 27$ với mọi $n \in N^*$

Bài 4:

1) AB < CD. Trên cạnh CD lấy E sao cho CE = AB, nối A với E. Tứ giác ABCE có AB//EC, AB = EC nên là hình bình hành.

$\Rightarrow$ AE//BC, AE=BC

$\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{BCD}$, AE = AD



Tam giác ADE cân tại A

$\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{AED}$

Do đó $\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$

Hình thang ABCD (AB//CD)

có $\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$ nên là hình thang cân.

2) AE cắt BD tại I

AE // BC, BD $\perp$ BC (gt)

$\Rightarrow$ AE $\perp$ BD

ΔABD cân tại A (AB = AD) có AI là đường cao nên AI cũng là trung tuyến.

ΔBDC có IE//BC, I là trung điểm BD.

Do đó E là trung điểm DC.

AD = AE = AB, DE = EC = AB. Do đó: AD = AE = DC (= AB)

$\Rightarrow \Delta$ADE đều $\Rightarrow \widehat{ADC} = 60^0$

mà tứ giác ABCD là hình thang cân (AB // CD)

nên $\widehat{BCD} = \widehat{ADC} = 60^0$, $\widehat{DAB} = \widehat{CBA} = 180^0 - 60^0 = 120^0$

3) Gọi h là độ dài đường cao vẽ từ D đến AB.

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}h.AB$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}h(AB + DC) = \frac{1}{2}h(AB + 2AB) = \frac{3}{2}h.AB$$

Vậy $S_{ABCD} = 3S_{ABD}$

BỘ ĐỀ 24

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN 6, TPHCM – NĂM HỌC 1996 – 1997

Bài 1: Rút gọn rồi tính số trị của biểu thức:

$A = \dfrac{2a^3 - 12a^2 + 17a - 2}{a - 2}$ biết rằng a là nghiệm của phương trình:

$$|a^2 - 3a + 1| = 1$$

Bài 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của B và các giá trị của x tương ứng

$$B = (3x - 1)^2 - 4|3x - 1| + 5$$

Bài 3: Cho $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \geq \dfrac{1}{3}$.

Bài 4: Cho bốn điểm A, E, F, B theo thứ tự ấy trên một đường thẳng. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các hình vuông ABCD; EFGH.

1) Gọi O là giao điểm của AG và BH. Chứng minh rằng các tam giác OHE và OBC đồng dạng.

2) Chứng minh rằng các đường thẳng CE và DF cùng đi qua O.

Bài 5: Cho các điểm E và F nằm trên các cạnh AB và BC của hình bình hành ABCD sao cho AF = CE. Gọi I là giao điểm của AF và CE. Chứng minh rằng ID là đường phân giác của góc AIC.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: Giải phương trình: $|a^2 - 3a + 1| = 1$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 - 3a + 1 = 1 \\ a^2 - 3a + 1 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 - 3a = 0 \\ a^2 - 3a + 2 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a(a - 3) = 0 \\ (a - 1)(a - 2) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0; a = 3 \\ a = 1; a = 2 \end{array}\right.$$

$$A = \frac{2a^3 - 12a^2 + 17a - 2}{a - 2} \quad (a \neq 2)$$

$$= \frac{2a^3 - 4a^2 - 8a^2 + 16a + a - 2}{a - 2}$$

$$= \frac{2a^2(a-2) - 8a(a-2) + (a-2)}{a-2}$$

$$= \frac{(a-2)(2a^2 - 8a + 1)}{a-2} = 2a^2 - 8a + 1$$

- Với $a = 0$ ta có $A = 2.0^2 - 8.0 + 1 = 1$
- Với $a = 1$ ta có $A = 2.1^2 - 8.1 + 1 = -5$
- Với $a = 2$ (loại vì không thỏa điều kiện để biểu thức A có nghĩa)
- Với $a = 3$ ta có $A = 2.3^2 - 8.3 + 1 = -5$

Bài 2: Ta có: $(A)^2 = A^2$

Đặt $t = |3x - 1|$ $(t \geq 0)$ ta có $B = t^2 - 4t + 5 = (t-2)^2 + 1 \geq 1$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow |3x - 1| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - 1 = 2 \\ 3x - 1 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

Vậy min $B = 1 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -\dfrac{1}{3}$

Bài 3: Ta chứng minh bất đẳng thức sau:

$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$

$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$ (bất đẳng thức đúng)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Từ bất đẳng thức $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$,

ta có: $3a^2 + 3b^2 + 3c^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

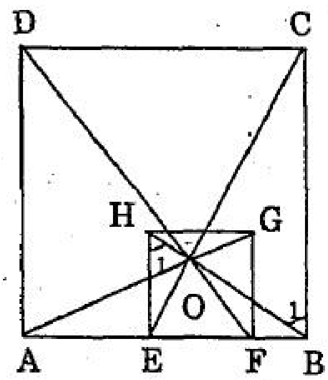
$\Leftrightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$

Do đó: $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 1$ vì $a + b + c = 1$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \dfrac{1}{3}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \dfrac{1}{3}$

Bài 4:



1) Ta có: HG // AB nên $\dfrac{OH}{OB} = \dfrac{HG}{AB}$

(hệ quả định lý Talet)

hay $\dfrac{OH}{OB} = \dfrac{HE}{BC}$ (HE = HG, AB = BC)

Xét ΔOHE và ΔOBC, ta có: $\dfrac{OH}{OB} = \dfrac{HE}{BC}$.

$\hat{H}_1 = \hat{B}_1$ (2 góc so le trong: HE // BC)

Vậy $\Delta OHE \backsim \Delta OBC$ (c–g–c)

2) Chứng minh tương tự câu a, ta có:

$\Delta AOD \backsim \Delta GOF$ (c – g – c)

cho ta $\widehat{AOD} = \widehat{GOF}$

mà $\widehat{AOD} + \widehat{DOG} = 180^0$ (hai góc kề bù)

nên $\widehat{GOF} + \widehat{DOG} = 180^0$ hay $\widehat{DOF} = 180^0$

Suy ra ba điểm D, O, F thẳng hàng.

Vậy DF đi qua O.

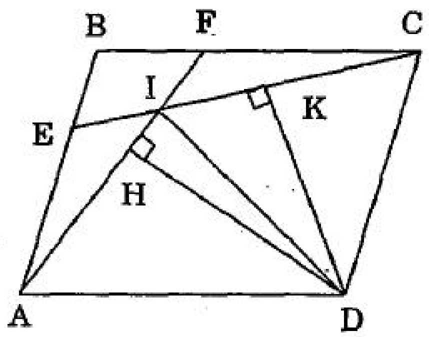
Chứng minh tương tự cũng có CE đi qua O.

Bài 5: Vẽ $FQ \perp AD$; $DH \perp AF$; $DK \perp CE$ ($Q \in AD$, $H \in AF$, $K \in CE$)

$S_{ABCD} = FQ.AD$

$S_{AFD} = \frac{1}{2} FQ.AD = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ (1)

Chứng minh tương tự ta có: $S_{DEC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ (2)



Từ (1) và (2) suy ra $S_{AFD} + S_{DEC}$

Mà $S_{AFD} = \frac{1}{2} DH.AF.S_{DEC} = \frac{1}{2} DK.EC$

Suy ra: $\frac{1}{2} DH.AF = \frac{1}{2} DK.EC$

mà $AF = EC$ (gt)

nên $DH = DK$

Vậy D nằm trên tia phân giác của $\widehat{AIC}$.

Suy ra ID là tia phân giác của góc $\widehat{AIC}$.

BỘ ĐỀ 25

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 8 TRƯỜNG THCS NGUYỄN DU QUẬN 1, TPHCM – NĂM HỌC 1996 – 1997

(ĐỀ THỨ NHẤT)

Bài 1: Tìm số có hai chữ số mà bình phương của nó bằng lập phương của tổng các chữ số của nó.

Bài 2: Cho a, b, c là số đo ba cạnh của một tam giác.

Xác định hình dạng của tam giác để biểu thức sau:

$A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{b+a-c}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 3:

Cho ba số x, y, z thỏa điều kiện $x + y + z = 0$ và $xy + yz + zx = 0$

Hãy tính giá trị của biểu thức : $S = (x-1)^{1995} + y^{1996} + (z+1)^{1997}$

Bài 4: Cho hình vuông ABCD cạnh a. Điểm M di động trên cạnh AB, N di động trên cạnh AD sao cho chu vi tam giác AMN luôn luôn không đổi và bằng 2a. Xác định vị trí của MN để diện tích tam giác CMN đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.

Bài 5: Cho tam giác ABC có $3\widehat{A} + 2\widehat{B} = 180^0$

Tính số đo các cạnh tam giác biết số đo ấy là ba số tự nhiên liên tiếp.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: Số cần tìm có dạng $\overline{ab}$, với a, b ∈ N; $1 \le a \le 9; 0 \le b \le 9$

Theo đề bài ta có: $\overline{ab}^2 = (a + b)^3 \Leftrightarrow (10a + b)^2 = (a + b)^3$ (1)

Hệ thức (1) chứng tỏ $\overline{ab}$ là một số lập phương và (a + b) là số chính phương.

Do $10 \le \overline{ab} \le 99 \Rightarrow \overline{ab} = 27$ hoặc $\overline{ab} = 64$

Nếu $\overline{ab} = 27 \Leftrightarrow a + b = 9$, chính phương

Nếu $\overline{ab} = 64 \Leftrightarrow a + b = 10$, không chính phương (loại).

Vậy số phải tìm là $\overline{ab} = 27$.

Bài 2: *Cách 1:*

Đặt $x = b + c - a$, $y = a + c - b$ và $z = a + b - c$

($x, y, z > 0$ do a, b, c là độ dài ba cạnh tam giác)

Khi đó $x + y + z = a + b + c$

và $a = \dfrac{y+z}{2}$; $b = \dfrac{x+z}{2}$; $c = \dfrac{x+y}{2}$

Vậy $A = \dfrac{y+z}{2x} + \dfrac{x+z}{2y} + \dfrac{x+y}{2z} = \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)+\left(\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x}\right)+\left(\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}\right)\right]$

Mà $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \ge 2 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+y^2}{xy} \ge 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \ge 2xy$ (vì $x, y > 0$)

$\Leftrightarrow (x - y)^2 \ge 0$ (đúng)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$

Lý luận tương tự: $\dfrac{x}{z} + \dfrac{z}{x} \ge 2$ và $\dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{y} \ge 2$

Suy ra $A \ge \dfrac{1}{2}(2 + 2 + 2) = 3$

$A = 3 \Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow b + c - a = a + b - c \Leftrightarrow a = b = c$

Vậy min A = 3 ⇔ Tam giác ABC đều.

Cách 2:

Ta có: $A = \dfrac{a}{b+c-a} + \dfrac{b}{a+c-b} + \dfrac{c}{a+b-c}$

$= \left(\dfrac{a}{b+c-a}+\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{b}{a+c-b}+\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{c}{a+b-c}+\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{3}{2}$

$$= \frac{a+b+c}{2(b+c-a)} + \frac{a+b+c}{2(a+c-b)} + \frac{a+b+c}{2(a+b-c)} - \frac{3}{2}$$

$$= \frac{a+b+c}{2}.\left(\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{a+c-b} + \frac{1}{a+b-c}\right) - \frac{3}{2}$$

Với x, y, z > 0 ta có bất đẳng thức : $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9$

Thật vậy:

$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9 \Leftrightarrow 3 + \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right) + \left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right) \geq 9$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right) + \left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}-2\right) + \left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}-2\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{xy} + \frac{(y-z)^2}{yz} + \frac{(x-z)^2}{xz} \geq 0$ (đúng)

Vì x, y, z > 0 nên $\frac{(x-y)^2}{xy} \geq 0$; $\frac{(y-z)^2}{yz} \geq 0$; $\frac{(x-z)^2}{xz} \geq 0$

Đặt $x = b + c - a$; $y = a + c - b$ và $z = a + b - c$ (x, y, z > 0)

$\Leftrightarrow x + y + z = a + b + c$

thì $A = \frac{x+y+z}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) - \frac{3}{2} \geq \frac{9}{2} - \frac{3}{2} = 3$

$A = 3 \Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow a = b = c$

min $A = 3 \Leftrightarrow$ Tam giác ABC đều.

Bài 3:

Ta có: $x + y + z = 0 \Leftrightarrow (x+y+z)^2 = 0$

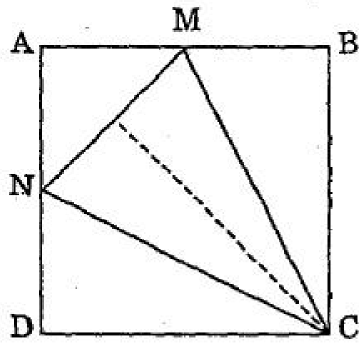
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 0$

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ (vì $xy + yz + zx = 0$)

$\Leftrightarrow x = y = z = 0$

Lúc đó: $S = (-1)^{1995} + 0^{1996} + 1^{1997} = -1 + 0 + 1 = 0$

Bài 4:



Ta có: CH = BC = DC = a

Và $\Delta CBM = \Delta CHM = \Delta CHN$

(xem lời giải bài 3, bộ đề 14)

Ta có $S_{BMC} = S_{CMH}$, $S_{CDN} = S_{CHN}$

$\Rightarrow S_{BMC} + S_{CDN} = S_{CMN}$

Suy ra: $2S_{CMN} = S_{ABCD} - S_{AMN}$

$\Rightarrow S_{CMN} = \frac{1}{2}(a^2 - S_{AMN}) \leq \frac{1}{2}a^2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} M \equiv A \\ N \equiv D \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} M \equiv B \\ N \equiv A \end{cases}$ thì max $S_{CMN} = \frac{a^2}{2}$

Bài 5:

Trên AB lấy điểm D : AD = AC

Vì $3\widehat{A} + 2\widehat{B} = 180^0 = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} \Rightarrow \widehat{C} = 2\widehat{A} + \widehat{B}$

$\Rightarrow \widehat{C} > \widehat{A}$ và $\widehat{C} > \widehat{B} \Rightarrow AB > BC$ và $AB > AC$

Vậy D nằm giữa A và B

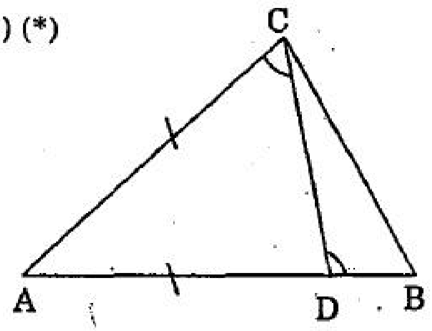
Ta có: ΔACD cân tại A nên $ADC = \dfrac{180^0 - \widehat{A}}{2}$

Mà $180^0 - \widehat{A} = 2(\widehat{A} + \widehat{B})$ (do $3\widehat{A} + 2\widehat{B} = 180^0$)

Suy ra $\widehat{ADC} = \widehat{A} + \widehat{B} \Rightarrow \widehat{CDB} = 180^0 - (\widehat{A} + \widehat{B}) = \widehat{C}$

Vậy $\Delta ABC \backsim \Delta CBD$ (g–g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BC}{BD} \Rightarrow BC^2 = AB.BD = AB(AB - AC)$ (*)



Do AB, BC, AC là ba số nguyên liên tiếp và AB = max {AB, BC, AC}

nên AB = BC + 1 hoặc AB = BC + 2

1) Nếu AB = BC + 1 thì

AC = BC − 1 thay vào (*) ta có;

$BC^2 - 2BC - 1 = 0$ phương trình này không có nghiệm nguyên.

2) Nếu AB = BC + 2 thì AC = BC + 1

Thay vào (*) ta có:

$BC^2 - BC - 2 = 0 \Leftrightarrow (BC - 2)(BC + 1) = 0 \Leftrightarrow BC = 2$ (do $BC > 0$)

Vậy BC = 2. AC = 3 và AB = 4

BỘ ĐỀ 26

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 8 TRƯỜNG THCS NGUYỄN DU QUẬN 1, TPHCM – NĂM HỌC 1996 – 1997

(ĐỀ THỨ HAI)

Bài 1: Chứng minh rằng nếu:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a + b + c} \text{ thì } (a + b)(b + c)c + a) = 0$$

Bài 2: Giải phương trình:

1) $x^4 + 7x^2 - 12x + 5 = 0$

2) $3|x - 1| - 2|x - 2| + |x - 1| = 4$

Bài 3: Hai đội bóng bàn của hai trường A và B thi đấu giao hữu. Biết rằng mỗi đối thủ của đội A phải lần lượt gặp các đối thủ của đội B một lần và số trận đấu gấp đôi tổng số đấu thủ của hai đội. Tính số đấu thủ của mỗi đội.

Bài 4: Cho hình bình hành ABCD. Trên cạnh CD và BC lấy điểm M, N, sao cho BM = DN. Gọi I là giao điểm của BM và DN. Chứng minh IA là phân giác của góc $\widehat{DIB}$.

Bài 5: Cho hình bình hành ABCD, với AC > DB. Gọi E và F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ C đến các đường thẳng AB và AD. Chứng minh rằng: $AB.AE + AD.AF = AC^2$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: Với a, b, c khác không và $a + b + c \neq 0$ ta có

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=0$$

(Xem lời giải bài 1, bộ đề 14)

Bài 2:

1) $x^4 + 7x^2 - 12x + 5 = 0$

$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 + 9x^2 - 12x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 + (3x - 2)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1=0 \\ 3x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ x=\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right. \\ x=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Phương trình vô nghiệm.

2) Ta lập bảng xét dấu:

x		1		2		3	
$3\lvert x-3\rvert$	$-3x+9$		$-3x+9$		$-3x+9$	0	$3x+9$
$-2\lvert x-2\rvert$	$2x-4$		$2x-4$	0	$-2x+4$		$-2x+4$
$\lvert x-1\rvert$	$1-x$	0	$x-1$		$x-1$		$x-1$

- Với $x < 1$: phương trình có dạng $-2x + 6 = 4 \Leftrightarrow x = 1$ (loại)
- Với $1 \leq x < 2$: phương trình có dạng: $0x + 4 = 4 \Leftrightarrow 0x = 0$ phương trình có nghiệm $1 \leq x < 2$
- Với $2 \leq x < 3$: phương trình có dạng $-4x + 12 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ (nhận)
- Với $x \geq 3$: phương trình có dạng: $2x - 6 = 4 \Leftrightarrow x = 5$ (nhận)

Vậy phương trình có nghiệm : $1 \leq x \leq 2$; $x = 5$

Bài 3: Gọi a và b là số đối thủ ở đội trường A và trường B, với $a, b \in N^*$

Theo đề bài ta có: $ab = 2(a + b) \Leftrightarrow (a - 2)(b - 2) = 4$

Nhận xét: Do a, b $\in$ N $\Rightarrow$ a – 2 $\in$ Z; b – 2 $\in$ Z

a – 2	– 1	– 2	2	4
b – 2	– 4	– 2	2	1
a	1	0	4	6
b	– 2	0	4	3
	loại		nhận	

Suy ra (a – 2) | 4 vai trò a, b bình đẳng nên không mất tính tổng quát, giả sử a ≥ b.

Vậy (a;b) = (4; 4); (6; 3); 3; 6)

Trả lời: số đấu thủ của hai đội A, B có thể là (3,6) ; (4,4) hoặc (6,3).

Bài 4: Sử dụng tính chất hai tam giác có chung đáy còn hai đỉnh còn lại nằm trên đường thẳng song song với đáy chung thì có diện tích bằng nhau.

Thật vậy, xét ΔABC và ΔA'BC có AA'//BC

Kẻ AH ⊥ BC và A'K ⊥ BC

$\Rightarrow$ AH // A'K, do AA'//BC nên AH = A'K

Ta có: $\begin{cases} S_{ABC} = \dfrac{1}{2}BC.AH \\ S_{A'BC} = \dfrac{1}{2}BC.A'K \end{cases} \Rightarrow S_{ABC} = S_{A'BC}$

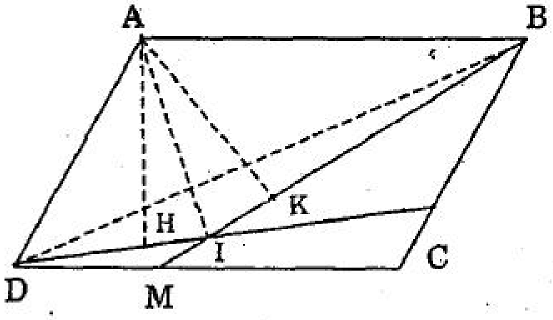
Kẻ AH ⊥ DN, AK ⊥ BM

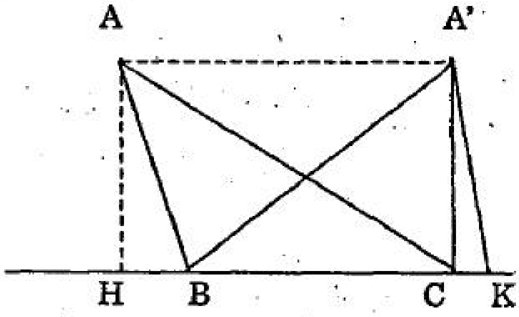
Ta có: $\begin{cases} S_{MAB} = S_{ABD} \text{ (chung AB, DM//AB)} \\ S_{NAC} = S_{ABD} \text{ (chung AD, BN//AD)} \end{cases} \Rightarrow S_{MAB} = S_{NAD}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}AK.MB = \frac{1}{2}AH.ND \Rightarrow AK = AH \text{ (do MB = ND (gt))}$$

nên A ở trên đường phân giác của DIB.

Vậy IA là phân giác $\widehat{DIB}$.





Nhận xét: Khi cho M, N di động trên DC và BC của ΔBCD saó cho MB = ND thì IA là phân giác của $\widehat{DIB}$ luôn đi qua A.

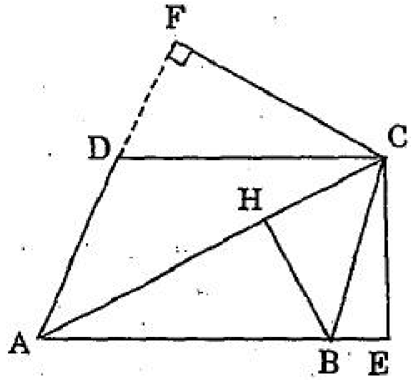
Từ đó ta có bài toán: Cho ΔABC, hai điểm M và N theo thứ tự di động trên hai cạnh AB và AC sao cho BN = CM. Gọi I là giao điểm của BN và CM. Chứng minh rằng đường phân giác trong của BIC luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 5: Kẻ $BH \perp AC$, do $AC > AB$ nên H nằm giữa A, C

Xét ΔACE và ΔABH có $\widehat{AHB} = \widehat{AEC} = 90^0$, $\widehat{CAE}$ chung

$\Rightarrow \Delta ACE \backsim \Delta ABH$ (g–g)

$\Rightarrow \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AE}{AH} \Rightarrow AE.AB = AH.AC$ (1)



Vì AF // BC nên $\widehat{HCB} = \widehat{CAF}$ (so le trong)

Xét ΔACB và ΔACF có:

$\widehat{AFC} = \widehat{CHB} = 90^0$, $\widehat{HCB} = \widehat{CAF}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta CBH \backsim \Delta ACF$ (g–g)

$\Rightarrow \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AF}{CH} \Rightarrow \dfrac{AC}{AD} = \dfrac{AF}{CH}$

(Vì AD = BC – cạnh đối hình bình hành)

$\Rightarrow AD.AF = AC.CH$ (2)

Từ (1) và (2) có: $AE.AB + AD.AF$

$= AH.AC + CH.AC = (AH + CH)AC = AC^2$

BỘ ĐỀ 27

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUẬN 1, TPHCM NĂM HỌC 1996 – 1997

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử:

1) $2a^2b + 4ab^2 - a^2c + ac^2 - 4b^2c + 2bc^2 - 4abc$

2) $x^2 + x - 6$

Bài 2: Cho a, b, c là ba số đôi một khác nhau, chứng minh rằng:

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-a)(b-c)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a}$$

Bài 3: Giải phương trình : $3|x-3| - 2|x-2| + |x-1| = 4$

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông cân tại đỉnh A. Lấy điểm M tùy ý trên cạnh AC. kẻ tia Ax vuông góc với BM. Gọi H là giao điểm của Ax với BC và K là điểm đối xứng với C qua H. Kẻ tia Ky vuông góc với BM. Gọi I là giao điểm của Ky với AB. Tính góc AIM.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $2a^2b + 4ab^2 - a^2c + ac^2 - 4b^2c + 2bc^2 - 4abc$

$= 2a^2b + 4ab^2 - a^2c - 2abc + ac^2 + 2bc^2 - 4b^2c - 2abc$

$= 2ab(a + 2b) - ac(a + 2b) + c^2(a + 2b) - 2bc(a + 2b)$

$= (a + b)(2ab - ac + c^2 - 2bc) = (a + 2b)[a(2b - c) - c(2b - c)]$

$= (a + 2b)(2b - c)(a - c)$

2) $x^2 + x - 6 = x^2 - 2x + 3x - 6 = x(x - 2) + 3(x - 2) = (x + 3)(x - 2)$

Bài 2: Với a, b, c là ba số khác nhau đôi một.

Ta có:

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} = \frac{(a-c)-(a-b)}{(a-b)(a-c)} = \frac{1}{a-b} - \frac{1}{a-c} = \frac{1}{a-b} + \frac{1}{c-a}$$

$$\frac{c-a}{(b-a)(b-c)} = \frac{(b-a)-(b-c)}{(b-a)(b-c)} = \frac{1}{b-c} - \frac{1}{b-a} = \frac{1}{b-c} + \frac{1}{a-b}$$

$$\frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{(c-b)-(c-a)}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{c-a} - \frac{1}{c-b} = \frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c}$$

Cộng vế với vế các đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-a)(b-c)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a}$$

Bài 3: (Xem lời giải bài 2, bộ đề 26)

Bài 4:

Cách 1: Gọi D là giao điểm của tia KI và đường AC.

Ta có: $IK \perp BM$, $AH \perp BM$ (gt) nên $IK // AH$

$K = S_H(C)$ nên $HK = HC$

$\Rightarrow AD = AB = AC$

$\Rightarrow \Delta BDC$ vuông tại B, nghĩa là $BC \perp BD$

Trong ΔBDM có:

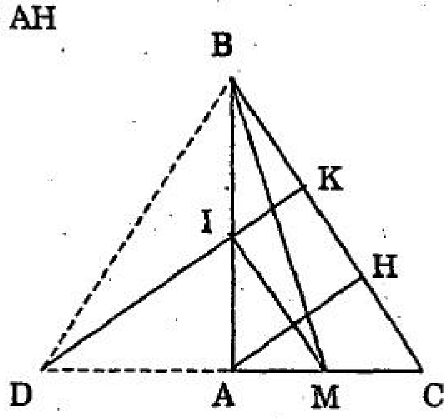
$AB \perp DM$, $DK \perp BM$ và $AB \cap DK = \{I\}$

nên là I trực tâm của tam giác

$\Rightarrow IM \perp BD$

Suy ra $IM // BC$ (vì IM, BC cùng vuông góc BD)

$\Rightarrow \widehat{AIM} = \widehat{ABC} = 45^0$ (đồng vị)



Cách 2: Ta có $IK \perp MB$; $AH \perp MB$ (gt) nên $IK//AH$

Trên tia đối của tia AB lấy F sao cho AF = AI

Mà $K = S_H(C) \Rightarrow HK = HC$

Vậy CF//HA//KI (Định lý Talet)

Vì $BM \perp AH$ (gt) $\Rightarrow BM \perp CF$

Xét ΔABM và ΔACF có: AB = AC

(do ΔABC vuông cân tại A)

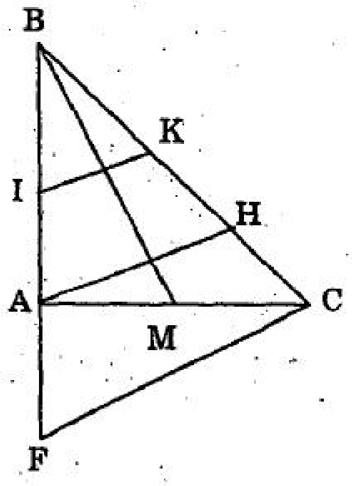
$\widehat{BAC} = \widehat{CAF} = 90^0$; $\widehat{ABM} = \widehat{ACF}$

(góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$\Rightarrow \Delta ABM = \Delta ACF$ (g–c–g)

$\Rightarrow AM = AF = AI$

Vậy ΔIAM vuông cân tại A, nên $\widehat{AIM} = 45^0$.



BỘ ĐỀ 28

ĐỀ THI HỌC BỔNG TRƯỜNG THCS NGUYỄN DU
QUẬN I TPHCM – THÁNG 11 NĂM HỌC 1996 – 1997

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử:

1) $x^4 + 1997x^2 + 1996x + 1997$

2) $bc(b + c) + ca(c + a) + ba(a + b) + 2abc$

Bài 2: Tính giá trị của biểu thức $A = yz + zx + xy + 2xyz$ với

$$x = \frac{a}{b+c}; y = \frac{b}{a+c}; z = \frac{c}{b+a}$$

Bài 3: Tìm bốn số tự nhiên liên tiếp, biết tích của chúng là 57120.

Bài 4: Cho hình vuông ABCD. Trên các tia đối CB và DC, lấy các điểm M, N sao cho DN = BM. Các đường thẳng song song kẻ từ M với AN và từ N với AM cắt nhau tại F. Chứng minh:

1) Tứ giác ANFM là hình vuông.

2) Điểm F nằm trên tia phân giác của MCN và $\widehat{ACF} = 90^0$.

3) Ba điểm B, O, D thẳng hàng và tứ giác BOFC là hình thang (O là trung điểm AF).

Bài 5: Cho đoạn thẳng PQ = a. Dựng một hình vuông PABC sao cho P là đỉnh, Q là trung điểm của AB.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

Cách 1: $x^4 + 1997x^2 + 1996x + 1997$

$= (x^4 - x) + 1997x^2 + 1997x + 1997 = x(x^3 - 1) + 1997(x^2 + x + 1)$

$= x(x - 1)(x^2 + x + 1) + 1997(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x - 1997)$

Cách 2: $x^4 + 1997x^2 + 1996x + 1997$

$= (x^4 + x^2 + 1) + (1996x^2 + 1996x + 1996)$

$= [(x^4 + 2x^2 + 1) - x^2] + 1996(x^2 + x + 1)$

$= [(x^2 + 1)^2 - x^2] + 1996(x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + 1996(x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x+ 1997)$

2) *Cách 1:* $bc(b + c) + ac(a + c) + ab(a + b) + 2abc$

$= bc(b + c) + ac(a + c) + abc + ab(a + b) + abc$

$= bc(b + c) + ac(a + b + c) + ab(a + b + c)$

$= bc(b + c) + a(a + b + c)(b + c)$

$= (b + c)(bc + a^2 + ab + ac) = (b + c)[b(a - c) + a(a + c)]$

$= (a + b(b + c)(a + c)$

Cách 2: $bc(b + c) + ac(a + c) + ab(a + b) + 2abc$

$= bc(b + c) + a^2c + ac^2 + a^2b + ab^2 + 2abc$

$= bc(b + c) + (a^2c + a^2b) + (ac^2 + ab^2 + 2abc)$

$= bc(b + c) + a^2(b + c) + a(c^2 + b^2 + 2bc)$

$= bc(b + c) + a^2(b + c) + a(b + c)^2 = (b + c)(bc + a^2 + ab + ac)$

$= (b + c)[b(a + c) + a(a + c)] = (a + b)(b + c)(a + c)$

Bài 2: $A = xy + yz + zx + 2xyz$, với $(a + b)(b + c)(a + c) \neq 0$

Thế các giá trị x, y, z vào:

$$A = \frac{ab}{(b+c)(c+a)} + \frac{bc}{(c+a)(a+b)} + \frac{ac}{(b+c)(c+a)} + \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$= \frac{ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c) + 2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$= \frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{(a+b)(b+c)(a+c)} = 1 \text{ (dựa vào kết quả bài 1)}$$

Bài 3: Gọi n, n + 1, n + 2 và (n + 3) là bốn số tự nhiên liên tiếp.

Theo đề bài, ta có: $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) = 57120$

$\Leftrightarrow (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) = 57120$

$\Leftrightarrow (n^2 + 3n + 1 - 1)(n^2 + 3n + 1 + 1) = 57120$

$\Leftrightarrow (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) = 57120$

$\Leftrightarrow (n^2 + 3n + 1 - 1)(n^2 + 3n + 1 + 1) = 57120$

$\Leftrightarrow (n^2 + 3n + 1)^2 - 1 = 57120$

$\Leftrightarrow (n^2 + 3n + 1)^2 = 57121 = 239^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n^2 + 3n + 1 = 239 \\ n^2 + 3n + 1 = -239 \end{array}\right.$$

(vô nghiệm vì $n \in N$ nên $n^2 + 3n + 1 > 0$)

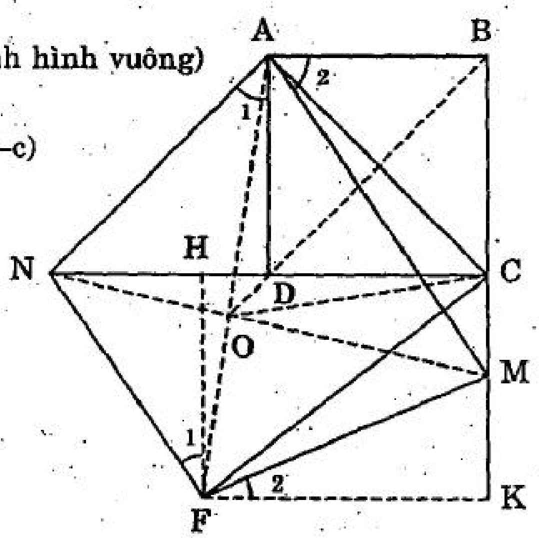
$\Leftrightarrow n^2 + 3n - 238 = 0 \Leftrightarrow n^2 + 17n - 14n - 238 = 0$

$\Leftrightarrow n(n + 17) - 14(n + 17) = 0\ (n + 17)(n - 14) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = -17 \text{ (loại)} \\ n = 14 \text{ (nhận)} \end{array}\right.$$

Vậy bốn số tự nhiên liên tiếp cần tìm là 14, 15, 16 và 17.

Bài 4: 1) Tứ giác ANFM là hình vuông



Xét ΔDAN và ΔBAM có $AD = AB$ (cạnh hình vuông)

$\widehat{ADN} = \widehat{ABM} = 90^0$

$BM = DN$ (gt) $\Rightarrow \Delta DAN = \Delta BAM$ (c–g–c)

Suy ra $AN = AM$ và $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

Ta có: $\widehat{NAM} = \hat{A}_1 + DAM$

$= \hat{A}_2 + \widehat{DAM} = \widehat{DAB} = 90^0$

Tứ giác ANFM có: MF//AN, AM//NF (gt), $\widehat{NAM} = 90^0$

nên tứ giác ANFM là hình chữ nhật, mặt khác $AN = AM$

$\Rightarrow$ ANFM là hình vuông

2) F ∈ là tia phân giác $\widehat{MCN}$; $\widehat{ACF} = 90^0$ kẻ FH ⊥ CN và FK ⊥ BM

Suy ra tứ giác CHFK là hình chữ nhật ($\widehat{H} = \widehat{C} = \widehat{K} = 90^0$)

nên FH ⊥ FK

Vậy $\widehat{F}_1 = \widehat{F}_2$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)

Xét ΔHFN và ΔKFM có: $\widehat{NHF} = \widehat{MKF} = 90^0$

NF = MF (cạnh hình vuông)

$\widehat{F}_1 = \widehat{F}_2$ (chứng minh trên)

Do đó: ΔHFN = ΔKFM suy ra FH = FK

Vậy CF là phân giác $\widehat{NCM}$, nghĩa là F thuộc tia phân giác của $\widehat{MCN}$.

Do tứ giác ABCD là hình vuông nên CA là phân giác $\widehat{NCB}$.

Suy ra $\widehat{ACF} = 90^0$ (hai tia phân giác của hai góc kề bù).

3) Ba điểm B, O, D thẳng hàng và tứ giác BOFC hình thang?

Hình vuông ANFM có hai đường chéo AF và MN cắt nhau tại trung điểm mỗi đường mà O là trung điểm AF nên O cũng là trung điểm điểm của MN.

ΔCMN có $\widehat{C} = 90^0$, ON = OM ⇒ OC = $\dfrac{MN}{2}$ = OA ⇒ O ∈ trung trực của AC,

suy ra O ∈ BD là trung trực của AC, nghĩa là ba điểm O, B, D thẳng hàng.

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \text{ (tính chất đường chéo hình vuông)} \\ CF \perp AC \text{ (chứng minh trên)} \end{cases} \Rightarrow OB \parallel CF$

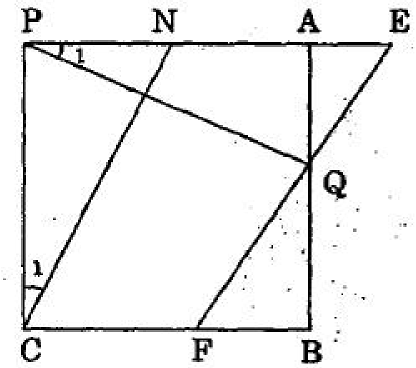
Vậy tứ giác BOFC là hình thang.

Bài 5:

– Qua Q dựng một đoạn thẳng EF ⊥ PQ, sao cho EQ = QF = $\dfrac{PQ}{2} = \dfrac{a}{2}$

– Dựng QA ⊥ PE, từng F dựng FB ⊥ AQ.

– Dựng PC ⊥ FB



PABC là hình vuông cần dựng.

Thật vậy, theo cách dựng

PABC là hình chữ nhật.

Từ C kẻ CN // EF

suy ra CN = EF = 2QE = a = PQ

Do PQ ⊥ EF

nên $\widehat{C}_1 = \widehat{P}_1$

(góc có cạnh tương ứng vuông góc)

Suy ra ΔPNC = ΔAQP

($\widehat{P} = \widehat{A} = 90^0$, CN = PQ – a; $\widehat{C}_1 = \widehat{P}_1$)

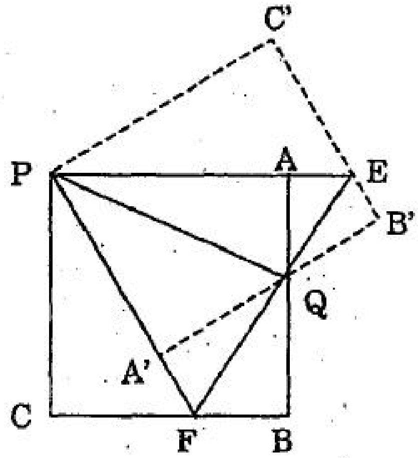
$\Rightarrow$ PA = PC

Vậy hình chữ nhật PABC có hai cạnh kề PA = PC nên PABC là hình vuông.

Mặt khác $\Delta BQF = \Delta AQE$

($\widehat{A} = \widehat{B} = 90^0$, $QF = QE = \frac{a}{2}$, $\widehat{FQB} = \widehat{AQE}$).

Suy ra QA = QB, nghĩa là Q là trung điểm AB. Bài toán có hai nghiệm, hình đối xứng nhau qua PQ.



BỘ ĐỀ 29

ĐỀ THI HỌC BỔNG TRƯỜNG THCS NGUYỄN DU QUẬN 1, TP.HCM THÁNG 11 NĂM HỌC 1996–1997

(ĐỀ DỰ TRỮ)

Bài 1: Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa điều kiện $a^2 - b^2 = c^2 - d^2$. Chứng minh S = a + b + c + d là hợp số.

Bài 2: Chứng minh rằng nếu a, b là hai số dương thỏa điều kiện: a + b = 1 thì:

$$\frac{a}{b^3 - 1} - \frac{b}{a^3 - 1} = \frac{2(b - a)}{a^2b^2 + 3}$$

Bài 3: Phân tích đa thức thành phân tử: $x^4 + 1996x^2 + 1995x + 1996$

Bài 4: Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh CD lấy một điểm M bất kỳ. Các tia phân giác của các góc BAM và DAM lần lượt cắt cạnh BC tại E và cắt cạnh CD tại F. Chứng minh AM vuông góc với EF.

Bài 5: Cho tam giác ABC (AB khác AC). Trên tia đối BA lấy điểm D, trên tia đối của tia CA lấy điểm E sao cho BD = CE. Gọi N là trung điểm của cạnh BC. Vẽ hình bình hành ECNK. Gọi M là giao điểm của DE và FK. Tìm quỹ tích điểm M khi D và E di động.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

Từ $a^2 - b^2 = c^2 - d^2 \Leftrightarrow a^2 + d^2 = b^2 + c^2$

Xét hiệu: $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (a + b + c + d)$

$= (a^2 - a) + (b^2 - b) + (c^2 - c) + (d^2 - d) \;\vdots\; 2$ vì $\forall x \in Z$

Ta có: $x^2 - x = x(x - 1) \;\vdots\; 2$

Thay $a^2 + d^2 = b^2 + c^2$, ta có: $2(a^2 + d^2) - (a + b + c + d) \;\vdots\; 2$

mà $2(a^2 + d^2) \;\vdots\; 2 \Rightarrow (a + b + c + d) \;\vdots\; 2$

Vì a + b + c + d > 2 suy ra a + b + c + d là hợp số.

Bài 2: Với a, b > 0 : a + b = 1

Biến đổi:

$$\frac{a}{b^3-1}-\frac{b}{a^3-1}=\frac{a(a^3-1)-b(b^3-1)}{(b^3-1)(a^3-1)}$$

$$=\frac{(a^4-b^4)-(a-b)}{(b-1)(b^2+b+1)(a-1)(a^2+a+1)}$$

$$=\frac{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)-(a-b)}{ab(b^2+b+1)(a^2+a+1)}\ (\text{do } a+b=1)$$

$$\frac{(a-b)(a^2+b^2-1)}{ab[a^2b^2+ab(a+b)+a^2+b^2+ab+(a+b+1]}$$

$$=\frac{(a-b)(a^2-a+b^2-b)}{ab[a^2b^2+(a+b)^2+2]}$$

$$=\frac{(a-b)[a(a-1)+b(b-1)]}{ab(a^2b^2+3)}=\frac{(a-b)[a(-b)+b(-a)]}{ab(a^2b^2+3)}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}$$

Bài 3:

$x^4 + 1996x^2 + 1995x + 1996$

$= x^4 + x^3 + x^2 + 1995(x^2 + x + 1) - (x^3 - 1)$

$= x^2(x^2 + x + 1) + 1995(x^2 + x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1996)$

Bài 4: *Cách 1:* Bằng phương pháp phản chứng

Giả sử ngược lại EF không vuông góc với AM vẽ EP $\perp$ AM và FQ $\perp$ AM

Xét ΔABE và ΔAPE có: $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$; AE chung: $\widehat{B} = \widehat{P} = 90^0$

$\Rightarrow \Delta ABE = \Delta APE$ (trường hợp đặc biệt)

Suy ra AB = AP (1)

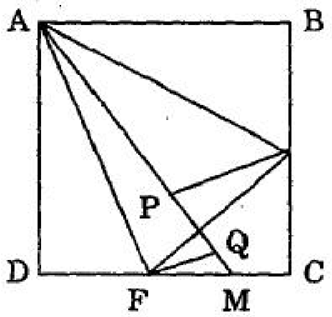
Tương tự ta có: $\Delta ADF = \Delta AQF$ (trường hợp đặc biệt)

Suy ra AD = AQ (2)

Từ (1) và (2) cho: AP = AQ $\Rightarrow$ P $\equiv$ Q $\Rightarrow$ AM $\perp$ EF (vô lý)

vì trái với giả sử EF không vuông góc AM.

Chứng tỏ EF $\perp$ AM.



Cách 2: Trên tia đối của tia DC lấy điểm K sao cho DK = BE.

Xét ΔABE và ΔADK có: AB = AD

$\widehat{ABE} = \widehat{ADK}$ (= 90^0)

BE = DK

Do đó $\Delta ABE = \Delta ADK$ (c–g–c)

Suy ra AE = AK, $\widehat{ABE} = \widehat{DAK}$

Ta có: $\widehat{BAE} = \widehat{DAK}$, $\widehat{BAE} = \widehat{EAM}$

(AE là tia phân giác BAM)

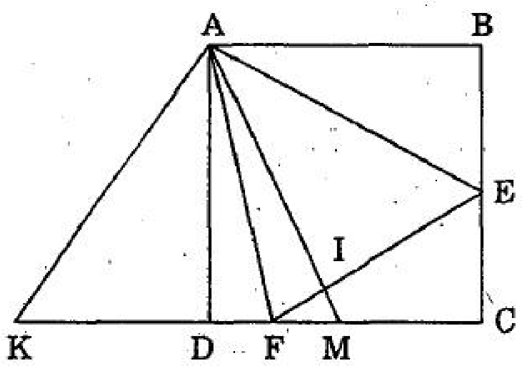
Do đó $\widehat{DAK} = \widehat{MAE}$

$\widehat{DAF} = \widehat{FAM}$

(AF là tia phân giác DAM)

Suy ra: $\widehat{KAF} = \widehat{EAF}$

và $\widehat{AFD} = \widehat{AFI}$



Xét ΔAFK và ΔAFE có:

$AK = AE$, $\widehat{KAF} = \widehat{EAF}$, AF chung

Do đó: $\Delta AFK = \Delta AFE$

Suy ra $\widehat{AFD} = \widehat{AFI}$ (AM cắt EF tại I)

Xét ΔAFD và ΔAFI có $\widehat{DAF} = \widehat{FAM}$, AF chung, $\widehat{AFD} = \widehat{AFL}$

Do đó $\Delta AFD = \Delta AFI$ (g–c–g)

Suy ra: $\widehat{ADF} = \widehat{AIF}$

Mà $\widehat{ADF} = 90^0$

Do đó $\widehat{AIF} = 90^0$

Suy ra $EF \perp AM$

Bài 5: *Thuận:*

DBNF là hình bình hành nên BN // DF, BN = DF

ECNK là hình bình hành nên CN // EK; CN = EK.

Vì NB = NC, DF // EK; DF = EK.

Suy ra DFEK là hình bình hành.

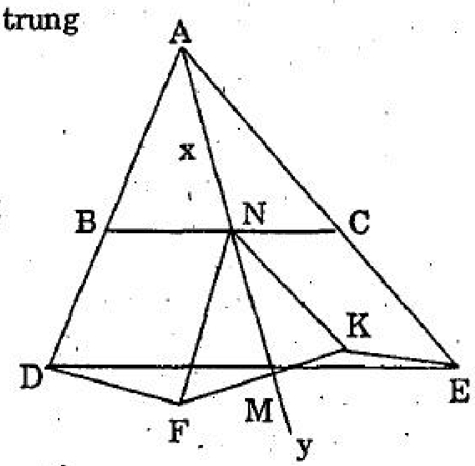
Suy ra hai đường chéo DE và KF cắt nhau tại trung điểm M của mỗi đường. Vậy M là trung điểm KF. Dễ thấy ΔKNF cân (NK = NF),

suy ra NM là phân giác $\widehat{FNK}$ của ΔFNK.

Dễ thấy $\widehat{BAC} = \widehat{FNK}$

Suy ra NM // Ax là tia phân giác của $\widehat{BAC}$

Do N cố định suy ra $M \in$ tia Ny // Ax.



Giới hạn:

Khi $D \equiv B$ thì $E \equiv C$, do đó $M \equiv N$

Khi D chạy trên tia đối của tia BA thì M chạy trên tia Ny.

Vậy M thuộc tia Ny cố định.

Đảo: Lấy M thuộc tia Ny. Qua M vẽ $d \perp MN$, d cắt đường thẳng song song với AB tại F, d cắt đường thẳng song song với AC tại K.

Vẽ FD // BN ($D \in AB$), vẽ KE // NC cắt AC tại E, dễ thấy BDFN và CEKN là các hình bình hành, DB = EC và M là giao điểm của DE và FK.

Kết luận: Quỹ tích là tia Ny.

BỘ ĐỀ 30

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI GIẢI THƯỞNG LÊ QUÝ ĐÔN QUẬN TÂN BÌNH, TPHCM – NĂM HỌC 1997–1998

Bài 1: Giải các phương trình và các bất phương trình sau:

1) $\dfrac{3}{4x-3}+\dfrac{3}{1-3x}=\dfrac{-3}{(3-4x)(3x-1)}$

2) $\dfrac{x-1}{2}\geq\dfrac{4+x}{2}-2$

3) $\dfrac{x-a+1}{x-a}-\dfrac{x-b+1}{x-b}=\dfrac{a}{(x-a)(x-b)}$ với a, b là hằng số.

Bài 2:

1) Cho biểu thức: $B=\dfrac{|x+10|}{x^4+9x^3-9x^2+9x-10}$

a/ Tìm điều kiện có nghĩa của B

b/ Rút gọn B.

2) Chứng minh rằng $A=n^8+4n^7+6n^6+4n^5+n^4$ chia hết cho 16; với mọi n là số nguyên.

Bài 3: Cho hình thang vuông ABCD có đáy CD = 9 (cm); đáy AB = 4 (cm); cạnh xiên BC = 13 (cm). Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho BM = BA. Đường thẳng vuông góc với BC tại M cắt AD tại N.

1) Chứng minh: Điểm N nằm trên tia phân giác của góc ABM.

2) Chứng minh rằng: $BC^2=BN^2+ND^2+DC^2$

3) Tính diện tích hình thang ABCD.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $\dfrac{3}{4x-3}+\dfrac{3}{1-3x}=\dfrac{-3}{(3-4x)(3x-1)}$ (1)

Phương trình (1) có nghĩa khi: $\begin{cases}4x-3\neq 0\\1-3x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x\neq 3\\3x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\dfrac{3}{4}\\x\neq\dfrac{1}{3}\end{cases}$

Với điều kiện trên phương trình (1) tương đương với:

$3(1-3x)+3(4x-3)=-3\Leftrightarrow 3-9x+12x-9=-3$

$\Leftrightarrow 3x=3\Leftrightarrow x=1$ (nhận)

Vậy phương trình (1) có nghiệm là x = 1.

2) $\dfrac{x-1}{2}\geq\dfrac{4+x}{2}-2\Leftrightarrow x-1\geq 4+x-4\Leftrightarrow 0x\geq 1\Leftrightarrow x\in\varnothing$

Vậy bất phương trình vô nghiệm.

3) $\dfrac{x-a+1}{x-a}-\dfrac{x-b+1}{x-b}=\dfrac{a}{(x-a)(x-b)}$ (1) (a, b là hằng số)

Phương trình (1) có nghĩa khi: $\begin{cases}x-a\neq 0\\x-b\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq a\\x\neq b\end{cases}$

Với điều kiện trên phương trình (1) tương đương với:

$$1+\frac{1}{x-a}-1-\frac{1}{x-b}=\frac{a}{(x-a)(x-b)}\Leftrightarrow\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}=\frac{a}{(x-a)(x-b)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-b-x+a}{(x-a)(x-b)}=\frac{a}{(x-a)(x-b)}\Leftrightarrow\frac{0x+a-b}{(x-a)(x-b)}=\frac{a}{(x-a)(x-b)}$$

$$\Leftrightarrow 0x=b$$

- Nếu $b = 0$, ta có x tùy ý và $x\neq a$, $x\neq b$
- Nếu $b\neq 0$, ta có $x\in\varnothing$

  Vậy nếu $b = 0$, phương trình (1) nghiệm đúng với mọi giá trị x khác a và x khác b.
- Nếu $b\neq 0$, phương trình (1) vô nghiệm.

Bài 2:

1) $B=\dfrac{|x+10|}{x^4+9x^3-9x^2+9x-10}$

a/ Giải phương trình: $x^4+9x^3-9x^2+9x-10=0$

$$\Leftrightarrow x^4-1+9x^3-9x^2+9x-9=0$$
$$\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2+1)+9x^2(x-1)+9(x-1)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x^2+1)+9x^2(x-1)+9(x-1)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x^3+x^2+x+1+9x^2+9)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x^3+10x^2+x+10)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)[x^2(x+10)+(x+10)]=0\Leftrightarrow (x-1)(x+10)(x^2+1)=0$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=0\\x+10=0\\x^2+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-10\\x\in\phi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-10\end{array}\right.$$

Vậy biểu thức B có nghĩa khi $x\neq 1$ và $x\neq -10$.

b/ Ta có: $B=\dfrac{|x+10|}{x^4+9x^3-9x^2+9x-10}$ ($x\neq 1$ và $x\neq -10$)

$$=\begin{cases}\dfrac{x+10}{(x-1)(x+10)(x^2+1)} & \text{với } x>-10 \text{ và } x\neq 1\\[2ex]\dfrac{-(x+10)}{(x-1)(x+10)(x^2+1)}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)(x^2+1)} & \text{với } x>-10 \text{ và } x\neq 1\\[2ex]\dfrac{-1}{(x-1)(x^2+1)} & \text{với } x<-10\end{cases}$$

2) $A = n^8 + 4n^7 + 6n^6 + 4n^5 + n^4 = n^4(n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1)$

$= n^4(n^4 + n^3 + 3n^3 + 3n^2 + 3n^2 + 3n + n + 1)$

$= n^4[n^3(n + 1) + 3n^2(n + 1) + 3n(n + 1) + (n + 1)]$

$= n^4(n + 1)(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) = n^4(n + 1)(n + 1)^3$

$= n^4 (n + 1)^4 = [n(n + 1)]^4$

Vì $n(n + 1)$ là tích của hai số nguyên liên tiếp, nên phải có một thừa số chia hết cho 2.

Do đó $[n(n + 1)]^4 \vdots 2^4$; $2^4 = 16$. Vậy $A \vdots 16$

Bài 3:

1) Xét hai tam giác vuông ABN và MBN ta có: AB = BM, BN chung

Vậy $\Delta ABN = \Delta MBN$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

Suy ra $\widehat{ABN} = \widehat{MBN}$

hay BN là tia phân giác của góc ABM.

2) Ta có: MC = CB – BM = 13 – 4 = 9 (cm)

Xét hai tam giác vuông CDN và CMN ta có:

CM = CD (= 9 cm)

CN = CN

Vậy $\Delta CDN = \Delta CMN$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

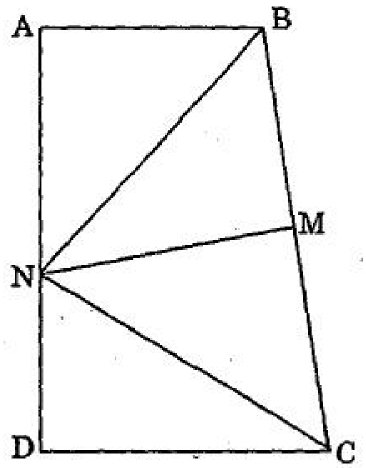
Suy ra $\widehat{MNC} = \widehat{DNC}$, cho ta NC là tia phân giác của góc $\widehat{DNM}$.

Mặt khác $\widehat{ANB} = \widehat{MNB}$ ($\Delta ABN = \Delta MBN$), cho ta NB là tia phân giác của góc ANM.

Suy ra $NB \perp NC$ (tính chất hai tia phân giác của hai góc kề bù) hay ΔBNC vuông tại N.

Áp dụng định lý Pytagó vào các tam giác vuông BNC và DNC, ta có:

$BC^2 = BN^2 + NC^2 = BN^2 + ND^2 + DC^2$



3) $\Delta MNB \backsim \Delta MCN$

$\Rightarrow \dfrac{MN}{MC} = \dfrac{MB}{MN}$

$\Rightarrow MN^2 = MB.MC = 4.9 = 36 = 6^2$

Suy ra MN = 6 cm

Mà ta có: AN = MN ($\Delta ABN = \Delta MBN$)

và ND = MN ($\Delta MNC = \Delta DNC$)

Suy ra AN + ND = 2MN

hay AD = 12cm

$S_{ABCD} = \dfrac{(AB + CD).AD}{2} = \dfrac{(4 + 9).12}{2} = 78\ (cm^2)$

BỘ ĐỀ 31

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN 6, TPHCM – NĂM HỌC 1997–1998

Bài 1:

1) Giải phương trình:

$$(2x^2 + x - 1998)^2 + 4(x^2 - 3x - 950)^2 = 4(2x^2 + x - 1998)(x^2 - 3x - 950)$$

2) Tổng tất cả các góc trong và một trong các góc ngoài của một đa giác có số đo là 47058.5^0. Hỏi đa giác đó có bao nhiêu cạnh ?

Bài 2:

1) Tính giá trị của đa thức: $f(x) = 6x^4 - 7x^3 - 22x^2 + 7x + 2004$ với x là nghiệm của phương trình $6x^2 + 5x = 6$

2) Chứng minh bất đẳng thức: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$

Bài 3: Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a}$$

Bài 4: Cho tam giác ABC có AB = 4cm, BC = 6cm, CA = 8cm. Các đường phân giác trong AD và BE cắt nhau tại I.

1) Tính độ dài các đoạn thẳng BD và CD.

2) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.
Chứng minh IG // BC và suy ra độ dài của đoạn thẳng IG.

Bài 5: Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 30^0$. Dựng bên ngoài tam giác đều BCD. Chứng minh $AD^2 = AB^2 + AC^2$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $(x^2 + x - 1998)^2 + 4(x^2 - 3x - 950)^2$
$= 4(2x^2 + x - 1998)(x^2 - 3x - 950)$
$\Leftrightarrow (2x^2 + x - 1998)^2 - 4(2x^2 + x - 1998)$
$(x^2 - 3x - 950) + 4(x^2 - 3x - 950)^2 = 0$
$\Leftrightarrow [(2x^2 + x - 1998) - 2(x^2 - 3x - 950)]^2 = 0 \Leftrightarrow (7x - 98)^2 = 0$
$\Leftrightarrow 7x - 98 = 0 \Leftrightarrow 7x = 98 \Leftrightarrow x = 14$
Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 14$

2) Gọi n là số cạnh của đa giác.
Tổng số đo các góc trong của đa giác bằng $(n - 2).180^0$
Vì tổng các góc trong và một trong các góc ngoài của đa giác có số đo là $47058,5^0$ nên ta có: $(n - 2).180^0 + \alpha = 47058,5^0$
(α là số đo một góc ngoài của đa giác với $0^0 < \alpha < 180^0$)
$(n - 2).180^0 + \alpha = 261.180^0 + 78,5^0$
$\Rightarrow n - 2 = 261 \Rightarrow n = 263$
Vậy số cạnh của đa giác là 263.

Bài 2:

1) Giải phương trình: $6x^2 + 5x = 6$ (1)

$(1) \Leftrightarrow 6x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 9x - 4x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow 3x(2x + 3) - 2(2x + 3) = 0$

$$\Leftrightarrow (2x + 3)(3x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + 3 = 0 \\ 3x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{3}{2} \\ x = \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = 6.\left(-\frac{3}{2}\right)^4 - 7.\left(-\frac{3}{2}\right)^3 - 22.\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 7.\left(-\frac{3}{2}\right) + 2004$$

$$= 6.\frac{81}{16} - 7.\left(\frac{-27}{8}\right) - 22.\frac{9}{4} - \frac{21}{2} + 2004$$

$$= \frac{243}{8} + \frac{189}{8} - \frac{99}{2} - \frac{21}{2} + 2004 = \frac{432}{8} - \frac{480}{8} + 2004$$

$$= -6 + 2004 = 1998$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 6.\left(\frac{2}{3}\right)^4 - 7.\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 22.\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 7.\left(\frac{2}{3}\right) + 2004$$

$$= 6.\frac{16}{81} - 7.\frac{8}{27} - 22.\frac{4}{9} + \frac{14}{3} + 2004$$

$$= \frac{32}{27} - \frac{56}{27} - \frac{88}{9} + \frac{14}{3} + 2004 = \frac{32}{27} - \frac{56}{27} - \frac{264}{27} + \frac{126}{27} + 2004$$

$$= -6 + 2004 = 1998$$

2) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$

$\Leftrightarrow 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 4d^2 + 4e^2 \geq 4a(b + c + d + e)$

$\Leftrightarrow a^2 - 4ab + 4b^2 + a^2 - 4ac + 4c^2 + a^2 - 4ad + 4d^2 + a^2 - 4ae + 4e^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - 2b)^2 + (a - 2c)^2 + (a - 2d)^2 + (a - 2e)^2 \geq 0$

(bất đẳng thức đúng)

Dấu "=" xảy ra $a = 2b = 2c = 2d = 2e$

Bài 3: Xét vế trái của đẳng thức:

$$\frac{b - c}{(a - b)(a - c)} + \frac{c - a}{(b - c)(b - a)} + \frac{a - b}{(c - a)(c - b)} =$$

$$= \frac{b - a + a - c}{(a - b)(a - c)} + \frac{c - b + b - a}{(b - c)(b - a)} + \frac{a - c + c - b}{(c - a)(c - b)}$$

$$= \frac{1}{c - a} + \frac{1}{a - b} + \frac{1}{a - b} + \frac{1}{b - c} + \frac{1}{b - c} + \frac{1}{c - a}$$

$$= \frac{2}{a - b} + \frac{2}{b - c} + \frac{2}{c - a} \quad (a \neq b;\ b \neq c;\ c \neq a)$$

Vậy đẳng thức đã được chứng minh.

Bài 4:

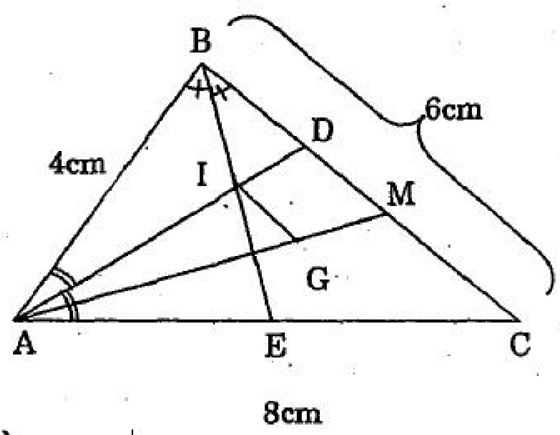
1) AG cắt BC tại M, G là trọng tâm ΔABC (gt)

$\Rightarrow MB = MC = \dfrac{BC}{2} = 3cm$

Theo tính chất đường phân giác của tam giác ta có:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

hay $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$



Do đó: $\dfrac{DB}{DC + DB} = \dfrac{1}{2+1}$

$\Rightarrow \dfrac{DB}{BC} = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow DB = \dfrac{1}{3}\ BC = \dfrac{1}{3}.6 = 2\ (cm)$

$\Rightarrow DC = BC - DB = 6 - 2 = 4\ (cm)$

2) BI là phân giác của ΔABD nên ta có:

$$\frac{ID}{IA} = \frac{BD}{BA} = \frac{2}{4} \Rightarrow \frac{ID}{IA} = \frac{1}{2}$$

mà $\dfrac{GM}{GA} = \dfrac{1}{2}$ (tính chất trọng tâm của tam giác)

ΔADM có: $\dfrac{ID}{IA} = \dfrac{GM}{GA}\left(= \dfrac{1}{2}\right)$

nên IG // DM (Định lý đảo Talet) hay IG // BC

Ta có: $MD = MB - BD = 3 - 2 = 1\ (cm)$

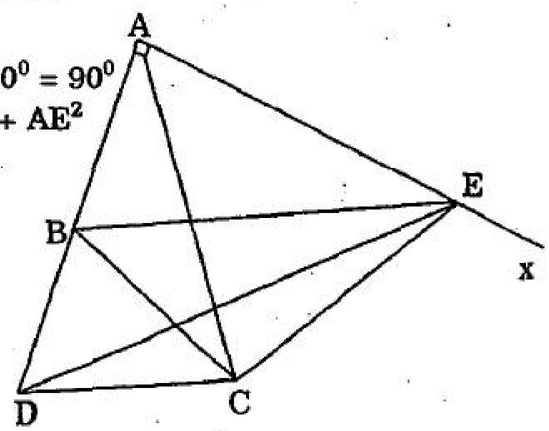
$$\frac{IG}{DM} = \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3} \Rightarrow IG = \frac{2}{3}MD = \frac{2}{3}.1 = \frac{2}{3}(cm)$$

Bài 5:

Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B vẽ tia Ax sao cho $\widehat{xAC} = 60^0$

Trên tia Ax lấy điểm E sao cho AE = AC

Suy ra ΔAEC đều.



Ta có: $\widehat{BAE} = \widehat{BAC} + \widehat{CAE} = 30^0 + 60^0 = 90^0$

ΔABE vuông tại A cho ta $BE^2 = BA^2 + AE^2$

hay $BE^2 = AB^2 + AC^2$ (1)

Ta có: $\widehat{BCE} = \widehat{BCA} +$
$\widehat{ACE} = \widehat{BCA} + 60^0$

$\widehat{ACD} = \widehat{BCA} + \widehat{BCD} = \widehat{BCA} + 60^0$.

Suy ra $\widehat{BCE} = \widehat{ACD}$

ΔACD và ΔECB có: $\widehat{ACD} = \widehat{BCE}$

$AC = CE$

$CD = CB$

Do đó $\Delta ACD = \Delta ECB$ (c–g–c)

Cho ta $DA = BE$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $DA^2 = AB^2 + AC^2$

BỘ ĐỀ 32

ĐỀ THI HỌC BỔNG TRƯỜNG THCS NGUYỄN DU QUẬN 1 – TP.HCM THÁNG 10 NĂM HỌC 1997–1998

Bài 1:

1) Chứng minh rằng với mọi $n \in Z$, n chẵn, ta có số $n^3 + 20n$ luôn luôn chia hết cho 48.

2) Tìm ước chung lớn nhất của hai số: $A = 2^{63} - 1$ và $B = 2^{77} - 1$

Bài 2:

1) Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x - a)b^3 - (x - b)a^3 + (a - b)x^3$

2) Chứng minh rằng với mọi a, b, c ta đều có:

$$a^2 + 9b^2 + c^2 + \frac{19}{2} > 2a + 12b + 4c$$

Bài 3: Cho x, y, z là ba số thỏa mãn đồng thời: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1 \end{cases}$

Hãy tính giá trị của biểu thức: $P = (x - 1)^{17} + (y - 1)^9 + (z - 1)^{1997}$

Bài 4: Cho tam giác ABC cân tại A có H là trung điểm cạnh BC. Gọi I là hình chiếu vuông góc của H lên cạnh AC và O là trung điểm của HI. Chứng minh $AO \perp BI$.

Bài 5: Cho tam giác ABC cân tại A, lấy các điểm E và K lần lượt trên các tia AB và AC sao cho $AE + AK = AB + AC$. Chứng minh: $BC < EK$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $n \in Z$, n chẵn nên n có dạng $n = 2k$, $k \in Z$

Ta có:

$$n^3 + 20n = 8k^3 + 40k = 8k(k^2 + 5) = 8k[(k^2 - 1) + 6]$$
$$= 8k(k - 1)(k + 1) + 48k \ \vdots\ 48$$

vì $(k - 1)k(k + 1) \ \vdots\ 6 \Rightarrow 8k(k - 1)(k + 1) \ \vdots\ 48$

2) Xét bài toán:

Với $1 \le m < n$; $m, n \in N$

Tìm $(2^m - 1; 2^n - 1)$

Đặt $(m, n) = d$, khi đó luôn tồn tại $r, s \in N : rn - sm = d$

Đặt $d_1 = (2^m - 1; 2^n - 1) \Rightarrow d_1$ lẻ

Ta có: $\begin{cases}(2^n - 1) \vdots (2^d - 1) (\text{do } n \vdots d) \\ (2^m - 1) \vdots (2^d - 1) (\text{do } m \vdots d)\end{cases} \Rightarrow d_1 \vdots (2^d - 1)$

Mặt khác: $\begin{cases}(2^n - 1) \vdots d_1 \text{ nên } (2^{rn} - 1) \vdots d_1 \\ (2^m - 1) \vdots d_1 \text{ nên } (2^{sm} - 1) \vdots d_1\end{cases}$

$\Rightarrow 2^{rn} - 2^{sm} = 2^{sm}(2^{rn-sm} - 1) = 2^{sm}(2^d - 1) \vdots d_1$

mà $(2; d_1) = 1$ nên $(2^d - 1) \vdots d_1$

Vậy $d_1 = 2^d - 1$, nghĩa là $(2^m - 1; 2^n - 1) = 2^{(m,n)} - 1$

Áp dụng: $(2^{63} - 1; 2^{77} - 1) = 2^{(63,77)} - 1 = 2^7 - 1 = 127$

Nhận xét: Ta có thể xét bài toán tổng quát sau:

Với $a \in N$, $a > 1$ ta có $(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1$

Thật vậy, đặt $d_1 = (a^m - 1; a^n - 1)$; $d_2 = (m, n)$

Ta cần chứng minh $d_1 = a^{d_2} - 1$

Do $d_2 \mid m$ và $d_2 \mid n$ ta có $(a^{d_2} - 1) \Rightarrow a^{d_2} - 1$

Ngược lại từ $(m, n) = d_2 > 0$

Suy ra ắt có hai số nguyên dương x_0; y_0 sao cho $mx_0 - ny_0 = d_2$

Từ $d_1 \mid a^m - 1$ và $d_1 \mid a^n - 1$ ta có d_1

nghĩa là $d_1 \mid a^{ny_0}(a^{mx_0 - ny_0} - 1) = a^{ny_0}(a^{d_2} - 1)$

Nhưng $d_1 \mid a^m - 1$ nên hiển nhiên $(d_1 ; a) = 1$

Do đó $(d_1; a^{ny_0}) = 1$ và vì vậy $d_1 = a^{d_2} - 1$

Bài 2:

1) $(x - a)b^3 - (x - b)a^3 + (a - b)x^3$

$= (x - a)b^3 - [(x - a) + (a - b)]a^3 + (a - b)x^3$

$= (x - a)b^3 - (x - a)a^3 - (a - b)a^3 + (a - b)x^3$

$= (x - a)(b^3 - a^3) + (x^3 - a^3)(a - b)$

$= (x - a)(b - a)(b^2 + ab + a^2) + (x - a)(x^2 + ax + a^2)(a - b)$

$= (x - a)(a - b)(x^2 + ax + a^2 - b^2 - ab - a^2)$

$= (x - a)(a - b)(x^2 - b^2 + ax - ab)$

$= (x - a)(a - b)[(x - b)(x + b) + a(x - b)]$

$= (x - a)(a - b)(x - b)(x + a + b)$

2) Với mọi a, b, c ta có:

$$a^2 + 9b^2 + c^2 + \frac{19}{2} > 2a + 12b + 4c$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 9b^2 + c^2 + \frac{19}{2} - 2a - 12b - 4c > 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 2a + 1) + (9b^2 - 12b + 4) + (c^2 - 4c + 4) + \frac{1}{2} > 0$$

$\Leftrightarrow (a-1)^2 + (3b-2)^2 + (c-2)^2 + \dfrac{1}{2} > 0$ (đúng)

Vì $(a-1)^2 \geq 0$, $(3b-2)^2 \geq 0$ và $(c-2)^2 \geq 0$

Vậy $a^2 + 9b^2 + c^2 + \dfrac{19}{2} > 2a + 12b + 4c$

Bài 3: Ta có: $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$

$= (x+y)^3 + z^3 + 3(x+y)z(x+y+z) - x^3 - y^3 - z^3$

$= x^3 + y^3 + 3xy(x+y) + 3(x+y)(xz+yz+z^2) - x^3 - y^3$

$= 3(x+y)(xy+xz+yz+z^2)$

$= 3(x+y)[x(y+z)+z(y+z)] = 3(x+y)(y+z)(z+x)$

Vậy $(x+y+z)^3 = 3(x+y)(y+z)(z+x) + x^3 + y^3 + z^3$

$\Leftrightarrow 1 = 3(x+y)(y+z)(z+x) + 1$

$$\Leftrightarrow 3(x+y)(y+z)(z+x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=0 \\ y+z=0 \\ z+x=0 \end{array}\right.$$

Nếu $x + y = 0$, do $x + y + z = 1 \Leftrightarrow z = 1$

Mặt khác: $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0$

Khi ấy: $P = (-1)^{17} + (-1)^9 + 0^{1997} = -2$

Lý luận tương tự:

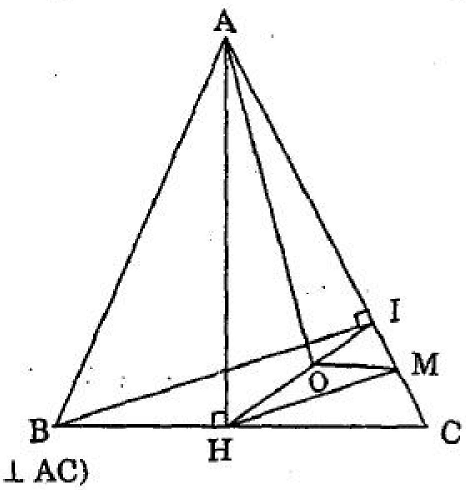
$y + z = 0 \Rightarrow x = 1$ và $y = z = 0 : P = -2$

$z + x = 0 \Rightarrow y = 1$ và $z = x = 0 : P = -2$

Kết luận: Với x, y, z thoả mãn hệ đã cho thì $P = -2$.

Bài 4:

Cách 1: Gọi M là trung điểm IC, do O là trung điểm HI nên OM là đường trung bình trong ΔHIC, OM // BC



ΔABC cân tại A có AH là trung tuyến nên $AH \perp BC$

Vậy $OM \perp AH$

Vì M, H là trung điểm IC, BC nên HM là đường trung bình ΔBIC

Suy ra HM // BI

Trong ΔAHM có $MO \perp AH$

$HI \perp AM$ và $OM \cap HI = \{O\}$ nên O là trực tâm ΔAHM

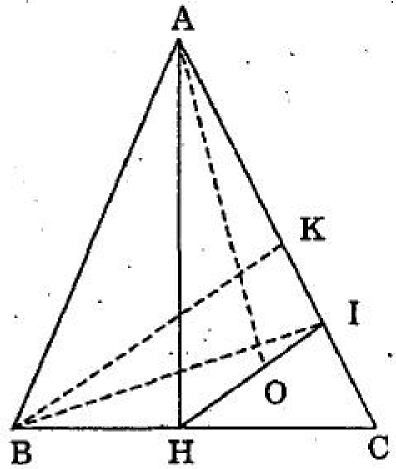
$AO \perp HM$, $AO \perp BI$ (vì HM // BI)

Cách 2: Dựng $BK \perp AC$, BK // HI (vì cùng $\perp$ AC)

Suy ra HI là đường trung bình của ΔBCK suy ra KI = IC

$\Delta AIH \backsim \Delta BKC$ ($\widehat{HAI} = \widehat{CBK}$, $\widehat{AIH} = \widehat{BKC} = 90^0$)

$$\Rightarrow \frac{AI}{BK} = \frac{HI}{KC} = \frac{\frac{HI}{2}}{\frac{KC}{2}} \Rightarrow \frac{AI}{BK} = \frac{OI}{KI}$$



Vậy $\Delta AIO \backsim \Delta BKI$ (c–g–c)

Suy ra $\widehat{IAO} = \widehat{KBI}$

Ta có: $\widehat{IAO} + \widehat{AIM} = \widehat{KBI} + \widehat{AIM} = 90^0$

(Do tam giác BKI vuông tại K)

Suy ra $\widehat{AMI} = 90^0$ nghĩa là $AO \perp BI$

Bài 5:

Cách 1: Dựng EM // BC (M $\in$ AC)

và KN // BC (N $\in$ AB)

Ta được AN = AK

Ta có: AE + AK = AB + AC

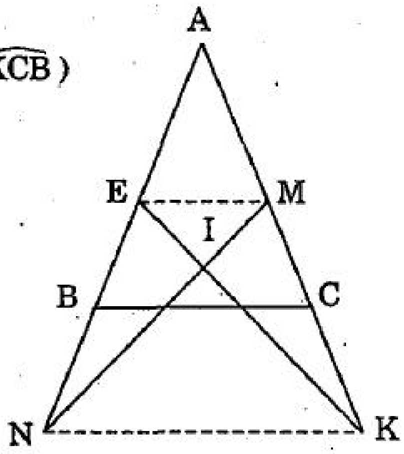
Suy ra: AB – BE + AC + CK = AB + AC

Suy ra: CK – BE = 0

Suy ra: CK = BE

BCKN là hình thang cân (BC // NK, $\widehat{NBC} = \widehat{KCB}$)

NB = CK. Vậy BE = NB



Ta có: BC // EM // NK và BC đi qua trung điểm NE suy ra BC là đường trung bình của hình thang EMKN.

Ta có $\begin{cases} IE + IM > ME \\ IN + IK > NK \end{cases}$

$\Rightarrow$ (IE + IK) + (IM + IN) > ME + NK

$\Rightarrow$ EK + MN > ME + NK $\Rightarrow$ 2EK > ME + NK

(Do EMRN là hình thang cân)

Vậy: $EK > \frac{ME + NK}{2} = BC$

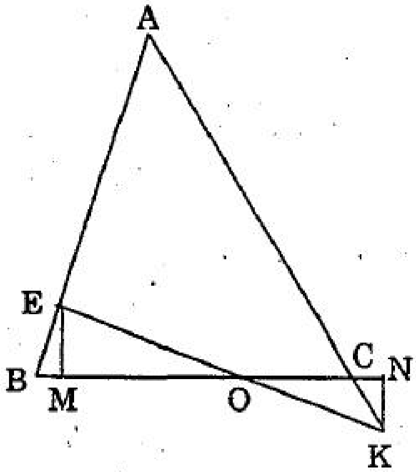
Cách 2: Từ giả thiết AE + AK = AB + AC

$\Rightarrow$ CK = BE (chứng minh trong cách 1)

$\Rightarrow$ Kẻ EM và KN cùng vuông góc đường BC (M, N thuộc đường BC). EM // NK

Ta có: $\Delta MBE = \Delta NCK$ (đặc biệt) nên BM = CN và EM = NK

Tứ giác EMKN là hình bình hành (vì EM // NK, EM = NK) nên hai đường chéo MN và EK cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường, nghĩa là EK = 2OE và MN = 2 OM



Mà OE > OM nên EK > MN = BC

(vì MN = CM + CN = CM + BM = BC)

Cách 3: AE + AK = AB + AC

Suy ra AB + BE + AC – KC = AB + AC

Suy ra BE = KC

Trên tia đối của tia CA lấy D sao cho CD = CK

Vẽ CI // AB ($I \in ED$)

AE = AB + BE = AC + CD = AD

ΔAED cân tại A

Các tam giác ABC và AED cân có đỉnh chung A

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AED}$

$\Rightarrow$ BC // ED và BE // CI

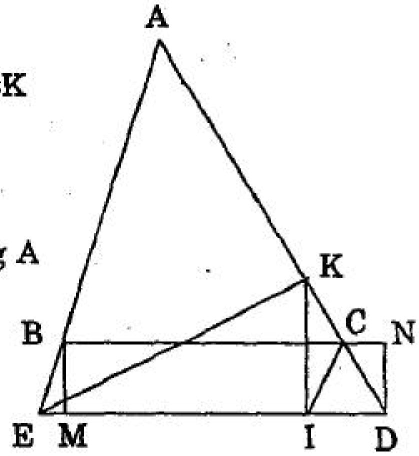
$\Rightarrow$ BC = EI, BE = CI

CI = CK = CD (= BE)

$\Rightarrow \Delta$IDK vuông tại I

ΔIEK có $\hat{I} = 90^0 \Rightarrow$ EK > EI

Do đó EK > BC



BỘ ĐỀ 33

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI GIẢI THƯỞNG LƯƠNG THẾ VINH QUẬN 9 TP HCM – NĂM HỌC 1997 – 1998

Bài 1: Dùng hai cách để phân tích đa thức thành nhân tử: $A = x^2 - 4x + 3$

Bài 2: Cho $A(x) = 8x^2 - 26x + m$ và $B(x) = 2x - 3$

Tìm m để A(x) chia hết cho B(x).

Bài 3: Với giá trị nào của a thì bất phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$(x - a)(x - 5) \le 0$?

Bài 4: Giải phương trình: $|x^2 - 1| + |a(x-1)| = 0$

Bài 5: Cho hình vuông ABCD trên C lấy điểm M sao cho $BM = \frac{1}{3}BC$. Trên tia đối của tia CD lấy điểm N sao cho $CN = \frac{1}{2}BC$. Cạnh AM cắt BN tại I và CI cắt AB tại K. Gọi H là hình chiếu của M trên AC. Chứng minh K, M, H thẳng hàng.

Bài 6: Cho hình thang cân ABCD (AB // CD) có AC = 6cm, $\widehat{BDC} = 45^0$. Gọi O là giao điểm hai đường chéo. Tính diện tích hình thang ABCD bằng hai cách.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: *Cách 1:*

$$A = x^2 - 4x + 3 = x^2 - x - 3x + 3 = x(x-1) - 3(x-1) = (x-1)(x-3)$$

Cách 2:

$A = x^2 - 4x + 3 = x^2 - 4x + 4 - 1$

$= (x-2)^2 - 1^2 = (x - 2 + 1)(x - 2 - 1) = (x-1)(x-3)$

Bài 2: Với $x \neq \dfrac{3}{2}$ ta có:

$A(x) = 8x^2 - 26x + m = 4x(2x-3) - 14x + m$

$= 4x(2x-3) - 7(2x - 3x) + m - 21$

$= (2x-3)(4x-7) + m - 21 = (4x-7).B(x) + m - 21$

Vậy $A(x) \vdots B(x) \Leftrightarrow m - 21 = 0 \Leftrightarrow m = 21$

Bài 3: Xét bất phương trình: $(x-a)(x-5) \le 0$ (1)

Nếu $a = 5$ (1) $\Leftrightarrow (x-5)^2 \le 0 \Leftrightarrow x = 5$

Nếu $a < 5$: (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x - a \ge 0 \\ x - 5 \le 0 \end{cases}$

(vì $x - a > x - 5$ nếu $x - a \le 0$ thì $(x-a)(x-5) \ge 0$ không thỏa)

$\Leftrightarrow a \le x \le 5$

Trong trường hợp này bất phương trình không có nghiệm duy nhất (loại)

Nếu $a > 5$, lý luận tương tự: $5 \le x \le a$ (loại)

Kết luận: Với $a = 5$ bất phương trình (1) có nghiệm duy nhất.

Bài 4: $|x^2 - 1| + |a(x-1)| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ a(x-1) = 0 \end{cases}$ (*)

Xét các trường hợp sau:

a/ Với $a = 0$: (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x \text{ tùy ý} \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 1$

b/ Với $a \neq 0$: (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

Kết luận: $a = 0$ phương trình có nghiệm: $x = \pm 1$

$a \neq 0$ phương trình có nghiệm $x = 1$.

Bài 5: Gọi E là giao điểm của đường AM và đường DC.

Do AB // CE nên $\dfrac{AB}{CE} = \dfrac{BM}{CM} = \dfrac{1}{2}$ (vì $\dfrac{BM}{BC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{BM}{CM} = \dfrac{1}{2}$)

$\Leftrightarrow CE = 2AB$

Ta có: $NE = CE - CN = 2AB - \dfrac{BC}{2} = 2AB - \dfrac{AB}{2} = \dfrac{3}{2}AB$

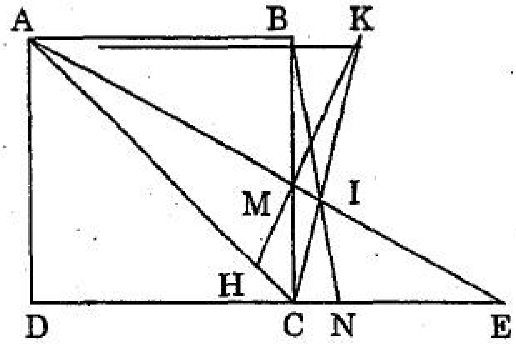
$\Rightarrow \dfrac{AB}{NE} = \dfrac{2}{3}$

Ta có: $\dfrac{BK}{CN} = \dfrac{IB}{IN} = \dfrac{AB}{NE} = \dfrac{2}{3}$ (vì AB // DE)

Suy ra: $BK = \dfrac{2}{3}CN = \dfrac{2}{3}.\dfrac{AB}{2} = \dfrac{AB}{3}$

Mà $BM = \dfrac{BC}{3} = \dfrac{AB}{3}$

nên $BK = BM$



Vậy $\Delta ABM = \Delta CBK$ ($AB = BC$; $\widehat{ABM} = \widehat{CBK} = 90^0$, $BK = BM$)

$\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{BCK}$

$\Rightarrow \widehat{BAM} + \widehat{BMA} = \widehat{BCK} + \widehat{CMI}$

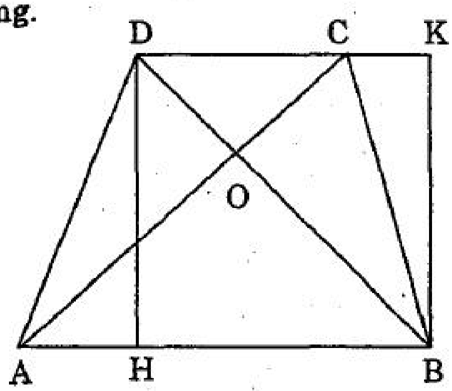
($\widehat{BMA} = \widehat{CMI}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{BCK} + \widehat{CMI} = 90^0$, nghĩa là $AI \perp CK$

Trong tam giác ACK có $AI \perp CK$, $CB \perp AK$ và $AI \cap CB = \{M\} \Rightarrow$ M là trực tâm, tức $MK \perp AC$.

Mặt khác $MH \perp AC$ nên M, H, K thẳng hàng.

Bài 6: *Cách 1:*



Xét ΔADC và ΔBCD có DC chung, $AD = BC$ và $AC = BD$ (tính chất hình thang cân)

Suy ra $\Delta ADC = \Delta BCD$ (c–c–c)

Suy ra $\widehat{ACD} = \widehat{BDC} = 45^0$

Vậy $\widehat{DOC} = 90^0$

nên $AC \perp BD$

Khi ấy $S_{ABCD} = \dfrac{AC.BD}{2} = \dfrac{AC^2}{2} = \dfrac{36}{2} = 18$ (cm^2).

Cách 2: Kẻ $DH \perp AB$, $CK \perp CD$

Do AB // CD, nên $\widehat{HDK} = 90^0$, mà DB là phân giác HDK (vì $\widehat{BDK} = 45^0$)

$\Rightarrow$ HDKB là hình vuông

Ta có: $\Delta HAD = \Delta KCB$ (đặc biệt)

Suy ra: $S_{HAD} = S_{BCK}$

$$S_{ABCD} = S_{ADH} + S_{DHBC} = S_{CBK} + S_{CHBC} = S_{DHBK}$$

$$= BK^2 = \frac{BD^2}{2} = \frac{AC^2}{2} = 18 \text{ (cm}^2\text{)}$$

BỘ ĐỀ 34

ĐỀ THI HỌC BỔNG TRƯỜNG THCS NGUYỄN DU QUẬN 1, TPHCM – THÁNG 2 NĂM HỌC 1998 – 1999

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử:

1) $x^8 + 3x^4 + 4$

2) $x^6 - x^4 - 2x^3 + 2x^2$

Bài 2:

1) Tính giá trị của biểu thức: $\dfrac{a^5+a^6+a^7+a^8}{a^{-5}+a^{-6}+a^{-7}+a^{-8}}$ với a = 1997

2) Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{2x+3y}{xy+2x-3y-6} - \frac{6-xy}{xy+2x+3y+6} - \frac{x^2+9}{x^2-9}$$

Bài 3: Cho a, b, c thoả: $a^3 - b^2 - b = b^3 - c^2 - c = c^3 - a^2 - a = \dfrac{1}{3}$

Chứng minh a = b = c

Bài 4: Cho tứ giác lồi ABCD. Qua trung điểm K của đường chéo BD D dựng đường song song với đường chéo AC, đường này cắt AD tại E. Chứng minh CE chia tứ giác thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Bài 5: Dựng hình bình hành khi biết trung điểm ba cạnh của nó.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: Phân tích:

1) $x^8 + 3x^4 + 4 = x^8 + 4x^4 + 4 - x^4 = (x^4 + 2)^2 - x^4 = (x^4 + x^2 + 2)(x^4 - x^2 + 2)$

2) $x^6 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 = x^2(x^4 - x^2 - 2x + 2)$

$= x^2[(x^4 - 2x^2 + 1) + (x^2 - 2x + 1)]$

$= x^2[(x^2 - 1)^2 + (x - 1)^2] = x^2(x - 1)^2(x^2 + 2x + 2)$

Bài 2: 1) Biến đổi:

$$A = \frac{a^5(1+a+a^2+a^3)}{a^{-8}(a^3+a^2+a+1)} = \frac{a^5}{a^{-8}} = \frac{a^5}{\left(\frac{1}{a}\right)^8} = \frac{a^5}{\frac{1}{a^8}} = a^{13}$$

Với a = 1997 thì $A = 1997^{13}$

2) Dưới điều kiện $x \neq \pm 3$; $y \neq -2$, ta có:

$$A = \frac{2x+3y}{x(y+2)-3(y+2)} - \frac{6-xy}{x(y+2)+3(y+2} - \frac{x^2+9}{(x-3)(x+3)}$$

$$= \frac{2x+3y}{(y+2)(x-3)} - \frac{6-xy}{(y+2)(x+3)} - \frac{x^2+9}{(x-3)(x+3)}$$

$$= \frac{(2x+3y)(x+3)-(6-xy)(x-3)-(x^2+9)(y+2)}{(x-3)(x+3)(y+2)}$$

$$= \frac{2x^2+6x+3xy+9y-6x+18+x^2y-3xy-x^2y-2x^2-9y-18}{(x-3)(x+3)(y+2)}$$

$$= \frac{0}{(x-3)(x+3)(y+2)} = 0$$

Bài 3: Theo đề bài ta có:

$$a^3 - b^2 - b = \frac{1}{3} \Rightarrow a^3 = b^3 + b + \frac{1}{3} = \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} > 0 \Rightarrow a > 0$$

$$b^3 - c^2 - c = \frac{1}{3} \Rightarrow b^3 = \left(c + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} \Rightarrow b > 0$$

$$c^3 - a^2 - a = \frac{1}{3} \Rightarrow c^3 = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} \Rightarrow c > 0$$

Vai trò a, b, c hoán vị vòng quanh.

Giả sử: a là số lớn nhất trong ba số a, b, c.

Với a, b, c > 0: $a \geq b \Rightarrow a^3 \geq b^3 \Rightarrow \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} \geq \left(c + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}$

$$\Rightarrow \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 \geq \left(c + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow b \geq c$$

$$b \geq c \Rightarrow b^3 \geq c^3 \Rightarrow \left(c + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} \geq \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow \left(c + \frac{1}{2}\right)^2 \geq \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow c \geq a$$

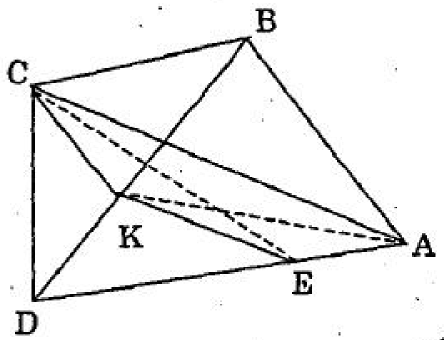
Vậy $a \geq b \geq c \geq a \Rightarrow a = b = c$

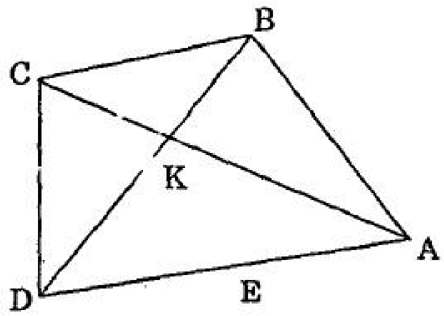
Bài 4: Xét: Nếu $E \in [AD]$, do KE // CA $\Rightarrow S_{CEA} = S_{CAK}$

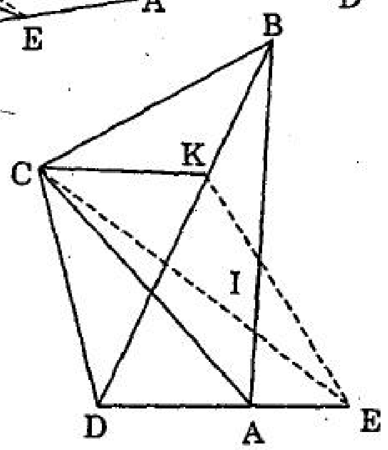
(hai tam giác này có chung đáy AC, EK // AC)

Vậy: $S_{CBAE} = S_{ABC} + S_{CEA} = S_{ABC} + S_{CKA} = S_{ABCK} = S_{CKB} + S_{KBA}$

$$= \frac{1}{2} S_{BDC} + \frac{1}{2} S_{BDA} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$







Đặc biệt đường chéo AC đi qua trung điểm K của BD thì $E \equiv A$

$\Rightarrow CE \equiv CA$ thì kết quả vẫn đúng.

Thật vậy $\begin{cases} S_{CDK} = S_{CKB} \\ S_{AKD} = S_{KBA} \end{cases}$

(vì K trung điểm BD) $\Rightarrow S_{ABC} = S_{ACD}$

Nếu E $\notin$ [AD]

Rõ ràng: $S_{ACE} > S_{ACI}$

Do KE // AC $\Rightarrow S_{ACE} > S_{ACK}$

Vậy $S_{ACD} + S_{ACI} < S_{ACE} + S_{ACD}$

$\Rightarrow S_{CDAI} < S_{ACD} + S_{ACK} = S_{ADCK} = S_{DCK} + S_{ADK} = \frac{1}{2}(S_{BCD} + S_{ADB}) = \frac{1}{2}S_{ABCD}$

Trong trường hợp này kết quả không còn đúng.

Bài 5:

– Dựng O là trung điểm NQ.

– Dựng P đối xứng với M qua O, qua M và P, dựng hai đường thẳng a và c cùng song song với NQ.

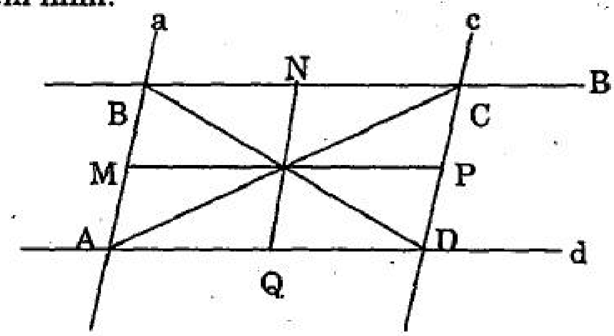
Qua N và Q dựng hai đường thẳng b và d cùng song song với MP.

Suy ra các đường a, b, c, d cắt nhau tạo thành hình bình hành ABCD cần dựng.

Chứng minh: Dựa vào cách dựng ta dễ dàng chứng minh M, N, Q là trung điểm của AB, BC và AD.

Với M, N, Q không thẳng hàng nên ta xác định được ba điểm P_1, P_2, P_3

$\Rightarrow$ Bài toán có ba nghiệm hình.



BỘ ĐỀ 35

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 8 TRƯỜNG THCS NGUYỄN DU QUẬN 1, TPHCM – NĂM HỌC 1997 – 1998

Bài 1:

1) Chứng minh rằng: $8351^{634} + 8241^{142}$ chia hết cho 26

2) Cho $A = \underbrace{11........1}_{1998 \text{ chữ số } 1} + \underbrace{11........1}_{1000 \text{ chữ số } 1} + \underbrace{66........6}_{999 \text{ chữ số } 1} + 8$

Chứng minh rằng A là số chính phương.

Bài 2: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$$B = \frac{x^4 + 1}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

Bài 3: Cho ba số a, b, c khác 0 thoả mãn đẳng thức:

$$\frac{a+b-c}{c}=\frac{a+c-b}{b}=\frac{b+c-a}{a}$$

Tính giá trị của biểu thức: $P=\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$

Bài 4: Các đường chéo của tứ giác lồi ABCD vuông góc với nhau. Qua trung điểm các cạnh AB và AD kẻ những đường vuông góc theo thứ tự với các cạnh CD và CB. Chứng minh rằng hai đường thẳng vuông góc này và đường thẳng AC đồng quy.

Bài 5: Cho hình thang ABCD có hai đáy là AB = 2a; CD = a. Hãy xác định vị trí điểm M trên đường thẳng CD sao cho:

1) Đường thẳng AM chia hình thang thành hai phần có diện tích bằng nhau.

2) Đường thẳng AM chia hình thang thành hai phần mà phần có chứa đỉnh D có diện tích bằng (n – 1) lần diện tích phần kia (n – là số tự nhiên lớn hơn 2).

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: 8351 là số lẻ $\Rightarrow 8351^{634}$ là số lẻ.

8241 là số lẻ $\Rightarrow 8241^{142}$ là số lẻ

Do đó: $8351^{634}+8241^{142}$ là số chẵn $\Rightarrow (8351^{634}+8241^{142}) \vdots 2$

Mặt khác $(8351^2+1) \vdots 13$; $(8241+1) \vdots 13$

Áp dụng: $(a^n-b^n) \vdots (a-b)$

$8351^{634}+8241^{142}=[(8352^2)^{317}-(-1)^{317}]+[8242^{142}-(-1)^{142}]$

chia hết cho 13 vì $[(8352^2)^{317}-(-1)^{317}] \vdots [8352^2-(-1)]$

và $[8242^{142}-(-1)^{142}] \vdots [8242-(-1)]$

2 và 13 là số nguyên tố cùng nhau, 2 . 13 = 26

Do đó: $8351^{634}+8241^{142}$ chia hết cho 26.

2) Đặt $a=\underbrace{11....1}_{999 \text{ số } 1}$ thì

$$A=a\,.\,10^{999}+a+10a+1+6a+8$$
$$=a(9a+1)+17a+9=9a^2+18a+9$$
$$=(3a+3)^2=\underbrace{33.....3}_{998 \text{ số } 3}6^2 \text{ (đpcm)}$$

Bài 2: $B=\dfrac{x^4+1}{(x^2+1)^2}>0\forall x$

nên B – lớn nhất $\Leftrightarrow \dfrac{1}{B}$ nhỏ nhất

B – nhỏ nhất $\Leftrightarrow \dfrac{1}{B}$ lớn nhất

Ta có : $\dfrac{1}{B} = \dfrac{x^4 + 1 + 2x^2}{x^4 + 1} = 1 + \dfrac{2x^2}{x^4 + 1}$

1) Ta luôn luôn có $x^2 \geq 0$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$

Do đó: $\dfrac{1}{B} \geq 1$ (và $\dfrac{1}{B} = 1 \Leftrightarrow x = 0$)

suy ra max B = 1 $\Leftrightarrow x = 0$

2) Ta có: $(x^2 - 1)^2 \geq 0, \forall x \Leftrightarrow 2x^2 \leq 1 + x^4$

Vậy $\dfrac{2x^2}{1 + x^4} \leq 1 \Rightarrow \dfrac{1}{B} = 1 + \dfrac{2x^2}{1 + x^4} \leq 2$

$\dfrac{1}{B} = 2 \quad \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Suy ra min B = $\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm 1$

Bài 3: Từ giả thiết suy ra:

$$2 + \frac{a + b - c}{c} = 2 + \frac{a + c - b}{b} = 2 + \frac{b + c - a}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{a + b + c}{c} = \frac{a + b + c}{b} = \frac{a + b + c}{a}$$

Suy ra hoặc a + b + c = 0 hoặc a = b = c.

Xét:

1) Trường hợp $a + b + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} a + b = -c \\ a + c = -b \\ b + c = -a \end{cases}$ thay vào P ta được P = –1

2) Trường hợp a = b = c, ta được P = 8.

Bài 4: Gọi E, F, G lần lượt là các trung điểm của AB, AD và AC.

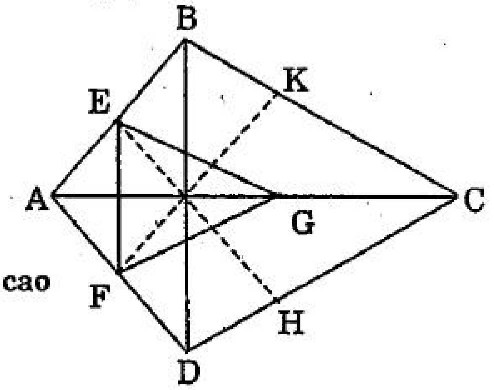
Các đoạn thẳng EF, EG, FG lần lượt là các đường trung bình của ΔABD, ΔABC và ΔACD.

$\Rightarrow$ EF // BD, EG // BC, FG // CD

mà BD $\perp$ AC, FK $\perp$ BC và EH $\perp$ DC.

$\Rightarrow$ AC $\perp$ EF, FK $\perp$ EG và EH và FG.

Từ đó suy ra AC, EH, FK chứa ba đường cao của ΔEFG nên chúng đồng quy.



Bài 5:

Trước hết ta có nhận xét rằng đường chéo AC chia hình thang thành hai tam giác thì $S_{ADC} < S_{ABC}$

$\Rightarrow$ M nằm ngoài đoạn DC và thuộc tia Cx.

1) Đường thẳng AM chia hình thang thành hai phần có diện tích bằng nhau. Gọi N là giao điểm của AM và BC. Gọi H, K là chân đường vuông góc kẻ từ N đến AB và CD.

Đặt $S_{ADCN} = S_1$; $S_{ANB} = S_2$; $S_{ABCD} = S$

Ta có $\begin{cases} S_1 + S_2 = S \\ S_1 = S_2 \end{cases} \Rightarrow S_2 = \dfrac{1}{2}S$

Gọi h là đường cao của hình thang, đặt NH = x thì:

$$S = \frac{1}{2}(2a + a)\,h = \frac{3ah}{2};\ S_2 = \frac{1}{2}2ax = ax$$

$$S = \frac{1}{2}S \Rightarrow ax = \frac{1}{2}.\frac{3ah}{2} \Rightarrow x = \frac{3h}{4}$$

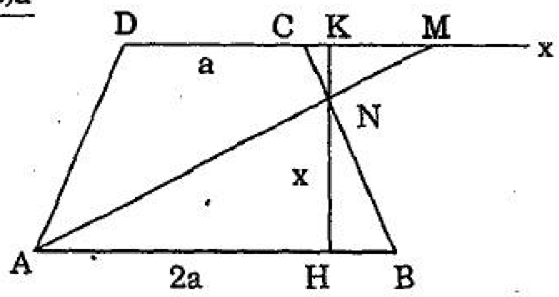
Áp dụng định lý Talet : $\dfrac{NC}{NB} = \dfrac{CM}{AB} = \dfrac{NK}{NH} = \dfrac{1}{3}$

2) Trường hợp $S_1 = (n - 1)\,S_2$ với $n > 2 \Leftrightarrow n - 1 > 1$

$$\begin{cases} S_1 = (n-1)S_2 \\ S_1 + S_2 = S \end{cases} \Rightarrow S_2 = \frac{1}{n}S$$

Vậy $ax = \dfrac{1}{n}.\dfrac{3ah}{2} \Rightarrow x = \dfrac{3h}{2n}$

Suy ra : $CM = \dfrac{(2n-3)2a}{3} = \dfrac{2(2n-3)a}{3}$



Vậy M nằm trên tia đối của tia CD sao cho $CM = \dfrac{2(2n-3)a}{3}$ thì AM cắt hình thang ABCD thành hai phần mà phần có chứa đỉnh D có diện tích bằng n – 1 lần diện tích phần kia (với $n \in N$, $n > 2$)

BỘ ĐỀ 36

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUẬN 1, TPHCM – NĂM HỌC 1997 – 1998

Bài 1: Thực hiện phép tính: $\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4^2}\right)...\left(1-\dfrac{1}{1998^2}\right)$

Bài 2: Phân tích đa thức thành nhân tử:

1) $x^2 - x - 12$

2) $x^2 + 8x + 15$

Bài 3: Chứng minh rằng: $(x - 1)(x - 3)(x - 4)(x - 6) + 10 \ge 1$

Bài 4: Giải phương trình: $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6 = 0$

Bài 5: Cho tam giác ABC (BC < AB). Từ C vẽ đường vuông góc với phân giác BE tại F và cắt AB tại K; vẽ trung tuyến BD cắt CK tại G. Chứng minh rằng DF đi qua trung điểm của GE.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: Ta có $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)...\left(1-\frac{1}{1998^2}\right)$

$$= \frac{2^2-1}{2^2}.\frac{3^2-1}{3^2}.\frac{4^2-1}{4^2}...\frac{1998^2-1}{1998^2}$$

$$= \frac{(2+1).(2-1)}{2^2}.\frac{(3-1).(3+1)}{3^2}...\frac{(1998-1).(1998+1)}{1998^2}$$

$$= \frac{3.1}{2.2}.\frac{2.4}{3.3}.\frac{3.5}{4.4}...\frac{1997.1999}{1998.1998} = \frac{1.2.3...1997}{2.3.4...1997.1998}.\frac{3.4.5...1998.1999}{2.3.4...1998}$$

$$= \frac{1}{1998}.\frac{1999}{2} = \frac{1999}{3996}$$

Bài 2:

1) $x^2 - x - 12 = x^2 - 16 - x + 4 = (x-4)(x+4) - (x-4) = (x-4)(x+3)$

2) $x^2 + 8x + 15 = x^2 + 3x + 5x + 15 = x(x+3) + 5(x+3) = (x+3)(x+5)$

Bài 3: Ta có:

$(x-1)(x-3)(x-4)(x-6) + 10 = (x-1)(x-6)(x-3)(x-4) + 10$

$= (x^2 - 7x + 6)(x^2 - 7x + 12) + 10$

$= (x^2 - 7x + 9 - 3)(x^2 - 7x + 9 + 3) + 10$

$= (x^2 - 7x + 9)^2 - 9 + 10 = (x^2 - 7x + 9)^2 + 1 \geq 1$ với mọi x.

Vì $(x^2 - 7x + 9)^2 \geq 0$ với mọi x.

Do đó $(x^2 - 7x + 9)^2 + 1 \geq 1$ với mọi x.

Bài 4: $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x^4 + 3x^3 - x^3 - 3x^2 - x^2 - 3x - 2x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x^3(x+3) - x^2(x+3) - x(x+3) - 2(x+3) = 0$

$\Leftrightarrow (x+3)(x^3 - x^2 - x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x+3)(x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x + x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x+3)[x^2(x-2) + x(x-2) + (x-2)] = 0$

$\Leftrightarrow (x+3)(x-2)(x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-2) = 0$

(vì $x^2 + x + 1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0\ \forall x$)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 2 \end{array}\right.$. Nghiệm của phương trình là –3, 2.

Bài 5: *Cách 1:*

Do BE là đường phân giác của ΔABC nên:

$$\frac{CE}{EA} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{CE}{EA-CE} = \frac{BC}{AB-BC}$$

ΔBCK có BF vừa là đường cao vừa là đường phân giác, ΔBCK cân tại B nên BC = BK.

Suy ra: $\frac{CE}{EA-CE} = \frac{BC}{AB-BK} = \frac{BK}{KA} = \frac{BK}{2FD}$

(Vì FD là đường trung bình ΔCKA nên $FD = \frac{KA}{2}$)

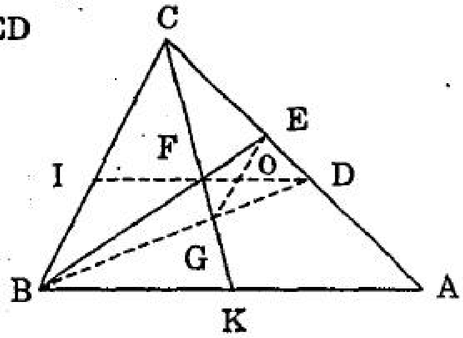
Mà $EA - CE = ED + DA - (CD - ED) = 2ED$

Suy ra: $\frac{CE}{2ED} = \frac{BK}{2FD} \Rightarrow \frac{CE}{ED} = \frac{BK}{FD} = \frac{BG}{GD}$

(do ΔBGK và ΔDGF có FD // BK)

Theo định lý Talet đảo, ta có: GE // BC.

Gọi I là giao điểm của DF với BC, ID // AB và CD = DA suy ra IB = IC



FD cắt GE tại O vì GE // BC nên $\frac{OE}{IC} = \frac{DO}{DI} = \frac{OG}{IB} \Rightarrow OE = OG$

(Vì IB = IC)

Điều này chứng tỏ DF đi qua trung điểm của EG.

Cách 2: Gọi DF cắt BC tại N.

ΔBCK cân tại B nên FC = FK suy ra FD // AB.

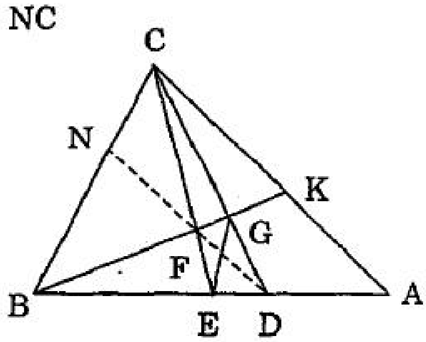
ΔABC có DC = DA và ND // AB suy ra NB = NC

Dùng định lý Menalus, trong ΔCBD

$\frac{ED}{EC}.\frac{CN}{NB}.\frac{BG}{GD} = 1 \Rightarrow \frac{ED}{EC} = \frac{GB}{GD} = 1$

$\Rightarrow \frac{ED}{EC} = \frac{GD}{GB}$

Suy ra: GE // BC, mà NB = NC do đó DF đi qua trung điểm EG.



BỘ ĐỀ 37

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI GIẢI THƯỞNG LÊ QUÝ ĐÔN QUẬN TÂN BÌNH, TPHCM – NĂM HỌC 1998 – 1999

Bài 1: Cho biểu thức: $A = \left(\frac{2+x}{2-x} - \frac{4x^2}{x^2-4} - \frac{2-x}{2+x}\right) : \left(\frac{x^2-3x}{2x-x^3}\right)$

1) Tìm điều kiện có nghĩa và rút gọn biểu thức A.
2) Tìm giá trị của x để A dương.
3) Tìm giá trị của A trong trường hợp $|x-7| = 4$

Bài 2: Cho tam giác ABC có BC = 15 cm, AC = 20 cm, AB = 25 cm.

1) Tính độ dài đường cao CH của tam giác ABC
2) Gọi CD là đường phân giác của tam giác ACH. Chứng minh tam giác BCD cân.
3) Chứng minh rằng: $BC^2 + CD^2 + BD^2 = 3CH^2 + 2BH^2 + DH^2$

Bài 3: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và M là điểm nằm trên cạnh BC. Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của B và C xuống đường thẳng AM. Xác định vị trí của điểm M trên BC để tổng BE + CF lớn nhất.

Bài 4: Có 10 chiếc nhẫn giống y hệt nhau trong đó có 9 chiếc là nhẫn thật, cân nặng bằng nhau và 1 chiếc nhẫn giả có khối lượng khác với nhẫn thật. Chỉ bằng 3 lần cân bằng cân đĩa (loại cân có 2 đĩa) là tìm ra chiếc nhẫn giả. Em hãy chỉ ra cách cân và giải thích.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: $A = \left(\dfrac{2+x}{2-x} - \dfrac{4x^2}{x^2-4} - \dfrac{2-x}{2+x}\right) : \left(\dfrac{x^2-3x}{2x-x^3}\right)$

1) Biểu thức A có nghĩa:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \neq 0 \\ x^2-4 \neq 0 \\ 2+x \neq 0 \\ x^2-3x \neq 0 \\ 2x^2-x^3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \neq 0 \\ (x-2)(x+2) \neq 0 \\ 2+x \neq 0 \\ x(x-3) \neq 0 \\ x^2(2-x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \neq 0 \\ x+2 \neq 0 \\ x \neq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -2 \\ x \neq 0 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

$$A = \left(\frac{2+x}{2-x} - \frac{4x^2}{x^2-4} - \frac{2-x}{2+x}\right) : \frac{x^2-3x}{2x-x^3} \left(\begin{matrix} x \neq \pm 2 \\ x \neq 0 \\ x \neq 3 \end{matrix}\right)$$

$$= \frac{(2+x)^2 + 4x^2 - (2-x)^2}{(2-x)(x+2)} : \frac{x(x-3)}{x^3(2-x)}$$

$$= \frac{4+4x+x^2+4x^2-4+4x-x^2}{(2-x)(2+x)} \cdot \frac{x^2(2-x)}{x(x-3)}$$

$$= \frac{4x^2+8x}{(2-x)(2+x)} \cdot \frac{x^2(2-x)}{x(x-3)} = \frac{4x(x+2).x^2(2-x)}{(2-x)(2+x)x(x-3)} = \frac{4x^2}{x-3}.$$

2) $A > 0 \Leftrightarrow \dfrac{4x^2}{x-3} > 0$ (vì $x \neq \pm 2, x \neq 0, x \neq 3$)

$\Leftrightarrow x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$

3) $|x-7| = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} x-7=4 \\ x-7=-4 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} x=11 \\ x=3 \end{matrix}\right.$

Với x = 11, ta có $A = \dfrac{4.11^2}{11-3} = \dfrac{4.121}{8} = \dfrac{121}{2}$

Với x = 3, biểu thức A vô nghĩa.

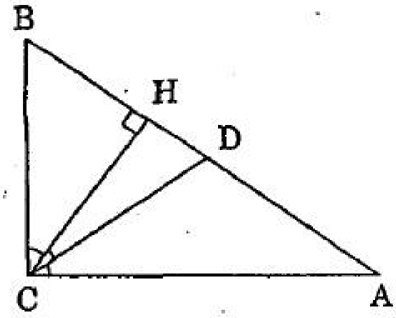
Bài 2: *Cách 1:*

1) Ta có: $AB^2 = 25^2 = 625$

$AC^2 + CB^2 = 20^2 + 15^2 = 400 + 225 = 625$

nên tam giác ABC vuông tại C (định lý Py–ta–go đảo)

Ta có: $CH.AB = CB.CA = (2S_{ABC})$



$\Rightarrow CH = \dfrac{CB.CA}{AB} = \dfrac{15.20}{25} = 12$ (cm)

2) Ta có: $\widehat{DCA} + \widehat{DCB} = \widehat{ACB} = 90^0$

$\widehat{DCH} + \widehat{CDH} = 90^0$

mà $\widehat{DCA} = \widehat{DCH}$ (CD là phân giác)

nên $\widehat{DCB} = \widehat{CDH}$ hay $\widehat{DCB} = \widehat{BDC}$

Suy ra tam giác BCD cân tại B.

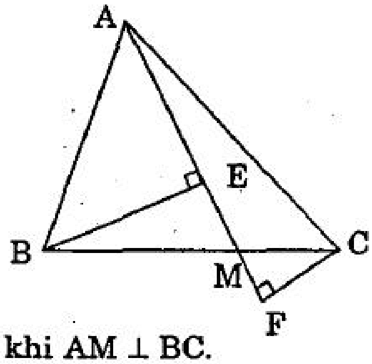
3) Áp dụng định lý Pytago vào các tam giác vuông BCH và CDH, ta có:

$\Leftrightarrow BC^2 = BH^2 + CH^2$, $CD^2 = CH^2 + HD^2$; $BD^2 = BC^2 = BH^2 + CH^2$

Suy ra: $BC^2 + CD^2 + BD^2 = BH^2 + CH^2 + CH^2 + HD^2 + BH^2 + CH^2$

$= 3CH^2 + 2\,BH^2 + DH^2$

Bài 3: Ta có:



$BE \leq BM$, $CF \leq CM$ (quan hệ giữa đường vuông góc với đường xiên)

Do đó: $BE + CF \leq BM + CM$

$BE + CF \leq BC$, BC không đổi

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $E \equiv F \equiv M$

$\Leftrightarrow AM \perp BC$

Vậy tổng BE + CF đạt giá trị lớn nhất bằng BC khi $AM \perp BC$.

Bài 4: Chia 10 chiếc nhẫn thành bốn nhóm, gọi là nhóm A, B, C, D với số chiếc nhẫn lần lượt ở mỗi nhóm là 3, 3, 3, 1.

Đặt hai nhóm A và B lên hai đĩa cân.

Trường hợp 1: Nếu cân thăng bằng có nghĩa là chiếc nhẫn giả nằm ở nhóm C hoặc nhóm D.

Trong lần cân thứ hai đặt nhóm A (hoặc B) lên 1 đĩa cân, nhóm C lên đĩa kia, nếu cân thăng bằng thì chiếc nhẫn ở nhóm D là giả. Nếu cân lệch qua nhóm A thì chiếc nhẫn giả ở nhóm C và nhẹ hơn so với chiếc nhẫn thật. Trong lần cân thứ ba chỉ việc lấy 2 chiếc nhẫn ở nhóm C đặt lên mỗi đĩa 1 chiếc nhẫn, nếu cân thăng bằng thì chiếc nhẫn giả là chiếc còn lại của nhóm C nếu cân không thăng bằng thì dễ dàng xác định chiếc nhẫn giả.

Trường hợp 2: Nếu cân không thăng bằng có nghĩa là chiếc nhẫn giả nằm ở nhóm A hoặc nhóm B.

Trong lần cân thứ hai, đặt nhóm A lên 1 đĩa cân, nhóm C lên đĩa kia. Nếu cân thăng bằng thì chiếc nhẫn giả ở nhóm B và dựa vào lần cân thứ nhất ta biết được chiếc nhẫn giả nặng hơn hay nhẹ hơn chiếc nhẫn thật.

Trong lần cân thứ ba ta thực hiện giống như lần cân thứ ba của trường hợp 1 đối với nhóm B sẽ xác định được chiếc nhẫn giả.

Trong lần cân thứ hai nếu cân không thăng bằng thì chiếc nhẫn giả ở nhóm A, và ta xác định được chiếc nhẫn giả nặng hơn hay nhẹ hơn chiếc nhẫn thật.

Trong lần cân thứ ba thực hiện giống như lần cân thứ ba của trường hợp 1 (đối với nhóm A) sẽ xác định được chiếc nhẫn giả.

BỘ ĐỀ 38

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN 6, TPHCM – NĂM HỌC 1998 – 1999

Bài 1:

1) Định m để bất phương trình sau vô nghiệm:
$(m^2 - 3m + 2)x \le 3 - 2m$

2) Giải và biện luận phương trình ẩn x sau: $\dfrac{x-2}{x-m} = \dfrac{x-1}{x+2}$

Bài 2: Cho $a \ge b \ge c > 0$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \le \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b}$$

Bài 3: Cho ΔABC vuông tại A. Từ một điểm D bất kỳ trên cạnh BC kẻ DE, DF vuông góc với AB, AC ($E \in AB$, $F \in AC$).
Chứng minh $EA \cdot EB + FA \cdot FC = DB \cdot DC$

Bài 4: Giải phương trình:

$$\frac{12x^2 + 12x + 11}{4x^2 + 4x + 3} = \frac{5y^2 - 10y + 9}{y^2 - 2y + 2}$$

Bài 5: Cho hình thoi ABCD có $\widehat{A} = 60^0$. Gọi M là một điểm thuộc cạnh AD. Đường thẳng CM cắt đường thẳng AB tại N.

1) Chứng minh: $AB^2 = DM \cdot BN$

2) BM cắt DN tại P. Tính góc $\widehat{BPD}$.

Bài 6: Cho ba số a, b, c sao cho $0 \le a \le 2$, $0 \le b \le 2$, $0 \le c \le 2$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 \le 5$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: 1) *Cách 1:* $(m^2 - 3m + 2)x \le 3 - 2m$

$\Leftrightarrow (m^2 - 2m - m + 2)x \le 3 - 2m$

$\Leftrightarrow [m(m-2) - (m-2)]x \le 3 - 2m \Leftrightarrow (m-1)(m-2)x \le 3 - 2m$ (1)

- Nếu $m = 1$, bất phương trình (1) trở thành $0x \le 1 \Leftrightarrow x$ tùy ý.
- Nếu $m = 2$, bất phương trình (1) trở thành $0x \le -1 \Leftrightarrow x \in \varnothing$
- Nếu $m \ne 1$ và $m \ne 2$ bất phương trình (1) có nghiệm

$$x \le \frac{3-2m}{(m-1)(m-2)}$$

(nếu $(m-1)(m-2) > 0$); $x \ge \dfrac{3-2m}{(m-1)(m-2)}$

(nếu $(m-1)(m-2) < 0$)

Vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm khi $m = 2$.

Cách 2: Ta có $(m^2 - 3m + 2)x \le 3 - 2m$ vô nghiệm.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 = 0 \\ 3 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2m + 2 = 0 \\ 2m > 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m(m-1)-2(m-1)=0 \\ m > \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)(m-2)=0 \\ m > \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \text{ hoặc } m = 2 \\ m > \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$$

2) $\dfrac{x-2}{x-m} = \dfrac{x-1}{x+2}$ (1)

Điều kiện để phương trình có nghĩa là $\begin{cases} x \neq m \\ x \neq -2 \end{cases}$

Với điều kiện trên phương trình (1) tương đương với:

$(x-2)(x+2) = (x-1)(x-m) \Leftrightarrow x^2 - (m+1)x + m = x^2 - 4$

$\Leftrightarrow (m+1)x = m+4$ (2)

- Nếu $m = -1$ phương trình (2) trở thành $0x = 3 \Rightarrow x \in \varnothing$
- Nếu $m \neq -1$ phương trình (2) có nghiệm $x = \dfrac{m+4}{m+1}$

Giá trị $x = \dfrac{m+4}{m+1}$ là nghiệm của phương trình (1) khi m thỏa điều kiện

$$\begin{cases} \dfrac{m+4}{m+1} \neq m \\ \dfrac{m+4}{m+1} \neq -2 \\ m+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m \neq m+4 \\ m+4 \neq -2m-2 \\ m \neq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 \neq 4 \\ 3m \neq -6 \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \pm 2 \\ m \neq -2 \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq \pm 2 \text{ và } m \neq -1$$

Kết luận:

- Nếu $m = -1$ phương trình (1) vô nghiệm
- Nếu $m \neq -1$, $m \neq \pm 2$ phương trình (1) có nghiệm $x = \dfrac{m+4}{m+1}$

Bài 2: $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} \leq \dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{c} + \dfrac{c}{b}$ $(a \geq b \geq c > 0)$

$\Leftrightarrow a^2c + b^2a + c^2b \leq b^2c + a^2b + c^2a$

$\Leftrightarrow ac(c-a) - ab(b-a) + bc(b-c) \geq 0$

$\Leftrightarrow ac(c-a) - ab(b-c+c-a) + bc(b-c) \geq 0$

$\Leftrightarrow ac(c-a) - ab(b-c) - ab(c-a) + bc(b-c) \geq 0$

$\Leftrightarrow a(c-a)(c-b) - b(c-b)(c-a) \geq 0 \Leftrightarrow (c-a)(c-b)(a-b) \geq 0$

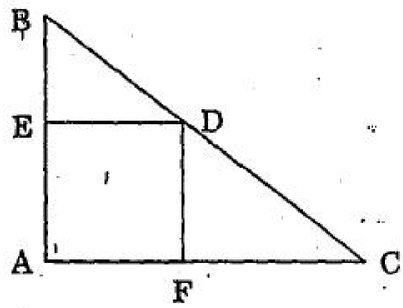
(bất đẳng thức đúng vì $c - a \leq 0$, $c - b \leq 0$, $a - b \geq 0$ do $a \geq b \geq c$)

Vậy $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\le\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{b}$ $(a \ge b \ge c > 0)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ a = c hoặc b = c hoặc a = b.

Bài 3: *Cách 1:*

Tứ giác AEDF là hình chữ nhật và có $\widehat{EAF} = \widehat{AED} = \widehat{AFD} = 90^0$



ΔBED và ΔDFC có:

$\widehat{BED} = \widehat{DFC} = 90^0$

$\widehat{BDE} = \widehat{C}$ (đồng vị)

Vậy $\Delta BED \backsim \Delta DFC$ (g–g)

Cho ta: $\dfrac{BE}{DB}=\dfrac{FD}{CD}$ và $\dfrac{DE}{DB}=\dfrac{FC}{CD}=\dfrac{FA}{DB}$

Hệ thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{EA.EB+FA.FC}{DB.DC}=1 \Rightarrow \frac{EA}{DC}.\frac{EB}{DB}+\frac{FA}{DB}.\frac{FC}{DC}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{FD}{DC}.\frac{FD}{DC}+\frac{FC}{CD}.\frac{FC}{CD}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{FD^2+FC^2}{DC^2}=1 \Leftrightarrow \frac{DC^2}{DC^2}=1 \text{ (đúng)}$$

Cách 2: ΔABC có ED // AC

$$\frac{EA}{AB}=\frac{DC}{BC},\frac{EB}{AB}=\frac{DB}{BC}$$

Do đó $\dfrac{EA}{AB}.\dfrac{EB}{AB}=\dfrac{DC}{BC}.\dfrac{DB}{BC} \Rightarrow EA\ .\ EB = DC\ .\ DB\ .\ \dfrac{AB^2}{BC^2}$

Chứng minh tương tự ta có: $FC\ .\ FA = DC\ .\ DB\ .\ \dfrac{AB^2}{BC^2}$

Do đó: $EA\ .\ EB + FC\ .\ FA = DC\ .\ DB\left(\dfrac{AB^2}{BC^2}+\dfrac{AC^2}{BC^2}\right)$

$$= DC\ .\ DB\left(\frac{AB^2+AC^2}{BC^2}\right) = DC.\ DB$$

(vì ΔABC vuông tại A nên $AB^2 + AC^2 = BC^2$)

Cách 3: Lần lượt áp dụng định lý Pitago vào các tam giác vuông BED và DFC, ta có: $\begin{cases} BD^2 = BE^2 + ED^2 \\ DC^2 = DF^2 + FC^2 \end{cases}$

Do tứ giác AEDF là hình chữ nhật (vì có $\widehat{A} = \widehat{E} = \widehat{F} = 90^0$)

nên ED = AF và DF = EA $\Rightarrow \begin{cases} BD^2 = BE^2 + AF^2 \\ DC^2 = EA^2 + FC^2 \end{cases}$ (1)

Lại áp dụng định lý Pitago vào tam giác vuông ABC, ta được:

$BC^2 = BA^2 + AC^2$

$\Leftrightarrow (BD + DC)^2 = (BE + EA)^2 + (AF + FC)^2$

$\Leftrightarrow BD^2 + DC^2 + 2BD.DC$

$= BE^2 + EA^2 + 2BE.EA + AF^2 + FC^2 + 2AF.FC$

$\Leftrightarrow BD^2 + DC^2 + 2BD.DC$

$= BE^2 + AF^2 + EA^2 + FC^2 + 2BE.EA + 2AF.FC$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra:

$BD^2 + DC^2 + 2BD.DC = BD^2 + DC^2 + 2(BE.EA + AF.FC)$

$\Leftrightarrow BD.DC = EA.EB + AF.FC$

Bài 4: $\dfrac{12x^2 + 12x + 11}{4x^2 + 4x + 3} = \dfrac{5y^2 - 10y + 9}{y^2 - 2y + 2}$ (1)

Ta có: $4x^2 + 4x + 3 = (2x + 1)^2 + 2$

$y^2 - 2y + 2 = (y - 1)^2 + 1$

Vậy phương trình (1) có nghĩa với mọi giá trị của x, y.

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{3(4x^2 + 4x + 3) + 2}{4x^2 + 4x + 3} = \dfrac{5(y^2 - 2y + 2) - 1}{y^2 - 2y + 2}$

$\Leftrightarrow 3 + \dfrac{2}{(2x+1)^2} = \dfrac{1}{(y-1)^2 + 1} \Leftrightarrow \dfrac{2}{(2x+1)^2 + 2} + \dfrac{1}{(y-1)^2 + 1} = 2$ (2).

Ta có $(2x + 1)^2 + 2 \geq 2$

Do đó: $\dfrac{2}{(2x+1)^2 + 2} \leq 1$

$(y - 1)^2 + 1 \geq 1$

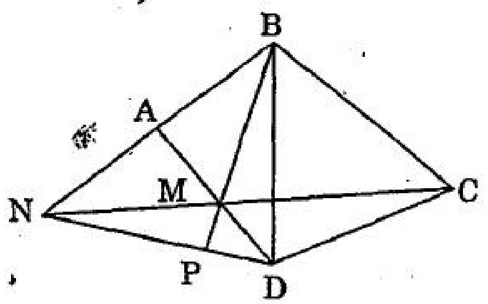
Do đó: $\dfrac{1}{(y-1)^2 + 1} \leq 1$

Ta có: $\dfrac{2}{(2x+1)^2 + 2} + \dfrac{1}{(y-1)^2 + 1} \leq 2$

Dấu "=" xảy ra: $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy phương trình (1) có nghiệm là: $\left(x = -\dfrac{1}{2}; y = 1\right)$

Bài 5: 1) Ta có: AM // BC (do AD // BC)



Suy ra $\Delta NAM \backsim \Delta NBC$

Cho ta: $\dfrac{NA}{AM} = \dfrac{NB}{BC}$

hay $\dfrac{NA}{AM} = \dfrac{NB}{AB}$ (1) (vì BC = AB)

Ta có: NA // DC (do AB // DC)

Suy ra $\Delta NAM \backsim \Delta CDM$

Cho ta $\frac{NA}{AM} = \frac{CD}{DM}$,

hay $\frac{NA}{AM} = \frac{AB}{DM}$ (2) (vì CD = AB)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{NB}{AB} = \frac{AB}{DM}$ hay $AB^2 = DM \,.\, BN$

2) Từ $\frac{NB}{AB} = \frac{AB}{DM} \Rightarrow \frac{NB}{BD} = \frac{BD}{DM}$

Xét ΔBND và ΔDBM có $\frac{NB}{BD} = \frac{BD}{DM}$ và $\widehat{NBD} = \widehat{BDM} = 60^0$

Vậy $\Delta BND \backsim \Delta DBM$ (c–g–c)

Cho ta: $\widehat{MBD} = \widehat{BND}$ suy ra $\widehat{MBD} + \widehat{MBN} = \widehat{BND} + \widehat{MBN} = 60^0$.

Mà $\widehat{BPD} = \widehat{BND} + \widehat{MBN}$ nên $\widehat{BPD} = 60^0$

Khai thác bài toán: giải bài toán sau.

Cho hình thoi ABCD có góc $\widehat{A}$ bằng 60^0. Vẽ đường thẳng qua C cắt tia đối của tia BA tại M và cắt tia đối của tia DA tại N, DM cắt BN tại K. Tính số đo góc $\widehat{MKB}$.

Bài 6: *Cách 1:*

Do vai trò a, b như nhau nên không mất tính tổng quát, ta giả sử

$0 \le a \le b \le c \le 2$

$3 = a + b + c \le 3c \Rightarrow 1 \le c \le 2$

ta có: $a + b + c = 3 \Rightarrow a + b = 3 - c$

suy ra: $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b)^2 - 2ab + c^2 \le (a + b)^2 + c^2$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \le (3 - c)^2 + c^2 = 2c^2 - 6c + 9$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = \le 2\left(c - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}$

với $1 \le c \le 2; -\frac{1}{2} \le c - \frac{3}{2} \le \frac{1}{2}$

Do đó $\left(c - \frac{3}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}$

Ta có: $2\left(c - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} \le \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 5$

Vậy $a^2 + b^2 + c^2 \le 5$

Cách 2: Vì $a, b, c \in [0; 2]$ nên $2 - a \ge 0$; $2 - b \ge 0$; $2 - c \ge 0$

Suy ra: $(2 - a)(2 - b)(2 - c) \ge 0$

hay: $8 + 2(ab + bc + ca) - 4(a + b + c) - abc \ge 0$

- Thay $a + b + c = 3$ ta được $2(ab + bc + ca) \ge abc + 4$
- Cộng hai vế với $a^2 + b^2 + c^2$ ta được

$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \ge a^2 + b^2 + c^2 + abc + 4$

$a^2 + b^2 + c^2 \le 5$

$\Leftrightarrow (a + b + c)^2 \ge a^2 + b^2 + c^2 + abc + 4 \Leftrightarrow 9 \ge a^2 + b^2 + c^2 + abc + 4$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + abc \le 5$

Cách 3: Đặt $\begin{cases} a = 1+\alpha \\ b = 1+\beta \\ c = 1+\gamma \end{cases}$ với $\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \alpha,\beta,\gamma \in [-1;1] \end{cases}$

$a^2 + b^2 + c^2 \le 5 \Leftrightarrow (1 + \alpha)^2 + (1 + \beta)^2 + (1 + \gamma)^2 \le 5$

$\Leftrightarrow 3 + 2(\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \le 5 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \le 2$

Trong ba số α, β, γ luôn tồn tại hai số hoặc cùng lớn hơn hoặc bằng 0 hoặc cùng nhỏ hơn hoặc bằng 0, giả sử hai số đó là α, β.

Khi đó $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \le \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta + \gamma^2 = (\alpha + \beta)^2 + \gamma^2 = 2\gamma^2 \le 2$

Vậy bất đẳng thức $a^2 + b^2 + c^2 \le 5$ (đúng)

Cách 4: Do vai trò của a, b, c như nhau, nên không mất tính tổng quát, ta giả sử $0 \le a \le b \le c \le 2$.

Ta có: $3 = a + b + c \le 3c \Rightarrow c \ge 1$

Do đó: $(c - 1)(c - 2) \le 0 \Leftrightarrow c^2 - 2c - c + 2 \le 0$

$\Leftrightarrow c^2 - 3c + 2 \le 0$

Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 \le a^2 + b^2 + 2ab + c^2 = (a + b)^2 + c^2$

$= (3 - c)^2 + c^2 = 9 - 6c + c^2 + c^2 = 5 + 2c^2 - 6c + 4$

$= 5 + 2(c^2 - 3c + 2) \le 4$

Dấu "=" xảy ra $(a; b; c) \in \{(0, 1, 2); (0, 2; 1); (1, 0, 2); (1, 2, 0); (2, 1, 0), (2, 0, 1)\}$

BỘ ĐỀ 39

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN 9, TPHCM – NĂM HỌC 1998 – 1999

Bài 1:

1) Thực hiện phép tính:

$$A = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}}$$

2) Viết phân thức sau đây thành tổng hai phân số khác mẫu số với phân thức đã cho $B = \dfrac{48-2p}{16-p^2}$

3) Thu gọn: $C = \dfrac{\dfrac{1}{a^2-9} - \dfrac{1}{a^2+9}}{\dfrac{1}{a^2-9} + \dfrac{1}{a^2+9}} - \dfrac{a^2+9}{a^2}$

Bài 2:

1) Giải phương trình $x^3 + 3x^2 + 2x + 6 = 0$

2) Giải phương trình: $|x^2 - 1| + |a(x-1)| = 0$ (a tham số)

3) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2$

Bài 3: Cho tam giác ABC. Trên AB lấy điểm D sao cho BD = 3DA. Trên CB lấy điểm E sao cho BE = 4 EC. Gọi F là giao điểm của AE và CD. Chứng minh rằng FD = FC.

Bài 4: Cho tam giác ABC, M là điểm nằm trên cạnh BC, chứng minh: MA . BC < MC . AB + MB . AC.

Bài 5: Trong tất cả các hình chữ nhật có chiều dài đường chéo không đổi là d. Hãy tìm diện tích hình có diện tích lớn nhất?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) Với $x \neq \pm 1$, ta có:

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{1+x^{16}}$$

$$=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{1+x^{16}}$$

$$=\frac{4}{1-x^4}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{1+x^{16}}=\frac{8}{1-x^8}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{1+x^{16}}$$

$$=\frac{16}{1-x^{16}}+\frac{16}{1+x^{16}}=\frac{32}{1-x^{32}}$$

2) Với $p^2-16 \neq 0 \Leftrightarrow p \neq \pm 4$, ta có:

$$B=\frac{48-2p}{(4-p)(4+p)}=\frac{20+5p+28-7p}{(4-p)(4+p)}=\frac{5(4+p)+7(4-p)}{(4-p)(4+p)}=\frac{5}{4-p}+\frac{7}{4+p}$$

3) Với $a \neq 0$, $a \neq \pm 3$

$$\frac{\frac{1}{a^2-9}-\frac{1}{a^2+9}}{\frac{1}{a^2-9}+\frac{1}{a^2+9}}-\frac{a^2+9}{a^2}=\frac{a^2+9-(a^2-9)}{a^2+9+a^2-9}-\frac{a^2+9}{a^2}=\frac{9-a^2-9}{a^2}=-1$$

Bài 2:

1) $x^3+3x^2+2x+6=0 \quad \Leftrightarrow x^2(x+3)+2(x+3)=0$

$\Leftrightarrow (x+3)(x^2+2)=0 \quad \Leftrightarrow x+3=0$ (vì $x^2+2>0$)

$\Leftrightarrow x=-3$

2) Xem lời giải bài 4, bộ đề 33.

3) Ta biết, nếu $\frac{x}{y}<1 \Rightarrow \frac{x}{y}<\frac{x+n}{y+n}$ (với x, y, n > 0)

Thật vậy, vì $\frac{x}{y}<1$ $(y>0) \Rightarrow x<y \Rightarrow xn<yn$ (vì $n>0$)

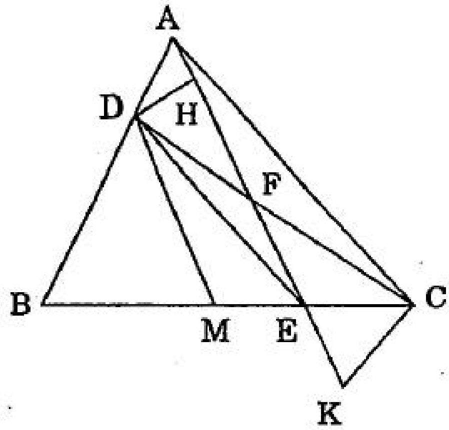
$\Rightarrow xy+xn<xy+yn \Rightarrow x(y+n)<y(x+n)$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} < \frac{x+n}{y+n}$$

Vì a, b, c, là độ dài ba cạnh của tam giác nên $a < b + c$, $b < a + c$ và $c < a + b$

$$\Rightarrow \frac{a}{b+c} < 1; \frac{b}{a+c} < 1; \frac{c}{a+b} < 1$$

$$\text{Vậy} \begin{cases} \dfrac{a}{b+c} < \dfrac{2a}{a+b+c} \\ \dfrac{b}{a+c} < \dfrac{2b}{a+b+c} \\ \dfrac{c}{a+b} < \dfrac{2c}{a+b+c} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2$$



Bài 3: *Cách 1:* Ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{S_{AEC}}{S_{ABE}} = \dfrac{EC}{BE} = \dfrac{1}{4} \text{ (vì } BE = 4EC) \\ \dfrac{S_{ADE}}{S_{ABE}} = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{1}{4} \text{ (vì } BD = 3DA) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{AEC}}{S_{ABE}} = \frac{S_{ADE}}{S_{ABE}} \Rightarrow S_{AEC} = S_{ADE}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} AE \,.\, CK = \frac{1}{2} DH \,.\, AE \Rightarrow CK = DH$$

Vậy: $\Delta HFD = \Delta KFC$ ($\hat{H} = \hat{K} = 90^0$; $\widehat{FDH} = \widehat{FCK}$; $CK = AH$)

$\Rightarrow FD = FC$

Cách 2: Từ $BD = 3DA \Rightarrow \dfrac{BD}{AB} = \dfrac{3}{4}$

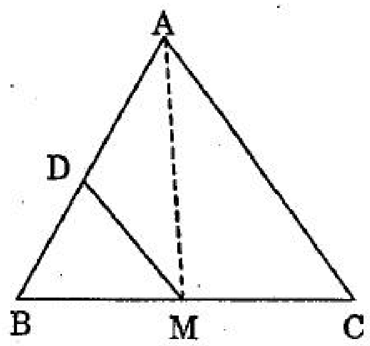
Gọi $M = S_E(C) \Rightarrow ME = \dfrac{BE}{4}$

Suy ra: $\dfrac{BD}{AB} = \dfrac{3}{4}$ (vì $\dfrac{ME}{BE} = \dfrac{1}{4}$ nên $\dfrac{MB}{BE} = \dfrac{3}{4}$) $\Rightarrow MD \,//\, AE$

Trong tam giác DMC có $DM \,//\, EF$ và $EM = EC$ suy ra $FD = FC$.

Bài 4: Kẻ $MD \,//\, AC$ ($D \in AB$)

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{MB}{BC} = \dfrac{MD}{AC} \\ \dfrac{MC}{BC} = \dfrac{AD}{AB} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MB.AC = MD.BC \\ MC.AB = AD.BC \end{cases}$$

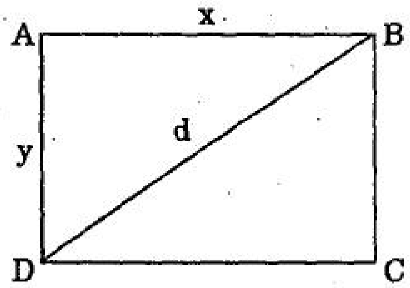


suy ra:

$$MB.AC + MC.AB = MD.BC + AD.BC$$
$$= (MD + AD)\,BC > MA.BC$$

(Vì tam giác ADM có: $MD + AD > MA$)

Bài 5: Gọi x, y là kích thước của hình chữ nhật ($x, y > 0$)



Ta có: $x^2 + y^2 = d^2$

Mà $x^2 + y^2 \geq 2xy$

$\Rightarrow xy \leq \dfrac{d^2}{2}$ (không đổi)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$

$\Leftrightarrow$ ABCD hình vuông.

Nghĩa là trong tất cả các hình chữ nhật có chiều dài đường chéo là d không đổi thì hình vuông có điện tích lớn nhất và bằng $\dfrac{d^2}{2}$

BỘ ĐỀ 40

ĐỀ THI HỌC BỔNG TRƯỜNG THCS NGUYỄN DU QUẬN 1, TPHCM – NĂM HỌC 1998 – 1999

Bài 1:

1) Tính: $S = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + 99^2 - 100^2 + 101^2$

2) Cho $a + b + c = 9$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 53$. Tính $ab + bc + ca$

Bài 2: Cho $a + b + c + d = 0$

Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(c + d)(ab - cd)$

Bài 3: Chứng minh rằng: $\forall a, b, c$: $a^2 + 4b^2 + 3c^2 > 2a + 12b + 6c - 14$

Bài 4: Cho góc $\widehat{xOy} = 60^0$. Trên hai tia Ox, Oy lần lượt lấy các điểm tùy ý B và C. Chứng minh rằng: $OB + OC \leq 2BC$.

Bài 5: Cho tứ giác ABCD (AB không song song với CD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD thỏa mãn: $MN = \dfrac{BC + AD}{2}$

Chứng minh ABCD là hình thang.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) *Cách 1:* $S = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + 99^2 - 100^2 + 101^2$

$= -(2^2 - 1^2 + 4^2 - 3^2 + ... + 100^2 - 99^2 - 101^2)$

$= -[(2 - 1)(2 + 1) + (4 - 3)(4 + 3) + ... + (100 - 99)(100 + 99) - 101^2]$

$= -(3 + 7 + 11 + ... + 199 - 101^2)$

$= -(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + ... + 99 + 100 - 101^2)$

$= -\left[\dfrac{100(100+1)}{2} - 101^2\right] = -\left(\dfrac{100.101 - 2.101^2}{2}\right) = \dfrac{101.102}{2}$

$= 101 . 51 = 5151$

Cách 2: $S = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + 99^2 - 100^2 + 101^2$

$= 1^2 + (3^2 - 2^2) + (5^2 - 4^2) + ... + (101^2 - 100^2)$

$= 1 + (3 + 2)(3 - 2) + (5 + 4)(5 - 4) + ... + (101^2 - 100^2)$

$= 1 + (3 + 2)(3 - 2) + (5 + 4)(5 - 4) + ... + (101 + 100)(101 - 100)$

$= 1 + (3 + 2) + (5 + 4) + ... + (101 + 100) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + 100 + 101$

$= (1 + 101) . 101 : 2 = 5151$

2) Ta có: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$

mà $a + b + c = 9$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 53$

Suy ra: $81 = 53 + 2(ab + bc + ac) \Rightarrow ab + bc + ac = \dfrac{81 - 53}{2} = 14$

Bài 2: Ta có: $a + b + c + d = 0$ nên $a + b = -(c + d)$

Suy ra: $(a + b)^3 = -(c + d)^3 \Rightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

$= -c^3 - d^3 - 3cd(c + d)$

$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = -3ab(a + b) - 3cd(c + d)$

$= 3ab(c + d) - 3cd(c + d) = 3(c + d)(ab - cd)$ (đpcm)

Bài 3: Ta có: $a^2 + 4b^2 + 3c^2 > 2a + 12b + 6c - 14$

$\Leftrightarrow (a^2 - 2a) + (4b^2 - 12b) + 3(c^2 - 2c) + 14 > 0$

$\Leftrightarrow (a^2 - 2a + 1) + (4b^2 - 12b + 9) + 3(c^2 - 2c + 1) + 1 > 0$

$\Leftrightarrow (a - 1)^2 + (2b - 3)^2 + 3(c - 1)^2 + 1 > 0$ (đúng)

Vì: $\begin{cases} (a-1)^2 \ge 0, \text{với mọi } a \\ (2b-3)^2 \ge 0, \text{với mọi } b \\ 3(c-1)^2 \ge 0, \text{với mọi } c \end{cases}$

$\Rightarrow (a - 1)^2 + (2b - 3)^2 + 3(c - 1)^2 + 1 > 0$, với mọi a, b, c.

Bài 4:

Xét OB = OC. Ta có ΔOBC đều nên OB = OC = BC.

Do đó OB + OC = 2 BC.

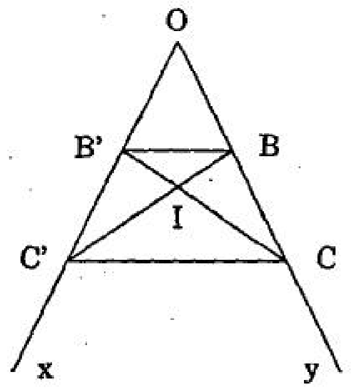
Xét OB < OC

Trên tia Ox lấy C', trên tia Oy lấy E sao cho OB' = OB, OC' = OC.

Ta được tam giác OBB' và tam giác OCC' là các tam giác đều.

(vì là tam giác cân có một góc 60^0)

Suy ra BB'CC' là hình thang cân.



Ta có: $\begin{cases} BI + B'I \ge BB' \\ IC + IC' \ge CC' \end{cases}$

$\Rightarrow (BI + IC) + (B'I + IC') \ge BB' + CC'$

$\Rightarrow BC + B'C' \ge BB' + CC' \Rightarrow OB + OC \le 2 BC$

Xét OB > OC

Tương tự OB < OC cũng chứng minh được

OB + OC $\le$ 2 BC

Tóm lại OB + OC $\le$ 2 BC

Bài 5: Gọi E trung điểm AC, do M, N lần lượt là trung điểm AB, CD suy ra ME, NE là đường trung bình của tam giác ABC và tam giác CAD nên ME // BC;

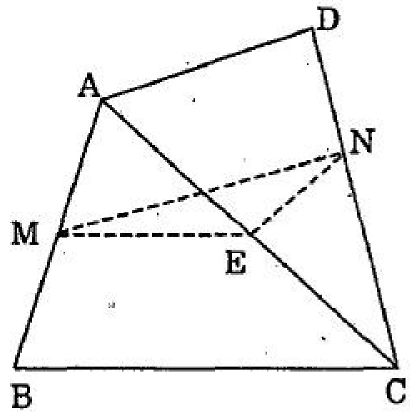
$ME = \dfrac{BC}{2}$ và NE // AD; $NE = \dfrac{AD}{2}$

Suy ra $ME + NE = \dfrac{BC + AD}{2}$

Mà $MN = \dfrac{BC + AD}{2}$

Do đó $MN = ME + NE$

Suy ra M, N, E thuộc cùng một đường thẳng mà AD và BC cùng song song với đường thẳng ấy nên AD // BC. Vậy tứ giác ABCD là hình thang.



BỘ ĐỀ 41

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 8 TRƯỜNG THCS NGUYỄN DU QUẬN 1, TPHCM – NĂM HỌC 1998 – 1999

Bài 1: Giải phương trình:

1) $\dfrac{x^2 - x}{x^2 - x + 1} - \dfrac{x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2} = 1$ 2) $|x^2 - 5x + 5| = -2x^2 + 10x - 11$

Bài 2: Cho a, b, c là ba số đôi một khác nhau.

1) Tính: $S = \dfrac{ab}{(b - c)(c - a)} + \dfrac{bc}{(c - a)(a - b)} + \dfrac{ac}{(a - b)(b - c)}$

2) Chứng minh rằng: $\dfrac{a^2}{(b - c)^2} + \dfrac{b^2}{(c - a)^2} + \dfrac{c^2}{(a - b)^2} \geq 2$

Bài 3: Cho ba số dương có tổng bằng 4. Chứng minh rằng tổng của hai số bất kỳ trong ba số đó không bé hơn tích của ba số đó.

Bài 4: Cho tam giác ABC cân tại A ($\widehat{A} < 90^0$), từ B kẻ BM vuông góc với AC. Chứng minh rằng: $\dfrac{AM}{MC} = 2\left(\dfrac{AB}{BC}\right)^2 - 1$

Bài 5: Cho hình bình hành ABCD tâm O, Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BO, AO. Lấy điểm F trên cạnh AB sao cho tia FM cắt cạnh BC tại E và tia FN cắt cạnh AD tại K.

Chứng minh rằng:

1) $\dfrac{BA}{BF} + \dfrac{BC}{BE} = 4$ 2) $BE + AK \geq BC$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: 1) Ta có: $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \neq 0$

$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$

Vậy TXĐ = $\{x \mid x \neq 2, x \neq -1\}$

Đặt $t = x^2 - x$ phương trình đã cho được viết:

$\frac{t}{t+1} - \frac{t+2}{t-2} = 1 \Leftrightarrow t(t-2) - (t+2)(t+1) = (t+1)(t-2)$ $(t \neq -1; t \neq 2)$

$\Leftrightarrow t^2 + 4t = 0 \Leftrightarrow t = 0$ hoặc $t = -4$

Với: $t = 0$ ta có $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$

$t = 4$, ta có $x^2 - x = -4$ phương trình vô nghiệm

(vì $x^2 - x + 4 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 0$ và $x = 1$

2) $|x^2 - 5x + 5| = -2x^2 + 10x - 11$

Đặt $t = x^2 - 5x + 5$, ta có $|t| = -2t - 1$ (*)

Điều kiện để phương trình (*) có nghiệm là: $-2t - 1 \geq 0 \Leftrightarrow t \leq -\frac{1}{2}$

Vậy $|t| = -t$

Phương trình (*) $\Leftrightarrow -t = -2t - 1 \Leftrightarrow t = -1$

Vậy $x^2 - 5x + 5 = -1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x(x - 3) - 2(x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 3)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = 3$

Kết luận: $S = \{2, 3\}$

Bài 2: 1) *Cách 1:* $x = \frac{a}{b-c}$; $y = \frac{b}{c-a}$; $z = \frac{c}{a-b}$ (*)

Ta nhận thấy:

$(x + 1)(y + 1)(z + 1) = (x - 1)(y - 1)(z - 1)$

$\Rightarrow xyz + xy + yz + zx + x + y + z + 1$

$= xyz - (xy + yz + zx) + x + y + z - 1$

$\Rightarrow 2(xy + yz + zx) = -2 \Rightarrow xy + yz + zx = -1$

Vậy: $S = \frac{ab}{(b-c)(c-a)} + \frac{bc}{(c-a)(a-b)} + \frac{ac}{(a-b)(b-c)} = -1$

Cách 2: Ta có: $S = \frac{ab(a-b) - bc(c-b) + ac(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

Xét tử thức, ta có

$ab(a - b) - bc(c - b) + ac(c - a)$

$= ab(a - b) - bc[(c - a) + (a - b)] + ac(c - a)$

$= ab(a - b) - bc(c - a) - bc(a - b) + ac(c - a)$

$= -b(a-b)(c-a) + c(a-b)(c-a)$
$= (a-b)(c-b)(c-a) = -(a-b)(b-c)(c-a)$

Vậy $S = \dfrac{-(a-b)(b-c)c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = -1$

2) Ta có: $(x+y+z)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq -2(xy + yz + zx)$

Với $xy + yx + zx = -1 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 2$

Thay (*) vào ta được bất đẳng thức: $\dfrac{a^2}{(b-c)^2} + \dfrac{b^2}{(c-a)^2} + \dfrac{c^2}{(a-b)^2} \geq 2$

Bài 3: Gọi a, b, c là ba số dương thỏa mãn: $a + b + c = 4$

Ta cần chứng minh $a + b \geq abc$

Cách 1: Xét hiệu: $a + b - abc = a + b - ab(4 - a - b)$

(do $a + b + c = 4 \Rightarrow c = 4 - a - b$)

$= a + b - 4ab + a^2b + ab^2 = a(b^2 - 2b + 1) + b(a^2 - 2a + 1)$

$= a(b-1)^2 + b(a-1)^2 \geq 0$

Vì a, b > 0 và $(b-1)^2 \geq 0$, $(a-1)^2 \geq 0$

nên $a(b-1)^2 \geq 0$; $b(a-1)^2 \geq 0 \Rightarrow a + b \geq abc$.

Dấu "=" xảy ra $a = b = 1$ và $c = 2$.

Cách 2: $\forall$ x, y ta có:

$(x-y)^2 \geq \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy \geq 4xy \Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 4xy$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$

Áp dụng với hai số a + b và c, ta có:

$16 = [(a+b)+c]^2 \geq 4(a+b)c \Rightarrow 16(a+b) \geq 4(a+b)^2c$ (do $a + b > 0$)

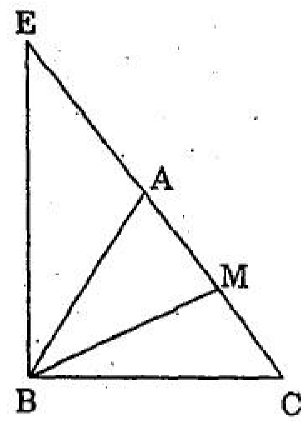
$\Rightarrow 16(a+b) \geq 16abc \Rightarrow a + b \geq abc$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=4 \\ a+b=c \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=1 \\ c=2 \end{cases}$

Bài 4: Lấy E là điểm đối xứng của C qua A.

Suy ra: AC = AE = AB.

Vậy tam giác BEC vuông tại B.



Kẻ $BM \perp EC$ nên: $MC = \dfrac{BC^2}{CE} = \dfrac{BC^2}{2AC}$ (1)

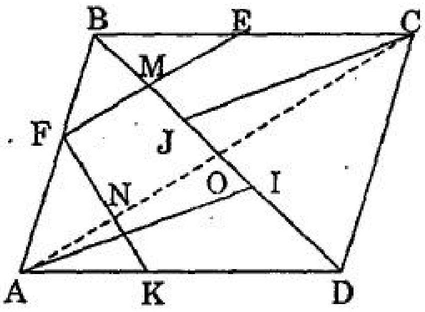
Mà AM = AC – MC

$= AC - \dfrac{BC^2}{2AC} = \dfrac{2AC^2 - BC^2}{2AC}$ (2)

Từ (1) và (2), ta được:

$\dfrac{AM}{MC} = \dfrac{2AC^2 - BC^2}{BC^2} = 2\left(\dfrac{AB}{BC}\right)^2 - 1$

Bài 5: 1) Kẻ AI // EF ($I \in BD$), kẻ CJ // EF ($J \in BD$).



Ta có: $\frac{BA}{BF} = \frac{BI}{BM}$ và $\frac{BC}{BE} = \frac{BJ}{BM}$

$\Rightarrow \frac{BA}{BF} + \frac{BC}{BE} = \frac{BI + BJ}{BM} = \frac{2BO}{BM} = 4$

(Do $\Delta OIA = \Delta OJC$ (g – c – g))

nên OI = OJ

suy ra BI + BJ = BO + OI + BO – OJ = 2OB

2) Theo kết quả câu a: $\frac{BA}{BF} + \frac{BC}{BE} = 4$

Lý luận tương tự, ta có: $\frac{AB}{AF} + \frac{AD}{AK} = 4$

Cộng vế với vế hai đẳng thức trên ta được:

$$8 = AB\left(\frac{1}{BF} + \frac{1}{AF}\right) + BC\left(\frac{1}{BE} + \frac{1}{AK}\right) \qquad (*)$$

$\forall x, y > 0$ ta có: $(x + y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} \geq \frac{4}{x+y} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$

Áp dụng, ta được:

$$\begin{cases} \frac{1}{BF} + \frac{1}{AF} \geq \frac{4}{AF + BF} = \frac{4}{AB} \\ \frac{1}{BE} + \frac{1}{AK} \geq \frac{4}{BE + AK} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 8 = AB\left(\frac{1}{BF} + \frac{1}{AF}\right) + BC\left(\frac{1}{BE} + \frac{1}{AK}\right) \geq \frac{4AB}{AB} + \frac{4BC}{BE + AK}$$

$$\Rightarrow 4 \geq \frac{4BC}{BE + AK} \Rightarrow BE + AK \geq BC \text{ (đpcm)}$$

Chú ý: Ở bài 2, ta chọn $x = \frac{a+b}{a-b}$; $y = \frac{b+c}{b-c}$; $z = \frac{c+a}{c-a}$

thì $xy + yz + zx = \frac{a+b}{a-b}.\frac{b+c}{b-c} + \frac{b+c}{b-c}.\frac{c+a}{c-a} + \frac{c+a}{c-a}.\frac{a+b}{a-b}$

Rõ ràng: $(x + 1)(y + 1)(z + 1) = (x - 1)(y - 1)(z - 1)$

Suy ra $xy + yz + zx = -1$

Vậy ta có bất đẳng thức sau: $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2 \geq 2$ (1)

Thêm 3 vào cả hai vế ta được:

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 + 1 + \left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2 + 1 + \left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2 + 1 \geq 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(a^2+b^2)}{(a-b)^2}+\frac{2(b^2+c^2)}{(b-c)^2}+\frac{2(c^2+a^2)}{(c-a)^2} \ge 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{(a-b)^2}+\frac{b^2+c^2}{(b-c)^2}+\frac{c^2+a^2}{(c-a)^2} \ge \frac{5}{2} \qquad (2)$$

Thêm –3 vào cả hai vế của (1) ta được:

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2-1+\left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2-1+\left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2-1 \ge -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{4ab}{(a-b)^2}+\frac{4bc}{(b-c)^2}+\frac{4ac}{(c-a)^2} \ge -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{ab}{(a-b)^2}+\frac{bc}{(b-c)^2}+\frac{ac}{(c-a)^2} \ge -\frac{1}{4} \qquad (3)$$

Cộng vế với vế (2) và (3) ta được:

$$\frac{a^2+b^2+ab}{(a-b)^2}+\frac{b^2+c^2+bc}{(b-c)^2}+\frac{c^2+a^2+ac}{(c-a)^2} \ge \frac{5}{2}-\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)(a^2+b^2+ab)}{(a-b)^3}+\frac{(b-c)(b^2+c^2+bc)}{(b-c)^3}+\frac{(c-a)(c^2+a^2+ac)}{(c-a)^3} \ge \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3-b^3}{(a-b)^3}+\frac{b^3-c^3}{(b-c)^3}+\frac{c^3-a^3}{(c-a)^3} \ge \frac{9}{4}$$

Từ đây ta có bài toán hay và khó sau:

Cho a, b, c là ba số từng đôi một khác nhau. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3+b^3}{(a-b)^3}+\frac{b^3+c^3}{(b-c)^3}+\frac{c^3+a^3}{(c-a)^3} \ge \frac{9}{4}$$

BỘ ĐỀ 42

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUẬN 1, TPHCM – NĂM HỌC 1998 – 1999

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử

1) $x^2 - 6x - 16$

2) $x^3 - x^2 + x + 3$

Bài 2: Thực hiện phép tính:

$$A = \frac{x^2-yz}{(x+y)(x-y)}+\frac{y^2-xz}{(y+z)(y+x)}+\frac{z^2-xy}{(x+z)(y+z)}$$

Bài 3: Cho $|a| \le 1; |a-c| < 1999; |b-1| < 1999$.

Chứng minh rằng $|ab-c| < 3998$

Bài 4: Tìm x, y, z thỏa phương trình:

$$9x^2 + y^2 + 2z^2 - 18x + 4z - 6y + 20 = 0$$

Bài 5: Cho tam giác ABC (BA = BC). Trên cạnh AC chọn điểm K nằm giữa A và C. Trên tia đối của tia CA lấy điểm E sao cho: CE = AK. Chứng minh rằng BK + BE > BA + BC.

Bài 6: Cho tam giác đều ABC. Gọi M là một điểm bất kì nằm trong tam giác. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ M đến ba cạnh của tam giác có giá trị không đổi khi M thay đổi vị trí trong tam giác.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $x^2 - 6x - 16 = x^2 - 8x + 2x - 16 = x(x - 8) + 2(x - 8) = (x - 8)(x + 2)$

2) $x^3 - x^2 + x + 3 = x^3 - 2x^2 + 3x + x^2 - 2x + 3 =$

$= x(x^2 - 2x + 3) + 1(x^2 - 2x + 3) = (x^2 - 2x + 3)(x + 1)$

Bài 2: Ta có:

$$\frac{x^2 - yz}{(x+y)(x+z)} = \frac{x^2 + xy - xy - yz}{(x+y)(x+z)} = \frac{x(x+y) - y(x+z)}{(x+y)(x+z)} = \frac{x}{x+z} - \frac{y}{x+y}$$

$$\frac{y^2 - xz}{(y+z)(y+x)} = \frac{y^2 + yz - yz - xz}{(y+z)(y+x)} = \frac{y(y+z) - z(x+y)}{(y+z)(y+x)} = \frac{y}{x+y} - \frac{z}{y+z}$$

$$\frac{z^2 - xy}{(z+x)(z+y)} = \frac{z^2 + xz - xz - -xy}{(z+x)(z+y)} + \frac{z(x+z) - x(z+y)}{(x+z)(z+y)} = \frac{z}{y+z} - \frac{x}{x+z}$$

Cộng vế với vế các đẳng thức trên ta được A = 0.

Bài 3: Vận dụng $|x + y| \le |x| + |y|$

Ta có: $|ab - c| = |ab - a + a - c| = |a(b-1) + (a - c)|$

$\le |a(b-1) + (a-c)| = |a||b-1| + |a - c|$

Theo giả thiết: $|a| < 1, |a - c| < 1999, |b - 1| < 1999$

Do đó $|ab - c| < 1999 + 1999 = 3998$

Bài 4: $9x^2 + y^2 + 2z^2 - 18x + 4z - 6y + 20 = 0$

$\Leftrightarrow 9x^2 - 18x + 9 + y^2 - 6y + 9 + 2z^2 + 4z + 2 = 0$

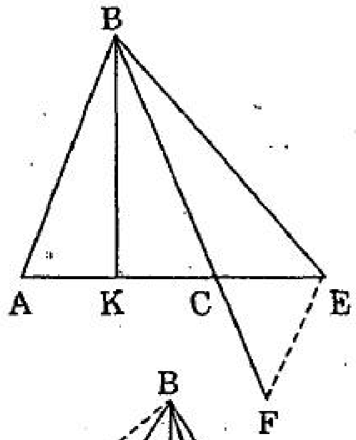
$\Leftrightarrow 9(x^2 - 2x + 1) + (y - 3)^2 + 2(z^2 + 2z + 1) = 0$

$\Leftrightarrow 9(x - 1)^2 + (y - 3)^2 + 2(z + 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 3 = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$ (do $9(x-1)^2 \ge 0$, $(y-3)^2 \ge 0$ và $2(z+1)^2 \ge 0$)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = -1 \end{cases}$

Bài 5: *Cách 1:* Trên tia đối của tia CB, lấy điểm F: CF = BC.



Ta có: $\widehat{BAC} = \widehat{ACB} = \widehat{ECF}$ (do tam giác BAC cân tại B): AB = BC = CF

$\Rightarrow \Delta BAK = \Delta FCE$ (c–g–c)

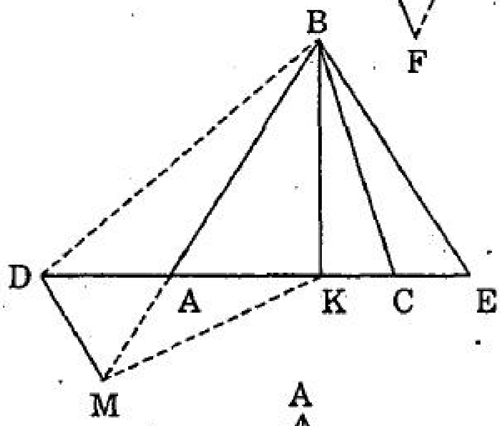
$\Rightarrow EF = BK$

Ta có: BK + BE = EF + BE > BF

= BC + CF = BC + AB

Cách 2: Dựng $D = S_A(K)$ và $M = S_A(B)$

Vậy DBKM là hình bình hành



Ta có: $\Delta BAD = \Delta BCE$ (AD = CE, BAD = BCE, AB = BC)

$\Rightarrow BD = BE$

Vậy BK + BE = MD + BD > MB

= 2AB = AB + AC

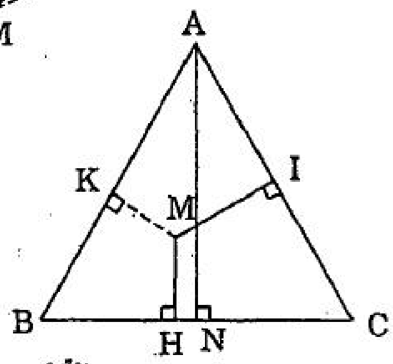
(ΔMBD có MD + BD > MB)

Bài 6: Đặt AB = BC = AC = a

Kẻ $MH \perp BC$, $MK \perp AB$

và $MI \perp AC$, $AA' \perp BC$.

Do điểm M ở miền trong tam giác ABC nên:



$S_{ABC} = S_{MBC} + S_{MAC} + S_{MAB}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}AA'.BC = \frac{1}{2}MH.BC + \frac{1}{2}MI.AC + \frac{1}{2}MK.AB$$

$\Rightarrow ah = a.\ MH + a.\ MI + a.\ MK$ (AA' = h – không đổi)

$\Rightarrow MH + MI + MK = h$

BỘ ĐỀ 43

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI GIẢI THƯỞNG LÊ QUÝ ĐÔN QUẬN TÂN BÌNH, TPHCM – NĂM HỌC 1999 – 2000

Bài 1:

1) Cho biểu thức $A = x^2 - x + \frac{1}{3}$

Tìm giá trị nhỏ nhất của A và giá trị tương ứng của x.

2) Chứng tỏ rằng biểu thức sau đây luôn dương với mọi x trong tập xác định:

$$B = \frac{(1-x^2)^2}{1+x^2} : \left[\left(\frac{1-x^3}{1-x} + x\right)\left(\frac{1+x^3}{1+x} - x\right)\right]$$

Bài 2: Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a và E là điểm bất kỳ trên BC (E khác B và C). Hai đường thẳng AE và DC cắt nhau tại F. Tia Ax vuông góc với AE tại A cắt đường thẳng CD tại I.

1) Chứng minh $\widehat{AEI} = 45^0$

2) Chứng minh rằng: $\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AF^2}$

3) Chứng minh diện tích tam giác AEI không nhỏ hơn $\frac{1}{2}a^2$

Bài 3:

1) Một người muốn trồng 12 cây hoa thành 7 hàng mà mỗi hàng có 4 cây. Hỏi phải trồng như thế nào? Em hãy vẽ sơ đồ vị trí các cây theo đúng yêu cầu trên?

2) Cho hình bình hành ABCD (AB > AD). Từ C kẻ CE và CF lần lượt vuông góc với các đường thẳng AB, AD (E thuộc AB và F thuộc AD). Chứng minh rằng: $AB.AE = AD.AF = AC^2$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: 1) $A = x^2 - x + \frac{1}{3} = x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} \geq \frac{1}{12}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Vậy A đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{12} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

2) Xét biểu thức: $M = \left(\frac{1-x^3}{1-x} + x\right)\left(\frac{1+x^3}{1+x} - x\right)$

Điều kiện: $\begin{cases} 1 - x \neq 0 \\ 1 + x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$

Ta có: $M = \left[\frac{(1-x)(1+x+x^2)}{1-x} + x\right]\left[\frac{(1+x)(1-x+x^2)}{1+x} - x\right]$

$= (1 + x + x^2 + x)(1 - x + x^2 - x)$

$= (1 + 2x + x^2)(1 - 2x + x^2) = (1 + x)^2 (1 - x)^2$

Ta có $M = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 + x \neq 0 \\ 1 - x \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \neq -1 \\ x \neq 1 \end{array}\right.$

Vậy tập xác định của biểu thức B là $x \neq \pm 1$.

Ta có:

$$B = \frac{(1-x^2)^2}{1+x^2} : [(1+x)^2(1-x)^2] = \frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)(1-x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} > 0$$

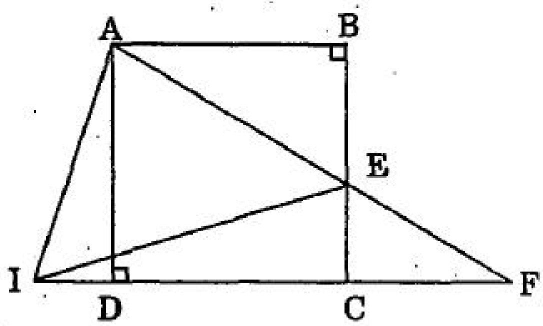
$(x \neq \pm 1)$ (vì $1 + x^2 \geq 0$)

Bài 2:

1) Xét hai tam giác ABE và ADI ta có AB = AD (ABCD là hình vuông)

$\widehat{BAE} = \widehat{DAI}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc AB ⊥ AD; AE ⊥ AI)

$\widehat{ABE} = \widehat{ADI} = 90^0$



Vậy ΔABE = ΔADI (g–c–g)

Suy ra AE = AI.

ΔAEI vuông tại A có AE = AI

nên ΔAEI vuông cân tại A.

suy ra $\widehat{AEI} = 45^0$.

2) Xét ΔFDA và ΔABE có

$\widehat{DFA} = \widehat{BAE}$ (AB // DF), $\widehat{FDA} = \widehat{ABE}$ (= 90^0)

Do đó ΔFDA ∽ ΔABE

$$\Rightarrow \frac{AF}{AE} = \frac{DF}{AB} \Rightarrow \frac{AF^2}{AE^2} = \frac{DF^2}{AB^2}$$

Mà $DF^2 = AF^2 - AD^2 = AF^2 - AB^2$

Do vậy: $\dfrac{AF^2}{AE^2} = \dfrac{AF^2 - AB^2}{AB^2}$

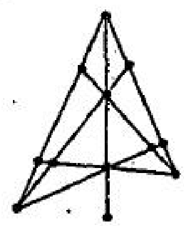
$$\Rightarrow \frac{AF^2}{AE^2} = \frac{AF^2}{AB^2} - 1 \Rightarrow \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AB^2} - \frac{1}{AF^2}$$

3) Ta có: AE ≥ AB

AI ≥ AD (quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc)

Suy ra: $\dfrac{1}{2}AE.AI \geq \dfrac{1}{2}AB.AD$

$$S_{AEI} \geq \frac{1}{2}a^2$$



Bài 3:

1) Sơ đồ trồng cây ở hình bên

2) Từ B vẽ BN ⊥ AC, từ D vẽ DM ⊥ AC

Xét hai tam giác vuông CMD và ANB ta có:

AB = CD (ABCD là hình bình hành)

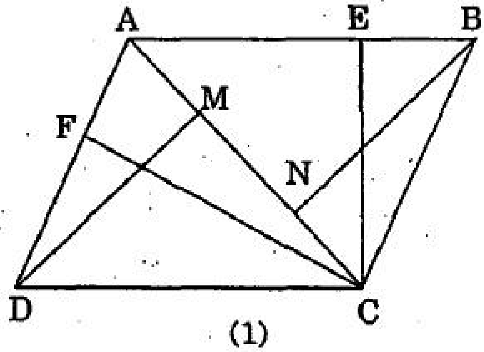
$\widehat{MCD} = \widehat{BAN}$ (góc so le trong; AB // CD)

Vậy ΔCMD = ΔANB (ch–gn)

Suy ra AN = CM.

Xét hai tam giác vuông ADM và ACF ta có: $\widehat{MAB}$ chung

Vậy ΔADM ∽ ΔACF (g–g)



Cho ta: $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AM}{AF}$ hay AD.AF = AM.AC (1)

Chứng minh tương tự ta có: $\Delta AEC \backsim \Delta ANB$ (g–g)

Cho ta: $\dfrac{AE}{AN} = \dfrac{AC}{AB}$ hay $AE.AB = AN.AC = MC.AC$ (2)

Cộng vế theo vế (1) và (2) ta được: $AE.AB + AF.AD = MC.AC + AM.AC$

$$AE.AB + AF.AD = (MC + AM).AC = AC^2$$

BỘ ĐỀ 44

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 8
QUẬN 5, TPHCM – NĂM HỌC 1999 – 2000

Bài 1: Cho $4a^2 + b^2 = 5ab$ với $2a > b > 0$.

Tính số trị của phân thức: $P = \dfrac{ab}{4a^2 - b^2}$

Bài 2: Giải và biện luận phương trình (ẩn là x):

$$(ab + 2)x + a = 2b + (b + 2a)x$$

Bài 3: Phân tích thành nhân tử: $A = x^3 + y^3 + x^3 - 3xyz$

Bài 4: Trong một cuộc đua mô tô có ba xe khởi hành cùng một lúc. Xe thứ hai trong một giờ chạy chậm hơn xe thứ nhất 15km và nhanh hơn xe thứ ba 3km nên đến đích chậm hơn xe thứ nhất 12 phút và sớm hơn xe thứ ba 3 phút. Không có sự dừng lại dọc đường đi. Tìm vận tốc mỗi xe quãng đường đua và thời gian chạy của mỗi xe.

Bài 5: 1) Cho tam giác ABC cân, đỉnh A. Một điểm M thuộc cạnh BC. Kẻ MD vuông góc với cạnh AB, ME vuông góc với AC. Chứng minh rằng tổng MD + ME không phụ thuộc vào vị trí của điểm M trên BC.

2) Cho góc nhọn $\widehat{xAy}$. Tìm tập hợp những điểm M có tổng các khoảng cách đến hai cạnh Ax và Ay bằng một số a cho trước.

Bài 6: Cho tam giác ABC, qua một điểm O tùy ý trong tam giác, ta kẻ các đường AO, BO, CO cắt BC, CA, AB lần lượt tại M, N và P. Chứng minh hệ thức:

$$\frac{OM}{AM} + \frac{ON}{BN} + \frac{OP}{CP} = 1$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: $4a^2 + b^2 = 5ab$

$\Leftrightarrow 4a^2 + b^2 - 5ab = 0 \Leftrightarrow 4a^2 - 4ab + b^2 - ab = 0 \Leftrightarrow 4a(a - b) - b(a - b) = 0$

$\Leftrightarrow (a - b)(4a - b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a - b = 0 \\ 4a - b = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ 4a = b \end{array}\right.$

(vì $2a > b > 0$ (gt))

Do đó $a = b$ (nhận), $4a = b$ (loại)

Ta có: $P = \dfrac{ab}{4a^2 - b^2} = \dfrac{a.a}{4a^2 - a^2} = \dfrac{a^2}{3a^2} = \dfrac{1}{3}$

Bài 2: $(ab + 2)x + a = 2b + (b + 2a)x \Leftrightarrow (ab + 2)x - (b + 2a)x = 2b - a$

$\Leftrightarrow (ab + 2 - b - 2a)x = 2b - a \Leftrightarrow [b(a - 1) - 2(a - 1)]x = 2b - a$

$\Leftrightarrow (a - 1)(b - 2)x = 2b - a$ (*)

$(a - 1)(b - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a - 1 = 0 \\ b - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 2 \end{array}\right.$

Do đó:

1) Nếu $a = 1$ ta có (*) $\Leftrightarrow 0x = 2b - 1$

a/ Nếu $b = \frac{1}{2}$ thì $0x = 0 \Leftrightarrow x$ tùy ý

b/ Nếu $b \neq \frac{1}{2}$ thì $x \in \varnothing$

2) Nếu $b = 2$ ta có (*) $\Leftrightarrow 0x = 4 - a$

a/ Nếu $a = 4$ thì $0x = 0 \Leftrightarrow$ tùy ý

b/ Nếu $a \neq 4$ thì $x \in \varnothing$

3) Nếu $a \neq 1$ và $b \neq 2$ (*) $\Leftrightarrow x = \dfrac{2b - a}{(a - 1)(b - 2)}$

Tóm lại:

• Nếu $a= 1$ và $b = \frac{1}{2}$ hoặc $a = 4$ và $b = 2$

Phương trình có nghiệm tùy ý.

• Nếu $a = 1$ và $b \neq \frac{1}{2}$ hoặc $a \neq 4$ và $b = 2$

Phương trình vô nghiệm

• Nếu $a \neq 1$ và $b \neq 2$

Phương trình có nghiệm duy nhất: $x = \dfrac{2b - a}{(a - 1)(b - 2)}$

Bài 3: $A = x^3 + y^3 + x^3 - 3xyz = x^3 + (y + z)^3 - 3yz(y + z) - 3xyz$

$= (x + y + z)[x^2 - x(y + z) + (y + z)^3] - 3yz(x + y + z)$

$= (x + y + z)[x^2 - x(y + z) + (y + z)^3 - 3yz]$

$= (x + y + z)(x^2 - xy - xz + y^3 + 2yz + z^2 - 3yz)$

$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$

Bài 4: 3 phút $= \frac{1}{20}$ (phút)

Cách 1: Gọi thời gian xe thứ nhất đi hết quãng đường là x (giờ) (điều kiện $x > 0$)

Trong khoảng thời gian này xe thứ nhất đi nhiều hơn xe thứ hai 15x (km).

Quãng đường này xe thứ hai đi hết 12 phút $= \frac{1}{5}$ giờ

Do đó vận tốc xe thứ hai là: $15x : \frac{1}{5} = 75x$ (km/h)

Trong một giờ xe thứ nhất đi nhanh hơn xe thứ ba là: $15 + 3 = 18$ (km)
Trong thời gian x (giờ) thì xe thứ nhất đi hơn xe thứ ba là 18x (km)

Quãng đường này xe thứ ba phải đi trong $12 + 3 = 15$ phút $= \frac{1}{4}$ (giờ)

Vận tốc xe thứ ba là: $18x : \frac{1}{4} = 7x$ (km/h)

Theo đầu bài ta có phương trình: $75x - 72x = 3$

$3x = 3 \Rightarrow x = 1$ (thỏa điều kiện trên)

Thời gian xe thứ nhất đi là 1 (giờ)

Vận tốc xe thứ hai là 75 (km/h)

Vận tốc xe thứ nhất là $75 + 15 = 90$ (km/h)

Vận tốc xe thứ ba là $75 - 3 = 72$ (km/h)

Thời gian xe thứ hai đi là $1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$ (giờ)

Thời gian xe thứ ba đi là $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ (giờ)

Quãng đường đua dài $90 \,.\, 1 = 90$ (km)

Cách 2: 12 phút $= \frac{1}{5}$ (giờ), 3 phút $= \frac{1}{20}$ (giờ)

Gọi vận tốc, thời gian của xe thứ hai là x (km/giờ), y (giờ)

(điều kiện $x > 3$, $y > \frac{1}{5}$)

Vận tốc của xe thứ nhất là $x + 15$ (km/giờ)

Thời gian xe thứ nhất đi là $y - \frac{1}{5}$ (giờ)

Vận tốc của xe thứ ba là $x - 3$ (km/h)

Thời gian xe thứ ba đi là $y + \frac{1}{20}$ (giờ)

Quãng đường đua dài xy (km)

hay $(x + 15)(y - \frac{1}{5})$ (km)

hay $(x - 3)(y + \frac{1}{20})$ (km)

$$xy = (x + 15)(y - \frac{1}{5}) \Leftrightarrow xy = xy - \frac{1}{5}x + 15y - 3 \Leftrightarrow 15y = \frac{1}{5}x + 3 \quad (1)$$

Mặt khác cũng có: $xy = (x - 3)(y + \frac{1}{20})$

$$\Leftrightarrow xy = xy + \frac{1}{20}x - 3y - \frac{3}{20} \Leftrightarrow 3y = \frac{1}{20}x - \frac{3}{20} \Leftrightarrow 15y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) có:

$$\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}=\frac{1}{5}x+3 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x-\frac{1}{5}x=3+\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{20}x=\frac{15}{4} \Leftrightarrow x=\frac{15}{4}.20$$

x = 75 (thỏa điều kiện trên)

do đó $15y = \frac{1}{5}.75 + 3 \Leftrightarrow 15y = 18$

$y = \frac{6}{5}$ (thỏa điều kiện trên)

Vận tốc xe thứ hai là 75 (km / giờ)

Thời gian xe thứ hai đi là $\frac{6}{5}$ (giờ)

Vận tốc xe thứ nhất là 75 + 15 = 90 (km/giờ)

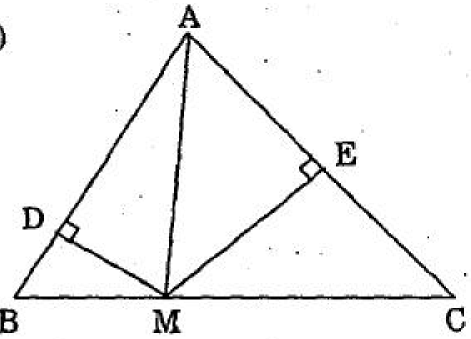
Thời gian xe thứ nhất là $\frac{6}{5} - \frac{1}{5} = 1$ (giờ)

Vận tốc xe thứ ba là 75 − 3 = 72 (km/giờ)

Thời gian xe thứ ba đi là $\frac{6}{5} + \frac{1}{20} = \frac{5}{4}$ (giờ)

Quãng đường đua dài $72.\frac{5}{4} = 90$ (km)

Bài 5: 1) AB = AC (tam giác ABC cân tại A)



$S_{MAB} + S_{MAC} = S_{ABC}$

$$\frac{MD.AB}{2} + \frac{ME.AC}{2} = S_{ABC}$$

$$\frac{AB}{2}(MD + ME) = S_{ABC}$$

$$MD + ME = \frac{2S_{ABC}}{AB}$$

h không đổi (h là độ dài đường cao vẽ từ B, C của tam giác ABC).

Do đó tổng MD + ME không phụ thuộc vào vị trí của điểm M trên BC.

2) *Phần thuận*

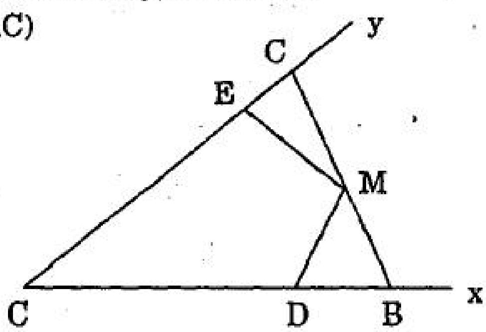
Qua M vẽ đường thẳng BC sao cho B ∈ Ax, C ∈ Ay, AB = AC.

Vẽ MD ⊥ AB, ME ⊥ AC (D ∈ AB, E ∈ AC)

Theo câu 1) có MD + ME = h (h là khoảng cách từ B đến Ay và là khoảng cách từ C đến Ax).

Do đó h = a

Vậy M thuộc đoạn thẳng BC (B, C cách các tia Ay, Ax một khoảng bằng a cho trước).



Giới hạn: Vì M nằm trong góc $\widehat{xOy}$, do đó M chuyển động trên đoạn BC.

Phần đảo: Lấy điểm M bất kỳ trên đoạn thẳng BC.

Gọi khoảng cách từ M đến Ax, Ay lần lượt là h_1, h_2.

$S_{MAB} + S_{MAC} = S_{ABC}$

ta có $\frac{1}{2}h_1AB + \frac{1}{2}h_2AC = \frac{1}{2}aAB$

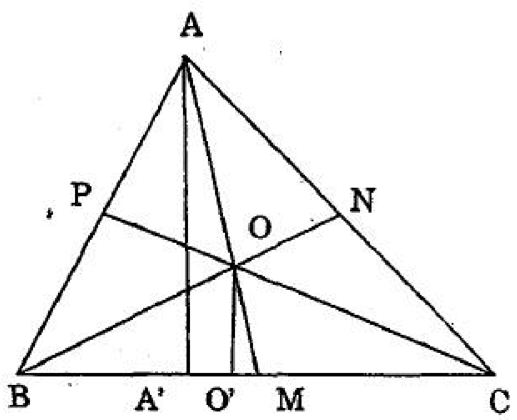
$h_1 + h_2 = a$

Kết luận: Tập hợp các điểm M là đoạn thẳng BC (B, C cách tia Ax, Ay một khoảng bằng a)

Chú ý: Hãy giải bài toán trong trường hợp thay chữ "tổng" bằng chữ "hiệu"

Bài 6: Vẽ $AA' \perp BC$, $OO' \perp BC$ ($A', O' \in BC$)

Suy ra $OO' // AA'$.



Tam giác AA'M có $OO' // AA'$

$\Rightarrow \frac{OM}{AM} = \frac{OO'}{AA'}$

Do đó $\frac{OM}{AM} = \frac{\frac{OO'.BC}{2}}{\frac{AA'.BC}{2}} = \frac{S_{OBC}}{S_{ABC}}$

Tương tự: $\frac{ON}{BN} = \frac{S_{OAC}}{S_{ABC}}, \frac{OP}{CP} = \frac{S_{OAB}}{S_{ABC}}$

Mà $S_{ABC} = S_{OBC} + S_{OAC} + S_{OAB}$

Do đó: $\frac{OM}{AM} + \frac{ON}{BN} + \frac{OP}{CP} = \frac{S_{OBC} + S_{OAC} + S_{OAB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$

BỘ ĐỀ 45

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN 6, TPHCM – NĂM HỌC 1999 – 2000

Bài 1:

1) $(x + 2)(x + 3)^2(x + 4) = 12$

2) $|2x - 1| - 3|x + 1| = 2x + 6$

Bài 2:

1) Cho tam giác ABC có các đường cao BD, CE.
Chứng minh $\widehat{AED} = \widehat{ACB}$.

2) Cho tam giác ABC có đường phân giác AD.
Chứng minh $AD^2 = AB.AC - DB.DC$

Bài 3:

1) Cho đa thức bậc hai: $P(x) = ax^2 + bx + c$
Tìm a, b, c biết $P(0) = 26$; $P(1) = 3$; $P(2) = 2000$

2) Cho ba số a, b, c thỏa điều kiện: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$
Tính $(a^{25} + b^{25})(b^3 + c^3)(c^{2000} - a^{2000})$

Bài 4: Cho tam giác ABC ($\widehat{A} < 90^0$). Bên ngoài tam giác dựng các hình vuông ABDE, ACFG. Dựng hình bình hành AEIG. Chứng minh:

1) $\Delta ABC = \Delta GIA$ và CI = BF.

2) Ba đường thẳng AI, BF, CD đồng quy.

Bài 5: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$A = 5x^2 + 2y^2 + 4xy - 2x + 4y + 2005$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: 1) *Cách 1:* $(x + 2)(x + 3)^2(x + 4) = 12$

$\Leftrightarrow (x + 2)(x + 4)(x + 3)^2 = 12 \Leftrightarrow (x^2 + 6x + 8)(x^2 + 6x + 9) = 12$

Đặt $t = x^2 + 6x + 8$ phương trình trở thành

$t.(t + 1) = 12 \Leftrightarrow t^2 + t - 12 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 4t - 12 = 0$

$\Leftrightarrow t(t - 3) + 4(t - 3) = 0 \Leftrightarrow (t - 3)(t + 4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = -4 \end{array}\right.$

Với t = 3 ta có: $x^2 + 6x + 8 = 3 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 5x + 5 = 0$

$\Leftrightarrow x(x + 1) + 5(x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x + 5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -5 \end{array}\right.$

Với t = –4 ta có $x^2 + 6x + 8 = -4 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 3)^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$ (vì $(x + 3)^2 \ge 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 + 3 > 0$)

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm số: $x_1 = -1$, $x_2 = -5$.

Cách 2: $(x + 2)(x + 3)^2(x + 4) = 12$

$\Leftrightarrow (x + 2)(x + 4)(x + 3)^2 = 12 \Leftrightarrow (x^2 + 4x + 2x + 8)(x^2 + 6x + 9) = 12$

$\Leftrightarrow \left(x^2 + 6x + \frac{17}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + 6x + \frac{17}{2} + \frac{1}{2}\right) = 12$

$\Leftrightarrow \left(x^2 + 6x + \frac{17}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 12 \Leftrightarrow \left(x^2 + 6x + \frac{17}{2}\right)^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 6x + \frac{17}{2} = \frac{7}{2} \\ x^2 + 6x + \frac{17}{2} = -\frac{7}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 6x + 5 = 0 \\ x^2 + 6x + 12 = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + x + 5x + 5 = 0 \\ x^2 + 6x + 9 + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x(x + 1) + 5(x + 1) = 0 \\ (x + 3)^2 + 3 = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x + 1)(x + 5) = 0 \\ x \in \phi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 = 0 \\ x + 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -5 \end{array}\right.$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = -1$; $x_2 = -5$

2) $|2x - 1| - 3|x + 1| = 2x + 6$ (1)

• Nếu x < –1 phương trình (1) trở thành

$1 - 2x + 3(x + 1) = 2x + 6 \Leftrightarrow 1 - 2x + 3x + 3 = 2x + 6 \Leftrightarrow x = -2$ (nhận)

• Nếu $-1 \le x \le \frac{1}{2}$, phương trình (1) trở thành:

$1 - 2x - 3(x + 1) = 2x + 6 \Leftrightarrow 1 - 2x - 3x - 3 = 2x + 6 \Leftrightarrow 7x = -8$

$\Leftrightarrow x = -\frac{8}{7}$ (loại)

• Nếu $x > \frac{1}{2}$ phương trình (1) trở thành:

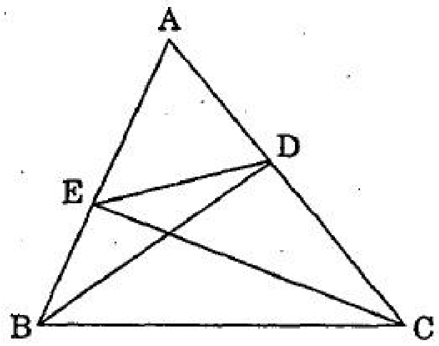
$2x - 1 - 3(x + 1) = 2x + 6 \Leftrightarrow 2x - 1 - 3x - 3 = 2x + 6 \Leftrightarrow 3x = -10$

$\Leftrightarrow x = -\frac{10}{3}$ (loại)

Kết luận: Vậy phương trình (1) có một nghiệm số là $x = -2$.

Bài 2:

1) Xét hai tam giác ABD vă ACE, ta có:



$\widehat{A}$ chung

$\widehat{ADB} = \widehat{AEC} = 90^0$

Do đó $\Delta AED \backsim \Delta ACE$ (g–g)

Xét ΔABD và ΔABC, ta có:

$\widehat{A}$ chung

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ ($\Delta ABD \backsim \Delta ACE$)

Do đó $\Delta ADE \backsim \Delta ABC$ (c–g–c)

Suy ra $\widehat{AED} = \widehat{ACB}$

2) Vì $\widehat{ADC} > \widehat{ABC}$ ($\widehat{ADC}$ là góc ngoài của ΔABD)

Do đó trên tia đối của tia AD có điểm E sao cho $\widehat{ABE} = \widehat{ADC}$.

ΔAEB và ΔACD có: $\widehat{BEA} = \widehat{ACB}$

$\widehat{BAE} = \widehat{CAD}$ (AD là phân giác)

Vậy $\Delta AEB \backsim \Delta ACD$ (g–g)

Suy ra $\frac{AE}{AC} = \frac{AB}{AD}$ hay $AE.AD = AB.AC$

$(AD + DE).AD = AB.AC$, $AD^2 + AD.DE = AB.AC$ (1)

Xét ΔBDE và ΔADC, ta có:

$\widehat{BDE} = \widehat{ADC}$ (hai góc đối đỉnh)

$\widehat{BED} = \widehat{ACD}$ ($\Delta AEB \backsim \Delta ACD$)

Vậy $\Delta BDE \backsim \Delta ADC$ (g–g)

Suy ra: $\frac{BD}{AD} = \frac{DE}{DC}$; $BD.DC = AD.DE$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AB.AC = AD^2 + BD.DC$

Cho ta: $AD^2 = AB.AC - DB.DC$

Bài 3: 1) $P(x) = ax^2 + bc + c$

$P(0) = 26 \Rightarrow a.0^2 + b.0 + c = 26 \Rightarrow c = 26$

$P(1) = 3 \Rightarrow a.1^2 + b.1 + c = 3 \Rightarrow a + b + 26 = 3 \Rightarrow a + b = -23$ (1)

$P(2) = 2000 \Rightarrow a.2^2 + b.2 + c = 2000 \Rightarrow 4a + 2b + 26 = 2000$

$\Rightarrow 4a + 2b = 1974 \Rightarrow 2a + b = 987$ (2)

Trừ vế theo vế (2) và (1) ta được $a = 1010$

Thay $a = 1010$ vào (1) ta được $b = -1033$

2) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$

$\Leftrightarrow bc(a + b + c) + ac(a + b + c) + ab(a + b + c) = abc$

$\Leftrightarrow 3abc + a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b = abc$

$\Leftrightarrow a^2c + b^2c + 2abc + b^2a + a^2b + c^2a + c^2b = 0$

$\Leftrightarrow c(a + b)^2 + ab(a + b) + c^2(a + b) = 0$

$\Leftrightarrow (a + b)(ca + cb + ab + c^2) = 0 \Leftrightarrow (a + b)(ca + c^2 + cb + ab) = 0$

$\Leftrightarrow (a + b)[c(a + c) + b(a + c)] = 0 \Leftrightarrow (a + b)(b + c)(c + a) = 0$

$\Leftrightarrow a + b = 0$ hoặc $b + c = 0$ hoặc $c + a = 0$

$\Leftrightarrow a = -b$ hoặc $b = -c$ hoặc $c = -a$

Do đó a^{25} một trong ba thừa số của tích

$(a^{25} + b^{25})(b^3 + c^3)(c^{2000} - a^{2000})$ sẽ bằng 0

Suy ra tích $(a^{25} + b^{25})(b^3 + c^3)(c^{2000} - a^{2000})$ bằng 0

Có thể trình bày cách khác như sau:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c} \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b+c}-\frac{1}{c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{ab}=\frac{c-(a+b+c)}{c(a+b+c)} \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab}=\frac{-(a+b)}{c(a+b+c)}$$

$\Leftrightarrow (a + b)c(a + b + c) = - ab(a + b) \Leftrightarrow (a + b)[c(a + b + c) + ab] = 0$

$\Leftrightarrow (a + b)[ac + c(b + c) + ab] = 0$

$\Leftrightarrow (a + b)[a(b + c) + c(b + c)] = 0$

$\Leftrightarrow (a + b)(b + c)(c + a) = 0$

Và tiếp tục như cách trên.

Bài 4:

1) ΔABC và ΔGIA có:

$AB = GI$ (vì cùng bằng AE)

$AC = GA$ (vì cùng bằng AC)

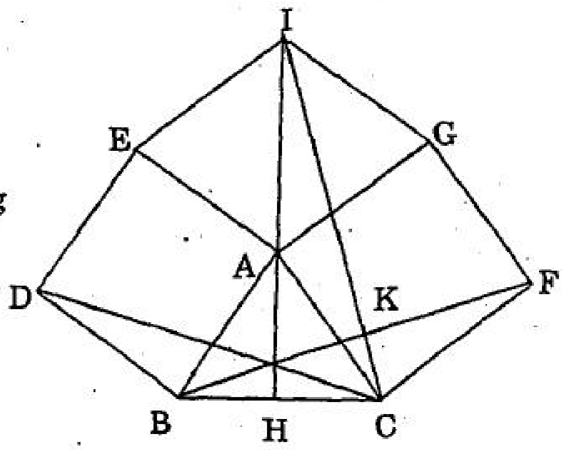
$\widehat{BAC} = \widehat{IGA}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc:

$GI \perp AB$, $GA \perp AC$)

Vậy $\Delta ABC = \Delta GIA$ (c–g–c)

Cho ta $\widehat{ACB} = \widehat{GAI}$

Kéo dài IA cắt BC tại H.



$\widehat{GAI} + \widehat{CAH} = 180^0 - \widehat{GAC} = 180^0 - 90^0 = 90^0$

Suy ra $\widehat{ACB} + \widehat{CAH} = 90^0$, cho ta $\widehat{AHC} = 90^0$

hay $AH \perp BC$

ΔCAI và ΔFCB có: $CA = FC$

$AI = BC$ ($\Delta ABC = \Delta GIA$)

$\widehat{CAI} = \widehat{FCB}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc $IA \perp BC$; $CA \perp CF$)

Vậy $\Delta CAI = \Delta FCB$ (c–g–c)

Cho ta $CI = BF$

2) Gọi K là giao điểm của CI và BF.

Ta có: $\widehat{AIC} = \widehat{FBC}$ ($\Delta BCF = \Delta IAC$)

$\widehat{IAG} = \widehat{BCA}$ ($\Delta ABC = \Delta GIA$)

Suy ra $\widehat{AIC} + \widehat{IAG} = \widehat{FBC} + \widehat{BCA}$

$\widehat{AIC} + \widehat{IAG} + \widehat{ICA} = \widehat{FBC} + \widehat{BCA} + \widehat{ICA}$

$90^0 = FBC + BCK$

Do đó $\widehat{BKC} = 90^0$

Hay $BF \perp CI$

Chứng minh tương tự ta có $BI \perp CD$.

Suy ra AI, BF, CD là các đường cao của ΔIBC nên chúng đồng quy tại một điểm.

Bài 5: $A = 5x^2 + 2y^2 + 4xy - 2x + 4y + 2005$

$= 4x^2 + 4xy + y^2 + y^2 + 4y + 4 + x^2 - 2x + 1 + 2000$

$= (2x + y)^2 + (y + 2)^2 + (x - 1)^2 + 2000 \geq 2000$

Dấu "=" xảy ra:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ y + 2 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ y = -2 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2.1 + (-2) = 0 \\ x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Vậy $\min A = 2000 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$

BỘ ĐỀ 46

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI GIẢI THƯỞNG LƯƠNG THẾ VINH QUẬN 1, TPHCM – NĂM HỌC 1999 – 2000

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử

1) $x^2 + 8x - 20$ 2) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$

Bài 2: Cho $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ và $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} + \dfrac{c}{z} = 0$

Chứng minh $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

Bài 3: Giải phương trình $|x| - 2|x-1| + 3|x-2| = 4$

Bài 4: Cho tam giác ABC có ba đường phân giác AD, BE, CF.

Chứng minh:

1) $\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB} = 1$ 2) $\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} > \frac{1}{BC} + \frac{1}{CA} + \frac{1}{AB}$

Bài 5: Hai điểm A và B cách nhau một con sông (hai bờ song song). Tìm địa điểm bắc cầu để quãng đường đi từ A đến B ngắn nhất (Cầu bao giờ cũng vuông góc với bờ sông).

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $x^2 + 8x - 20 = x^2 + 10x - 2x - 20 = x(x + 1) - 2(x + 10)$
$= (x + 10)(x - 2)$

2) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = x^3 - 4x^2 + 4x - x^2 + 4x - 4$
$= x(x^2 - 4x + 4) - (x^2 - 4x + 4) = (x - 1)(x - 2)^2$

Bài 2: Do $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0 \Rightarrow \frac{ayz + bxz + cxy}{xyz} = 0$

$\Rightarrow ayz + bxz + cxy = 0$ (1)

Mặt khác: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ nên $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 = 1$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2\left(\frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{xz}{ac}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2\frac{cxy + ayz + bxz}{abc} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ (do (1))}$$

Bài 3: Xét các trường hợp sau:

1) Với $x \le 0$: Phương trình đã cho tương đương:

$-x + 2(x - 1) + 3(2 - x) = 4 \Leftrightarrow -x + 2x - 2 + 6 - 3x = 4$

$\Leftrightarrow -2x + 4 = 4 \Leftrightarrow x = 0$ (nhận)

2) Với $0 < x \le 1$ phương trình đã cho tương đương:

$x + 2(x - 1) + 3(2 - x) = 4 \Leftrightarrow x + 2x - 2 + 6 - 3x = 4 \Leftrightarrow 0x = 0$

phương trình có vô số nghiệm với $0 < x \le 1$

3) Với $1 < x < 2$ phương trình đã cho tương đương

$x - 2(x - 1) + 3(2 - x) = 4 \Leftrightarrow x - 2x + 2 + 6 - 3x = 4$

$\Leftrightarrow -4x + 8 = 4 \Leftrightarrow x = 1$ (loại)

4) Với $x \ge 2$ phương trình đã cho tương đương

$x - 2(x - 1) + 3(x - 2) = 4 \Leftrightarrow x - 2x + 2 + 3x - 6 = 4 \Leftrightarrow 2x - 4 = 4$

$\Leftrightarrow x = 4$ (nhận)

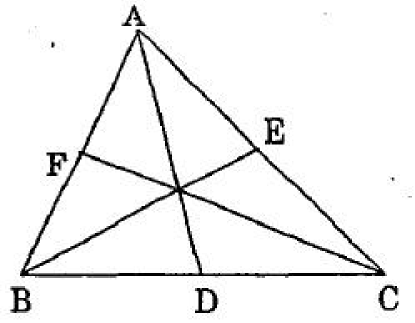
Kết luận: Nghiệm của phương trình là các giá trị x thoả mãn $x = 4$, $0 < x \le 1$

Bài 4:

1) Áp dụng tính chất đường phân giác trong đối với tam giác ABC có:

$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC};\ \frac{EC}{EA}=\frac{BC}{AB}$ và $\frac{FA}{FB}=\frac{AC}{BC}$

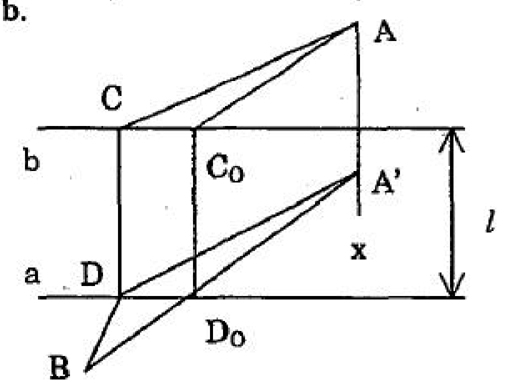
suy ra: $\frac{BD}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB}=\frac{AB}{AC}.\frac{BC}{AB}.\frac{AC}{BC}=1$



2) Xem lời giải bài 5, bộ đề 49.

Bài 5: Biểu thị hai điểm A và B bằng hai điểm A, B trên hình vẽ, hai bờ sông bằng hai đường thẳng a và b; a // b.

Ta tìm địa điểm bắc cầu sao cho tổng quãng đường đi từ A đến B ngắn nhất. Nghĩa là AC + CD + BD ngắn nhất. Dù cầu được bắc ở đâu thì quãng đường CD = l chiều rộng khúc sông, do đó ta tìm vị trí của CD để (AC + BD) ngắn nhất. Dựng hình bình hành ACDA', suy ra AC = A'D.



Đối với ba điểm B, D, A' có A'B ≤ A'D + BD = AC + BD

Do A' ∈ Ax ⊥ a và AA' = l nên A' cố định suy ra A'B không đổi.

Vậy min (AC + BD) = A'B ⇔ A', D, B thẳng hàng.

⇔ $D \equiv D_0$ với A'B cắt b tại D_0.

Vậy địa điểm bắc cầu cần tìm là C_0D_0.

Nhận xét: Ở bài toán này minh họa sự kết hợp phương pháp phân tích hình học và bất đẳng thức, áp dụng các phép biến đổi hình học cơ bản để giải các bài toán trên cực trị hình học.

Trong bài toán trên, ta giả sử hai bờ sông tạo thành hai đường thẳng song song. Nếu dòng sông không có bề rộng thì bài toán quá dễ, chỉ bằng cách nối hai điểm A và B là được. Điều này gợi ý cho ta một cách là làm thế nào để bỏ qua bề rộng của dòng sông. Trong thiết kế người ta chuyển một trong hai địa điểm về phía bờ sông một đoạn đúng bằng chiều rộng của dòng sông nghĩa là coi dòng sông không còn bề rộng nữa.

Giả sử ta tịnh tiến về phía bờ sông ở điểm A tới A' một đoạn bằng chiều rộng con sông. Từ A' nối B cắt bờ bên phía B tại D_0. Điểm D_0 chính là một đầu cầu. Từ D_0 kẻ đường vuông góc sang cắt đường bờ sông bên kia tại C_0 chính là một đầu cầu nối với A.

Trong cách giải bài trên, ta áp dụng phép tịnh tiến để di chuyển địa điểm, từ đây ta có thể có các bài toán thực tế sau.

Bài 1: Hai điểm dân cư cách nhau một số con sông có lòng sông rộng khác nhau. Hãy bắc các cây cầu và làm đường nối hai điểm dân cư với con đường ngắn nhất.

Bài 2: Một người lính cần phải kiểm tra phải chăng có mìn trong địa phận của mình quản lý có dạng tam giác đều. Bán kính của công cụ dò mìn của người lính bằng nửa đường cao của tam giác. Nếu người lính xuất phát từ một đỉnh tam giác, đường nào là ngắn nhất để người lính thực hiện đi dò mìn hết địa phận của mình?

BỘ ĐỀ 47

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 8 TRƯỜNG THCS NGUYỄN DU QUẬN 1, TPHCM – NĂM HỌC 1999 – 2000

(BÀI SỐ 1)

Bài 1:

1) Phân tích đa thức thành nhân tử: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

2) Rút gọn phân thức:

$$A = \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{a + b + c}$$

Bài 2: Giải phương trình: $x^3 + x^2 + 4 = 0$

Bài 3: Chứng minh rằng nếu abc = 1 thì

$$\frac{a}{ab + a + 1} + \frac{b}{bc + b + 1} + \frac{c}{ac + c + 1} = 1$$

Bài 4: Chứng minh: $x^5 + y^5 \geq x^4y + xy^4$ với $x, y \neq 0$ và $x + y \geq 0$

Bài 5: Cho tam giác ABC, gọi D là trung điểm AB. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho AE = 2EC. Gọi O là giao điểm của CD và BE. Chứng minh rằng:

1) Diện tích tam giác BOC bằng diện tích tam giác AOC.

2) BO = 3EO.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: 1) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

$= (a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3 - 3abc$

$= (a + b + c)^3 - 3(a + bc)(a + b + c) - 3ab(a + b + c)$

$= (a + b + c)[(a + b + c)^2 - 3(a + b)c - 3ab]$

$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac - 3ab - 3bc - 3ac)$

$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$

2) $A = \dfrac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{a + b + c} = \dfrac{(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)}{(a + b + c)}$

(với $a + b + c \neq 0$)

$= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac$

Nhận xét: Nếu $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$

$\Leftrightarrow (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) = 0$ (kết quả bài 1a)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ a=b=c \end{array}\right.$$

Từ đó ta có bài toán:

1) Chứng minh rằng $a^3+b^3+c^3=3abc$ thì $a+b+c=0$ hoặc $a=b=c$

Đặt $x=a-b$; $y=b-c$ và $z=c-a$ thì $x+y+z=0$

Vậy $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$

Suy ra $x^3+y^3+z^3=3xyz$

Ta có bài toán:

2) Phân tích đạ thức thành nhân tử: $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$

3) Nếu $abc \neq 0$ và $a^3+b^3+c^3=3abc$

Tính giá trị biểu thức $\left(1+\dfrac{a}{b}\right)\left(1+\dfrac{b}{c}\right)\left(1+\dfrac{c}{a}\right)$

Ta dễ thấy ngay: $a^3+b^3+c^3=3abc$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=c \\ a+b+c=0 \end{array}\right.$$

Nếu $a=b=c$: $A=8$

Nếu $a+b+c=0$

$$A=\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)=\frac{a+b}{b}.\frac{b+c}{c}.\frac{a+c}{a}=\frac{(-c)}{b}.\frac{(-a)}{c}.\frac{(-b)}{a}=-1$$

4) Cho $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$ và $a, b, c \neq 0$

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}+\dfrac{1}{c^3}=\dfrac{3}{abc}$

Hướng dẫn: Do $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2 \Rightarrow ab+bc+ac=0$

$\Rightarrow \dfrac{ab+bc+ac}{abc}=0$ (do $abc \neq 0$) $\Rightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$

Vận dụng kết quả của bài 1 ta có: $\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}+\dfrac{1}{c^3}=\dfrac{3}{abc}$

Bài 2: $x^3+x^2+4=0 \Leftrightarrow x^3+8+x^2-4=0$

$\Leftrightarrow (x+2)(x^2-2x+4)+(x-2)(x+2)=0$

$\Leftrightarrow (x+2)(x^2-2x+4+x-2)=0$

$\Leftrightarrow (x+2)(x^2-x+2)=0 \Leftrightarrow x=-2$

(vì $x^2-x+2=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}>0$)

Bài 3: *Cách 1:* Với $abc = 1 \Rightarrow a = \dfrac{1}{bc}$

Ta có: $\dfrac{a}{ab+a+1} + \dfrac{b}{bc+b+1} + \dfrac{c}{ac+c+1} = 1$

$$= \frac{1}{bc\left(b.\frac{1}{bc} + \frac{1}{bc} + 1\right)} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{\frac{c}{bc} + c + 1} = 1$$

$$= \frac{1}{b+1+bc} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{bc}{1+bc+b} = \frac{1+b+bc}{1+bc+b} = 1$$

Cách 2: Do $abc = 1 \Rightarrow a, b, c \neq 0$

Ta có: $\dfrac{a}{ab+a+1} + \dfrac{b}{bc+b+1} + \dfrac{c}{ac+c+1} =$

$$= \frac{abc}{bc(ab+a+1)} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{bc}{b(ac+c+1)}$$

$$= \frac{1}{bc+b+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{bc}{bc+b+1} = \frac{1+b+bc}{1+bc+b} = 1$$

Bài 4: $x^5 + y^5 \geq x^4y + xy^4 \Leftrightarrow x^5 - x^4y + y^5 - xy^4 \geq 0$

$\Leftrightarrow x^4(x-y) - y^4(x-y) \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)(x^4 - y^4) \geq 0$

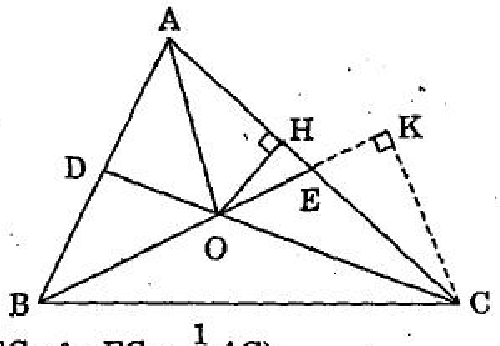
$\Leftrightarrow (x-y)(x^2-y^2)(x^2+y^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2(x+y)(x^2+y^2) \geq 0$ (đúng)

Vì $x \neq y$ nên $(x-y)^2 > 0$; $(x+y) \geq 0$ (gt) và $x^2 + y^2 \geq 0$

Bài 5:

1) ΔOAD và ΔOBD có AD = BD và chung đỉnh O đồng thời A, B, D thẳng hàng nên có chiều cao bằng nhau.



$\Rightarrow S_{OAD} = S_{OBD}$

Tương tự: $S_{CAD} = S_{CBD}$

Suy ra: $S_{OBC} = S_{BCD} - S_{OBD}$

$= S_{CAD} - S_{OAD} = S_{AOC}$

2) Kẻ $OH \perp AC$, $CK \perp BE$

Ta có:

$$\frac{S_{OEC}}{S_{OAC}} = \frac{\frac{1}{2}OH.EC}{\frac{1}{2}OH.AC} = \frac{EC}{AC} = \frac{1}{3} \text{ (vì AE = 2EC nên EC = } \frac{1}{3}\text{AC)}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{OEC}}{S_{BOC}} = \frac{1}{3}$$

Mặt khác $\dfrac{S_{OEC}}{S_{BOC}} = \dfrac{\frac{1}{2}OE.CK}{\frac{1}{2}OB.CK} = \dfrac{OE}{OB} \Rightarrow \dfrac{OE}{OB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow OB = 3OE$

BỘ ĐỀ 48

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 8 TRƯỜNG THCS NGUYỄN DU QUẬN 1, TPHCM – NĂM HỌC 1999 – 2000

(BÀI SỐ 2)

Bài 1: Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác ABC biết rằng:

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)=8$$

Chứng minh tam giác ABC là tam giác đều.

Bài 2: Giải phương trình: $x^2 - 3x + 2 + |x - 1| = 0$

Bài 3: Phân tích đa thức thành nhân tử:

$x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + 2xyz$

Bài 4: Xác định giá trị của x, y để có đẳng thức:

$5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2y - 2x + 2 = 0$

Bài 5: Trên cạnh AB của hình vuông ABCD, người ta lấy điểm tùy ý E. Tia phân giác của góc CDE cắt BC tại K. Chứng minh AE + KC = DE.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: Ta có: $\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)=8$

$\Leftrightarrow \left(1+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)=8 \Leftrightarrow 1+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{a}{b}+1-8=0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}-2\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}-2\right)=0$

$\Leftrightarrow \frac{a^2+b^2-2ab}{ab}+\frac{b^2+c^2-2bc}{bc}+\frac{a^2+c^2-2ac}{ac}$

$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(b-c)^2}{bc}+\frac{(c-a)^2}{ac}=0 \Leftrightarrow a=b=c$

(Do a, b, c là độ dài ba cạnh tam giác trên nên a, b, c > 0 và $(a-b)^2 \geq 0$, $(b-c)^2 \geq 0$, $(c-a)^2 \geq 0\ \forall$ a, b, c).

Vậy tam giác ABC đều.

Bài 2: *Cách 1:* $x^2 - 3x + 2 + |x - 1| = 0$

Xét các trường hợp sau:

1) Với $x \geq 1$: $|x - 1| = x - 1$

(1) $\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ (nhận)

2) Với $x < 1$: $= 1 - x$

(1) $\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 + 1 - x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 - 4x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+1) - 4(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1-4) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-3)=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=3$ (loại)

Kết luận: $S = \{1\}$

Cách 2:

$x^2 - 3x + 2 + |x-1| = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - x + 1 + |x-1| = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + |x-1| = 1 - x$

Điều kiện để phương trình có nghiệm: $1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$

Dưới điều kiện đó $|x-1| = 1 - x$

Phương trình đã cho tương đương: $x^2 - 3x + 1 - x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \text{ (nhận)} \\ x = 3 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Bài 3: $x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + 2xyz$

$= xy(x+y) + z^2(x+y) + z(x^2 + 2xy + y^2)$

$= xy(x+y) + z^2(x+y) + z(x+y)^2 = (x+y)(xy + z^2 + xz + yz)$

$= (x+y)[y(x+z) + z(x+z)] = (x+y)(y+z)(x+z)$

Bài 4: *Cách 1:* $5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2y - 2x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) + 4x^2 + 4y^2 + 8xy = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + 4(x+y)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

(vì $(x-1)^2 \geq 0$, $(y+1)^2 \geq 0$ và $4(x+y)^2 \geq 0$)

Cách 2: $5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2y - 2x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 4x^2 + y^2 + 1 + 4xy - 4x - 2y + x^2 + 4y^2 + 1 + 4xy + 2x + 2y = 0$

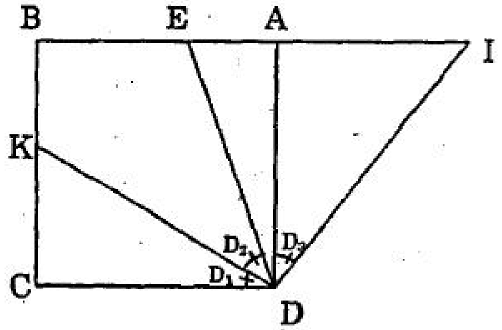
$$\Leftrightarrow (2x + y - 1)^2 + (x + 2y + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Bài 5: Trên tia đối của tia AB lấy điểm I sao cho CK = AI.

Vậy:

$\Delta CDK = \Delta ADI$ ($CK = AI$, $\hat{A} = \hat{C} = 90^0$, $CD = AD$) $\Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{D}_2 = \hat{D}_3$

và $\widehat{AID} = \widehat{CKD}$



Ta có $\widehat{CKD} = \widehat{KDA}$

(so le trong, BC // AD)

$= \hat{D}_2 + \widehat{EDA} = \hat{D}_3 + \widehat{EDA} = \widehat{EDI}$

Suy ra: $\widehat{EDI} = \widehat{EID} \Rightarrow \Delta EDI$ cân tại E

$\Rightarrow ED = EI = EA + AI = EA + CK$

BỘ ĐỀ 49

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI TOÁN 8 TRƯỜNG THCS NGUYỄN DU QUẬN 1, TPHCM – NĂM HỌC 1999 – 2000

(BÀI SỐ 3)

Bài 1: Giải phương trình: $\dfrac{x+1}{x^2+x+1}-\dfrac{x-1}{x^2-x+1}=\dfrac{2(x+2)^2}{x^6-1}$

Bài 2: Tìm giá trị của x để biểu thức sau đạt giá trị lớn nhất:

$A(x)=\dfrac{x}{(x+1999)^2}$ với $x > 0$. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Bài 3:

1) Chứng minh nếu $x > 0$, $y > 0$ thì $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\geq\dfrac{4}{x+y}$

2) Chứng minh nếu a, b, c là ba cạnh của một tam giác, ta có:

$$\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{a+c-b}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Bài 4: Cho tam giác ($\widehat{A} = 90^0$) đường cao AH, trung tuyến BM, phân giác CD cắt nhau tại một điểm.

1) Chứng minh: $\dfrac{BH}{HC}.\dfrac{CM}{MA}.\dfrac{AD}{BD}=1$

2) Chứng minh: BH = AC

Bài 5: Cho a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác và x, y, z là độ dài các đường phân giác của tam giác đó.

Chứng minh: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\geq\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: Nhận xét $x^2 \pm x + 1 = \left(x\pm\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$

$x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

Điều kiện: $x \neq \pm1$, phương trình đã cho được viết:

$(x^3 + 1)(x^2 - 1) - (x^3 - 1)(x^2 - 1) = 2(x + 2)^2$

$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^3 + 1 - x^3 + 1) = 2x^2 + 8x + 8$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 2 = 2x^2 + 8x + 8 \Leftrightarrow 8x = -10 \Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{4}$

Kết luận: $S = \{-\dfrac{5}{4}\}$

Bài 2: *Cách 1:* Đặt a = 1999

Lúc ấy: $A(x) = \dfrac{x}{(x+a)^2} = \dfrac{(x+a)^2 - (x+a)^2 + 4ax}{4a(x+a)^2} = \dfrac{(x+a)^2 - (x-a)^2}{4a(x+a)^2}$

$= \dfrac{1}{4a} - \dfrac{(x-a)^2}{4a(x+a)^2} \le \dfrac{1}{4a}$ (với a > 0 và x > 0)

(vì a > 0 nên $\begin{cases} 4a(x+a)^2 \ge 0 \\ (x-a)^2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow -\dfrac{(x-a)^2}{4a(x+a)^2} \le 0, \forall x$

$A(x) = \dfrac{1}{4a} \Leftrightarrow x = a$

Thay a = 1999, ta có: $\max A(x) = \dfrac{1}{4.1999} \Leftrightarrow x = 1999$

Cách 2: Với a = 1999 > 0, ta có $(x - a)^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow (x + a)^2 \ge 4ax \Rightarrow \dfrac{1}{(x+a)^2} \le \dfrac{1}{4ax}$ (do a > 0, x > 0 nên 4ax > 0)

$\Rightarrow A(x) = \dfrac{x}{(x+a)^2} \le \dfrac{x}{4ax} = \dfrac{1}{4a}$

$A(x) = a \Leftrightarrow a$

Vậy $\max A(x) = \dfrac{1}{4a} = \dfrac{1}{4.1999} \Leftrightarrow x = 1999$

Bài 3: 1) Với x, y > 0

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \ge \dfrac{4}{x+y} \Leftrightarrow \dfrac{x+y}{xy} \ge \dfrac{4}{x+y} \Leftrightarrow (x + y)^2 \ge 4xy$ (do x, y > 0)

$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 \ge 4xy \Leftrightarrow (x - y)^2 \ge 0$ (bất đẳng thức đúng)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$

2) Vì a, b, c là độ dài ba cạnh tam giác nên a + b − c > 0, b + c − a > 0 và a + c − b > 0

Áp dụng bất đẳng thức ta có:

$$\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} \ge \frac{4}{(a+b-c)+(b+c-a)} = \frac{4}{2b} = \frac{2}{b}$$

$$\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} \ge \frac{4}{(b+c-a)+(c+a-b)} = \frac{4}{2c} = \frac{2}{c}$$

$$\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{a+c-b} \ge \frac{4}{(a+b-c)+(a+c-b)} = \frac{4}{2a} = \frac{2}{a}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức cùng chiều ta được:

$$2\left(\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b}\right) \ge 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

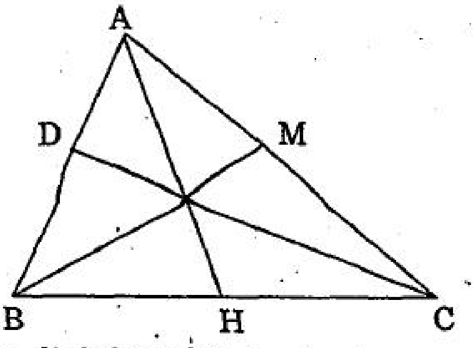
Suy ra: $\dfrac{1}{a+b-c}+\dfrac{1}{b+c-a}+\dfrac{1}{c+a-b} \geq \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$

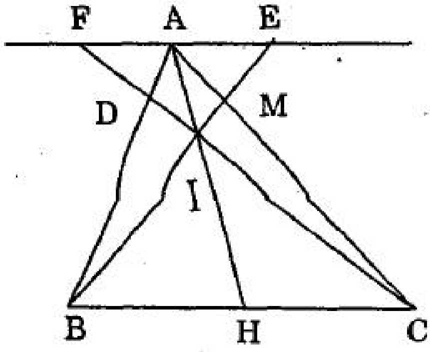
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a + b - c = b + c - a = c + a - b$

$\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow$ tam giác ABC đều.

Bài 4:

1) Qua A ta kẻ đường thẳng song song với BC và cắt các tia BM, CD lần lượt tại E và F.





Theo định lý Talet, ta có:

$$\frac{BH}{HC}=\frac{AE}{AF};\frac{MC}{MA}=\frac{BC}{AE} \text{ và } \frac{DA}{DB}=\frac{AF}{BC}$$

Suy ra: $\dfrac{BH}{HC}.\dfrac{MC}{MA}.\dfrac{DA}{DB}=\dfrac{AE}{AF}.\dfrac{BC}{AE}.\dfrac{AF}{BC}=1$

2) Vì M là trung điểm AC nên MA = MC

CD là phân giác trong ACB nên $\dfrac{DA}{BD}=\dfrac{AC}{BC}$

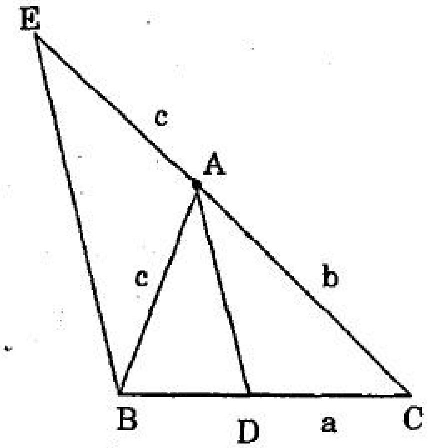
Suy ra $\dfrac{BH}{HC}.\dfrac{MC}{MA}.\dfrac{DA}{DB}=\dfrac{BH}{HC}.\dfrac{AC}{BC}=1$

$\Rightarrow BH.AC = HC.BC = AC^2 \Rightarrow BH = AC$

Bài 5: Xét tam giác ABC, đường thẳng qua B song song với phân giác AD cắt đường thẳng AC ở E, khi đó:

$\begin{cases} \widehat{A}_1 = \widehat{ABE} \text{ (so le trong)} \\ \widehat{A}_2 = \widehat{AEB} \text{ (đồng vị)} \end{cases}$ mà $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (gt) $\Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{AEB}$

Suy ra tam giác ABE cân tại A.



suy ra $AB = AE = c$

Do $AD // BE$

nên $\dfrac{x}{BE}=\dfrac{b}{b+c} \Rightarrow x = \dfrac{b}{b+c}BE$

Nhưng $BE < AB + AE = 2c$.

Suy ra: $x < \dfrac{2bc}{b+c}$

hay $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$

Lý luận tương tự, ta có: $\frac{1}{y} > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$ và $\frac{1}{z} > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

Vậy: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} > \frac{1}{2}2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

BỘ ĐỀ 50

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI GIẢI THƯỞNG LÊ QUÝ ĐÔN TRÊN BÁO KHĂN QUÀNG ĐỎ LẦN 2 – NĂM HỌC 2000 – 2001

Bài 1: Trong một cái giỏ đựng một số táo. Đầu tiên người ta lấy ra một nửa số táo và bỏ lại 5 quả, sau đó lấy thêm ra $\frac{1}{3}$ số táo còn lại và lấy thêm 4 quả. Cuối cùng trong giỏ còn lại 12 quả. Hỏi trong giỏ lúc đầu có bao nhiêu quả?

Bài 2: Cho a > 0, b > 0 và c > 0.

Chứng minh $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b} > \frac{3}{a+b+c}$

Bài 3: Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. Cho biết AB = 5, BH = 3. Tính BC.

Bài 4: Cho tam giác ABC. Một đường thẳng song song với BC cắt AC tại E và cắt đường thẳng song song với AB kẻ từ C ở F. Gọi S là giao điểm của AC và BF. Chứng minh $SC^2 = SE.SA$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

Gọi x (quả) là số quả táo trong giỏ lúc đầu (điều kiện $x \in N^*$)

Lấy ra lần thứ nhất: $\frac{x}{2} - 5$ (quả)

Số quả táo còn lại trong giỏ: $\frac{x}{2} + 5$ (quả)

Lấy ra lần thứ hai: $\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}+5\right)+4 = \frac{x}{6}+\frac{17}{3}$ (quả)

Lấy ra cả hai lần: $\frac{x}{2}-5+\frac{x}{6}+\frac{17}{3} = \frac{2x}{3}+\frac{2}{3}$ (quả)

Số quả táo còn lại: $x - \left(\frac{2x}{3}+\frac{2}{3}\right)$ (quả)

Ta có phương trình: $12 = x - \left(\frac{2x}{3}+\frac{2}{3}\right)$

$$12 = \frac{x}{3} - \frac{2}{3}$$

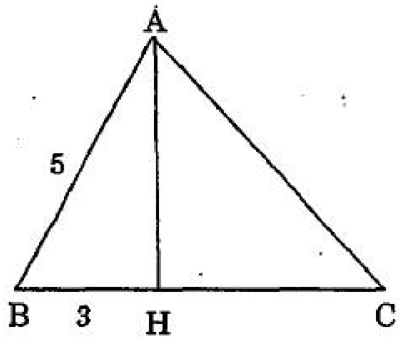
$$\frac{38}{3} = \frac{x}{3}$$
$$x = 38$$

Lúc đầu trong giỏ có 38 quả.

Bài 2: a, b, c > 0 nên:

$$\frac{1}{b+c} > \frac{1}{a+b+c}, \frac{1}{c+a} > \frac{1}{a+b+c}, \frac{1}{a+b} > \frac{1}{a+b+c}$$

Do đó $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} > \frac{3}{a+b+c}$



Bài 3: Tam giác ABC vuông tại A,

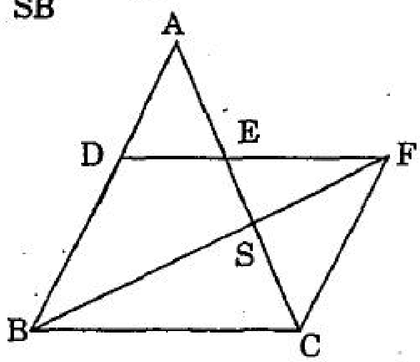
AH là đường cao.

Do đó: $BH.BC = AB^2$

$$\Rightarrow BC = \frac{AB^2}{BH} = \frac{25}{3} \text{ (cm)}$$

Bài 4: Tam giác SBC có EF // BC (gt)

Theo hệ quả của định lý Talet, ta có: $\frac{SE}{SC} = \frac{SF}{SB}$ (1)



Tam giác SAB có CF // AB (gt)

Theo hệ quả định lý Talet, ta có:

$$\frac{SC}{SA} = \frac{SF}{SB} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) có $\frac{SE}{SC} = \frac{SC}{SA}$

$\Rightarrow SC^2 = SE.SA$

BỘ ĐỀ 51

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI GIẢI THƯỞNG LÊ QUÝ ĐÔN QUẬN TÂN BÌNH, TPHCM – NĂM HỌC 2000 – 2001

Bài 1:

1) Giải phương trình: $\frac{1}{x^2 - 3x + 9} - \frac{9x}{x^3 + 27} = \frac{1}{x + 3}$

2) Chứng minh đẳng thức sau:

$$\frac{a^2 + 3ab}{a^2 - 9b^2} + \frac{2a^2 - 5ab - 3b^2}{6ab - a^2 - 9b^2} = \frac{a^2 + an + bn + ab}{3bn - a^2 - an + 3ab}$$

Bài 2: Cho hình bình hành ABCD có đường chéo AC lớn hơn đường chéo BD. Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của B và D xuống đường thẳng AC.

1) Tứ giác BEDF là hình gì? Chứng minh điều ấy.

2) Gọi CH và CK lần lượt là đường cao của tam giác ACB và ACD.

a/ Chứng minh: $\dfrac{CH}{CB} = \dfrac{CK}{CD}$

b/ Hai tam giác CHK và ABC đồng dạng.

c/ Chứng minh rằng: $AB.AH + AD.AK = AC^2$

Bài 3: Cho hình bình hành ABCD. Trên cạnh AB và CD lần lượt lấy các điểm M và K sao cho AM = CK. Trên đoạn AD lấy điểm P tùy ý. Đoạn thẳng MK lần lượt cắt PB và PC tại E và F. Chứng minh $S_{PEF} = S_{BME} + S_{CKF}$

Ghi chú: S_{PEF} là diện tích tam giác PEF.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $\dfrac{1}{x^2 - 3x + 9} - \dfrac{9x}{x^3 + 27} = \dfrac{1}{x + 3}$ (1)

Điều kiện để phương trình (1) có nghĩa:

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 9 \neq 0 \\ x^3 + 27 \neq 0 \\ x + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 9 \neq 0 \\ (x+3)(x^2 - 3x + 9) \neq 0 \\ x + 3 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + \dfrac{9}{4} + \dfrac{27}{4} \neq 0 \\ x + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{27}{4} \neq 0 \\ x + 3 \neq 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x \neq -3$ vì $\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{27}{4} > 0$ với mọi x.

Do đó, ta có: $\dfrac{1}{x^2 - 3x + 9} - \dfrac{9x}{(x + 3)(x^2 - 3x + 9)} = \dfrac{1}{x + 3}$

$\Leftrightarrow x + 3 - 9x = x^2 - 3x + 9$

$\Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3x + 6 = 0 \Leftrightarrow x(x + 2) + 3(x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x + 2)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 2 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -3 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x = -2$ ($x = -3 \notin$ TXĐ)

Vậy phương trình (1) có một nghiệm số là $x = -2$

2) Rút gọn vế trái: $M = \dfrac{a^2 + 3ab}{a^2 - 9b^2} + \dfrac{2a^2 - 5ab - 3b^2}{6ab - a^2 - 9b^2}$

Điều kiện:

$$\begin{cases} a^2 - 9b^2 \neq 0 \\ 6ab - a^2 - 9b^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a - 3b)(a + 3b) \neq 0 \\ -(a - 3b)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 3b \neq 0 \\ a + 3b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 3b \\ a \neq -3b \end{cases}$$

Với điều kiện trên ta có:

$$M = \frac{a(a+3b)}{(a+3b)(a-3b)} + \frac{2a^2 - 6ab + ab - 3b^2}{-(a-3b)^2}$$

$$= \frac{a}{a-3b} - \frac{2a(a-3b) + b(a-3b)}{(a-3b)^2} = \frac{a}{a-3b} - \frac{(a-3b)(2a+b)}{(a-3b)^2}$$

$$= \frac{a}{a-3b} - \frac{2a+b}{a-3b} = \frac{-a-b}{a-3b} = \frac{a+b}{3b-a} \qquad (1)$$

Rút gọn vế phải $N = \frac{a^2 + an + bn + ab}{3bn - a^2 - an + 3ab}$

Điều kiện:

$3bn - a^2 - an + 3ab \neq 0 \Leftrightarrow 3bn - an - a^2 + 3ab \neq 0$

$\Leftrightarrow n(3b - a) - a(a - 3b) \neq 0 \Leftrightarrow n(3b - a) + a(3b - a) \neq 0$

$\Leftrightarrow (n + a)(3b - a) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n + a \neq 0 \\ 3b - a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -n \\ a \neq 3b \end{cases}$

Với điều kiện trên, ta có:

$$N = \frac{a(a+n) + b(n+a)}{(n+a)(3b-a)} = \frac{(n+a)(a+b)}{(n+a)(3b-a)}$$

$$N = \frac{a+b}{3b-a} \qquad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có:

$$\frac{a^2 + 3ab}{a^2 - 9b^2} + \frac{2a^2 - 5ab - 3b^2}{6ab - a^2 - 9b^2} = \frac{a^2 + an + bn + ab}{3bn - a^2 - an + 3ab}$$

(với $a \neq 3b$; $a \neq -3b$; $a \neq -n$)

Bài 2: 1) Xét hai tam giác vuông ABE và CDF ta có:

AB = CD (ABCH là hình bình hành)

$\widehat{BAE} = \widehat{DCF}$ (hai góc so le trong có AB // CD)

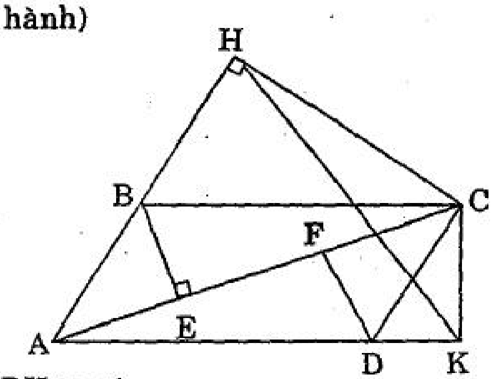
Vậy $\Delta ABE = \Delta CDF$

(cạnh huyền – góc nhọn)

Suy ra BE = DF

Mà BE // DF (cùng vuông góc với AC)

nên tứ giác BEDF là hình bình hành.



2) a/ Xét hai tam giác vuông CBH và CDK ta có:

$\widehat{CBH} = \widehat{CDK}$ (góc có cạnh tương ứng song song: BC // AD; BA // CD)

Vậy $\Delta CBH \backsim \Delta CDK$ (g–g)

Suy ra: $\frac{CH}{CB} = \frac{CK}{CD}$

b/ Ta có: CB // AD

Và $CK \perp AD$ nên $CK \perp CB$ mà $AB \perp CH$

nên $\widehat{ABC} = \widehat{HCK}$ (hai góc cùng bù với góc $\widehat{BAD}$)

ΔCHK và ΔABC có:

$ABC = HCK$;

$\dfrac{CH}{CB} = \dfrac{CK}{CD}$ hay $\dfrac{CH}{CB} = \dfrac{CK}{AB}$ $(AB = CD)$

nên $\Delta CHK \backsim \Delta BCA$ (c–g–c)

c/ Xét hai tam giác vuông AFD và CEB ta có:

$AD = BC$ (ABCD là hình bình hành)

$\widehat{FAD} = \widehat{ECB}$ (hai góc so le trong có $BC // AD$)

Vậy $\Delta AFD = \Delta CEB$ (cạnh huyền – góc nhọn)

Cho ta $AF = CE$.

Xét hai tam giác vuông AFD và AKC có A chung.

Suy ra $\Delta AFD \backsim \Delta AKC$ (g–g)

Cho ta: $\dfrac{AF}{AK} = \dfrac{AD}{AC}$

hay $AD.AK = AF.AC$

Suy ra $AD.AK = CE.AC$ (1)

Xét hai tam giác vuông ABE và ACH ta có BAE chung.

Do đó $\Delta ABE \backsim \Delta ACH$ (góc – góc)

Cho ta: $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AE}{AH}$

hay $AB.AH = AE.AC$ (2)

Cộng vế theo vế (1) và (2) ta được:

$AD.AK + AB.AH = CE.AC + AE.AC = (CE + AE).AC = AC^2$

Bài 3: Vẽ $PH \perp BC$ và $BQ \perp CD$ $(H \in BC,\ Q \in CD)$

Ta có: $S_{ABCD} = PH.BC$

$S_{PBC} = \dfrac{1}{2}PH.BC = \dfrac{1}{2}S_{ABCD}$

và $AB = CD$ (ABCD là hình bình hành)

$AM = CK$ (gt)

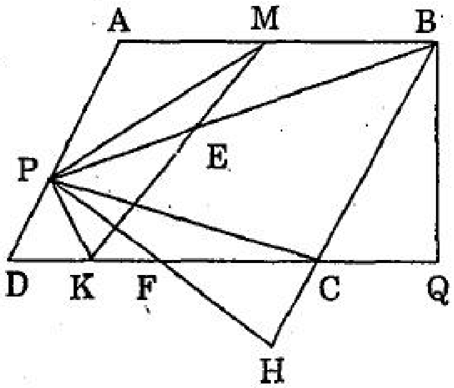
Suy ra $AB - AM = CD - CK$

hay $BM = DK$

Xét hình thang BMKC ta có:

$S_{BMKC} = \dfrac{(BM + KC).BQ}{2}$

$= \dfrac{(DK + KC).BQ}{2} = \dfrac{DC.BQ}{2} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD}$



suy ra $S_{PBC} = S_{BMKC}$

hay $S_{PEF} + S_{BEFC} = S_{BME} + S_{KFC} + S_{BEFC}$

suy ra $S_{PEF} = S_{BME} + S_{KFC}$

BỘ ĐỀ 52

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 8 TRƯỜNG THCS NGUYỄN GIA THIỀU, QUẬN TÂN BÌNH, TPHCM – NĂM HỌC 2000 – 2001

Bài 1:

1) Phân tích đa thức thành nhân tử: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

2) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$A = -x^2 - y^2 + xy + x + y$ và các giá trị tương ứng của x và y.

3) Giải phương trình: $3x^3 + 4x^2 + 5x - 6 = 0$

4) Giải bất phương trình: $\dfrac{x-3}{x+2} > 2$

Bài 2: Cho đoạn thẳng AC = m. Lấy điểm B bất kỳ thuộc đoạn AC ($B \neq A$, $B \neq C$). Tia Bx vuông góc với AC. Trên tia Bx lần lượt lấy các điểm D và E sao cho BD = BA và BE = BC.

1) Chứng minh rằng: CD = AE và $CD \perp AE$.

2) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AE, CD. Gọi I là trung điểm của MN. Chứng minh rằng khoảng cách từ điểm I đến AC không đổi khi B di chuyển trên đoạn AC.

3) Tìm vị trí của điểm B trên đoạn AC sao cho tổng diện tích hai tam giác ABE và BCD có giá trị lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất này theo m.

Bài 3: Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh AB lấy điểm M. Vẽ BH vuông góc với CM. Nối DH. Vẽ HN vuông góc với DH (N thuộc BC).

1) Chứng minh rằng tam giác DHC đồng dạng với tam giác NHB

2) Chứng minh rằng AM.NB = NC.MB

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a^3 + 3a^2b + 2ab^2 + b^3) + c^3 - (3a^2b + 3ab^2 + 3abc)$

$= (a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b + c) = (a + b + c)[(a + b)^2 - (a + b)c + c^2 - 3ab]$

$= (a + b + c)(a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab)$

$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$

2) *Cách 1:*

$A = -x^2 - y^2 + xy + x + y$

$= -\dfrac{1}{2}(x^2 - 2xy + y^2) - \dfrac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) - \dfrac{1}{2}(y^2 - 2y + 1) + 1$

$= 1 - \dfrac{1}{2}[(x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2] \leq 1$

Dấu "=" xảy ra: $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - 1 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 1 = 0 \text{(Đúng)} \\ x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy max A = 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Cách 2: Ta có:

$$A = -x^2 - y^2 + xy + x + y = -x^2 + (y + 1)x - y^2 + y$$

$$= -x^2 + 2\frac{(y+1)}{2}.x - \frac{(y+1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{4} - y^2 + y$$

$$= -\left[x - 2.\frac{(y+1)}{2}x + \frac{(y+1)^2}{4}\right] + \frac{y^2 + 2y + 1 - 4y^2 + 4y}{4}$$

$$= -\left(x - \frac{y+1}{2}\right)^2 + \frac{-3y^2 + 6y - 3 + 4}{4}$$

$$= \left(x - \frac{y+1}{2}\right)^2 - 3(y-1)^2 + 1 \le 1, \forall x, y$$

Vì: $\begin{cases} \left(x - \frac{y+1}{2}\right)^2 \ge 0 \\ 3(y-1)^2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\left(x - \frac{y+1}{2}\right)^2 \le 0 \\ -3(y-1)^2 \le 0 \end{cases} \forall x, y$

$$A = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{y+1}{2} = 0 \\ 3(y-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy max A = 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

3) $3x^3 + 4x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow 3x^3 - 2x^2 + 6x^2 - 4x + 9x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(3x - 2) + 2x(3x - 2) + 3(3x - 2) = 0 \Leftrightarrow (3x - 2)(x^2 + 2x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow 3x - 2 = 0$ (vì $x^2 + 3x + 3 = (x + 1)^2 + 2 > 0$) $\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm số là: $x = \frac{2}{3}$

4) $\frac{x-3}{x+2} > 2 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+2} - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{x-3-2x-4}{x+2} > 0 \Leftrightarrow \frac{-x-7}{x+2} > 0$

$\Leftrightarrow \frac{x+7}{x+2} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 7 > 0 \\ x + 2 < 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x + 7 < 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -7 \\ x < -2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x < -7 \\ x > -2 \end{cases} \Rightarrow -7 < x < -2$

Vậy bất phương trình đã cho có các nghiệm là các giá trị $-7 < x < -2$

Bài 2: 1) Xét hai tam giác ABE và DBC, ta có:

AB = BD (gt)

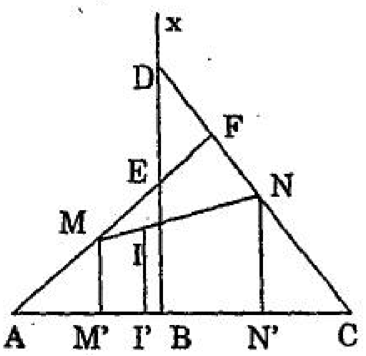
BE = BC (gt)

$\widehat{ABE} = \widehat{DBC} = 90^0$

Vậy $\Delta ABE = \Delta DBC$ (c–g–c);

cho ta $CD = AE$

Gọi F là giao điểm của AE và CD, ta có:



$\widehat{AEB} = \widehat{DEF}$ (hai góc đối đỉnh)

$\widehat{EAB} = \widehat{BDC}$ ($\Delta ABE = \Delta DBC$)

Suy ra $\widehat{AEB} + \widehat{EAB} = \widehat{DEF} + \widehat{BDC}$

Mà $\widehat{AEB} + \widehat{EAB} = 90^0$ nên $DEF + \widehat{BDC} = 90^0$

Suy ra $\widehat{DEF} = 90^0$ hay $AE \perp CD$ tại F.

2) Gọi M', I', N' lần lượt là hình chiếu của M, I, N xuống AC.

Tam giác AEB có M là trung điểm của AE, MM' // BE (cùng vuông góc với AC) nên MM' là đường trung bình của tam giác AEB;

cho ta: $MM' = \frac{1}{2}BE$ hay $MM' = \frac{1}{2}BC$

Chứng minh tương tự, ta có NN' là đường trung bình của ΔBCD;

cho ta $NN' = \frac{1}{2}BD$ hay $NN' = \frac{1}{2}AB$

Tứ giác MNM'N' có MM' // NN' (cùng vuông góc với AC) nên MNM'N' là hình thang.

I là trung điểm của MN, II' // MM' // NN' (cùng vuông góc với AC) nên II' là đường trung bình của hình thang MNM'N'.

Cho ta $II' = \frac{MM' + NN'}{2} = \frac{BC + AB}{4} = \frac{AC}{4} = \frac{m}{4}$ (không đổi)

3) Vì $\Delta ABE = \Delta DBC$ nên $S_{ABE} = S_{DBC}$ suy ra $S_{ABE} + S_{DBC} = 2S_{ABE}$

$2S_{ABE} = 2 \cdot \frac{1}{2}AB.BE = AB.BE = AB.BC$

Cách 1: $AB > 0$; $BC > 0$ mà tổng $AB + BC = AC = m$ (không đổi) nên tích AB.BC đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $AB = BC = \frac{m}{2}$

$\Leftrightarrow$ B là trung điểm của AC

Vậy max $(S_{ABE} + S_{DBC}) = \frac{m}{2}.\frac{m}{2} = \frac{m^2}{4}$ (đvdt)

$\Leftrightarrow$ B là trung điểm của đoạn AC.

Cách 2: Ta có: $(AB - BC)^2 \geq \Leftrightarrow AB^2 - 2AB.BC + BC^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow AB^2 + BC^2 \geq 2AB.BC$

$\Leftrightarrow AB^2 + 2AB.BC + BC^2 \geq 4AB.BC \Leftrightarrow (AB + BC)^2 \geq 4AB.BC$

$\Leftrightarrow AC^2 \geq 4AB.BC \Leftrightarrow m^2 \geq 4AB.BC \Leftrightarrow AB.BC \leq \frac{m^2}{4}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow AB = BC = \frac{m}{2} \Leftrightarrow$ B là trung điểm của đoạn AC.

Vậy max $(S_{ABE} + S_{DBC}) = \frac{m^2}{4}$ (đvdt) $\Leftrightarrow$ B là trung điểm của đoạn AC.

Bài 3: 1) Xét ΔDHC và ΔNHB có:

$\widehat{DHC} = \widehat{NHB}$ (hai góc cùng phụ với góc $\widehat{CHN}$)

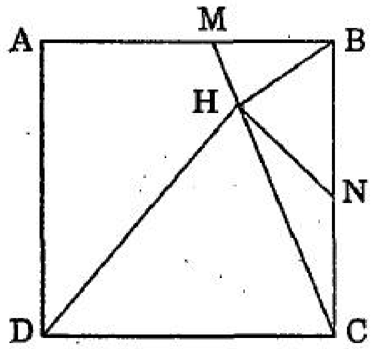
DCH = NBH (hai góc cùng phụ với góc $\widehat{HCB}$)

Do đó $\Delta DHC \backsim \Delta NHB$ (g–g)

2) ΔMBH và ΔBCH có:

$\widehat{MHB} = \widehat{BHC}$ (= 90^0); $\widehat{BMH} = \widehat{HBC}$ (hai góc cùng phụ với góc $\widehat{MBH}$)

Vậy $\Delta MBH \backsim \Delta BCH$ (g–g)



Cho ta: $\dfrac{MB}{BC} = \dfrac{HB}{HC}$ (1)

Mà $\dfrac{NB}{DC} = \dfrac{HB}{HC}$ (2)

(vì $\Delta DHC \backsim \Delta NHB$)

Và BC = DC (3)

(ABCH là hình vuông)

Từ (1), (2) và (3) suy ra MB = NB cho ta AM = CN

Suy ra AM . NB = NC . MB.

BỘ ĐỀ 53

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 8 TRƯỜNG THCS NGUYỄN GIA THIỀU QUẬN TÂN BÌNH, TPHCM – NĂM HỌC 2000 – 2001

Bài 1:

1) Tính giá trị của biểu thức: $\dfrac{x^2 - 25}{x^3 - 10x^2 + 25} : \dfrac{y - 2}{y^2 - y - 2}$

Biết $x^2 + 9y^2 - 4xy = 2xy - |x - 3|$

2) Giải phương trình: $2x^3 + 3x^2 + 2x - 2 = 0$

Bài 2:

1) Chứng minh rằng: $x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y + 3 \geq 0$

2) Chứng minh rằng: $(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) \leq abc$ với a, b, c là độ dài ba cạnh một tam giác.

Bài 3: Cho hình bình hành ABCD. Gọi M, N là trung điểm của BC và AD. Gọi K là điểm bất kỳ nằm giữa C và D. Gọi P và Q theo thứ tự là các điểm đối xứng của K qua tâm M và N.

1) Chứng minh Q, A, B, P thẳng hàng.

2) Gọi G là giao điểm của PN và QM. Chứng minh GK luôn đi qua điểm I cố định khi K thay đổi trên đoạn CD.

Bài 4: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Chứng minh:

1) Tam giác FHE đồng dạng với tam giác BHC.

2) H là giao điểm các đường phân giác của tam giác DEF.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: 1) $\dfrac{x^2-25}{x^3-10x^2+25}:\dfrac{y-2}{y^2-y-2}$

$$A=\frac{x^2-25}{x(x^2-10x+25)}:\frac{y-2}{y^2+y-2y-2}=\frac{(x-5)(x+5)}{x(x-5)^2}:\frac{y-2}{(y+1)(y-2)}$$

$$=\frac{(x-5)(x+5)(y+1)(y-2)}{x(x-5)^2(y-2)}=\frac{(x+5)(y+1)}{x(x-5)}$$

(với $x\neq 0,\ x\neq 5,\ y\neq 2,\ y\neq -1$)

Ta có: $x^2+9y^2-4xy=2xy-|x-3| \Leftrightarrow x^2-6xy+9y^2+|x-3|=0$

$\Leftrightarrow (x-3y)^2+|x-3|=0$

Do $(x-3y)^2\geq 0;\ |x-3|\geq 0$ nên đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}x-3y=0\\x-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\x=3\end{cases}$$

Thay $x=3$ và $y=1$ vào biểu thức rút gọn của A ta được:

$$A=\frac{(3+5)(1+1)}{3(3-5)}=\frac{16}{-6}=\frac{-8}{3}$$

2) $2x^3+3x^2+2x-2=0 \Leftrightarrow 2x^3-x^2+4x^2-2x+4x-2=0$

$\Leftrightarrow x^2(2x-1)+2x(2x-1)+2(2x-1)=0 \Leftrightarrow (2x-1)(x^2+2x+2)=0$

$\Leftrightarrow 2x-1=0$ (vì $x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0$) $\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm số là $x=\dfrac{1}{2}$

Bài 2: 1) *Cách 1:* $x^2+xy+y^2-3x-3y+3\geq 0$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-2y+1+xy-x-y+1\geq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+x(y-1)-(y-1)\geq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(x-1)(y-1)\geq 0$

$\Leftrightarrow \left[(x-1)+\dfrac{1}{2}(y-1)\right]^2+\dfrac{3}{4}(y-1)^2\geq 0$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}x-1=0\\y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$

Cách 2: Ta có: $x^2+xy+y^2-3x-3y+3=x^2+(y-3)x+y^2-3y+3$

$$=x^2+2.\frac{y-3}{2}x+\frac{(y-3)^2}{4}-\frac{(y-3)^2}{4}+y^2-3y+3$$

$$= \left(x + \frac{y-3}{4}\right)^2 + \frac{4y^2 - 12y + 12 - (y^2 - 6y + 9)}{4}$$

$$= \left(x + \frac{y-3}{4}\right)^2 + \frac{3(y^2 - 2y + 1)}{4} = \left(x + \frac{y-3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4}(y-1)^2 \geq 0$$

Vì $\left(x + \frac{y-3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4}(y-1)^2 \geq 0$ với mọi x, y

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} x + \dfrac{y-3}{2} = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

2) $(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) \leq abc$

Ta có:

$$\left.\begin{aligned} a^2 - (b-c)^2 \leq a^2 \\ b^2 - (a-c)^2 \leq b^2 \\ c^2 - (a-b)^2 \leq c^2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} (a-b+c)(a+b-c) \leq a^2 \\ (b-a+c)(b+a-c) \leq b^2 \\ (c-a+b)(c+a-b) \leq c^2 \end{aligned}\right\}$$

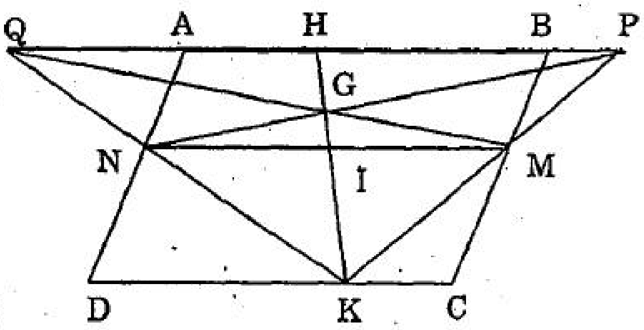
$\Leftrightarrow [(a - b + c)(a + b - c)(- a + b + c)]^2 \leq (abc)^2$

$\Leftrightarrow (a + b - c)(a - b + c)(- a + b + c) \leq abc$

(Vì a, b, c là ba cạnh của tam giác nên $a + b - c > 0$, $a - b + c > 0$, $-a + b + c > 0$)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow$ tam giác ABC đều.

Bài 3: 1) Ta có : $\frac{NA}{ND} = \frac{NQ}{NK} = 1$



Suy ra AQ // DK (Định lý đảo Talet)

hay AQ // DC (1)

Ta có: $\frac{MB}{MC} = \frac{MP}{MK} = 1$

Suy ra BP // KC (Định lý đảo Talet)

hay BP // DC (2)

mà AB // DC (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra bốn điểm A, B, P, Q thẳng hàng.

2) Gọi H là giao điểm của KG với PQ, I là giao điểm của KG với MN. G là giao điểm của hai trung tuyến PN và QM của tam giác KPQ nên G là trọng tâm của tam giác KPQ. Suy ra KH là trung tuyến của tam giác KPQ.

MN là đường trung bình của tam giác KPQ, cho ta MN // PQ.

Áp dụng định lý Talet vào tam giác KQH với NI // QH (NM // PQ)

Ta có: $\frac{NI}{QH} = \frac{KN}{KQ} = \frac{1}{2}$

Suy ra $\dfrac{NI}{QH} = \dfrac{MN}{QP}$ mà $\dfrac{NI}{QH} = \dfrac{MN}{2QH}$

nên MN = 2 NI cho ta I là trung điểm của đoạn MN.

Do đó điểm I cố định.

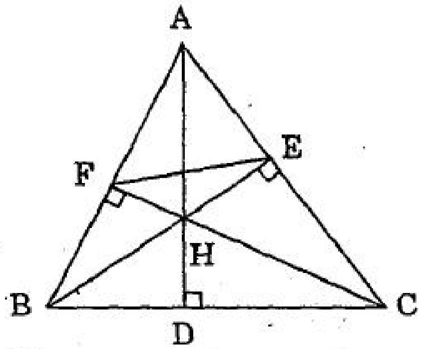
Vậy GK luôn đi qua điểm cố định I (I là trung điểm đoạn MN) khi K thay đổi trên đoạn CD.

Bài 4:

1) ΔFHB và ΔEHC có:

$\widehat{BFH} = \widehat{CEH} = 90^0$, $\widehat{FHB} = \widehat{EHC}$ (đối đỉnh)

Vậy $\Delta FHB \backsim \Delta EHC$ (g–g)



Cho ta: $\dfrac{HF}{HE} = \dfrac{HB}{HC} \Rightarrow \dfrac{HF}{HB} = \dfrac{HE}{HC}$

ΔFHE và ΔBHC có:

$\widehat{FHE} = \widehat{BHC}$ (đối đỉnh)

$\dfrac{HF}{HB} = \dfrac{HE}{HC}$

Vậy $\Delta FHE \backsim \Delta BHC$ (c–g–c)

2) $\Delta FHE \backsim \Delta BHC$ suy ra FEH = BCH (1)

Ta có: $\widehat{BAH} = \widehat{BCH}$ (2)

(hai góc cùng phụ với góc $\widehat{ABC}$)

($AB \perp CH$, $AH \perp BC$)

Chứng minh tương tự câu 1, ta có $\Delta ABH \backsim \Delta EDH$

nên $\widehat{BAH} = \widehat{BED}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{FEH} = \widehat{BED}$ cho ta EB là tia phân giác FED.

Chứng minh tương tự ta được DA là tia phân giác góc $\widehat{FDE}$, FC là tia phân giác góc $\widehat{EFD}$.

Vậy H là giao điểm các đường phân giác của ΔDEF.

BỘ ĐỀ 54

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 8 TRƯỜNG THCS NGUYỄN DU QUẬN GÒ VẤP, TPHCM – NĂM HỌC 2000 – 2001

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1) $3x^2 - \dfrac{1}{3}y^2 + \dfrac{2}{3}y - \dfrac{1}{3}$ 2) $x^2 - 5x^2 + 8x - 4$

Bài 2: Tìm x, y, z thỏa mãn: $x^2 + 4y^2 + z^2 = 2x + 12y - 4z - 14$

Bài 3: Cho biểu thức:

$$A = \left(\frac{x+1}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x}\right) : \frac{x+2}{x^2-1} + \frac{6x^2-3x}{x^3+2x^2} - 2 + x$$

1) Rút gọn biểu thức A.

2) Tìm điều kiện của x để A có giá trị âm?

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông tại A. Về phía ngoài của tam giác, ta vẽ các hình vuông ABDE và ACGH.

1) Chứng tỏ tứ giác BCHE là hình thang cân.

2) Kẻ đường cao AH_1 của tam giác ABC.

Chứng tỏ các đường thẳng AH_1, DE, GH đồng quy.

Bài 5: Cho hình chữ nhật ABCD, kẻ BH vuông góc với AC tại H. Gọi M và K lần lượt là trung điểm của AH và CD. Chứng minh $BM \perp MK$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $3x^2 - \frac{1}{3}y^2 + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3} = 3x^2 - \frac{1}{3}(y^2 - 2y + 1)$

$= 3x^2 - \frac{1}{3}(y-1)^2 = 3[x^2 - \frac{1}{9}(y-1)^2] = 3(x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3})(x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3})$

2) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = x^3 - 4x^2 + 4x + 4x - 4$

$= x^2(x-1) - 4x(x-1) + 4(x-1) = (x-1)(x^2 - 4x + 4) = (x-1)(x-2)^2$

Bài 2: $x^2 + 4y^2 + z^2 = 2x + 12y - 4z - 14$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + 4y^2 - 12y + 9 + z^2 - 4z + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (2y-3)^2 + (z-2)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ 2y - 3 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{3}{2} \\ z = 2 \end{cases}$$

Bài 3: 1) $A = \left(\frac{x+1}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x}\right) : \frac{x+2}{x^2-1} + \frac{6x^2-3x}{x^3+2x^2} - 2 + x$

Điều kiện để biểu thức A có nghĩa là: $\begin{cases} x^2 - 1 \neq 0 \\ x + 1 \neq 0 \\ x \neq 0 \\ x + 2 \neq 0 \\ x^3 + 2x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x \neq 0 \\ x \neq -2 \end{cases}$

TXĐ: $x \neq \pm 1, x \neq 0, x \neq -2$

$$A = \left[\frac{x(x+1)}{x(x+1)(x-1)} + \frac{2(x-1)x}{x(x+1)(x-1)} - \frac{3(x-1)(x+1)}{x(x-1)(x+1)}\right] . \frac{(x-1)(x+1)}{x+2}$$
$$+ \frac{3x(2x-1)}{x^2(x+2)} - 2 + x$$

$$A = \frac{(x^2 + x + 2x^2 - 2x - 3x^2 + 3)(x-1)(x+1)}{x(x-1)(x+1)(x+2)} + \frac{3x(2x-1)}{x^2(x+2)} - 2 + x$$

$$A = \frac{x(3-x)+3x(2x-1)}{x^2(x+2)} - 2 + x = \frac{3x - x^2 + 6x^2 - 3x}{x^2(x+2)} + x - 2$$

$$A = \frac{5x^2}{x^2(x+2)} + x - 2 = \frac{5}{x+2} + x - 2 = \frac{5 + x^2 - 4}{x+2} = \frac{x^2+1}{x+2}$$

2) $A < 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2<0 \\ x \neq \pm 1 \\ x \neq 0 \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-2 \\ x \neq \pm 1 \\ x \neq 0 \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x < -2$$

Bài 4:

1) Ta có: $\widehat{EBH} = \widehat{BHC} = 45^0$ (tính chất đường chéo hình vuông)

Suy ra EB // HC (hai góc so le trong bằng nhau)

Ta có: EA = AB; AC = AH

nên EA + AC = AB + AH

hay EC = BH

Tứ giác BEHC có EB // HC và EC = BH

nên tứ giác BEHC là hình thang cân.

2) Gọi P là giao điểm của DE và GH

Dễ dàng chứng minh tứ giác AEPH là hình chữ nhật.

Gọi O là giao điểm của AH_1 với EH. Vẽ HQ ⊥ AO, EK ⊥ AO.

ΔABH_1 và ΔEAK có

$\widehat{AH_1B} = \widehat{AKE} = 90^0$; $\widehat{ABH} = \widehat{EAK}$

(hai góc cùng phụ với góc $\widehat{BAH_1}$)

AB = AE

Vậy $\Delta ABH_1 = \Delta EAK$

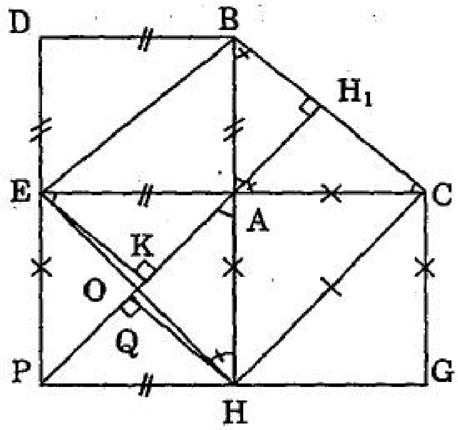
(cạnh huyền – góc nhọn)

Suy ra $AH_1 = EK$ (1)

Chứng minh tương tự ta có:

$\Delta ACH_1 = \Delta HAQ$ (cạnh huyền – góc nhọn)

Suy ra $AH_1 = HQ$ (2)



Từ (1) và (2) suy ra EK = HQ

Xét hai tam giác OEK và OHQ, ta có:

$\widehat{EKO} = \widehat{HQO} = 90^0$, EK = HQ, $\widehat{KEO} = \widehat{QHO}$. (So le trong: EK // QH)

Vậy $\Delta OEK = \Delta OHQ$ (g–c–g)

Suy ra OE = OH

Do đó O là trung điểm của EH.

Vậy O cũng là trung điểm của AP.

(Tính chất hai đường chéo của hình chữ nhật AEPH)

Suy ra P thuộc AO nên P thuộc AH_1.

Vậy ba đường thẳng AH_1, DE, GH đồng quy tại một điểm.

Bài 5: Gọi N là trung điểm của BH, suy ra MN là đường trung bình của tam giác AHB; cho ta MN // AB và MN = $\frac{1}{2}$AB.

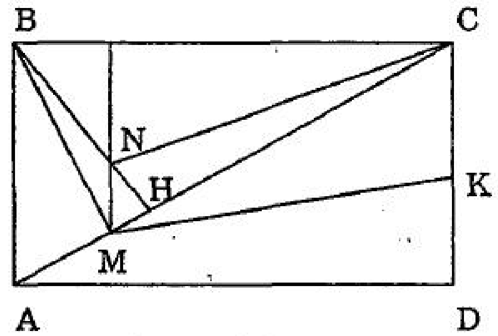
mà AB ⊥ BC (ABCD là hình chữ nhật)

nên MN ⊥ BC

Tam giác BMC có BH, MN là hai đường cao cắt nhau tại N nên N là trực tâm của tam giác BMC;

cho ta CN là đường cao của tam giác BMC.

Suy ra CN ⊥ BM.



Ta có: CK = $\frac{1}{2}$CD

Mà CD = AB nên CK = $\frac{1}{2}$AB. Mặt khác CK // AB (CD // AB)

MN // AB và MN = $\frac{1}{2}$AB

Do đó MN // CK và MN = CK

Suy ra tứ giác CNMK là hình bình hành; cho ta CN // MK

mà CN ⊥ BM nên MK ⊥ BM.

BỘ ĐỀ 55

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN 1, TPHCM – NĂM HỌC 2000 – 2001

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử:

1) $ab + ac + b^2 + 2bc + c^2$ 2) $x^4 + 2x^2 - 3$

3) $(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5) + 1$

Bài 2: Rút gọn và tính giá trị của biểu thức với x + y = 2001

$$\frac{x(x+5)+y(y+5)+2(xy-3)}{x(x+6)+y(y+6)+2xy}$$

Bài 3: Thực hiện phép tính:

$$\frac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\frac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\frac{c+a}{(a-b)(b-c)}$$

Bài 4: Cho a + b + c = 1 và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$

Chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Bài 5: Với sợi dây, em hãy nêu cách kiểm tra xem một tấm gỗ hình tứ giác có dạng hình chữ nhật.

Bài 6: Cho hình thang ABCD (AB // CD) điểm M nằm trong tứ giác ABCD, vẽ các hình bình hành MDPA, MCQB. Chứng minh rằng PQ song song CD.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $ab + ac + b^2 + 2bc + c^2 = a(b + c) + (b + c)^2 = (b + c)(a + b + c)$

2) $x^4 + 2x^2 - 3$

$= x^4 - 1 + 2x^2 - 2 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) + 2(x^2 - 1)$

$= (x^2 - 1)(x^2 + 3) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 3)$

3) $(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5) + 1$

$= (x - 2)(x - 5)(x - 3)(x - 4) + 1 = (x^2 - 7x + 10)(x^2 - 7x + 12) + 1$

$= (x^2 - 7x + 11 - 1)(x^2 - 7x + 11 + 1) + 1$

$= (x^2 - 7x + 11)^2 - 1 + 1 = (x^2 - 7x + 11)^2$

Bài 2: Với $x + y \neq 0$ và $x + y + 6 \neq 0$

Ta có:

$$\frac{x(x+5)+y(y+5)+2(xy-3)}{x(x+6)+y(y+6)+2xy} = \frac{x^2+5x+y^2+5y+2xy-6}{x^2+6x+y^2+6y+2xy}$$

$$= \frac{(x^2+y^2+2xy)+5(x+y)-6}{(x^2+y^2+2xy)+6(x+y)} = \frac{(x+y)^2+6(x+y)-(x+y)-6}{(x+y)^2+6(x+y)}$$

$$= \frac{(x+y)(x+y+6)-(x+y+6)}{(x+y)(x+y+6)} = \frac{(x+y+6)(x+y-1)}{(x+y)(x+y+6)} = \frac{x+y-1}{x+y}$$

Thay $x + y = 2001$ thì biểu thức có giá trị $\frac{2000}{2001}$

Bài 3: Với a, b, c đôi một khác nhau, ta có:

$$\frac{a+b}{(b-c)(c-a)} + \frac{b+c}{(c-a)(a-b)} + \frac{c+a}{(a-b)(b-c)}$$

$$= \frac{(a+b)(a-b)+(b+c)(b-c)+(c+a)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{a^2-b^2+b^2-c^2+c^2-a^2}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0$$

Bài 4: Do $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \Rightarrow \frac{ab+bc+ac}{abc} = 0$

$\Rightarrow ab + bc + ac = 0$

Mặt khác $a + b + c = 1$ nên $(a + b + c)^2 = 1$

Suy ra $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = 1$

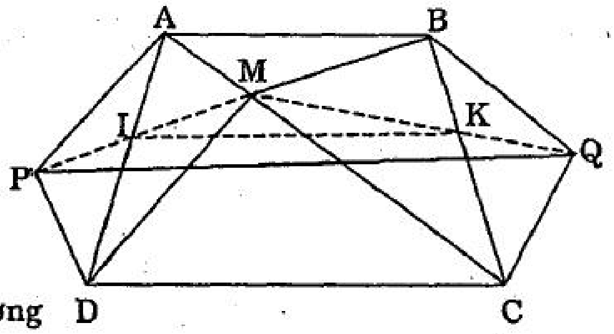
$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 1$ (do $ab + bc + ac = 0$)

Bài 5: Dùng dây đo chiều dài cặp cạnh đối tấm gỗ bằng nhau từng đôi một.

Dùng dây đo hai đường chéo bằng nhau.

Nếu các điều trên thỏa mãn thì tấm gỗ là hình chữ nhật.

Bài 6: Do MAPD và MBQC là hình bình hành nên I là trung điểm AD, MP và K là trung điểm của BC, MQ. Vậy IK là đường trung bình tam giác MPQ.



Suy ra IK // PQ và IK là đường trung bình hình thang ABCD.

Suy ra IK // CD

Vậy PQ // CD

BỘ ĐỀ 56

ĐỂ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 8 TRƯỜNG THCS HOA LƯ QUẬN 9 TPHCM – NĂM HỌC 2000 – 2001

Bài 1: Cho x, y, z là ba số khác 0 thỏa mãn $\begin{cases} x + y + z = 2002 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2002} \end{cases}$

Chứng minh rằng trong ba số x, y, z tồn tại hai số đối nhau.

Bài 2: Cho a, b, c là ba số thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 14 \end{cases}$

Hãy tính giá trị của biểu thức: $A = 1 + a^4 + b^4 + c^4$

Bài 3: Tìm ba số x, y, z sao cho:

$$x^2 + 5y^2 - 4xy + 10x - 22 + |x + y + z| + 26 = 0$$

Bài 4: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

1) $(a^2 + b^2)(a^2 + 1) \geq 4a^2b$, với mọi a, b.

2) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \geq \dfrac{4}{a+b}$ Với mọi a, b > 0

3) $\dfrac{1}{a+3b} + \dfrac{1}{b+3c} + \dfrac{1}{c+3a} \geq \dfrac{1}{a+2b+c} + \dfrac{1}{b+2c+a} + \dfrac{1}{c+2a+b}$

với mọi a, b, c > 0

Bài 5: Cho tứ giác lồi ABCD. Trên hai cạnh AB và CD ta lần lượt lấy hai điểm E và F sao cho: $\dfrac{AE}{BE} = \dfrac{CF}{DF}$.

Chứng minh rằng nếu đường chéo AC đi qua trung điểm I của đoạn thẳng EF thì AC chia đôi diện tích của tứ giác ABCD.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: Trong ba số x, y, z tồn tại hai số đối nhau nghĩa là $x + y = 0$ hoặc $y + z = 0$ hoặc $x + z = 0 \Rightarrow (x + y)(y + z)(z + x) = 0$

Từ điều kiện của đề bài ta có:

$$(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 1 \Rightarrow (x + y + z)(xy + yz + zx) - xyz = 0$$

$$\Rightarrow (x + y)(xy + yz + zx) + xyz + z^2(x + y) - xyz = 0$$

$$\Rightarrow (x + y)(xy + yz + zx + z^2) = 0 \Rightarrow (x + y)[y(x + z) + z(x + z)] = 0$$

$$\Rightarrow (x + y)(y + z)(x + z) = 0 \text{ (đpcm)}$$

Bài 2: Từ $a + b + c = 0$

$$\Rightarrow 0 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$$

$$\Rightarrow 2(ab + bc + ac) = -(a^2 + b^2 + c^2) = -14 \Rightarrow ab + bc + ac = -7$$

Vậy: $49 = (ab + bc + ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 + 2abc(a + b + c)$

$= a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ (do $a + b + c = 0$)

Từ $a^2 + b^2 + c^2 = 14$

$$\Rightarrow 196 = (a^2 + b^2 + c)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)$$

$$= a^4 + b^4 + c^4 + 2.49 \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 = 196 - 98 = 98$$

Vậy $A = 1 + a^4 + b^4 + c^4 = 99$.

Bài 3: *Cách 1:* $x^2 + 5y^2 - 4xy + 10x - 22y + |x + y + z| + 26 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4xy + 4y^2 + y^2 - 2y + 1 + 10x - 20y + 25 + |x + y + z| = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2y)^2 + 2.5(x - 2y) + 25 + (y - 1)^2 + |x + y + z| = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2y + 5)^2 + (y - 1)^2 + |x + y + z| = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ y - 1 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad (\text{vì } (x - 2y + 5)^2 \ge 0,\ (y - 1)^2 \ge 0,\ |x + y + z| \ge 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Cách 2: $x^2 + 5y^2 - 4xy + 10x - 22 + |x + y + z| + 26 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2(5 - 2y)x + 5y^2 - 22y + 26 + |x + y + z| = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2(5 - 2y)x + (5 - 2y)^2 + y^2 - 2y + 1 + |x + y + z| = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 5 - 2y)^2 + (y - 1)^2 + |x + y + z| = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ y = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Bài 4: 1) *Cách 1:*

$$(a^2 + b^2)(a^2 + 1) \ge 4a^2b \Leftrightarrow a^4 + a^2b^2 + a^2 + b^4 - 4a^2b \ge 0$$

$\Leftrightarrow a^4 - 2a^2b + b^2 + a^2b^2 - 2a^2b + a^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + a^2(b-1)^2 \geq 0$ (đúng)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = \pm 1 \end{cases}$

Cách 2: Với mọi a, b ta có: $\begin{cases} a^2 + b^2 \geq 2|a||b| \\ a^2 + 1 \geq 2|a| \end{cases}$

$\Rightarrow (a^2 + b^2)(a^2 + 1) \geq 4|a|^2|b| = 4a^2|b| \geq 4a^2b$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} |a| = |b| \\ |a| = 1 \\ b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = \pm 1 \end{cases}$

2) Ta có: $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \geq \dfrac{4}{a+b} \Leftrightarrow \dfrac{a+b}{ab} \geq \dfrac{4}{a+b}$

$\Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab$ (do a, b > 0) $\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$ (đúng)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

3) Với a, b, c > 0 áp dụng bất đẳng thức ở trên ta được:

$$\frac{1}{a+3b} + \frac{1}{b+2c+a} \geq \frac{4}{2(a+2b+c)} = \frac{2}{a+2b+c}$$

$$\frac{1}{b+3c} + \frac{1}{c+2a+b} \geq \frac{4}{2(b+2c+a)} = \frac{2}{b+2c+a}$$

$$\frac{1}{c+3a} + \frac{1}{a+2b+c} \geq \frac{4}{2(c+2a+b)} = \frac{2}{c+2a+b}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức cùng chiều, ta được:

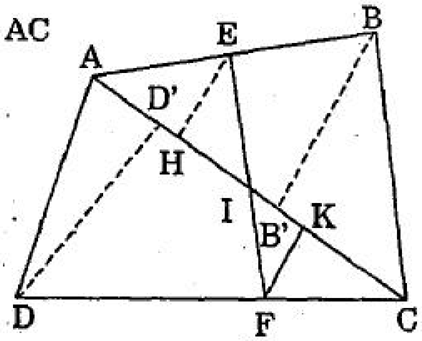
$$\frac{1}{a+3b} + \frac{1}{b+3c} + \frac{1}{c+3a} + \frac{1}{b+2c+a} + \frac{1}{c+2a+b} + \frac{1}{a+2b+c}$$

$$\geq \frac{2}{a+2b+c} + \frac{2}{b+2c+a} + \frac{2}{c+2a+b}$$

Suy ra: $\dfrac{1}{a+3b} + \dfrac{1}{b+3c} + \dfrac{1}{c+3a} \geq \dfrac{1}{a+2b+c} + \dfrac{1}{b+2c+a} + \dfrac{1}{c+2a+b}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a + 3b = b + 2c + a \\ b + 3c = c + 2a + b \\ c + 3a = a + 2b + c \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c$

Bài 5: Kẻ DD', BB', EH, FK cùng vuông góc với AC



Do EH // BB' $\Rightarrow \dfrac{EH}{BB'} = \dfrac{AE}{AB}$

FK // DD' $\Rightarrow \dfrac{FK}{DD'} = \dfrac{CF}{CD}$

Mà $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{CF}{CD}$ (gt)

Suy ra $\dfrac{EH}{BB'} = \dfrac{FK}{DD'}$

Mà $\Delta HIE = \Delta KIF$ ($IE = IF$, $\widehat{HIE} = \widehat{KIF}$)

Suy ra $HE = FK$

Vậy $BB' = DD'$

Ta có: $S_{ACD} = \dfrac{1}{2}AC.DD' = \dfrac{1}{2}AC.BB' = S_{ABC}$

Suy ra đường chéo AC chia đôi diện tích tứ giác ABCD.

BỘ ĐỀ 57

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN 9, TPHCM – NĂM HỌC 2000 – 2001

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử:

1) $3x^2 - 2x - 1$ 2) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

Bài 2:

1) Giải phương trình: $\dfrac{x+2}{x-2} - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x(x-2)} = 0$

2) Giải bất phương trình sau: $\dfrac{4x+7}{2x-1} < 2$

Bài 3: Chứng minh nếu $xyz = 1$ thì:

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+xz} = 1$$

Bài 4:

1) $\forall$ a, b $\in$ Q, chứng minh rằng: $a^4 + a^3b + ab^3 + b^4 \geq 0$

2) Cho: $7x^2 + 8xy + 7y^2 = 10$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $x^2 + y^2$

Bài 5: Cho tứ giác ABCD. Đường thẳng qua A song song với BC, cắt BD tại P và đường thẳng qua B song song với AD cắt AC tại Q. Chứng minh PQ // CD.

Bài 6: Cho tam giác ABC. Trên cạnh BC, CA và AB lần lượt lấy các điểm M, N, P. Lần lượt đặt diện tích các tam giác ANP, MPB, MNC, ABC là S_1, S_2, S_3, S.

1) Chứng minh: $\dfrac{S_1}{S} = \dfrac{AN.AP}{AC.AB}$

2) Chứng minh: $S_1 . S_2 . S_3 \leq \dfrac{1}{64}S^3$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $3x^2 - 2x - 1 = 3x^2 - 3 - 2x + 2 = 3(x^2 - 1) - 2(x - 1)$

$= 3(x - 1)(x + 1) - 2(x - 1) = (x - 1)(3x + 3 - 2) = (x - 1)(3x + 1)$

2) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = x^3 + x^2 + 5x^2 + 5x + 6x + 6$

$= x^2(x + 1) + 5x(x + 1) + 6(x + 1) = (x + 1)(x^2 + 5x + 6)$

$= (x + 1)[x^2 - 4 + 5x + 10]$

$= (x + 1)[(x - 2)(x + 2) + 5(x + 2)] = (x + 1)(x + 2)(x + 3)$

Bài 2:

1) Điều kiện: $x \neq 0$ và $x \neq 2$

Dưới điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$x(x + 2) - (x - 2) - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - x + 2 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & \text{(loại)} \\ x = -1 & \text{(nhận)} \end{array}\right.$

Kết luận: $S = \{-1\}$

2) Ta có: $\dfrac{4x+7}{2x-1} < 2 \Leftrightarrow \dfrac{4x+7}{2x-1} - 2 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{4x+7-2(2x-1)}{2x-1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{9}{2x-1} < 2 \Leftrightarrow 2x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{2}$

Bài 3: (Xem lời giải bài 3, bộ đề 47)

Bài 4:

1) $\forall a, b$ ta có:

$a^4 + a^3b + ab^3 + b^4 \geq 0 \Leftrightarrow a^3(a + b) + b^3(a + b) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a + b)(a^3 + b^3) \geq 0 \Leftrightarrow (a + b)^2(a^2 - ab + b^2) \geq 0$

Vì: $(a + b)^2 \geq 0$; $a^2 - ab + b^2 = \left(a - \dfrac{b}{2}\right)^2 + \dfrac{3b^2}{4} \geq 0, \forall a, b.$

2) Từ $7x^2 + 8xy + 7y^2 = 10$ (*)

$\Rightarrow 7(x^2 + y^2) = 10 - 8xy \Rightarrow 11(x^2 + y^2) = 10 + 4x^2 - 8xy + 4y^2$

$\Rightarrow 11(x^2 + y^2) = 10 + 4(x - y)^2$

Mà $4(x - y)^2 \geq 0, \forall x, y \Rightarrow 10 + 4(x - y)^2 \geq 10$

Vậy $11(x^2 + y^2) \geq 10 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq \dfrac{10}{11}$

$x^2 + y^2 = \dfrac{10}{11} \Leftrightarrow x = y$ và x, y thỏa (*)

Từ $7x^2 + 8xy + 7y^2 = 10 \Rightarrow 3(x^2 + y^2) = 10 - 4x^2 - 8xy - 4y^2$

$\Rightarrow 3(x^2 + y^2) = 10 - 4(x + y)^2$

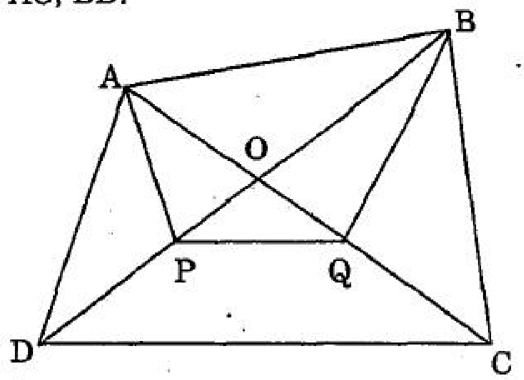
mà $4(x + y)^2 \leq 0, \forall x,y \Rightarrow 10 - 4(x + y)^2 \leq 10$

Vậy $3(x^2 + y^2) \leq 10 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq \dfrac{10}{3}$

$x^2 + y^2 = \dfrac{10}{3} \Leftrightarrow x = y$ và x, y thỏa (*)

Kết luận: $\min(x^2 + y^2) = \dfrac{10}{11}$; $\max(x^2 + y^2) = \dfrac{10}{3}$

Bài 5: Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC, BD.



Áp dụng hệ quả định lí Talet, ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OP}{OB} (\text{vì } AP // BC) \\ \dfrac{OQ}{OA} = \dfrac{OB}{OD} (\text{vì } BQ // AD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{OA}{OC}.\frac{OQ}{OA} = \frac{OP}{OB}.\frac{OB}{OD}$$

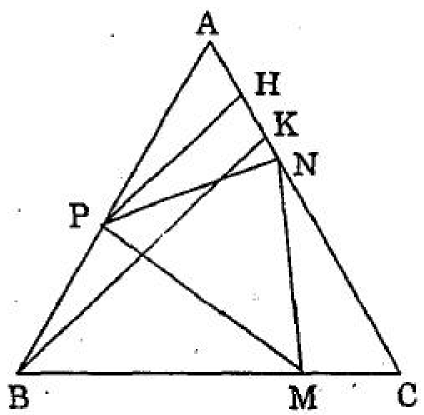
$$\Rightarrow \frac{OQ}{OC} = \frac{OP}{OD}$$

Vậy theo định lý Talet đảo, ta được PQ // CD.

Bài 6:

1) Kẻ PH và BK cùng vuông góc AC, ta được PH // BK.

Áp dụng định lý Talet ta có: $\dfrac{PH}{BK} = \dfrac{AP}{AB}$



Ta có: $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{\frac{1}{2}PH.AN}{\frac{1}{2}BK.AC} = \dfrac{PH}{BK}.\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{PA}{AB}.\dfrac{AN}{AC}$

2) Đặt: $\dfrac{AP}{AB} = a, \dfrac{CN}{AC} = b, \dfrac{BM}{BC} = c$

(với $0 < a, b, c < 1$)

Suy ra: $\dfrac{BP}{AB} = 1 - a; \dfrac{AN}{AC} = 1 - b; \dfrac{CM}{BC} = 1 - c$

Ta có: $\dfrac{S_1}{S} = \dfrac{AP}{AB}.\dfrac{AN}{AC} = a(1 - b)$

Lý luận tương tự như câu a, ta được: $\dfrac{S_2}{S} = \dfrac{BP}{AB}.\dfrac{BM}{BC} = (1 - a)c$

và $\dfrac{S_3}{S} = \dfrac{CM}{BC}.\dfrac{CN}{AC} = (1 - c)b$

Suy ra: $\dfrac{S_1.S_2.S_3}{S^3} = a(1 - a)b(1 - b)c(1 - c) \le \dfrac{1}{4}.\dfrac{1}{4}.\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{64}$

Vì với $0 < x < 1$, ta luôn có: $x(1 - x) \le \dfrac{1}{4}$

Thật vậy: $x(1 - x) = x^2 + x = \left(x^2 - x + \dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{1}{4} = -\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4} \le \dfrac{1}{4}$

vậy $S_1S_2S_3 \le \dfrac{S^3}{64}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M, N, P là trung điểm BC, CA và AB của tam giác ABC.

BỘ ĐỀ 58

ĐỀ THI KỲ 3 GIẢI THƯỞNG LÊ QUÝ ĐÔN TRÊN BÁO KHĂN QUÀNG ĐỎ LẦN 3 – NĂM HỌC 2000 – 2001

Bài 1: Rút gọn các biểu thức rồi tính giá trị:

$$A = \frac{xy^2(y+x) + x^2y(y+x)}{2y^2 - 2x^2}, \text{ với } x = -2,\ y = \frac{1}{3}$$

$$B = \frac{(27x^3 - y^3)(16y^2 - x^2)}{(x+4y)(9x^2 + 3xy + y^2)}, \text{ với } x = -1,\ y = \frac{1}{2}$$

Bài 2: Thực hiện phép chia đa thức: $(x^4 - 1) : (2x^2 + 1)$

Bài 3: Cho hình vuông ABCD có M, N, P, Q lần lượt là các trung điểm của AB, BC, CD, DA. Đường thẳng AN lần lượt cắt DM, BP tại I, J. Đường thẳng CQ lần lượt cắt BP, DM tại H, K. Tứ giác IJHK là hình gì?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: $A = \frac{xy^2(y+x) + x^2y(y+x)}{2y^2 - 2x^2} = \frac{xy(y+x)[y+x]}{2(y-x)(y+x)} = \frac{xy(y+x)}{2(y-x)}$

Với $x = -2,\ y = \frac{1}{3}$ thì $A = \frac{-\frac{2}{3}\left(-\frac{5}{3}\right)}{2\left(\frac{1}{3}+2\right)} = \frac{5}{21}$

$$B = \frac{(27x^3 - y^3)(16y^2 - x^2)}{(x+4y)(9x^2 + 3xy + y^2)} = \frac{(3x-y)(9x^2+3xy+y^2)(4y+x)(4y-x)}{(x+4y)(9x^2+3xy+y^2)}$$

$= (3x - y)(4y - x)$ với $x = -1,\ y = \frac{1}{2}$ thì $B = \frac{-21}{2}$

Bài 2: $x^4 - 1 : 2x^2 + 1$ có thương là $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}$ và số dư là $-\frac{3}{4}$

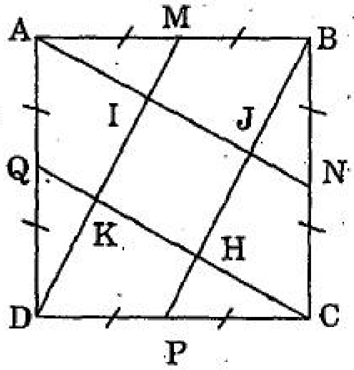
Bài 3: Tứ giác IJHK có các cạnh đối diện song song (vì MBPD, ANCQ là các hình bình hành).

Hai tam giác vuông AMD và DQC bằng nhau cho $\widehat{ADM} = \widehat{DCQ}$.

Suy ra: $\widehat{ADM} + \widehat{DQC} = 90^0$

Vậy $CQ \perp DM$.

Tứ giác IJKH có $\widehat{IKH} = 90^0$ nên là hình chữ nhật.



Ta cũng có hai tam giác AID và DKC bằng nhau và cũng có K là trung điểm ID, H là trung điểm KC. Do đó IK = HK.

Hình chữ nhật IJKH có IK = HK nên là hình vuông.

BỘ ĐỀ 59

ĐỀ THI KỲ 5 GIẢI THƯỞNG LÊ QUÝ ĐÔN
TRÊN BÁO KHĂN QUÀNG ĐỎ LẦN 3 – NĂM HỌC 2000 – 2001

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử:

1) $A = x^4 - 3x^3 + 8x - 24$

2) $B = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

Bài 2: Thu gọn biểu thức: $C = \left(\dfrac{x+x^3}{1-x^2} - \dfrac{x-x^3}{1+x^2}\right) : \left(\dfrac{1+x}{1-x} - \dfrac{1-x}{1+x}\right)$

Bài 3: Cho hình bình hành ABCD. Vẽ phân giác AM của góc A (M thuộc cạnh CD), vẽ phân giác CN của góc C (N thuộc cạnh AB). Các phân giác góc A và góc C cắt BD lần lượt tại E và F. Chứng minh diện tích hai tứ giác AEFN và CFEM bằng nhau.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $A = x^4 - 3x^3 + 8x - 24$

$= x^3(x - 3) + 8(x - 3) = (x - 3)(x^3 + 8) = (x - 3)(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

2) $B = x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = x^3 - 5x^2 + 2x^2 - 10x + x - 5$

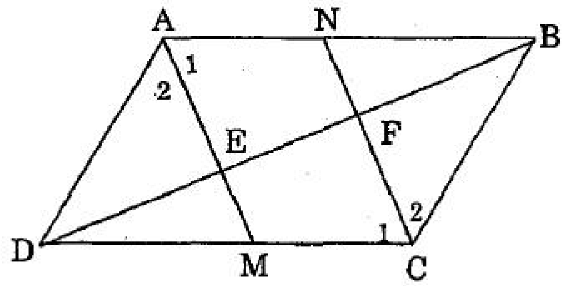
$= x^2(x - 5) + 2x(x - 5) + (x - 5)$

$= (x - 5)(x^2 + 2x + 1) = (x - 5)(x + 1)^2$

Bài 2: $C = \left(\dfrac{x+x^3}{1-x^2} - \dfrac{x-x^3}{1+x^2}\right) : \left(\dfrac{1+x}{1-x} - \dfrac{1-x}{1+x}\right)$

$$= \left(\frac{x+x^3+x^3+x^5-x+x^3+x^3-x^5}{(1-x^2)(1+x^2)}\right) : \left(\frac{(1+x^2)-(1-x^2)}{1-x^2}\right) = \frac{4x^3}{4x(1+x^2)} = \frac{x^2}{x^2+1}$$

Bài 3: ABCD là hình bình hành nên $\widehat{A} = \widehat{C}$.



Suy ra: $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$; $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$

Ta có: $\widehat{C}_1 = \widehat{BNF} = \widehat{A}_1$

Suy ra AM // CN.

Hai tam giác BNF và DME bằng nhau cho EM = NF.

Hai tam giác AED và CFB bằng nhau cho AE = CF.

Hai tứ giác ANFE và CMEF là hai hình thang có cùng chiều cao và các cạnh đáy tương ứng bằng nhau nên có diện tích bằng nhau.

BỘ ĐỀ 60

ĐỀ THI KỲ 7 GIẢI THƯỞNG LÊ QUÝ ĐÔN TRÊN BÁO KHĂN QUÀNG ĐỎ LẦN 3 – NĂM HỌC 2000 – 2001

Bài 1: Tìm x thỏa: $\dfrac{6x^3+7x^2+5x+2}{2x^2+x+1} = x-5$

Bài 2: Thu gọn biểu thức:

$$A = \left(\frac{2}{x^2+x-2xy-2y}\right).\left(1+\frac{3x+x^2}{3+x}\right)-\frac{x}{xy-2y^2}$$

Bài 3: Cho hình thang ABCD (AB // CD, AB<CD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD. Gọi I là trung điểm của MN. Một đường thẳng bất kỳ qua I cắt hai cạnh đáy AB, CD lần lượt tại E và F. Chứng minh hai tứ giác AEFD và BEFC có diện tích bằng nhau.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: $6x^3 + 7x^2 + 5x + 2$ chia cho $2x^2 + x + 1$ ta được $3x + 2$, dư là 0.

Ta có: $\dfrac{6x^3+7x^2+5x+2}{2x^2+x+1} = x-5$

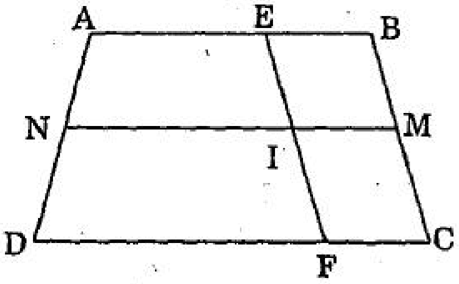
$3x + 2 = x - 5 \Leftrightarrow 2x = -7 \Leftrightarrow x = \dfrac{-7}{2}$

Bài 2: $A = \left(\dfrac{2}{x^2+x-2xy-2y}\right).\left(1+\dfrac{3x+x^2}{3+x}\right)-\dfrac{x}{xy-2y^2}$

$= \left(\dfrac{2}{x(x-2y)+x-2y}\right)\left(1+\dfrac{(3+x)x}{3+x}\right)-\dfrac{x}{y(x-2y)}$

$= \dfrac{2}{(x-2y)(x+1)}.(1+x)-\dfrac{x}{y(x-2y)}$

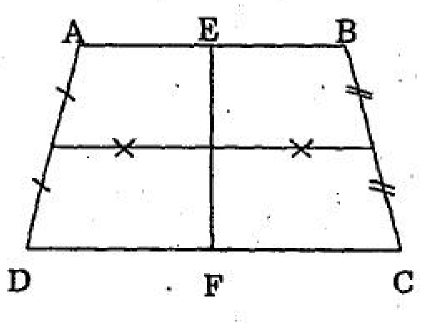
$A = \dfrac{2y-x}{y(x-2y)} = -\dfrac{1}{y}$



Bài 3: Hai hình thang AEFD và BCFE có cùng chiều cao. Hình thang AEFD có tổng hai cạnh đáy là AE + DF = 2NI. Hình thang BEFC có tổng hai cạnh đáy là BE + FC = 2MI.

Mà NI = MI (gt)

Vậy diện tích AEFD bằng diện tích BEFC.



BỘ ĐỀ 61

ĐỀ THI KỲ 11 GIẢI THƯỞNG LÊ QUÝ ĐÔN TRÊN BÁO KHĂN QUÀNG ĐỎ LẦN 3 – NĂM HỌC 2001 – 2002

Bài 1: Giải các phương trình:

1) $(x^2 - 9)(x^2 + 4x) = 0$ 2) $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{x+2}{x-3}$

Bài 2: Tìm giá trị x nguyên để cho: $A = \dfrac{2x^3 + 5x^2 - 5x + 5}{2x - 1}$ là số nguyên.

Bài 3: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và hai đường cao AA' và BB' cắt nhau tại H. Gọi D là điểm đối xứng của H qua trung điểm I của BC.

1) Tứ giác BHCD là hình gì?

2) Chứng minh $\widehat{BDC}$ và $\widehat{BAC}$ bù nhau.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $(x^2 - 9)(x^2 + 4x) = 0 \Leftrightarrow (x + 3)x(x - 3)(x + 4) = 0$

$\Leftrightarrow x = -3$ hoặc $x = 3$ hoặc $x = 0$ hoặc $x = -4$

2) $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{x+2}{x-3}$ (Điều kiện $x \neq 1$ và $x \neq 3$)

Phương trình: $x(x - 3) = (x - 1)(x + 2)$

$x^2 - 3x = x^2 + x - 2 \Rightarrow 4x = 2 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$ (nhận)

Bài 2: $A = \dfrac{2x^3 + 5x^2 - 5x + 5}{2x - 1} = x^2 + 3x - 1 + \dfrac{4}{2x - 1}$

Với x nguyên thì $x^2 + 3x - 1$ là số nguyên.

Để cho A là số nguyên thì $2x - 1$ là ước của 4 mà $2x - 1 \not\vdots\ 2$

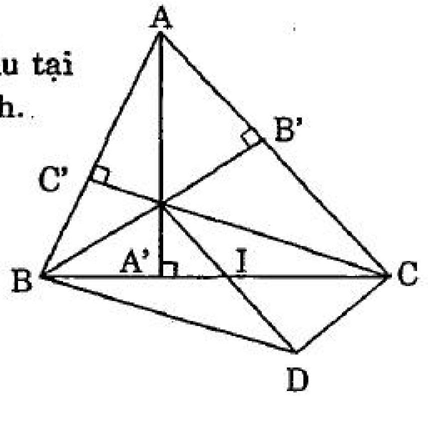
Do đó $2x - 1 = \pm 1$

$2x - 1 = 1 \Rightarrow x = 1$

$2x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0$

Vậy $x = 1$ hoặc $x = 0$

Bài 3:



1) Tứ giác BHCD có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm I của chúng nên là hình bình hành.

2) Ta có: $\widehat{BDC} = \widehat{BHC}$ (do BHCD là hình bình hành)

Tứ giác HC'AB' có tổng bốn góc là 360^0

nên $\widehat{C'AB'}$ bù với $\widehat{C'HB'}$

Ta có C'HB' = BHC (đối đỉnh)

Vậy $\widehat{BDC}$ bù với $\widehat{C'AB'}$ (hay $\widehat{BAC}$) (đpcm)

BỘ ĐỀ 62

ĐỀ THI KỲ 11 GIẢI THƯỞNG LÊ QUÝ ĐÔN TRÊN BÁO KHĂN QUÀNG ĐỎ LẦN 3 – NĂM HỌC 2000 – 2001

Bài 1: Rút gọn các biểu thức:

1) $A = \dfrac{3x+9}{5x+5} : \dfrac{9-x^2}{x^2+2x+1}$ $(x \neq -1)$

2) $B = \dfrac{x-y}{y-z} : \dfrac{z-x}{y-z} : \dfrac{x-y}{z-x}$ $(y \neq z,\ z \neq x,\ x \neq y)$

Bài 2: Tính giá trị của biểu thức: $C = \dfrac{x^3 - x}{(1+xy)^2 - (x+y)^2}$ với $x = 12$, $y = 99$.

Bài 3: Cho một hình thang cân có hai cạnh đáy là 3cm và 11cm, góc của cạnh bên và cạnh đáy lớn bằng 45^0. Tính diện tích hình thang ấy.

Bài 4: Một hình vuông và một hình thoi có cùng chu vi. Hỏi diện tích hình nào lớn hơn? Giải thích.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $A = \dfrac{3x+9}{5x+5} : \dfrac{9-x^2}{x^2+2x+1} = \dfrac{3x+9}{5x+5} . \dfrac{x^2+2x+1}{9-x^2}$

(điều kiện: $x \neq \pm 3, -1$)

$= \dfrac{3(x+3)}{5(x+1)} . \dfrac{(x+1)^2}{(3+x)(3-x)} = \dfrac{3(x+1)}{5(3-x)}$

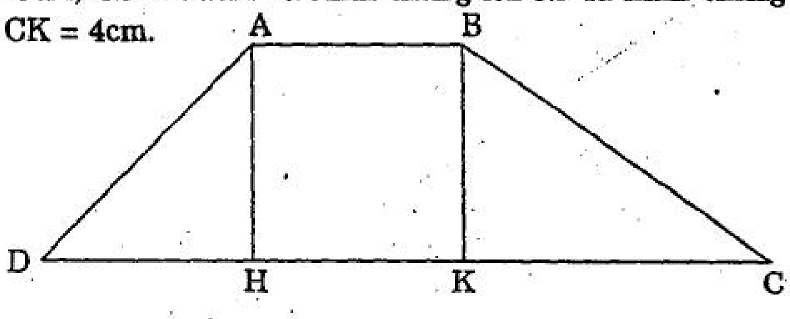
2) $B = \dfrac{x-y}{y-z} : \dfrac{z-x}{y-z} : \dfrac{x-y}{z-x} = \left(\dfrac{x-y}{y-z} . \dfrac{y-z}{z-x}\right) : \dfrac{x-y}{z-x} = \left(\dfrac{x-y}{z-x}\right) . \left(\dfrac{z-x}{x-y}\right) = 1$

Bài 2: $C = \dfrac{x^3 - x}{(1+xy)^2 - (x+y)^2} = \dfrac{x(x^2-1)}{(1+xy+x+y)(1+xy-x-y)}$

$= \dfrac{x(x+1)(x-1)}{[(1+x)+y(1+x)][(1-x)-y(1-x)]} = \dfrac{x(x+1)(x-1)}{(1+x)(1+y)(1-x)(1-y)}$

$= \dfrac{-x}{(1+y)(1-y)} = \dfrac{12}{(1+99)(1-99)} = \dfrac{-12}{9800} = \dfrac{-3}{2450}$

Bài 3: Ta có AB = 3cm, CD = 11cm và hình thang ABCD là hình thang cân nên DH = CK = 4cm.

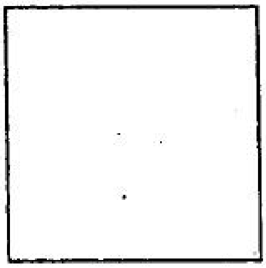


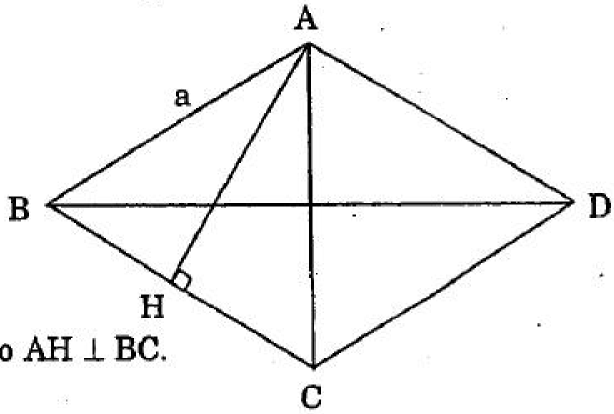
Tam giác AHD vuông cân cho AH = 4cm.

Diện tích hình thang ABCD: $\dfrac{(3+11)4}{2} = 28cm^2$

Bài 4: Hình vuông và hình thoi có cùng chu vi nên có cạnh bằng nhau. Ta đặt a là chiều dài cạnh của hình vuông và hình thoi.

a





Diện tích hình vuông là a^2

Đối với hình thoi ta vẽ đường cao $AH \perp BC$.

Ta có: AH < AB

AH < a.

Diện tích hình thoi ABCD xem như là diện tích hình bình hành ABCD cạnh đáy là BC, chiều cao là AH. Ta có diện tích hình thoi: $BC.AH < a^2$

Vậy diện tích hình thoi nhỏ hơn diện tích hình vuông có cùng chu vi.

BỘ ĐỀ 63

ĐỀ THI KỲ 12 GIẢI THƯỞNG LÊ QUÝ ĐÔN TRÊN BÁO KHĂN QUÀNG ĐỎ LẦN 3 – NĂM HỌC 2000 – 2001

Bài 1: Giải các phương trình:

1) $\dfrac{x^2+2x}{x^2+1} - 2x = 0$ 2) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2x^2-5}{x^3-1} = \dfrac{4}{x^2+x+1}$

Bài 2: Giải các phương trình (x là ẩn số)

1) $\dfrac{a-x}{10} = \dfrac{a}{2} + 5$ 2) $\dfrac{x+a}{b} - \dfrac{b}{a} = \dfrac{x-b}{a} + \dfrac{a}{b}$ $(a \neq 0, b \neq 0)$

Bài 3: Cho hình thang cân ABCD với AB // CD. Gọi I, J, K, L lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

1) Tứ giác IJKL là hình gì?

2) Cho biết diện tích ABCD bằng $20cm^2$. Tính diện tích tứ giác IJKL.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $\dfrac{x^2+2x}{x^2+1} - 2x = 0$ (vì $x^2 + 1 > 0$ nên không có điều kiện)

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 2x(x^2 + 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2x^3 + x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(-2x + 1) = 0 \Leftrightarrow 0$ hay $x = \dfrac{1}{2}$

Vậy phương trình có nghiệm $x \in \{0; \dfrac{1}{2}\}$

2) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2x^2-5}{x^3-1} = \dfrac{4}{x^2+x+1}$

Điều kiện: $x \neq 1$

Phương trình được biến đổi: $(x^3 - 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

$x^2 + x + 1 + 2x^2 - 5 = 4(x - 1)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ (nhận)} \\ x = 1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Vậy $x = 0$ là nghiệm.

Bài 2:

1) $\dfrac{a-x}{10} = \dfrac{a}{2} + 5 \Leftrightarrow a - x = 5a + 50 \Leftrightarrow x = 4a - 50$

2) $\dfrac{x+a}{b} - \dfrac{b}{a} = \dfrac{x-b}{a} + \dfrac{a}{b}$ ($a \neq 0, b \neq 0$)

$\Leftrightarrow a(x + a) - b^2 = (x - b)b + a^2 \Leftrightarrow (a - b)x = 0$

Nếu $a \neq b$ thì nghiệm là $x = 0$.

Nếu $a = b$ thì nghiệm là mọi $x \in Q$

Bài 3:

1) IJ // AC (đường trung bình trong ΔABC)

KL // AC (đường trung bình trong ΔADC)

Suy ra: IJ // KL.

Tương tự: IL // JK (cùng song song với BD)

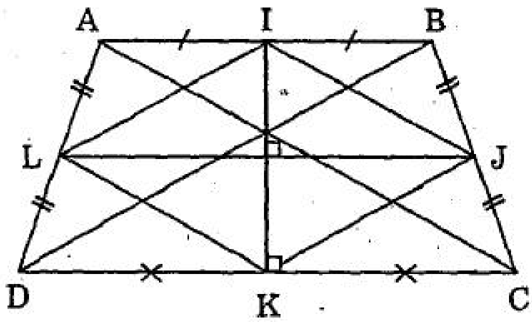
Vậy IJKL là hình bình hành.

Hơn nữa, do ABCD là hình thang cân nên $IK \perp AB$.

Ta lại có: LJ // AB (đường trung bình của hình thang).

nên $IK \perp JL$.

Vậy IJKL là hình thoi.



2) $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}$AB + CD).IK

$S_{IJKL} = \dfrac{1}{2}JL.IK$

mà: $JL = \dfrac{AB + CD}{2}$

(đường trung bình của hình thang)

Suy ra: $S_{IJKL} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD} = \dfrac{20}{2} = 10cm^2$

BỘ ĐỀ 64

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI GIẢI THƯỞNG LÊ QUÝ ĐÔN – TRƯỜNG THCS LÊ QUÝ ĐÔN – QUẬN 3, TPHCM – NĂM HỌC 2001 – 2002

Bài 1: Giải các phương trình sau:

1) $2x^3 + 5x^2 = 7x$

2) $\dfrac{x-11}{89} + \dfrac{x-12}{88} + \dfrac{x-33}{67} = \dfrac{x-67}{33} + \dfrac{x-88}{12} + \dfrac{x-89}{11}$

3) $\dfrac{2}{4-x^2} + \dfrac{1}{x^2-2x} = \dfrac{x-4}{x^2+2x}$

Bài 2:

1) Cho x, y thỏa mãn $x > y > 0$ và $x^2 + 3y^2 = 4xy$. Tính $\dfrac{2x+5y}{x-2y}$

2) Cho a, b, c, d thỏa mãn: $a + b = c + d$, $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.

Chứng minh rằng: $a^{2002} + b^{2002} = c^{2002} + d^{2002}$

Bài 3: Cho $x \neq 0$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \frac{2002x^2 - 2x + 1}{x^2}$$

Bài 4: Cho tam giác ABC ($\widehat{A} = 90^0$), D là điểm di động trên cạnh BC. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm D lên AB, AC.

1) Xác định vị trí của điểm D để tứ giác AEDF là hình vuông.

2) Xác định vị trí của điểm D để tổng 3AD + 4EF đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 5: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, BD và CE là hai đường cao cắt nhau tại H. Chứng minh rằng:

1) HD.HB = HE.HC   2) $\Delta HDE \backsim \Delta HCB$

3) $BH.BD + CH.CE = BC^2$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $2x^3 + 5x^2 = 7x$

$\Leftrightarrow 2x^3 + 5x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow x(2x^2 + 5x - 7) = 0$

$\Leftrightarrow x(2x^2 - 2x + 7x - 7) = 0 \Leftrightarrow x[2x(x-1) + 7(x-1)] = 0$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(2x+7) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x - 1 = 0 \\ 2x + 7 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -\dfrac{7}{2} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm số là: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -\dfrac{7}{2}$

2) $\frac{x-11}{89}+\frac{x-12}{88}+\frac{x-33}{67}=\frac{x-67}{33}+\frac{x-88}{12}+\frac{x-89}{11}$

$\Leftrightarrow \frac{x-11}{89}-1+\frac{x-12}{88}-1+\frac{x-33}{67}-1=\frac{x-67}{33}-1+\frac{x-88}{12}-1+\frac{x-89}{11}-1$

$\Leftrightarrow \frac{x-100}{89}+\frac{x-100}{88}+\frac{x-100}{67}=\frac{x-100}{33}+\frac{x-100}{12}+\frac{x-100}{11}$

$\Leftrightarrow (x-100)\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{33}-\frac{1}{67}-\frac{1}{88}-\frac{1}{89}\right)=0$

$\Leftrightarrow x-100=0$ (vì $\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{33}-\frac{1}{67}-\frac{1}{88}-\frac{1}{89}>0$)

$\Leftrightarrow x = 100.$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm số là $x = 100$.

3) $\frac{2}{4-x^2}+\frac{1}{x^2-2x}=\frac{x-4}{x^2+2x}$ (1)

$4 - x^2 = (2 - x)(2 + x)$

$x^2 - 2x = x(x - 2)$

$x^2 + 2x = x(x + 2)$

Mẫu thức chung $x(x - 2)(x + 2)$

Điều kiện để phương trình có nghĩa là: $x \neq 0$; $x \neq \pm 2$

Với điều kiện trên phương trình (1) tương đương với:

$\frac{2}{(2-x)(2+x)}+\frac{1}{x(x-2)}=\frac{x-4}{x(x+2)}$

$\Leftrightarrow \frac{-2x+(x+2)}{x(x-2)(x+2)}=\frac{(x-4)(x-2)}{x(x-2)(x+2)}$

$\Leftrightarrow -2x + x + 2 = x^2 - 6x + 8$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3x + 6 = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) - 3(x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-2=0\\x-3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\text{(loại)}\\x=3\text{(nhận)}\end{array}\right. \Leftrightarrow x=3$

Vậy phương trình (1) có một nghiệm số là $x = 3$.

Bài 2:

1) $x^2 + 3y^2 = 4xy \Leftrightarrow x^2 - 4xy + 3y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - xy - 3xy + 3y^2 = 0$

$\Leftrightarrow x(x - y) - 3y(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x - 3y) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-y=0\\x-3y=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y\text{ (loại vì } x>y)\\x=3y\end{array}\right.$

Với $x = 3y$ ta có: $\frac{2x+5y}{x-2y}=\frac{6y+5y}{3y-2y}=\frac{11y}{y}=11=11$ (do $y > 0$)

2) *Cách 1:* Từ $a + b = c + d$

$\Rightarrow (a + b)^2 = (c + d)^2 \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2cd + d^2$

$\Rightarrow 2ab = 2cd$ (do $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$)

Mặt khác $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ và $2ab = 2cd$, ta suy ra:
$a^2 - 2ab + b^2 = c^2 - 2cd + d^2$ hay $(a-b)^2 = (c-d)^2$
Cho ta $a - b = c - d$ hay $a - b = d - c$.
Phối hợp với giả thiết $a + b = c + d$, ta có các trường hợp sau:

$$\begin{cases} a+b=c+d \\ a-b=c-d \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} a+b=c+d \\ a-b=d-c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} a=d \\ b=c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^{2002}=c^{2002} \\ b^{2002}=d^{2002} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} a^{2002}=d^{2002} \\ b^{2002}=c^{2002} \end{cases} \Rightarrow a^{2002}+b^{2002}=c^{2002}+d^{2002}$$

Cách 2: $a + b = c + d$ (1)

$\Rightarrow a - c = d - b$

$a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ (2)

$\Rightarrow a^2 - c^2 = d^2 - b^2 \Rightarrow (a+c)(a-c) = (d+b)(d-b)$

$\Rightarrow (a+c)(a-c) = (d+b)(a-c) \Rightarrow (a-c)(a+c-d-b) = 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a-c=0 \\ a+c-d-b=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} a=c & (3) \\ a+c=d+b & (4) \end{array}\right.$$

(3) $a = c$ từ (1) có $b = d \Rightarrow a^{2002} + b^{2002} = c^{2002} + d^{2002}$

(4) kết hợp với (1) có $a + b + a + c = c + d + d + b$

$\Rightarrow 2a = 2d \Rightarrow a = d$. Do đó $b = c$.

$\Rightarrow a^{2002} + b^{2002} = c^{2002} + d^{2002}$

Bài 3: $A = \dfrac{2001x^2 - 2x + 1}{x^2}$ $(x \neq 0)$

Cách 1: $A = 2002 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 2001 + 1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 2001 + (1 - \dfrac{1}{x})^2 \geq 2001$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 1 - \dfrac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy min $A = 2001 \Leftrightarrow x = 1$.

Cách 2: $A = \dfrac{2002x^2 + x^2 - 2x + 1}{x^2} = 2001 + \dfrac{(x-1)^2}{x^2} \geq 2001$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

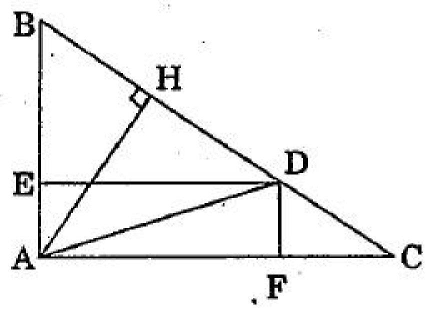
Vậy min $A = 2001 \Leftrightarrow x = 1$.

Bài 4:

1) Tứ giác AEDF có $\widehat{A} = \widehat{E} = \widehat{F} = 90^0$ nên là hình chữ nhật.

Tứ giác AEDF là hình vuông thì AD là tia phân giác của EAF hay là tia phân giác của BAC.

Vậy khi D là giao điểm của tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$ với cạnh BC thì tứ giác AEDF là hình vuông.



2) Ta có: AD = EF (tính chất đường chéo hình chữ nhật)

Do đó: 3AD + 4EF = 3AD + 4AD = 7AD.

Vẽ: $AH \perp BC$ ($H \in BC$)

Ta có: $AD \geq AH$ (vì $AH \perp DH$)

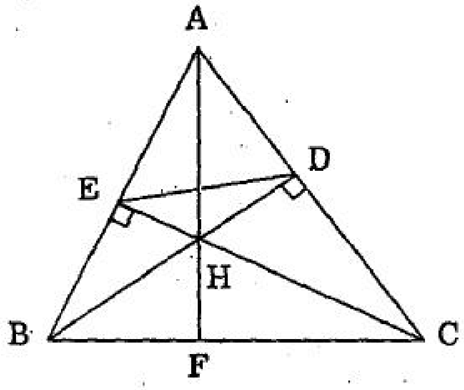
Do đó: $3AD + 4EF \geq 7AH$, AH không đổi.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow D \equiv H$.

Vậy tổng 3AD + 4EF đạt giá trị nhỏ nhất bằng 7AH $\Leftrightarrow D \equiv H$

(với H là chân đường cao hạ từ A xuống BC)

Bài 5:



1) Xét hai tam giác HEB và HDC ta có:

$\widehat{BEH} = \widehat{CDH} = 90^0$ (gt)

$\widehat{BHE} = \widehat{CHD}$ (hai góc đối đỉnh)

Vậy $\Delta HEB \backsim \Delta HDC$ (g–g)

Cho ta: $\dfrac{HE}{HD} = \dfrac{HB}{HC}$

hay HD.HB = HE.HC

2) ΔHED và ΔHBC có:

$\dfrac{HE}{HD} = \dfrac{HB}{HC}$ (chứng minh trên) và $\widehat{EHD} = \widehat{BHC}$ (hai góc đối đỉnh)

Vậy $\Delta HDE \backsim \Delta HCB$ (c–g–c)

3) Vì H là giao điểm của hai đường cao BD và CE của Δ ABC nên H là trực tâm của ΔABC. Suy ra AH là đường cao của ΔABC. Gọi F là giao điểm của AH và BC.

Ta có $AF \perp BC$.

Xét hai tam giác BHF và BCD ta có:

$\widehat{BFH} = \widehat{BDC}$ ($= 90^0$), $\widehat{DBC}$ (chung)

Vậy $\Delta BHF \backsim \Delta BCD$ (g–g)

Cho ta $\dfrac{BH}{BC} = \dfrac{BF}{BD}$ hay BH.BD = BF.BC (1)

Chứng minh tương tự ta có: $\Delta CHF \backsim \Delta CBE$ (g–g)

Cho ta $\dfrac{CH}{CB} = \dfrac{CF}{CE}$ hay CH.CE = CF.BC (2)

Cộng vế theo vế (1) và (2) ta được:

$BH.BD + CH.CE = BF.BC + CF.BC = (BF + CF).BC = BC^2$

BỘ ĐỀ 65

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 8 TRƯỜNG THCS NGUYỄN GIA THIỀU – QUẬN TÂN BÌNH, TPHCM – NĂM HỌC 2001 – 2002

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử:

1) $a^3 - b^3 + c^3 + 3abc$.

2) $(a + 2)(a + 3)(a^2 + a + 6) + 4a^2$

Bài 2: Giải phương trình:

1) $x^8 - 2x^4 + x^2 - 2x + 2 = 0$

2) $\dfrac{1}{x^2 - 5x + 6} + \dfrac{2}{x^2 - 8x + 15} + \dfrac{3}{x^2 - 13x + 40} = \dfrac{6}{5}$

Bài 3:

1) Chứng minh bất đẳng thức: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq ab + ac + ad + ae$

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x^2 + x$ và giá trị tương ứng của x.

3) Tìm giá trị lớn nhất của $B = \dfrac{3x^2 + 4x}{x^2 + 1}$ và giá trị tương ứng của x.

Bài 4: Cho tam giác ABC cân tại C. Kẻ đường phân giác AA_1 của góc $\widehat{A}$ và đường trung tuyến CC_1 của tam giác. Biết rằng $AA_1 = 2CC_1$. Tính số đo góc $\widehat{ACB}$.

Bài 5: Cho tứ giác ABCD có AC = 10cm, BD = 12cm. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O, biết góc $\widehat{AOB} = 30^0$. Tính diện tích tứ giác ABCD.

Bài 6: Trên hai cạnh AB và BC của hình vuông ABCD lấy hai điểm P và Q theo thứ tự sao cho BP = BQ. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ B xuống CP. Chứng minh rằng $\widehat{DHQ} = 90^0$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1. $a^3 - b^3 + c^3 + 3abc = (a - b)^3 + 3ab(a - b) + c^3 + 3abc$

$= (a - b + c)[(a - b)^2 - c(a - b) + c^2] + 3ab(a - b + c)$

$= (a - b + c)(a^2 - 2ab + b^2 - ac + bc + c^2 + 3ab)$

$= (a - b + c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc - ac)$

2. $(a + 2)(a + 3)(a^2 + a + 6) + 4a^2 = (a^2 + 5a + 6)(a^2 + a + 6) + 4a^2$

$= [(a^2 + 3a + 6) + 2a][(a^2 + 3a + 6) - 2a] + 4a^2$

$= (a^2 + 3a + 6)^2 - 4a^2 + 4a^2 = (a^2 + 3a + 6)^2$

Bài 2:

1) $x^8 - 2x^4 + x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^8 - 2x^4 + 1 + x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x^4 - 1)^2 + (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2(x^2 + 1)^2 + (x - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2(x + 1)^2(x^2 + 1)^2 + (x - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2[(x + 1)^2(x^2 + 1)^2 + 1] = 0$

$\Leftrightarrow x - 1 = 0$ (Vì $(x + 1)^2(x^2 + 1)^2 + 1 \geq 1 > 0$) $\Leftrightarrow x = 1$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$.

2) $$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} + \frac{2}{x^2 - 8x + 15} + \frac{3}{x^2 - 13x + 40} = \frac{6}{5} \qquad (1)$$

Phân tích các mẫu thức thành nhân tử:

$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2x - 3x + 6 = x(x - 2) - 3(x - 2) = (x - 2)(x - 3)$

$x^2 - 8x + 15 = x^2 - 3x - 5x + 15 = x(x - 3) - 5(x - 3) = (x - 3)(x - 5)$

$x^2 - 13x + 40 = x^2 - 5x - 8x + 40 = x(x - 5) - 8(x - 5) = (x - 5)(x - 8)$

Điều kiện để phương trình (1) có nghĩa là: $x \neq 2$, $x \neq 3$, $x \neq 5$, $x \neq 8$.

Với điều kiện trên phương trình (1) tương đương với:

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)} + \frac{2}{(x-3)(x-5)} + \frac{3}{(x-5)(x-8)} = -\frac{6}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-8} - \frac{1}{x-5} = -\frac{6}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-8} - \frac{1}{x-2} = -\frac{6}{5} \Leftrightarrow \frac{x-2-x+8}{(x-8)(x-2)} = -\frac{6}{5} \Leftrightarrow \frac{6}{(x-8)(x-2)} = -\frac{6}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x-8)(x-2)} = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow (x - 8)(x - 2) = -5$$

$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 16 + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 21 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 7x + 21 = 0$

$\Leftrightarrow x(x - 3) - 7(x - 3) = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(x - 7) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 3 = 0 \\ x - 7 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \text{ (loại)} \\ x = 7 \text{ (nhận)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 7$$

Vậy phương trình (1) có một nghiệm là $x = 7$.

Bài 3:

1) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq ab + ac + ad + ae$

$\Leftrightarrow 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 4d^2 + 4e^2 \geq 4ab + 4ac + 4ad + 4ae$

$\Leftrightarrow a^2 - 4ab + 4b^2 + a^2 - 4ac + 4c^2 + a^2 - 4ad + 4d^2 + a^2 - 4ac + 4e^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - 2b)^2 + (a - 2c)^2 + (a - 2d)^2 + (a - 2e)^2 \geq 0$ (bất đẳng thức đúng)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = 2b = 2c = 2d = 2e$.

2) $$A = x^2 + x = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x + \dfrac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

Vậy min $A = -\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

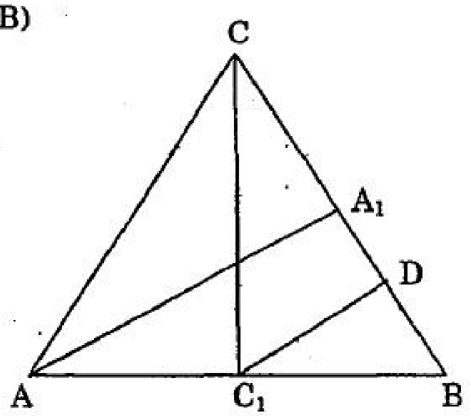
3) $$B = \frac{3x^2 + 4x}{x^2 + 1} = \frac{4x^2 + 4 - x^2 + 4x - 4}{x^2 + 1} = 4 - \frac{(x-2)^2}{x^2 + 1} \leq 4$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy max $B = 4 \Leftrightarrow x = 2$.

Bài 4:

Cách 1: Từ C_1 vẽ $C_1D \parallel AA_1 = CC_1$ ($D \in CB$)



Vì C_1 là trung điểm của đoạn AB nên C_1D là đường trung bình của tam giác AA_1B

Suy ra: $C_1D = \dfrac{1}{2}AA_1 = CC_1$

Cho ta ΔCC_1D cân tại C_1.

Suy ra $\widehat{C_1DC} = \widehat{C_1CD}$.

Mà $\widehat{C_1DC} = \widehat{DC_1B} + \hat{B} = \widehat{A_1AB} + \hat{B}$

(Vì $\widehat{A_1AB} = \widehat{DC_1B}$: đồng vị)

$\widehat{C_1DC} = \dfrac{1}{2}\widehat{CAB} + \hat{B} = \dfrac{1}{2}\hat{B} + \hat{B} = \dfrac{3}{2}\hat{B}$ (vì $\widehat{CAB} = \hat{B}$)

hay $\widehat{C_1CD} = \dfrac{3}{2}\hat{B}$

Tam giác ACB cân tại C nên trung tuyến CC_1 cũng là phân giác của tam giác ACB.

Suy ra $\widehat{ACB} = 2\widehat{C_1CD} = 2.\dfrac{3}{2}B = 3B$.

Ta có: $\widehat{ACB} + \widehat{CAB} + \hat{B} = 180^0$

Suy ra: $3\hat{B} + \hat{B} + \hat{B} = 180^0$ hay $5\hat{B} = 180^0$ cho ta $\hat{B} = 36^0$

$\widehat{ACB} = 3.36^0 = 108^0$

Cách 2:

Tam giác ABC cân tại C có CC_1 là trung tuyến nên CC_1 cũng là đường cao $\Rightarrow CC_1 \perp AB$ suy ra $\widehat{BC_1C} = 90^0$ kẻ $C_1D \parallel AA_1$ ($D \in CB$) mà C_1 là đường trung điểm của đoạn AB nên C_1D là đường trung bình của tam giác ABA_1.

Cho ta $C_1D = \dfrac{1}{2}AA_1 = CC_1$

ΔC_1CD cân tại C_1

Suy ra $\widehat{BCC_1} = \widehat{CDC_1} - \widehat{CA_1A} = \varphi$ (đặt $\widehat{CA_1A} = \varphi$)

Vậy $\widehat{ABA_1} = 90^0 - \varphi$ (vì ΔCC_1B cân tại C_1)

Suy ra: $\varphi = \widehat{CA_1A} = \dfrac{1}{2}\hat{A} + \hat{B} = \dfrac{1}{2}(90^0 - \varphi) + (90^0 - \varphi)$

Cho ta $\varphi = 54^0$

Suy ra $\hat{C} = 2\varphi = 108^0$

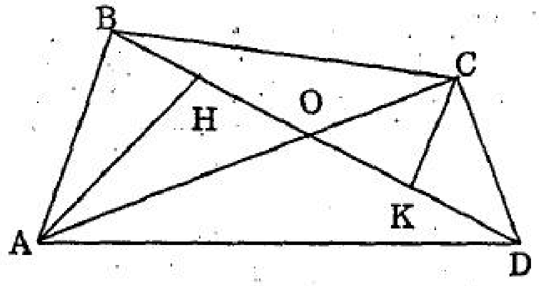
Bài 5: *Cách 1:* Giả sử: $\widehat{AOB} = \widehat{COD} = 30^0$

Vẽ $AH \perp OB$, $CK \perp OD$

Tam giác $\widehat{AOH}$ có $\widehat{AHO} = 90^0$; $\widehat{AOH} = 30^0$

nên ΔAOH là nửa tam giác đều, cho ta: $AH = \frac{1}{2}OA$

ΔCOK có $\widehat{CKO} = 90^0$; $\widehat{COK} = 30^0$ nên ΔCOK là nửa tam giác đều, cho ta $CK = \frac{1}{2}OC$.



Ta có: $S_{AOB} = \frac{1}{2}AH.OB = \frac{1}{4}AO.OB$ (1)

$S_{BOC} = \frac{1}{2}CK.OB = \frac{1}{4}OC.OB$ (2)

Cộng vế với vế (1) và (2) ta được $S_{ABC} = \frac{1}{4}OB.AC$

Tương tự: $S_{ADC} = \frac{1}{4}OD.AC$

Suy ra:

$S_{ABC} + S_{ADC} = S_{ABCD} = \frac{1}{4}AC(OB + OD) = \frac{1}{4}AC.BD = \frac{1}{4}.10.12 = 30cm^2$

Cách 2:

$S_{ABD} = \frac{1}{2}AH.BD = \frac{1}{4}OA.BD$; $S_{BCD} = \frac{1}{2}CK.BD = \frac{1}{4}OC.BD$

$\Rightarrow S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{4}(OA + OC).BD = \frac{1}{4}AC.BD = \frac{1}{4}.10.12 = 30cm^2$

Bài 6: *Cách 1:* Ta có: $\frac{BH}{BQ} = \frac{BH}{BP}$ (1)

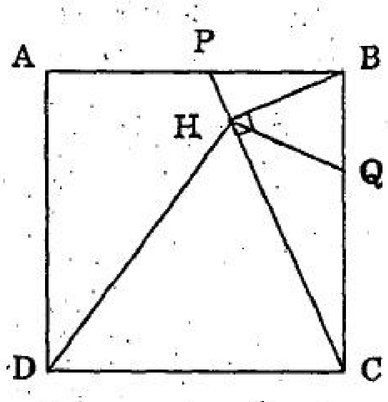
(vì BQ = BP)

$\frac{BH}{BP} = \frac{CH}{CB}$ (2)

(Vì $\Delta BHP \backsim \Delta CHB$ (g–g))

$\frac{CH}{CB} = \frac{CH}{CD}$ (3)

(Vì CB = CD)



Từ (1), (2) và (3) suy ra $\frac{BH}{BQ} = \frac{CH}{CD}$ (4)

Mặt khác HPB = QBH (hai góc cùng phụ với PBN)

$\widehat{DCH} = \widehat{HPB}$ (hai góc so le trong; AB//CD)

Suy ra $\widehat{DCH} = \widehat{QBH}$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra $\Delta DHC \backsim \Delta QHB$ (g–c–g)

cho ta $\widehat{DHC} = \widehat{QHB}$

Suy ra: $\widehat{DHQ} = \widehat{CHB} = 90^0$

Cách 2: BH cắt AD tại E, EC cắt DQ tại O.

Xét ΔABE và ΔBCP có:

$\widehat{BAE} = \widehat{CBP}$ (= 90^0):

AB = BC, $\widehat{ABE} = \widehat{BCP}$ (hai góc cùng phụ với góc $\widehat{HBC}$)

Do đó $\Delta ABE = \Delta BCP$ (g–c–g)

Suy ra AE = BP.

Mà BP = BQ (gt)

Do đó AE = BQ.

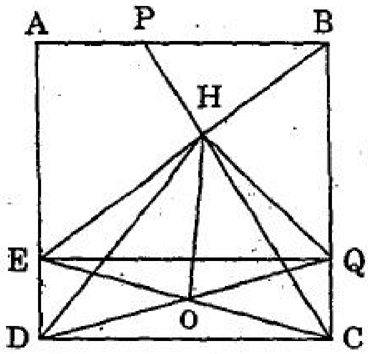
Suy ra AD – AE = BC – BQ

Suy ra ED = QC.

Tứ giác EQCD có ED = QC, ED // QC

nên là hình bình hành.

Mà $\widehat{EDC} = 90^0$



Do đó tứ giác DEQC là hình chữ nhật.

Suy ra EC = DQ, O là trung điểm của DQ và EC.

ΔCEH vuông tại H, HO là đường trung tuyến nên HO = $\frac{1}{2}$EC.

Vậy HO = $\frac{1}{2}$DQ. Tam giác DHQ có HO là đường trung tuyến và HO = $\frac{1}{2}$DQ

Do đó ΔDHQ vuông tại H.

Suy ra $\widehat{DHQ} = 90^0$.

BỘ ĐỀ 66

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI GIẢI THƯỞNG LÊ QUÝ ĐÔN QUẬN TÂN BÌNH, TPHCM – NĂM HỌC 2001 – 2002

Bài 1:

1. Giải phương trình $2x^2 - x + \frac{3}{2x-1} = 4$

2. Cho các biểu thức sau: $A = \frac{x^2+2x+1}{x^2-4x+5}$ và $B = \frac{2x^2-8x+10}{x^3-x^2-5x-3}$

a/ Tìm điều kiện có nghĩa của B.

b/ Tìm giá trị bé nhất của A và giá trị tương ứng của x.

c/ Tìm giá trị của x để A.B < 0

Bài 2: Cho tam giác ABC vuông tại A có đường phân giác BD cắt đường cao AH tại I.

1) Chứng minh tam giác ADI cân.

2) Chứng minh: AD.BD = BI.DC

3) Từ D kẻ DK vuông góc BC tại K. Tứ giác ADKI là hình gì? Chứng minh điều ấy.

Bài 3: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và AD là đường phân giác. Chứng minh rằng: $AD^2 < AB.AC$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $2x^2 - x + \dfrac{3}{2x-1} = 4$ (1)

Điều kiện: $2x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{1}{2}$

Với điều kiện trên phương trình (1) tương đương với:

$(2x^2 - x)(2x - 1) + 3 = 4(2x - 1)$

$\Leftrightarrow 4x^3 - 2x^2 - 2x^2 + x + 3 = 8x - 4 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x^2 - 7x + 7 = 0$

$\Leftrightarrow 4x^2(x - 1) - 7(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (4x^2 - 7)(x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2 - 7 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2 = 7 \\ x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = \dfrac{7}{4} \\ x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \notin Q \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Chứng minh $x^2 = \dfrac{7}{4}$ thì $x \notin Q$

Giả sử ta có $x \in Q$ đặt $x = \dfrac{a}{b}$ ($a, b \in N$; $b > 0$ UCLN $(a;b) = 1$).

Ta có: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = \dfrac{7}{4} \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{b^2} = \dfrac{7}{4} \Leftrightarrow 4a^2 = 7b^2$

$4a^2 \vdots 7$ mà ƯCLN (4; 7) = 1 nên $a^2 \vdots 7 \Rightarrow a \vdots 7$

$\Rightarrow a^2 \vdots 7^2 \Rightarrow 7b^2 \vdots 7^2 \Rightarrow b^2 \vdots 7 \Rightarrow b \vdots 7$

Do đó ƯCLN $(a;b) \geq 7$. Điều này vô lý!

Vậy điều giả sử trên sai nên $x \notin Q$.

Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

2) $A = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 4x + 5}$ và $B = \dfrac{2x^2 - 8x + 10}{x^3 - x^2 - 5x - 3}$

a/ Biểu thức B có nghĩa khi mẫu thức $x^3 - x^2 - 5x - 3 \neq 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x^2 - 6x + x - 3 \neq 0$

$\Leftrightarrow x^2(x - 3) + 2x(x - 3) + (x - 3) \neq 0$

$\Leftrightarrow (x - 3)(x^2 + 2x + 1) \neq 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 1)^2 \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \neq 0 \\ x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

Vậy biểu thức B có nghĩa khi $x \neq 3$ và $x \neq -1$.

b/ Ta có: $A = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 4x + 5} = \dfrac{(x+1)^2}{x^2 - 4x + 5 + 1} = \dfrac{(x+1)^2}{(x-2)^2 + 1}$

Ta có: $(x + 1)^2 \geq 0$ và $(x - 2)^2 + 1 > 0 \ \forall\, x$

Do đó: $\dfrac{(x+1)^2}{(x-2)^2+1} \geq 0 \ \forall x$ hay $A \geq 0 \ \forall\, x$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Vậy biểu thức A đạt giá trị nhỏ nhất bằng 0 khi $x = -1$.

c/ Ta có: $AB = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 4x + 5} . \dfrac{2x^2 - 8x + 10}{x^3 - x^2 - 5x - 3}$ $(x \neq 3, x \neq -1)$

$= \dfrac{(x+1)^2.2(x^2 - 4x + 5) + 1}{(x^2 - 4x + 5)(x - 3)(x + 1)^2} = \dfrac{2}{x - 3}$

Do đó: $A.B < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{x-3} < 0 \\ x \neq 3, x \neq -1 \end{cases}$ $(x \neq 3, x \neq -1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 < 0 \\ x \neq 3, x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x \neq 3, x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x < 3$ và $x \neq -1$

Vậy $A.B < 0$ khi $x < 3$ và $x \neq -1$.

Bài 2:

1) Ta có: $\widehat{AID} = \widehat{BIH}$ (hai góc đối đỉnh)

$\widehat{BIH} = \widehat{HBI} = 90^0$ (tam giác BIH vuông tại H)

Suy ra: $AIB + \widehat{IBH} = 90^0$

$\widehat{ADI} = \widehat{IBA} = 90^0$ (tam giác ABD vuông tại A)

$\widehat{ABI} = \widehat{HBI}$ (BD là phân giác)

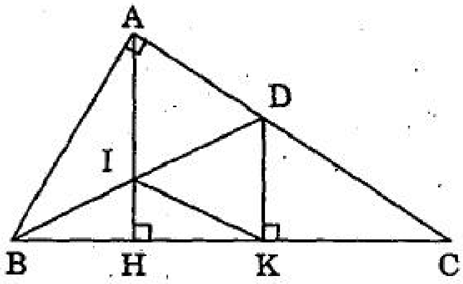
Suy ra $\widehat{AID} = \widehat{ADI}$, do đó tam giác AID cân tại A.

2) Xét ΔIAB và ΔDCB có $\widehat{ABI} = \widehat{CBD}$, $\widehat{IAB} = \widehat{DCB}$ (hai góc cùng phụ với góc ABC)

Do đó $\Delta IAB \backsim \Delta DCB \Rightarrow \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BI}{BD}$

ΔABC có BD là đường phân giác nên $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{DC}$

Do đó $\dfrac{BI}{BD} = \dfrac{AD}{DC} \Rightarrow AD.BC = BI.DC$



3) Vì BD là tia phân giác của góc $\widehat{ABC}$ nên ta có DA = DK.

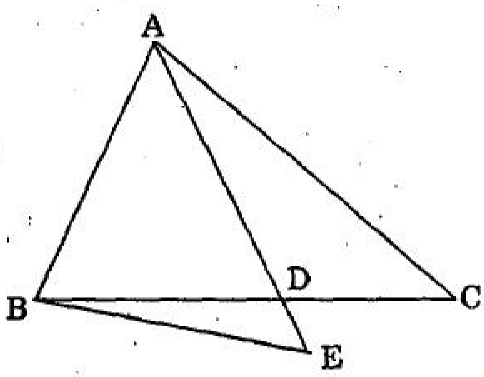
Mà IA = DA nên IA = DK.

Tứ giác ADKI có IA = DK và IA // DK (cùng vuông góc với BC)

Suy ra tứ giác ADKI là hình bình hành.

Mặt khác ta có AD = AI nên hình bình hành ADKI là hình thoi.

Bài 3: *Cách 1:* $\widehat{ADC} > \widehat{ABC}$ (vì $\widehat{ADC}$ là góc ngoài của ΔADB) nên trên tia đối của tia DA có điểm E sao cho $\widehat{ABE} = \widehat{ADC}$



Xét hai tam giác ABE, ADC có:

$\widehat{BAE} = \widehat{DAC}$ (AD là tia phân giác)

và ABE = ADC.

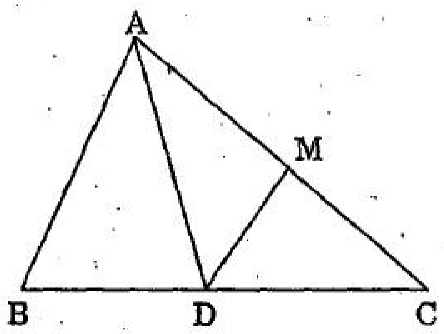
Do đó: $\Delta ABE \backsim \Delta ADC$ (g–g)

Suy ra $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AE}{AC} \Rightarrow AD.AE = AB.AC$

Mà $AE > AD$

Do đó: $AD^2 < AB.AC$

Cách 2: $\widehat{ADC} > \widehat{ABC}$ (Vì $\widehat{ADC}$ là góc ngoài của $\widehat{ADB}$) nên trên tia AC có điểm M sao cho $\widehat{ADM} = \widehat{ABC}$.



Xét ΔABD và ΔADM có $\widehat{BAD} = \widehat{DAM}$ (AD là phân giác), $\widehat{ABD}$ = ADM.

Do đó $\Delta ABD \backsim \Delta ADM$

Suy ra: $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AM}{AD} \Rightarrow AD^2 = AM.AB$

Mà $AM < AC$.

Do đo: $AD^2 < AB.AC$

BỘ ĐỀ 67

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI
QUẬN PHÚ NHUẬN, TPHCM NĂM HỌC 2001 – 2002

Bài 1;

1) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $\dfrac{4x^3 - 6x^2 + 8x}{2x-1}$ có giá trị nguyên.

2) Tìm giá trị của a, b để biểu thức $A = a^2 - 4ab + 5b^2 - 2b + 5$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị đó.

Bài 2: Giải các phương trình sau:

1) $\dfrac{3x-1}{x-1} - \dfrac{2x+5}{x+3} + \dfrac{4}{x^2+2x-3} = 2$

2) $\dfrac{x+1}{2002} + \dfrac{x+2}{2001} + \dfrac{x+3}{2000} = \dfrac{x+4}{1999} + \dfrac{x+5}{1998} + \dfrac{x+6}{1997}$

Bài 3: Trên quãng đường AB dài 72km, hai người khởi hành cùng một lúc từ A để đến B. Vận tốc của người thứ nhất là 12km/h, vận tốc của người thứ hai là 15km/h. Hỏi sau lúc khởi hành bao lâu thì người thứ nhất còn cách B một quãng đường gấp đôi quãng đường từ người thứ hai đến B?

Bài 4: Cho hình vuông ABCD có cạnh là a. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC.

1) Tính theo a diện tích tứ giác AMND.

2) Phân giác của góc $\widehat{CDM}$ cắt BC tại P, chứng minh: DM = AM + CP.

Bài 5: Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^0$, D là một điểm nằm giữa A và C, qua C dựng CE vuông góc với đường thẳng BD tại E. Chứng minh:

1) Tam giác ADE đồng dạng với tam giác BDC.

2) AB.CE + AE.BC = AC.BE

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $\dfrac{4x^3 - 6x^2 + 8x}{2x-1} = \dfrac{4x^3 - 2x^2 - 4x^2 + 2x + 6x - 3 + 3}{2x-1}$

$= \dfrac{2x^2(2x-1) - 2x(2x-1) + 3(2x-1) + 3}{2x-1}$

$= 2x^2 - 2x + 3 + \dfrac{3}{2x-1}$ có giá trị nguyên.

Do đó: $3 \vdots (2x - 1)$

$\Leftrightarrow 2x - 1 \in Ư(3) \Leftrightarrow 2x - 1 \in \{1; -1; 3; -3\}$

$\Leftrightarrow 2x \in \{2; 0; 4; -2\} \Leftrightarrow x \in \{1; 0; 2; -1\}$

2) $A = a^2 - 4ab + 5b^2 - 2b + 5 = (a^2 - 4ab + 4b^2) + (b^2 - 2b + 1) + 4$

$= (a - 2b)^2 + (b - 1)^2 + 4 \geq 4$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (a - 2b)^2 = 0.(b - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow a - 2b = 0$ và $b - 1 = 0$

$\Leftrightarrow a = 2b$ và $b = 1$

$\Leftrightarrow a = 2$ và $b = 1$

Vậy A đạt giá trị nhỏ nhất là 4.

$\Leftrightarrow a = 2$ và $b = 1$.

Bài 2: 1) Ta có: $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

$x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$

$x^2 + 2x - 3 = x^2 - x + 3x - 3 = x(x - 1) + 3(x - 1)$

$= (x - 1)(x + 3) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ và $x \neq -3$

TXĐ: $x \neq 1, x \neq -3$

MTC: $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$

Ta có: $\dfrac{3x-1}{x-1} - \dfrac{2x+5}{x+3} + \dfrac{4}{x^2+2x-3} = 2$

$\Leftrightarrow (3x - 1)(x + 3) - (2x + 5)(x - 1) + 4 = 2(x^2 + 2x - 3)$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 9x - x - 3 - 2x^2 + 2x - 5x + 5 + 4 = 2x^2 + 4x - 6$

$\Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 2x^2 + 4x - 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3x - 12 = 0$

$\Leftrightarrow x(x - 4) + 3(x - 4) = 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-4=0 \\ x+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=4 & \text{(nhận)} \\ x=-3 & \text{(loại vì } -3 \notin \text{TXĐ)} \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình là x = 4.

2) $\frac{x+1}{2002}+\frac{x+2}{2001}+\frac{x+3}{2000}=\frac{x+4}{1999}+\frac{x+5}{1998}+\frac{x+6}{1997}$

$(\frac{x+1}{2002}+1)+(\frac{x+2}{2001}+1)+(\frac{x+3}{2000}+1)$

$=(\frac{x+4}{1999}+1)+(\frac{x+5}{1998}+1)+(\frac{x+6}{1997}+1)$

$\frac{x+2003}{2002}+\frac{x+2003}{2001}+\frac{x+2003}{2000}=\frac{x+2003}{1999}+\frac{x+2003}{1998}+\frac{x+2003}{1997}$

$\frac{x+2003}{2002}+\frac{x+2003}{2001}+\frac{x+2003}{2000}-\frac{x+2003}{1999}-\frac{x+2003}{1998}-\frac{x+2003}{1997}=0$

$(x+2003)(\frac{1}{2002}+\frac{1}{2001}+\frac{1}{2000}-\frac{1}{1999}-\frac{1}{1998}-\frac{1}{1997})=0$

Vì $\frac{1}{2002}<\frac{1}{1999}, \frac{1}{2001}<\frac{1}{1998}, \frac{1}{2000}<\frac{1}{1997}$

Do đó: $\frac{1}{2002}+\frac{1}{2001}+\frac{1}{2000}-\frac{1}{1999}-\frac{1}{1998}-\frac{1}{1997}<0$

Vậy: $x + 2003 = 0 \Leftrightarrow x = -2003$

Nghiệm của phương trình đã cho là –2003.

Bài 3:

Gọi thời gian cần xác định là x (giờ) (điều kiện x > 0)

Quãng đường người thứ nhất đã đi là 12x (km)

Quãng đường người thứ hai đã đi là 15x (km)

Quãng đường người thứ nhất còn cách B là: 72 – 12x (km)

Quãng đường người thứ hai còn cách B là: 72 – 15x (km)

Theo đầu bài ta có phương trình:

$72 - 12x = 2(72 - 15x)$

$72 - 12x = 144 - 30x$

$30x - 12 = 144 - 72$

$18x = 72$

$x = 72 : 18$

$x = 4$

Thỏa điều kiện trên.

Bài 4:

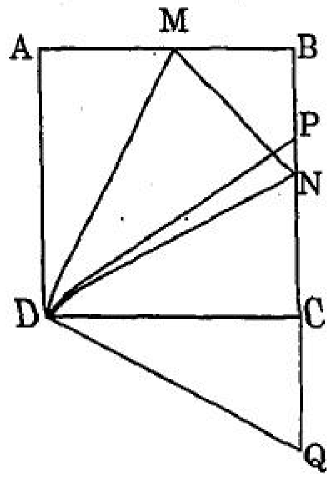
1) Ta có: $S_{AMND} = S_{ABCD} - S_{BMN} - S_{DNC}$

$S_{AMND} = a^2 - \frac{1}{2}BM.BN - \frac{1}{2}DC.NC = a^2 - \frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2} - a.\frac{a}{2}$

$= a^2 - \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{8}$

2) Trên tia đối của tia CB lấy điểm Q sao cho CQ = AM

Dễ dàng chứng minh $\Delta ADM = \Delta CDQ$ (g–c–g)



Cho ta $\widehat{CDQ} = \widehat{MDA} = \alpha$

Suy ra $\widehat{ADP} = \widehat{ADM} + \widehat{MDB} = \alpha + \beta$

$\widehat{PDQ} = \widehat{QDC} + \widehat{CDP} = \alpha + \beta$

Cho ta $\widehat{AQP} = \widehat{PDQ}$

Dễ dàng chứng minh $\widehat{QPD} = \widehat{ADP}$ (so le trong)

Suy ra $\widehat{QPD} = \widehat{PDQ}$ cho ta PQ = QD;

mà DM = DQ ($\Delta ADM = \Delta DCQ$)

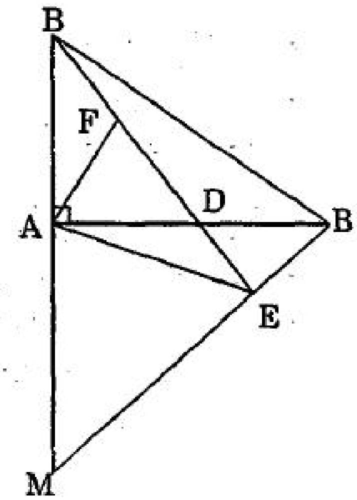
nên DM = PQ = PC + CQ = PC = AM

Bài 5:

1) ΔABD và ΔECD có: $\widehat{BAD} = \widehat{CED} = 90^0$ (gt)

$\widehat{BDA} = \widehat{CDE}$ (hai góc đối đỉnh)

Vậy $\Delta ABD \backsim \Delta ECD$ (g–g)



Cho ta $\frac{DA}{DE} = \frac{DB}{DC}$ hay $\frac{DA}{DB} = \frac{DE}{DC}$

ΔADE và ΔBDC có:

ADE = BDC (hai góc đối đỉnh)

$\frac{DA}{DB} = \frac{DE}{DC}$

Vậy $\Delta ADE \backsim \Delta BDC$ (c–g–c)

2) *Cách 1:* Gọi M là giao điểm của AB và CE

Xét hai tam giác MBE và MCA

Ta có: M chung, $\widehat{MEB} = \widehat{MAC} = 90^0$

Vậy $\Delta MBE \backsim \Delta MCA$ (g–g)

Cho ta: $\frac{MB}{ME} = \frac{MC}{MA}$

Xét hai tam giác MAE và tam giác MCB ta có: $\frac{MB}{ME} = \frac{MC}{MA}$, M chung.

Vậy $\Delta MAE = \Delta MBC$ mà $\widehat{MEA} + \widehat{AEB} = 90^0$, $\widehat{MBC} + \widehat{BAC} = 90^0$

Xét hai tam giác ABF và ACE, ta có: $\widehat{BAF} = \widehat{CAE}$; $\widehat{ABF} = \widehat{ACE}$ ($\Delta MBE \backsim \Delta MCA$)

Vậy $\Delta ABF \backsim \Delta ACE$ (g–g)

Cho ta: $\frac{AB}{AC} = \frac{BF}{CE}$ suy ra AB . CE = AC . BF (1)

Xét hai tam giác AEF và ABC. Ta có:

$\widehat{EAF} = \widehat{BAC} = 90^0$, $\widehat{AEF} = \widehat{ACB}$

Vậy $\Delta AEF \backsim \Delta ACB$ (g–g)

Cho ta $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{EF}{BC}$ suy ra AE.BC = AC.EF (2)

Cộng vế theo vế (1) và (2) ta được:

AB.CE + AE.BC = AC.BF + AC.EF

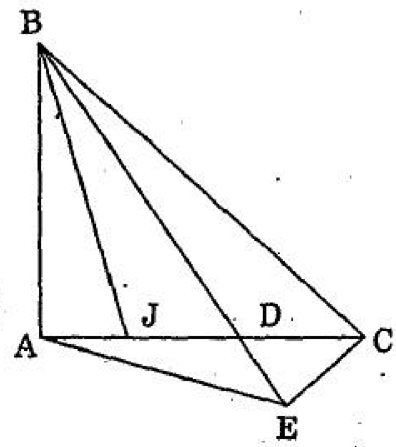
AB.CE + AE.BC = AC.(BF + EF) = AC.BE

Cách 2: Gọi J là điểm trên đoạn thẳng AC sao cho $\widehat{ABJ} = \widehat{EBC}$

Xét ΔABJ và ΔEBC có: $\widehat{ABJ} = \widehat{EBC}$. $\widehat{JAB} = \widehat{CEB}$ $(= 90^0)$

Do đó $\Delta ABJ \backsim \Delta EBC$

Suy ra $\dfrac{AB}{BE} = \dfrac{AJ}{CE}$



$\Rightarrow$ AB.CE = BE.AJ (1)

ta có: $\widehat{ABJ} + \widehat{JBE} = \widehat{EBC} + \widehat{JBE}$

(vì $\widehat{ABJ} = \widehat{EBC}$)

suy ra $\widehat{ABE} = \widehat{JBC}$

Xét ΔABE và ΔJBC có:

$\widehat{ABE} = \widehat{JBC}$, $\widehat{AEB}$ = JCB (vì $\Delta ADE \backsim \Delta BDC$)

Do đó: $\Delta ABE \backsim \Delta JBC$

Suy ra: $\dfrac{AE}{JC} = \dfrac{BE}{BC}$

Suy ra: AE.BC = BE.JC (2)

Từ (1) và (2) có AB.CE + AE.BC = BE.AJ + BE.JC = BE (AJ + JC) = BE .AC

BỘ ĐỀ 68

ĐỀ THI TUYỂN CHỌN HỌC SINH GIỎI TRƯỜNG THCS HOA LƯ QUẬN 9, TPHCM – NĂM HỌC 2001 – 2002

Bài 1: Tính giá trị của biểu thức $A = \dfrac{x - y}{x + y}$ biết rằng:

$x^2 - 2y^2 = xy$ $(y \neq 0, x + y \neq 0)$

Bài 2: Giải phương trình: $\left|2x - |2x - 1|\right| = -m^2x$ với m là tham số.

Bài 3: Cho a, b là hai số thỏa mãn: $2a^2 + \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{b^2}{4} = 4$.

Chứng minh $ab \geq -2$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 4:

1) Cho các số a, b, c $\in [0,1]$.

Chứng minh rằng $a + b^2 + c^3 - ab - bc - ca \le 1$

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

Bài 5: Cho tam giác ABC, gọi D là điểm thuộc cạnh BC. Chứng minh rằng $AB^2.CD + AC^2.BD - AD^2.BC = CD.BD.BC$ (hệ thức Stewart)

– Nếu D là trung điểm BC, hãy tìm hệ thức liên hệ giữa trung tuyến và các cạnh của tam giác.

– Nếu AD là phân giác BAC, hãy tìm hệ thức liên hệ giữa phân giác và các cạnh của tam giác.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: với $y \ne 0$; $x + y \ne 0$

Ta có: $x^2 - 2y^2 = xy \Leftrightarrow x^2 - xy - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + xy - 2xy - 2y^2 = 0$

$\Leftrightarrow x(x + y) - 2y(x + y) = 0 \Leftrightarrow (x + y)(x - 2y) = 0$

$\Leftrightarrow x = 2y$ (vì $x + y \ne 0$)

Do đó: $A = \dfrac{2x - y}{2x + y} = \dfrac{y}{3y} = \dfrac{1}{3}$ (do $y \ne 0$)

Bài 2: Xét phương trình: $\big|2x - |2x - 1|\big| = -m^2x$ (1)

– Nếu m = 0: phương trình (1) có dạng $\big|2x - |2x - 1|\big| = 0$

$\Leftrightarrow 2x - |2x - 1| = 0 \Leftrightarrow |2x - 1| = 2x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} 2x - 1 = 2x \\ 2x - 1 = -2x \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} 0x = 1 \text{ (vô nghiệm)} \\ x = \dfrac{1}{4} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

– Xét trường hợp $m \ne 0$

Do $\big|2x - |2x - 1|\big| \ge 0$ nên $-m^2x \ge 0$ mà $m^2 > 0$ (vì $m \ne 0$)

– Xét phương trình $(4 - m^2)x = 1$

Nếu $m = \pm 2$: phương trình có dạng $0x = -1$, phương trình vô nghiệm

Nếu $m \ne \pm 2$: phương trình có nghiệm $x = \dfrac{1}{4 - m^2}$

Để $x = \dfrac{1}{4 - m^2}$ là nghiệm của phương trình (1) thì:

$x \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4 - m^2} \le 0 \Leftrightarrow 4 - m^2 < 0 \Leftrightarrow m^2 > 4 \Leftrightarrow |m| > 2$

Kết luận:

$m = 0$: phương trình có nghiệm $x = \dfrac{1}{4}$

$|m| > 2$: phương trình có nghiệm $x = \dfrac{1}{4 - m^2}$

$m = \pm 2$: phương trình vô nghiệm

Bài 3: Từ $2a^2 + \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{b^2}{4} = 4 \Rightarrow \left(a^2 + \dfrac{1}{a^2} - 2\right) + \left(a^2 + ab + \dfrac{b^2}{4}\right) = ab + 2$

$\Rightarrow ab + 2 = \left(a - \dfrac{1}{a}\right)^2 + \left(a + \dfrac{b}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow ab \geq -2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{a} \\ a + \dfrac{b}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b = -2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$

Bài 4:

1) Do $a, b, c \in [0,1] \Rightarrow (1 - a)(1 - b)(1 - c) \geq 0$

$\Rightarrow 1 + ab + bc + ac - a - b - c - abc \geq 0$

$\Rightarrow a + b + c - ab - bc - ax \leq 1 - abc \leq 1$ (do $abc \geq 0$)

Mặt khác: $0 \leq b \leq 1 \Rightarrow b^2 \leq b$, $0 \leq c \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} c^2 \leq c \\ c^3 \leq c^2 \end{cases} \Rightarrow c^3 \leq c$

Vậy $a + b^2 + c^3 - ab - bc - ac \leq a + b + c - ab - bc - ac \leq 1$

2) ***Nhận xét:*** $A \geq 0$ thì $\min(A^2) = (\min A)^2$

Ta có:

$P = x^4 + 2x^3 + 2x + 1$

$= x^4 + 2x^3 + x^2 + 2(x^2 + x) = (x^2 + x)^2 + 2(x^2 + x) + 1 = (x^2 + x + 1)^2$

Vì $x^2 + x + \dfrac{1}{2} = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} \geq \dfrac{3}{4}$

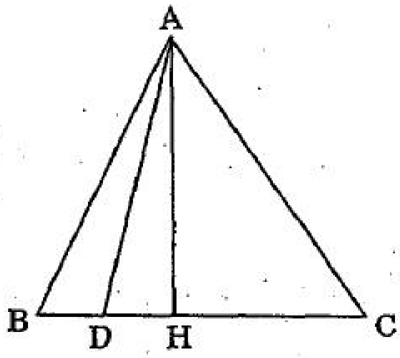
Suy ra: $\min (x^2 + x + 1) = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

Vậy $P = \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{9}{16} \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

Bài 5:

Kẻ $AH \perp BC$. Không mất tính tổng quát, giả sử $D \in [BH]$

Áp dụng định lý Pytago đối với các tam giác vuông ABH, ACH và ADH có:



$AB^2 = BH^2 + AH^2 = (BD + DH)^2 + AH^2$

$AC^2 = CH^2 + AH^2 = (CD - DH)^2 + AH^2$

$AD^2 = AH^2 + DH^2$

Ta có: $AB^2.CD + AC^2.BD - AD^2.BC$

$= (BD + DH)^2.CD + AH^2.CD + (CD - DH)^2.BD$

$+ AH^2BD - AH^2BC - DH^2.BC$

$= BD^2.CD + DH^2.CD + 2BD.DH.CD + CD^2.BD - 2CD.DH.BD$
$+ DH^2.BD + AH^2(CD + BD) - AH^2.BC - DH^2.BC$
$= BD^2.CD + DH^2(CD + BD) + CD^2.BD - DH^2.BC$
$= BD^2.CD + CD^2.BD = BD.CD(CD + BD) = BD.CD.BC$

Nếu AD là đường trung tuyến thì $BD = DC = \frac{BC}{2}$. Thay vào hệ thức trên ta được: $AD^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4}$

Nếu AD là đường phân giác trong thì:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{AB}{AB + AC} \Rightarrow BD = \frac{AB.BC}{AB + AC}, CD = \frac{AC.BC}{AB + AC}$$

Thay vào hệ thức trên ta được: $AD^2 = \frac{AB.AC[(AB + AC)^2 - BC^2]}{(AB + AC)^2}$

BỘ ĐỀ 69

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN 9, TPHCM – NĂM HỌC 2001 – 2002

Bài 1:

1) Phân tích thành nhân tử đa thức sau: $x^2 - 10x + 16$

2) Tìm giá trị nguyên của x để A ⋮ B. Biết $A = 10x^2 - 7x - 5$ và $B = 2x - 3$

Bài 2:

1) Giải bất phương trình sau: $m^2x + 1 < m - x$

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của: $A = \frac{5x^2 - 4x + 4}{x^2}$ với $x \neq 0$

3) Tìm giá trị lớn nhất của: $B = \frac{4x + 1}{x^2 + 5}$

Bài 3: Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD và DA.

1) Chứng minh: $NQ \leq \frac{AB + DC}{2}$

2) Trong trường hợp $NQ = \frac{AB + DC}{2}$ thì tứ giác ABCD là hình gì ?

Trong trường hợp này, vẽ đường thẳng song song với AB cắt AD tại E, cắt MP tại O cắt BC tại F. Chứng minh O là trung điểm của EF.

Bài 4: Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh BC lấy điểm M bất kỳ. Gọi P là giao điểm của hai đường thẳng AM và CD.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AP^2}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $x^2 - 10x + 16 = x^2 - 2x - 8x + 16 = x(x-2) - 8(x-2) = (x-2)(x-8)$

2) Xét: $\dfrac{A}{B} = \dfrac{10x^2 - 7x - 5}{2x-3} = \dfrac{5x(2x-3) + 8x - 5}{2x-3}$

$$= 5x + \frac{4(2x-3)+7}{2x-3} = 5x + 4 + \frac{7}{2x-3}$$

Với $x \in Z$ thì $A \vdots B$ khi $\dfrac{7}{2x-3} \in Z \Rightarrow 7 \vdots (2x-3)$

$2x-3$	7	-7	1	-1
$2x$	10	-4	4	2
x	5	-2	2	1

Vậy $x = 5, -2, 2, -1$ thì $A \vdots B$.

Bài 2:

1) $m^2x + 1 < m - x \Leftrightarrow (m^2+1)x < m - 1$

$\Leftrightarrow x < \dfrac{m-1}{m^2+1}$ (vì $m^2 + 1 > 0$)

2) Ta có: $A = \dfrac{5x^2 - 4x + 4}{x^2} = \dfrac{4x^2 + x^2 - 4x + 4}{x^2} = 4 + \dfrac{(x-2)^2}{x^2} \geq 4 \ \forall x \neq 0$

Vì $\begin{cases} (x-2)^2 \geq 0 \\ x^2 > 0 \, (\text{do } x \neq 0) \end{cases} \Rightarrow \dfrac{(x-2)^2}{x^2} \geq 0$

$A = 4 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy min $A = 4$

3) $B = \dfrac{4x+1}{x^2+5} = \dfrac{(x^2+5) - x^2 + 4x - 4}{x^2+5} = 1 - \dfrac{(x-2)^2}{x^2+5} \leq 1 \ \forall x$

Vì $(x-2)^2 \geq 0$ và $x^2 + 5 > 0 \Rightarrow -\dfrac{(x-2)^2}{x^2+5} \leq 0 \ \forall x$

$B = 1 \Leftrightarrow x = 2$. Vậy max $B = 1$.

Bài 3:

1) Xem lời giải bài 5, bộ đề 71

2) Do EF // AB và MA = MB

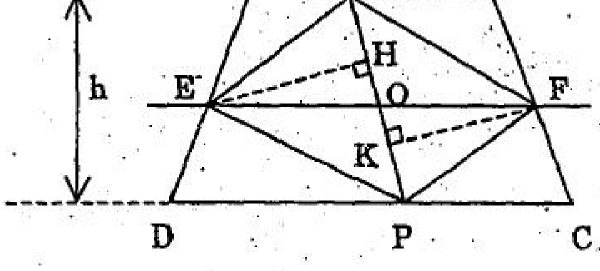
$\Rightarrow S_{AME} = S_{BMF}$, EF // CD và PD = PC

$\Rightarrow S_{PED} = S_{CPF}$

Ta có:

$S_{AMPD} = \dfrac{AM + DP}{2}h$

$= \dfrac{MB + PC}{2}h = S_{MBCP}$



$\Rightarrow S_{EMP} = S_{MFP} \Rightarrow \frac{1}{2}EH.MP = \frac{1}{2}FK.MP \Rightarrow EH = FK$

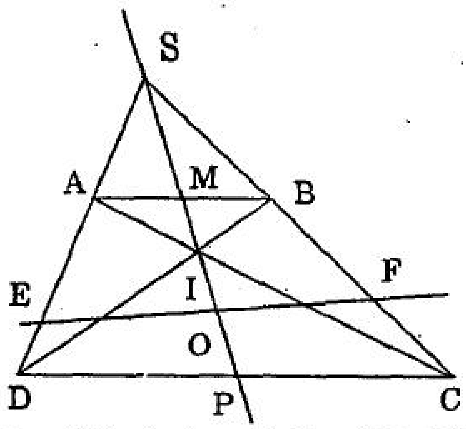
Vậy: $\Delta OEH = \Delta OFK$ ($EH = FK$, $\widehat{H} = \widehat{K} = 90^0$, $\widehat{OEH} = \widehat{OFK}$)

$\Rightarrow OE = OF$

nghĩa là O trung điểm EF.

Cách khác: Dùng bổ đề hình thang

"Đường thẳng nối giao điểm các đường chéo của hình thang với giao điểm của các cạnh bên kéo dài sẽ chia đáy hình thang thành hai phần bằng nhau".



Thật vậy, do AB // CD, ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{AM}{DP} = \dfrac{SM}{SP} = \dfrac{MB}{PC} \\ \dfrac{AM}{PC} = \dfrac{MI}{IP} = \dfrac{MP}{DP} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{AM^2}{DP.PC} = \frac{MB^2}{DP.PC} \Rightarrow AM^2 = MB^2$$

Vậy AM = MB và PD = PC

Áp dụng bổ đề hình thang, nếu gọi S là giao điểm hai cạnh bên AD, BC kéo dài và và $AC \cap BD = \{I\}$ thì S, M, I, P thẳng hàng.

Xét hình thang ABFE có AB // EF, M là trung điểm AB, S là giao điểm hai cạnh bên EA, FB kéo dài. SM đi qua trung điểm của EF, nghĩa là O là trung điểm EF.

Bài 4: Xem lời giải bài 4, bộ đề 71.

BỘ ĐỀ 70

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI TRƯỜNG THCS NGUYỄN DU – QUẬN 1, TPHCM – NĂM HỌC 2001 – 2002

Bài 1: Cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Tính $\frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2}$

Bài 2: Giải phương trình:

1) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ 2) $\frac{x+3}{x-4} + \frac{x-1}{x-2} = \frac{2}{6x-8-x^2}$

Bài 3:

1) Chứng minh bất đẳng thức: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$

2) Cho a, b, c là ba số dương. Chứng minh:

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Bài 4: Cho tam giác ABC có trung tuyến AD, và BE vuông góc với nhau tại O. Cho AC = b và BC = a. Tính diện tích hình vuông có cạnh là AB.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: Ta có: $a + b + c = 0$ thì

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3 = -c^3 - 3ab(-c) + c^3 = 3abc$$

(do $a + b + c = 0$ nên $a + b = -c$)

Đặt $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$, $c = \frac{1}{z}$ $(x, y, z \neq 0)$, ta có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0.$

Suy ra: $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{3}{xyz}$

Khi ấy: $\frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2} = \frac{xyz}{x^3} + \frac{xyz}{y^3} + \frac{xyz}{z^3}$

$$= xyz\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{xyz}{z^3}\right) = xyz\frac{3}{xyz} = 3$$

Bài 2:

1) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x + 2) - (x + 2) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Kết luận $S = \{\pm 1, -2\}$

2) ***Nhận xét:*** $6x - 8 - x^2 = -(x^2 - 6x + 8) = -(x - 4)(x - 2)$

Điều kiện: $x \neq 4$, $x \neq 2$

Phương trình đã cho được viết:

$(x + 3)(x - 2) + (x - 1)(x - 4) = -2 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 + x^2 - 5x + 4 + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0\text{(nhận)} \\ x = 2\text{(loại)} \end{array}\right.$

Kết luận: $S = \{0\}$

Bài 3:

1) Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ac$

$\Leftrightarrow (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ac + a^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$ (đúng)

Vì $(a - b)^2 \geq 0$, $(b - c)^2 \geq 0$ và $(c - a)^2 \geq 0$ $\forall$ a, b, c

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

2) Với $x, y > 0$ ta có bất đẳng thức $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

Thật vậy: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} \geq x^2 + y^2 \geq 2xy$ (do $x, y > 0$)

$\Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$ (đúng)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

Với a, b, c > 0, áp dụng bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}=\frac{1}{c}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\geq\frac{2}{c}$$

$$\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}=\frac{1}{a}\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\geq\frac{2}{a}$$

$$\frac{a}{bc}+\frac{c}{ab}=\frac{1}{b}\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)\geq\frac{2}{b}$$

Cộng vế với các bất đẳng thức cùng chiều ta được:

$$2\left(\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}\right)\geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

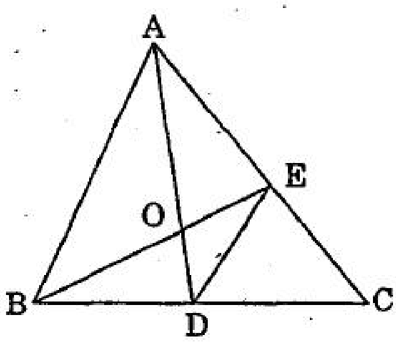
Suy ra: $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}=\frac{c}{ab}\geq\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Bài 4: Vì D, E là trung điểm BC, AC nên O là trọng tâm của tam giác ABC.

Suy ra OB = 2OE và OA = 2OD

Áp dụng định lý Py–ta–go có:



$$\begin{cases} OA^2+OE^2=AE^2=\dfrac{b^2}{4} \\ OB^2+OD^2=BD^2=\dfrac{a^2}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (OA^2+OB^2)+(OE^2+OD^2)=\frac{a^2+b^2}{4}$$

$$\Rightarrow AB^2+\frac{OB^2+OA^2}{4}=\frac{a^2+b^2}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4}AB^2=\frac{a^2+b^2}{4} \Rightarrow AB=\frac{a^2+b^2}{5}$$

Vậy diện tích hình vuông cạnh AB là: $\frac{a^2+b^2}{5}$ (đvdt)

BỘ ĐỀ 71

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN 1, TPHCM – NĂM HỌC 2001 – 2002

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử

1) $4x^2-9y^2+4x-6y$ 2) $x^2-x-2001.2002$

Bài 2: Cho ba số a, b, c thỏa mãn $a+b+c=0$

Chứng minh rằng $a^3+a^2c-abc+b^2c+b^3=0$

Bài 3: Chứng minh: $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1\geq 0$ với mọi giá trị của x.

Bài 4: Rút gọn và tính giá trị của biểu thức: $\frac{x^2+4x+4}{x^3+2x^2-4x-8}$ với $x = 2002$

Bài 5:

1) Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F là trung điểm của AD và BC. Tìm điều kiện của tứ giác để $EF = \dfrac{AB + CD}{2}$

2) Gọi M, N, P và Q theo thứ tự là trung điểm của DF, EB, AF và EC. Chứng minh tứ giác MNPQ là hình bình hành.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $4x^2 - 9y^2 + 4x - 6y = (2x - 3y)(2x + 3y) + 2(2x - 3y)$
$= (2x - 3y)(2x + 3y + 2)$

2) $x^2 - x - 2001.2002 = x^2 - 2002x + 2001x - 2001.2002$
$= x(x - 2002) + 2001(x - 2002) = (x + 2001)(x - 2002)$

Cách khác:

$x^2 - x - 2001.2002 = x^2 - x - (2002 - 1)2002$
$= (x^2 - 2002^2) - (x - 2002) = (x - 2002)(x + 2002) - (x - 2002)$
$= (x - 2002)(x + 2001)$

Bài 2: Ta có:

$a^3 + a^2c - abc + b^2c + b^3 = a^3 + b^3 + c(a^2 - ab + b^2)$
$= (a + b)(a^2 - ab + b^2) + c(a^2 - ab + b^2)$
$= (a^2 - ab + b^2)(a + b + c) = 0$ (do $a + b + c = 0$)

Bài 3:

$(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 1 = (x + 1)(x + 4)(x + 2)(x + 3) + 1$
$= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) + 1$
$= (x^2 + 5x + 5 - 1)(x^2 + 5x + 5 + 1) + 1 = (x^2 + 5x + 5)^2 - 1 + 1$
$= (x^2 + 5x + 5)^2 \geq 0 \ \forall x$

Bài 4: Với $x \neq \pm 2$, ta có:

$$A = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8} = \frac{(x+2)^2}{x^2(x+2) - 4(x+2)}$$

$$= \frac{(x+2)^2}{(x^2 - 4)(x+2)} = \frac{(x+2)^2}{(x-2)(x+2)^2} = \frac{1}{x-2}$$

Tại $x = 2002$ thì $A = \dfrac{1}{2000}$

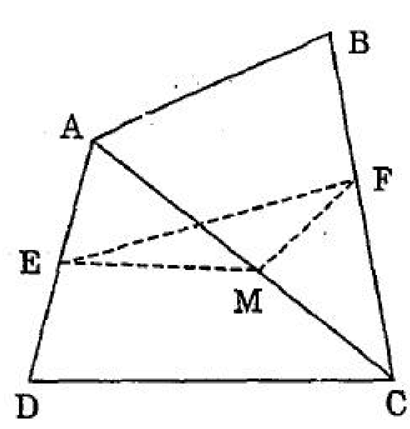
Bài 5:

1) Gọi M là trung điểm AC, do E, F lần lượt là trung điểm AD, BC $\Rightarrow$ MF, ME là đường trung bình của tam giác ABC và tam giác CAD, nên $ME \parallel DC$, $ME = \dfrac{DC}{2}$ và $MF \parallel AB$, $MF = \dfrac{AB}{2}$

Suy ra: $ME + MF = \dfrac{AB + CD}{2}$

Mà $EF \le ME + MF \Rightarrow EF \le \frac{AB + CD}{2}$

Theo giả thiết $EF = \frac{AB + CD}{2}$



$\Rightarrow$ E, M, F thẳng hàng.

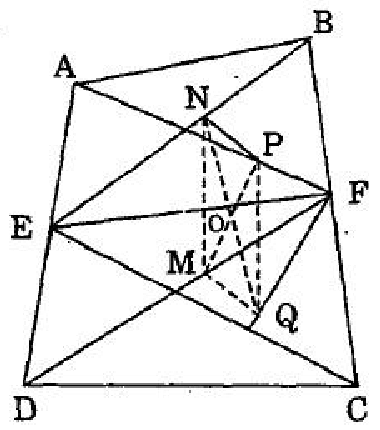
AB, và CD cùng song song với đường thẳng ấy nên AB // CD. Vậy tứ giác ABCD là hình thang.

2) Ta có E, P là trung điểm AD, AF nên EP là đường trung bình của tam giác ADF.

$\Rightarrow EP // DF$ và $EP = \frac{DF}{2} = MF$ (vì K là trung điểm DF)

Vậy EPFM là hình bình hành.

Lý luận tương tự, ENFQ là hình bình hành.



EPFM là hình bình hành $\Rightarrow$ MP và EF cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

ENFQ là hình bình hành $\Rightarrow$ NQ và EF cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Vậy MP, EF và NQ có chung trung điểm, hay MP và NQ cắt nhau tại trung điểm mỗi đường. Do đó MNPQ là hình bình hành.

BỘ ĐỀ 72

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TRUYỀN THỐNG 26/3
QUẬN 10, TPHCM NĂM HỌC 2001 – 2002

Bài 1: Giải phương trình

1) $x + \frac{1}{x} = 0$ 2) $x + \frac{1}{x} = 2$

Bài 2: Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

$A = 3x^2 + 2x + 1$ $B = x - x^2$

Bài 3:

1) Chứng minh rằng: $(a^3 + 11a - 6a^2 - 6) \vdots 6$ với $a \in Z$

2) Chứng minh rằng tổng lập phương ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 9.

Bài 4: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

1) $a + b \ge \frac{12ab}{9 + ab}$ với $a > 0; b > 0$

2) $(a + b - c)(b + c - c) \le abc$ với a, b, c là số đo ba cạnh của một tam giác.

Bài 5: Cho tam giác ABC cân tại A, vẽ đường phân giác AH. Gọi I là trung điểm của AB, đường vuông góc với AB ở I cắt AH tại O. Dựng M là điểm sao cho O là trung điểm AM.

1) Chứng minh tứ giác IOMB là hình thang vuông.

2) Gọi K là trung điểm OM. Chứng minh tam giác IKB cân.

3) Chứng minh tứ giác AIKC có tổng các góc đối bằng 180^0.

Bài 6: Cho tam giác ABC nhọn, kẻ ba đường cao AD, BE và CF.

Chứng minh:

1) $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$ 2) EB là phân giác $\widehat{FED}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $x + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing$. Phương trình vô nghiệm

2) $x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 + 1 = 2x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 + 1 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

Bài 2:

Ta có: $A = 3x^2 + 2x + 1 = 3(x^2 + 2\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}) + \frac{2}{3} = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2}{3} \geq \frac{2}{3}$

Vì $3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0\ \forall x$

$A = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$. Vậy min $A = \frac{2}{3}$

$B = x - x^2 = -\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}, \forall x$

Vì $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0, \forall x$

$B = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Vậy max $B = \frac{1}{4}$

Bài 3: 1) Với $a \in Z$, ta có:

$a^3 + 11a - 6a^2 = a^3 - a^2 - 5a^2 + 5a + 6a - 6$

$= a^2(a - 1) - 5a(a - 1) + 6(a - 1) = (a - 1)(a^2 - 5a + 6)$

$= (a - 1)[(a^2 - 4) + (10 - 5a)] = (a - 1)[(a - 2)(a + 2) - 5(a - 2)]$

$= (a - 1)(a - 2)(a - 3) \vdots 6$ với $a \in Z$.

Vì $a \in Z$ do đó $(a - 1)$, $(a - 2)$ và $(a - 3)$ là ba số nguyên liên tiếp.

Trong hai số nguyên liên tiếp, có một số chia hết cho 2; trong ba số nguyên liên tiếp có một số chia hết cho 3 mà (2,3) = 1; 2; 3 = 6, nên tích ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 6.

2) *Cách 1:* Xét ba số nguyên liên tiếp: n, n + 1 và n + 2 $n \in Z$

Ta có:

$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + n^3 + 6n^2 + 12n + 8$

$= 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9 = 3n^3 - 3n + 9(n^2 + 2n + 1)$

$= 3n(n-1)(n+1) + 9(n+1)^2 \vdots 9$

Vì $\begin{cases} 9(n+1)^2 \vdots 9, n \in Z \\ 3(n-1)n(n+1) \vdots 9 \end{cases} \Rightarrow 3n(n-1)(n+1) + 9(n+1)^2 \vdots 9$

Cách 2: Gọi ba số nguyên liên tiếp là n – 1, n, n + 1

Ta có: $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$

$= n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1$

$= 3n^3 + 6n = 3n^3 - 3n + 9n = 3n(n^2 - 1) + 9n$

$= 3n(n+1)(n-1) + 9n \vdots 9$ (vì $n(n+1)(n-1) \vdots 9$ và $9n \vdots 9$)

Bài 4: 1) Với a, b > 0 ta có:

$a + b \geq \dfrac{12ab}{9+ab} \Leftrightarrow (a+b)(9+ab) \geq 12ab$ (do $9 + ab \geq 0$)

$\Leftrightarrow 9a + 9b + a^2b + ab^2 - 12ab \geq 0$

$\Leftrightarrow (a^2b - 6ab + 9b) + (ab^2 - 6ab + 9a) \geq 0 \Leftrightarrow b(a-3)^2 + a(b-3)^2 \geq 0$

Vì $b(a-3)^2 \geq$ và $a(b-3)^2 \geq 0$, với a, b > 0

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = 3$

2) *Cách 1:* Với a, b, c là số đo ba cạnh tam giác, ta có:

$a^2 \geq a^2 - (b-c)^2 = (a+b+c)(a-b+c) > 0$ (vì $a > |b-c|$)

$b^2 \geq b^2 - (c-a)^2 = (b+c-a)(b-c+a) > 0$

$c^2 \geq c^2 - (a-b)^2 = (c+a-b)(c-a+b) > 0$

Nhân vế với vế các bất đẳng thức dương cùng chiều ta được:

$(abc)^2 \geq (a+b-c)^2(a+c-b)^2(b+c-a)^2$

$\Rightarrow abc \geq (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$

(vì a, b, c là số đo ba cạnh tam giác nên a + b > c, b + c > a và a + c > b)

Cách 2: Đặt $x = a + b - c > 0$, $y = a + c - b > 0$ và $z = b + c - a > 0$

Suy ra: $a = \dfrac{x+y}{2}$; $b = \dfrac{x+z}{2}$; $c = \dfrac{y+z}{2}$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$xyz \leq \dfrac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8} \Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$ (đúng)

Ta có: $\begin{cases} (x+y)^2 \geq 4xy > 0 \\ (y+z)^2 \geq 4yz > 0 \\ (x+z)^2 \geq 4xz > 0 \end{cases} \Rightarrow (x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2 \geq (8xyz)^2$

Do đó: $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$

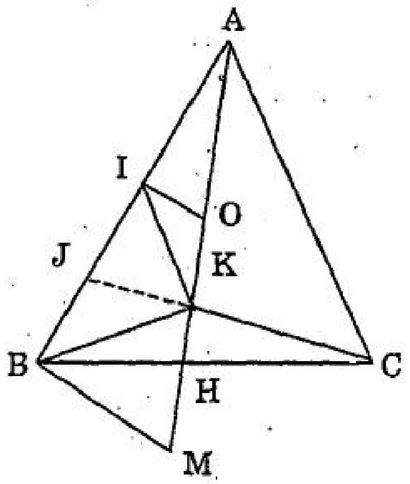
Bài 5:

1) Ta có: MO = OA, IA = IB (gt) nên IO là đường trung bình của tam giác ABM $\Rightarrow$ OI // MB

Mà AB $\perp$ OI (gt) nên AB $\perp$ MB

Tứ giác CIBM có: OI // MB và IB $\perp$ OI

Suy ra OIBM là hình thang vuông.



2) Gọi J là trung điểm BI suy ra JK là đường trung bình của hình thang OIBM

$\Rightarrow$ JK // OI mà BI $\perp$ OI nên JK $\perp$ BI.

Vậy KJ là trung trực BI, K $\in$ KJ

$\Rightarrow$ KI = KB $\Rightarrow$ ΔKBI cân tại K

3) Do ΔBKI cân tại K nên $\widehat{KBI} = \widehat{BIK}$.

Trong ΔABC cân tại A, AH là đường phân giác, suy ra AH là trục đối xứng.

$\Rightarrow \widehat{ABK} = \widehat{ACK}$

Vậy $\widehat{BIK} = \widehat{ACK}$

Ta có: $\widehat{AIK} + \widehat{ACK} = \widehat{AIK} + \widehat{BIK} = 180^0$ (hai góc kề bù)

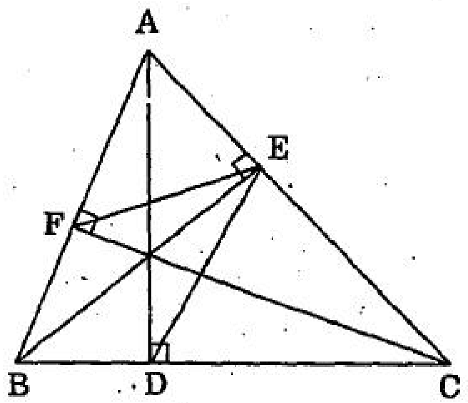
$\Rightarrow \widehat{IAC} + \widehat{IKC} = 180^0$

Bài 6:

1) Xét ΔAEB và ΔAFC có $\widehat{A}$ chung, $\widehat{AEB} = \widehat{AFE} = 90^0$

$\Rightarrow \Delta AEB \backsim \Delta AFC$ (g–g)

$\Rightarrow \dfrac{AE}{AF} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$



Xét ΔAEF và ΔABC có:

$\widehat{A}$ chung và $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$

(chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta AEF \backsim \Delta ABC$ (g–g)

$\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ABC}$

2) Lý luận tương tự ta có:

$\Delta CED \backsim \Delta CBA$ (g–g) $\Rightarrow \widehat{CED} = \widehat{ABC}$

Suy ra $\widehat{AEF} = \widehat{CED} = \widehat{ABC}$

Ta có: $\widehat{FEB} = 90^0 - \widehat{AEF} = 90^0 - \widehat{CED} = \widehat{BED}$

Mà tia EB nằm giữa hai tia EF, ED $\Rightarrow$ EB phân giác $\widehat{FED}$.

BỘ ĐỀ 73

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN 8 TRƯỜNG THCS HOÀNG VĂN THỤ, QUẬN 10, TPHCM – NĂM HỌC 2001 – 2002

Bài 1: Giải phương trình và bất phương trình sau:

1) $|x-1| + |x-5| = 4$ 2) $\dfrac{(x-1)(x-3)}{x^2+2x+3} \le 1$

Bài 2: Chứng minh rằng:

1) $x^2 + 4y^2 + z^2 + 14 \ge 2x + 12y + 4z$ với mọi x, y, z

2) Với a, b, c là ba số dương: $\dfrac{bc}{a} + \dfrac{ac}{b} + \dfrac{ab}{c} \ge a + b + c$

Bài 3:

1) Tìm giá trị nhỏ nhất của $y = x^2 + x + 3$

2) Tìm giá trị lớn nhất của $y = -\big||x| - 1\big| + 5$

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông tại A có độ dài cạnh huyền bằng 2 (đơn vị). Gọi AM, BN và CP là trung tuyến của tam giác.

1) Tính: $AM^2 + BN^2 + CP^2$

2) Chứng minh rằng: $4 < AM + BN + CP < 5$

Bài 5: Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia BA và CA lấy hai điểm di động M và N sao cho BM = CN. Gọi I là trung điểm của MN. Điểm I di động trên đường nào?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: *Cách 1:* Áp dụng bất đẳng thức: $|A| + |B| \ge |A + B|$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A.B \ge 0$

Thật vậy, do cả hai vế không âm bình phương cả hai vế ta được:

$(|A| + |B|)^2 \ge |A+B|^2 \Leftrightarrow A^2 + 2|AB| + B^2 \ge A^2 + 2AB + B^2 \Leftrightarrow |AB| \ge AB$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow A.B \ge 0$

Áp dụng ta được $|x-1| + |x-5| = |x-1| + |5-x| \ge |x-1+5-x| = 4$ (1)

Để có đẳng thức (1) $\Leftrightarrow (x-1)(5-x) \ge 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \ge 0 \\ 5-x \ge 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x-1 \le 0 \\ 5-x \le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 1 \le x \le 5$ hoặc $\begin{cases} x \le 1 \text{(vô nghiệm - loại)} \\ x \ge 5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 1 \le x \le 5$

Vậy nghiệm của phương trình là $1 \le x \le 5$

Cách 2: Xét phương trình: $|x-1| + |x-5| = 4$ (1)

Xét các khả năng sau:

a/ Với $x < 1$: phương trình (1)

$\Leftrightarrow 1 - x + 5 - x = 4 \Leftrightarrow -2x + 6 = 4 \Leftrightarrow x = 1$ (loại)

b/ Với $1 \le x \le 5$: phương trình (1)

$\Leftrightarrow 1 - x + 5 - 4 - 4 \Leftrightarrow 0x + 4 = 4 \Leftrightarrow 0x = 0$, x tùy ý thỏa $1 \le x \le 5$.

c/ Với $x > 5$: phương trình (1)

$\Leftrightarrow x - 1 + x - 5 = 4 \Leftrightarrow 2x - 6 = 4 \Leftrightarrow x = 5$ (loại)

Kết luận: Nghiệm của phương trình là $1 \le x \le 5$

Cách 3: Vận dụng $|A| \ge A$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow A \ge 0$

Ta có $|x-1| + |x-5| = |x-1| + |5-x| \ge x - 1 + 5 - x = 4$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \ge 0 \\ 5-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ x \ge 5 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le x \le 5$

Nghiệm của phương trình là $1 \le x \le 5$

2) ***Nhận xét:*** $x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2 > 0$ với mọi x

Ta có: $\dfrac{(x-1)(x-3)}{x^2+2x+3} \le 1$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 3) \le x^2 + 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \le x^2 + 2x + 3$

$\Leftrightarrow 6x \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 0.$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \ge 0$

Bài 2: 1) Với mọi x, y, z ta có:

$x^2 + 4y^2 + z^2 + 14 \ge 2x + 12y + 4z$

$\Leftrightarrow x^2 + 4y^2 + z^2 - 2x - 12y - 4z + 14 \ge 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (4y^2 - 12y + 9) + (z^2 - 4z + 4) \ge 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (2y - 3)^2 + (z - 2)^2 \ge$ (đúng)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ 2y-3=0 \\ z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{3}{2} \\ z=2 \end{cases}$

2) *Cách 1:* Ta có: $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \ge 2 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+y^2}{xy} \ge 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \ge 2xy$ (do $x, y > 0$)

$\Leftrightarrow (x - y)^2 \ge 0$ (đúng)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$

Áp dụng bất đẳng thức trên, ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{bc}{a} + \dfrac{ac}{b} = c\left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}\right) \ge 2c \text{ với } a, b, c > 0 \\ \dfrac{ac}{b} + \dfrac{ab}{c} = a\left(\dfrac{c}{b} + \dfrac{b}{c}\right) \ge 2a \\ \dfrac{bc}{a} + \dfrac{ab}{c} = b\left(\dfrac{c}{a} + \dfrac{a}{c}\right) \ge 2b \end{cases}$$

Suy ra: $2\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right) \geq 2(a+b+c) \Leftrightarrow \frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c} \geq a+b+c$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c > 0$

Cách 2: với a, b, c dương ta có:

$\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c} \geq a+b+c \Leftrightarrow \frac{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}{abc} \geq a+b+c$

$\Leftrightarrow b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2 \geq abc(a+b+c)$ (do a, b, c > 0)

$\Leftrightarrow 2b^2c^2 + 2a^2c^2 + 2a^2b^2 \geq 2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2$

$\Leftrightarrow (a^2b^2 - 2ab^2c + b^2c^2) + (b^2c^2 - 2abc^2 + a^2c^2) + (a^2c^2 - 2a^2bc + a^2b^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow (ab - bc)^2 + (bc - ac)^2 + (ac - ab)^2 \geq 0$ (đúng)

Vì $(ab - bc)^2 \geq 0$; $(bc - ac)^2 \geq 0$; $(ac - ab)^2 \geq 0$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a, b, c > 0 \\ ab = bc = ac \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c > 0$

Bài 3:

1) Ta có: $y = x^2 + x + 3 = x^2 + 2\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{11}{4} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \geq \frac{11}{4}$

vì $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \geq \frac{11}{4}$ với mọi x

$y = \frac{11}{4} \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

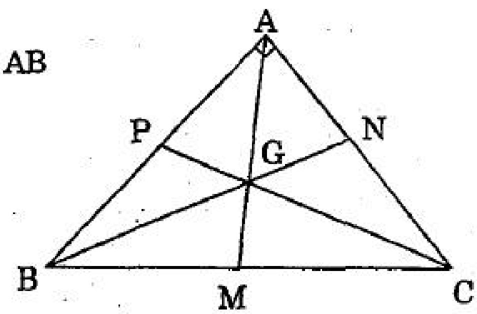
Vậy min $y = \frac{11}{4}$

2) Với mọi x, ta có: $\left||x|-1\right| \geq 0 \Rightarrow -\left||x|-1\right| \leq 0 \Rightarrow y = -\left||x|-1\right| + 5 \leq 5$

$y = 5 \Leftrightarrow |x| - 1 = 0 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Vậy max y = 5

Bài 4:



1) Theo giả thiết N, P là trung điểm AC, AB nên $AN = \frac{AC}{2}$ và $AP = \frac{AB}{2}$

Tam giác ABC vuông tại A, AM là trung tuyến với cạnh huyền nên $AM = \frac{BC}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Gọi G là giao điểm ba trung tuyến, ta có:

$\begin{cases} BN^2 = AB^2 + AN^2 = AB^2 + \frac{AC^2}{4} \text{(định lý Pytago đối với vuông } \Delta ABN) \\ CP^2 = AC^2 + AP^2 = AC^2 + \frac{AB^2}{4} \text{ (định lý Pytago đối với vuông } \Delta ACP) \end{cases}$

$\Rightarrow BN^2 + CP^2 = \dfrac{5}{4}(AB^2 + AC^2) = \dfrac{5}{4}BC^2 = \dfrac{5}{4}.4 = 5$

Vậy $AM^2 + BN^2 + CP^2 = 1 + 5 = 6$

2) Chứng minh $4 < AM + BN + CP < 5$

Áp dụng tính chất trọng tâm tam giác, ta có:

$BN = \dfrac{3}{2}\ BG$ và $CP = \dfrac{3}{2}\ CG$

Suy ra: $BN + CP = \dfrac{3}{2}\ (BG + CG) > BC$

(bất đẳng thức trong tam giác BGC)

$\Rightarrow BN + CP > \dfrac{3}{2}.2 = 3 \ \Rightarrow AM + BN + CP > 1 + 3 = 4$

Ta có: $(AM - BN)^2 \geq 0 \Rightarrow AM^2 + BN^2 - 2AM.BN \geq 0$

$\Rightarrow AM^2 + BN^2 \geq 2AM.BN$

Lý luận tương tự:

$AM^2 + CP^2 \geq 2AM.CP$

$BN^2 + CP^2 \geq 2BN.CP$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức cùng chiều ta được:

$2(AM^2 + BN^2 + CP^2) \geq 2AM.BN + 2BN.CP + 2AM.CP$

$\Rightarrow 3(AM^2 + BN^2 + CP^2) \geq AM^2 + BN^2 + CP^2 + 2(AM.BN + BN.CP + AM.CP)$

$\Rightarrow 3(AM^2 + BN^2 + CP^2) \geq (AM + BN + CP)^2$

Mà $AM^2 + BN^2 + CP^2 = 6$ (Kết quả câu 1)

Vậy: $(AM + BN + CP)^2 \leq 3.6 = 18 < 25 \Rightarrow AM + BN + CP < 5$

Kết luận $4 < AM + BN + CP < 5$

Chú ý: Có thể trình bày bằng cách chứng minh $AM + BN + CP < 5$ như sau:

Tam giác BMN có: $BN < MN + BM$

$\Rightarrow BN < \dfrac{AB + BC}{2}$

Tương tự ta có: $CP < \dfrac{AB + BC}{2}$

Mà $AM = \dfrac{BC}{2}$, $AB < BC$, $AC < BC$

Do đó: $AM + BN + CP < \dfrac{BC}{2} + \dfrac{BC + BC}{2} + \dfrac{BC + BC}{2}$

$AM + BN + CP < \dfrac{2}{2} + \dfrac{2+2}{2} + \dfrac{2+2}{2} = 5$

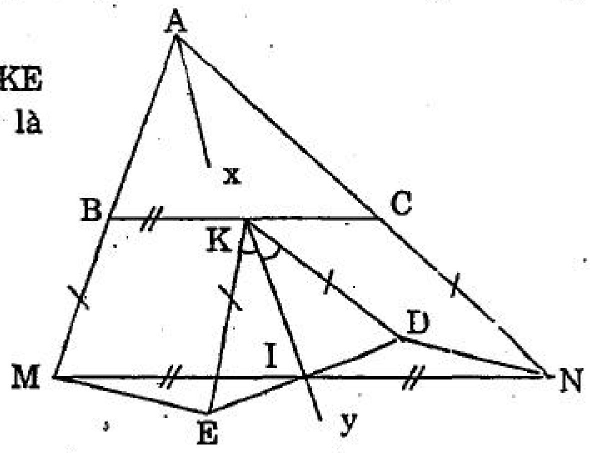
Bài 5: *Cách 1:* Gọi K là trung điểm BC. Dựng hình bình hành BKEM suy ra BK // ME và BK = ME.

Dựng hình bình hành KCND suy ra CK // DN và CK = DN

Mà BK = CK

Suy ra ME = DN và ME // DN

Vậy MEND là hình bình hành, do đó hai đường chéo MN và ED cắt nhau tại trung điểm mỗi đường, mà I là trung điểm MN nên I cũng là trung điểm ED.



Dễ thấy tam giác KED cân tại K (KE = BM = CN = KD). Suy ra KI là phân giác của $\widehat{EKD}$.

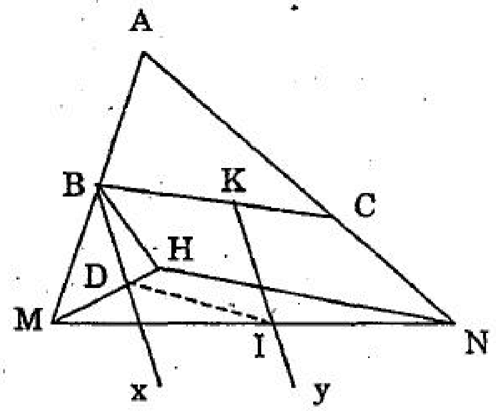
Dễ thấy $\widehat{BAC} = \widehat{EKD}$ nên KI // Ax là tia phân giác BAC.

Do K cố định suy ra thuộc tia Ky // Ax.

Vậy I thuộc tia Ky cố định.

Cách 2: Gọi K là trung điểm điểm BC. Dựng hình bình hành BCNH suy ra CN = BH = BM. Gọi D là trung điểm MH. Vậy tam giác BMH cân tại B, có BD là trung tuyến nên cũng là phân giác.

Do D, I là trung điểm MH, NH nên DI là đường trung bình tam giác MHN.



$\Rightarrow$ DI// NH, $DI = \dfrac{NH}{2}$

Mà BK // NH và $BK = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{NH}{2}$

(cạnh đối hình bình hành)

Vậy BK//DI và BK = DI suy ra BKID là hình bình hành.

Suy ra: KI//BD mà $\widehat{MBH} = \widehat{BAC}$ (không đổi) và tia BH//AC (cố định) nên BD là phân giác góc $\widehat{MBH}$ cố định.

Do K cố định suy ra I thuộc tia Ky//Bx

Chú ý: Ở bài toán 4 ta có: $AM^2 + BN^2 + CP^2 = 6$

Mà $\dfrac{3}{4}(AB^2 + AC^2 + BC^2) = \dfrac{3}{4}(BC^2 + BC^2) = \dfrac{3}{2}BC^2 = \dfrac{3}{2}.4 = 6$

Suy ra: $AM^2 + BN^2 + CP^2 = \dfrac{3}{4}(AB^2 + AC^2 + BC^2)$

Từ đây cho ta nghĩ đến bài toán:

"Chứng minh rằng tổng các bình phương độ dài các đường trung tuyến của một tam giác vuông bằng 75% tổng các bình phương độ dài các cạnh của nó."

BỘ ĐỀ 74

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 8 TRƯỜNG THCS NGUYỄN DU QUẬN 1 – TP.HCM NĂM 2002 – 2003

(VÒNG 1)

Bài 1: Cho $a - b = 100$

Tính giá trị của biểu thức:

$a^2(a + 1) - b^2(b - 1) + ab - 3ab(a - b + 1)$

Bài 2: Cho $a + b - c = 0$

Chứng minh $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4)$

Bài 3: Chứng minh

a/ $4x^2 + 4xy + 4y^2 - 6y + 4 > 0$ với mọi x, y

b/ $a^6 + 1 \ge a^2(a^2 + 1)$

Bài 4: Giải phương trình:

a/ $2|x| - |x - 1| + 2 = 0$ b/ $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \dfrac{3}{1 - x^2}$

Bài 5: Cho tam giác ABC vuông tại A có BC cố định, đường cao AH. Gọi D là hình chiếu của H trên AC. E là hình chiếu của H trên AB.
Chứng minh: hình chữ nhật ADHE có diện tích lớn nhất khi tam giác ABC vuông cân.

Bài 6: Cho tam giác ABC, lấy điểm D bất kì thuộc cạnh BC không trùng với B, C. Từ C và B kẻ hai tia Cx và By (thuộc cùng nửa mặt phẳng chứa điểm A, bờ là đường thẳng BC) song song với AD chúng cắt BA, CA theo thứ tự tại E và F.

a/ Chứng minh: $\dfrac{1}{AD} = \dfrac{1}{BF} + \dfrac{1}{CE}$.

b/ Tìm vị trí của D để BCEF là hình bình hành.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

Với $a - b = 100$, ta có:

$a^2(a + 1) - b^2(b - 1) + ab - 3ab(a - b + 1)$

$= a^3 + a^2 - b^3 + b^2 + ab - 3a^2b + 3ab^2 - 3ab$

$= (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^2) + (a^2 - 2ab + b^2)$

$= (a - b)^3 + (a - b)^2 = 100^3 + 10^2 = 1000000 + 10000 = 1010000$

Bài 2:

Với $a + b - c = 0$

Suy ra $0 = (a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ac$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2(bc + ac - ab)$

$\Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^2 = 4(b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2 + 2abc^2 - 2ab^2c - 2a^2bc)$

$\Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^2 = 4[b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2 - 2abc(a + b - c)]$

$\Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^2 = 4(b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2)$ (vì $a + b - c = 0$) (1)

Ta có: $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + b^2c^2)$

$= a^4 + b^4 + c^4 + 2.\dfrac{(a^2 + b^2 + c^2)}{4}$ (do (1))

Suy ra: $2(a^2 + b^2 + c^2) = 2(a^4 + b^4 + c^4) + (a^2 + b^2 + c^2)^2$

Vậy $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4)$ (đpcm)

Bài 3:

a/ Với mọi x; y ta có:

$4x^2 + 4xy + 4y^2 - 6y + 4 > 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 4xy + y^2 + 3y^2 - 6y + 3 + 1 > 0$

$\Leftrightarrow (4x + y)^2 + 3(y - 1)^2 + 1 > 0$ (đúng)

Vì $(2x + y)^2 \geq 0$ và $3(y - 1)^2 \geq 0\ \forall x, y$.

b/ $a^6 + 1 \geq a^2(a^2 + 1) \Leftrightarrow (a^2 + 1)(a^4 - a^2 + 1) - a^2(a^2 + 1) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a^2 + 1)(a^4 - a^2 + 1 - a^2) \geq 0 \quad \Leftrightarrow (a^2 + 1)(a^2 - 1)^2 \geq 0$ (đúng)

Vì $(a^2 + 1) > 0$ và $(a^2 - 1)^2 \geq 0\ \forall a$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$

Bài 4:

a/ Xét các trường hợp sau:

- Với $x < 0$ thì $|x| = -x$ và $|x - 1| = -(x - 1)$

  Phương trình đã cho có dạng: $-2x + x - 1 + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 > 0$ (loại)

- Với $x \leq x \leq 1$ thì $|x| = x$ và $|x - 1| = -(x - 1)$

  Phương trình đã cho có dạng: $2x + x - 1 + 2 = 0 \Leftrightarrow 3x = -1$

  $\Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{3} < 0$ (loại)

- Với $x > 0$ thì $|x| = x$ và $|x - 1| = x - 1$

  Phương trình đã cho có dạng: $2x - (x - 1) + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -3 < 0$ (loại)

Kết hợp ba trường hợp trên, phương trình đã cho vô nghiệm.

b/ Ta có: $x^3 - x^2 - x + 1 = x^2(x - 1) - (x - 1) = (x^2 - 1)(x - 1)$

$= (x - 1)^2(x + 1)$

Điều kiện: $x \neq \pm 1$

Phương trình đã cho trở thành:

$(x - 1)^2 + 2 = -3(x - 1) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = -3x + 3 \Leftrightarrow x^2 + x = 0$

$\Leftrightarrow x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in \text{TXĐ} \\ x = -1 \notin \text{TXĐ} \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 0$.

Bài 5: *Cách 1:* Tứ giác AEHD là hình chữ nhật

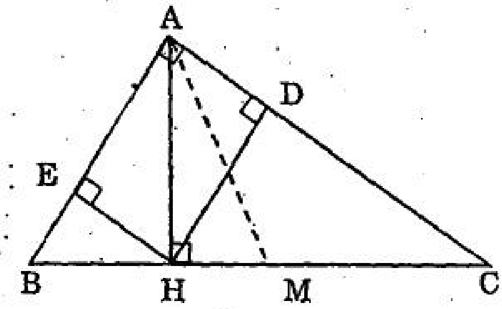
($\widehat{A} = \widehat{E} = \widehat{D} = 90^0$) $S_{AEHD} = 2S_{AEH}$

Xét ΔEAH và ΔACB có:

$\widehat{E} = \widehat{A} = 90^0$, $\widehat{EAH} = \widehat{ACB}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$\Rightarrow \Delta EAH \backsim \Delta ACB$ (g–g) $\Rightarrow \dfrac{S_{EAH}}{S_{ABC}} = \left(\dfrac{AH}{BC}\right)^2$ (1)

Gọi M là trung điểm BC, do ΔABC vuông tại A nên $AM = \dfrac{BC}{2}$.



Ta có: $AH \le AM = \dfrac{BC}{2} \Rightarrow \dfrac{AH}{BC} \le \dfrac{1}{2}$

Từ (1) cho $\dfrac{S_{EAH}}{S_{ABC}} \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow S_{EAH} \le \dfrac{1}{4} S_{ABC} \Rightarrow \dfrac{S_{EAHD}}{2} \le \dfrac{1}{4} S_{ABC}$

$\Rightarrow S_{EAHD} \le \dfrac{1}{2} S_{ABC} = \dfrac{1}{4} BC \,.\, AH \le \dfrac{1}{4} BC \,.\, AM = \dfrac{BC^2}{8}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi: $AM = \dfrac{1}{2} BC \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A.

Cách 2: Tứ giác AEHD là hình chữ nhật $\Rightarrow S_{AEHD} = AE \,.\, EH$

ΔAEH vuông tại E, theo định lí Py–ta–go có: $AE^2 + EH^2 = AH^2$

Vẽ AM là đường trung tuyến của tam giác ABC $\Rightarrow AM = \dfrac{BC}{2}$

Ta có: $AH \le AM$ (vì $AH \perp HM$)

Do đó $(AE - EH)^2 \ge 0 \Rightarrow EA \,.\, EH \le \dfrac{AE^2 + EH^2}{2}$

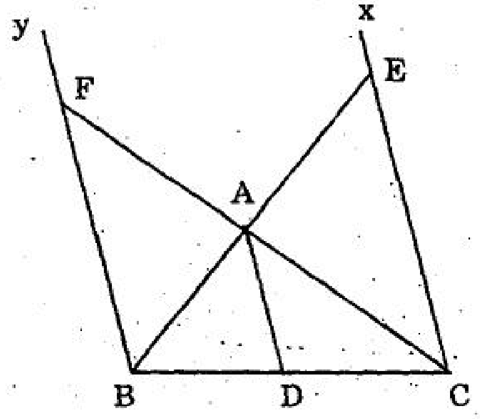
nên $S_{AEHD} \le \dfrac{AH^2}{2} \le \dfrac{BC^2}{8}$

$S_{AEHD} \le \dfrac{BC^2}{8}$; $\dfrac{BC^2}{8}$ không đổi

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow AE = EH, H \equiv M \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A.

Bài 6:

a/ $\dfrac{1}{AD} = \dfrac{1}{BF} = \dfrac{1}{CE}$



Áp dụng hệ quả định lý Ta Lét, ta có:

AD // CE: $\dfrac{AD}{CE} = \dfrac{BD}{BC}$

AD // BF: $\dfrac{AD}{BF} = \dfrac{CD}{BC}$

$\Rightarrow \dfrac{AD}{CE} + \dfrac{AD}{BF} = \dfrac{BD + CD}{BC} = \dfrac{BC}{BC} = 1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{CE} + \dfrac{1}{BF} + \dfrac{1}{AB}$

b/ Tìm vị trí D để BCEF là hình bình hành. Vì BF // CE (vì cùng song song với AD)

BCEF là hình bình hành $\Leftrightarrow$ BF = CE

$\Leftrightarrow \dfrac{AD}{BF} = \dfrac{AD}{CE} \Leftrightarrow \dfrac{CD}{BC} = \dfrac{BD}{BC} \Leftrightarrow CD = BD$

$\Leftrightarrow$ D là trung điểm BC.

BỘ ĐỀ 75

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 8 TRƯỜNG THCS NGUYỄN DU QUẬN 1 – TP.HCM NĂM 2002 – 2003

(VÒNG 2)

Bài 1:

Cho a và b là hai số dương. Chứng minh rằng: $\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} \le \sqrt{ab}$

Bài 2: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$

Bài 3: Giải phương trình: $x^2 + x - \dfrac{7}{x^2+x+1} = 5$

Bài 4: Cho biểu thức $A = \dfrac{n^3+2n^2-1}{n^3+2n^2+2n+1}$

a/ Rút gọn A.

b/ Tìm tất cả số nguyên n để A nhận giá trị nguyên.

Bài 5: Cho hình vuông ABCD cạnh là a, lấy điểm I trên cạnh AB. Đường thẳng DI cắt đường thẳng BC tại E. Đường thẳng CI cắt đường thẳng AE tại M và cắt đường thẳng AD tại P. Đường thẳng BM cắt AP tại K. Đặt AI = x. BM cắt DE tại F.

a/ Tính BE và AP theo a và x.

b/ Suy ra AK = AI.

c/ Chứng tỏ rằng khi I di động trên cạnh AB, di động trên một đường cố định. Hãy giới hạn đường đó.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: Kí hiệu $\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} \le \sqrt{ab}$ (1)

Dùng phép biến đổi tương đương.

(1) $\dfrac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \Leftrightarrow 2ab \le \sqrt{ab}(a+b) \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} \le a + b$

$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \geq 0$ (2)

Vì (2) đúng với mọi a, b > 0 nên (1) được chứng minh.

Bài 2:

$$P = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$$

Nhận xét: $x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0 \ \forall x.$

Xét $3 - P = 3 - \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} = \frac{2x^2 - 4x + 2}{x^2 - x + 1} = \frac{2(x+1)^2}{x^2 - x + 1} \geq 0$

$P \leq 3$ giá trị lớn nhất của P là 3 khi $x = 1$.

Xét $P - \frac{1}{3} = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{3} = \frac{2x^2 + 4x + 2}{3(x^2 - x + 1)} = \frac{2(x+1)^2}{3(x^2 - x + 1)} \geq 0$

$\Rightarrow P \geq \frac{1}{3}$ giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{3}$ khi $x = -1$

Bài 3:

Điều kiện $x \in R$ vì $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0 \ \forall x.$

Đặt $x^2 + x + 1 = t \ (t > 0)$, ta có phương trình: $t - 1 - \frac{7}{t} = 5$

$\Leftrightarrow t^2 - 6t - 7 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 7t + t - 7 = 0$

$\Leftrightarrow t(t - 7) + (t - 7) = 0 \Leftrightarrow (t - 7)(t + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 7 \\ t = -1 (\text{loại}) \end{array}\right.$

Với $x^2 + x + 1 = 7 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow x = -3$ hoặc $x = 2$

Vậy $S = \{-3, 2\}$

Bài 4:

a/ Rút gọn $A = \frac{n^3 + n^2 + n - 1}{n^3 + 1 + 2n^2 + 2n} = \frac{(n+1)(n^2 + n - 1)}{(n+1) + (n^2 + n + 1)} = \frac{n^2 + n - 1}{n^2 + n + 1}$

Vậy $A = \frac{n^2 + n - 1}{n^2 + n + 1}$ với $n \neq -1$.

b/ Xét $A = 1 - \frac{2}{n^2 + n + 1}$ với $n, a \in Z$ thì $\frac{2}{n^2 + n + 1} \in Z$

$\Leftrightarrow n^2 + n + 1 \in Ư(2) = \{1, -1, 2, -2\} \Rightarrow n^2 + n + 1 \in \{1, -1\}$

mà $n^2 + n + 1 = n(n + 1) + 1$ là số lẻ

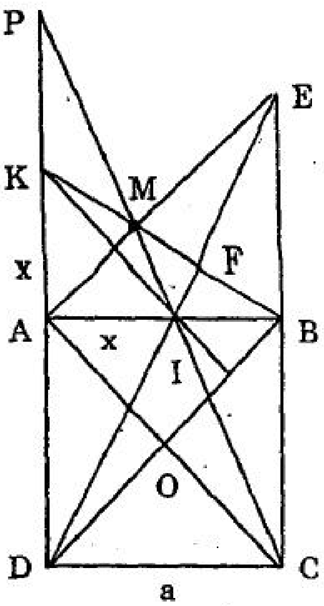
- Với $n^2 + n + 1 = 1 \Leftrightarrow n \in \{0, -1\}$ vì $n \neq -1$ nên chỉ có $n = 0$
- Với $n^2 + n + 1 = -1 \Leftrightarrow (n + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = -1$ (vô lí).

Vậy chỉ có $n = 0$ thỏa mãn.

Bài 4:

a/ Tính BE và AP.

- $\Delta ADI \backsim \Delta BEI$ (g–g) $\Rightarrow \dfrac{AD}{BE} = \dfrac{AI}{BI} \Rightarrow BE = \dfrac{a(a-x)}{x}$
- $\Delta ADI \backsim \Delta BEI$ (g–g) $\Rightarrow \dfrac{AP}{BC} = \dfrac{AI}{BI} \Rightarrow AP = \dfrac{ax}{a-x}$



b/ Ta có: $\Delta AKM \backsim \Delta EBM$ (g–g)

$\Rightarrow \dfrac{AK}{EB} = \dfrac{AM}{EM}$ (1)

$\Delta AMP \backsim \Delta EMC$ (g–g) $\Rightarrow \dfrac{AP}{EC} = \dfrac{AM}{EM}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{AK}{EB} = \dfrac{AP}{EC}$

$\Rightarrow AK = \dfrac{EB.AP}{EC} \Rightarrow AK = \dfrac{a(a-x)}{x}.\dfrac{ax}{a-x}.\dfrac{1}{a + \dfrac{a(a-x)}{x}}$

$\Rightarrow AK = x$

Vậy AK = AI

c/ Vì AK = AI $\Rightarrow \Delta AKI$ vuông cân $\Rightarrow \widehat{AKI} = 45^0$

mà $\widehat{DAC} = 45^0 \Rightarrow \widehat{AKI} = \widehat{DAC}$ (đồng vị) $\Rightarrow AC \parallel KI$

mà $AC \perp BD \Rightarrow KI \perp BD$. Xét ΔKBD có:

$KI \perp BD$, $BA \perp KD \Rightarrow$ I là trực tâm của ΔKBD

$\Rightarrow DI \perp KB$ tại F.

Khi I di động trên cạnh AB, Ta có $\widehat{DFB} = 90^0$, BD cố định.

$\Rightarrow$ F chạy trên đường tròn đường kính BD tâm O là trung điểm BD.

Giới hạn: Vì I di động trên cạnh AB $\Rightarrow$ F chỉ di động trên $\dfrac{1}{4}$ cung tròn BA của đường tròn đường kính BD.

BỘ ĐỀ 76

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 8 (ĐỀ THAM KHẢO) TRƯỜNG THCS NGUYỄN DU – QUẬN 1 – TP. HCM NĂM HỌC 2003 – 2004

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a/ $3x^2 - 10x - 8$ b/ $18x^3 - \dfrac{8}{25}x$

c/ $(x^2 - x + 2)^2 + (x - 2)^2$

Bài 2: Cho $a + b = 1$ và $ab \neq 0$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{b^3-1} + \dfrac{b}{a^3-1} = \dfrac{2(ab-2)}{a^2b^2+3}$

Bài 3: Giải phương trình:

a/ $(x + 1)(x + 2)(x + 4)(x + 5) = 40$ b/ $x^2 + y^2 + xy - 3x - 3y + 3 = 0$

c/ $x^2 + \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 = \dfrac{5}{4}$

Bài 4: Cho $a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3 = 1$. Tính $S = a^2 + b^9 + c^{2004}$

Bài 5: Cho tam giác ABC. Biết rằng tồn tại các điểm M, N lần lượt trên các cạnh AB, BC sao cho $2.\dfrac{BM}{AM} = \dfrac{BN}{CN}$ và $\widehat{BNM} = \widehat{ANC}$.

Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

Bài 6: Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BC và CD của tứ giác lồi ABCD. Chứng minh rằng: $S_{ABCD} \le \dfrac{1}{2}(AM + AN)^2$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

a/ $3x^2 - 10x - 8 = 3x^2 - 12x + 2x - 8 = 3x(x - 4) + 2(x - 4)$
$= (x - 4)(3x + 2)$

b/ $18x^3 - \dfrac{8}{25}x = 2x(9x^2 - \dfrac{4}{25}) = 2x(3x - \dfrac{2}{5})(3x + \dfrac{2}{5})$

c/ *Cách 1:*

$(x^2 - x + 2)^2 + (x - 2)^2 = (x^2 + 4 - x - 2)^2 + (x - 2)^2$
$= (x^2 + 4)^2 - 2(x^2 + 4)(x + 2) + (x + 2)^2 + (x - 2)^2$
$= (x^2 + 4)^2 - 2(x^2 + 4)(x + 2) + 2(x^2 + 4)$
$= (x^2 + 4)(x^2 + 4 - 2x - 4 + 2) = (x^2 + 4)(x^2 - 2x + 2)$

Cách 2:

$(x^2 - x + 2)^2 + (x - 2)^2 = (x^2 - 2x + x + 2)^2 + (x - 2)^2$
$= (x^2 - 2x + 2)^2 + 2x(x^2 - 2x + 2) + x^2 + (x - 2)^2$
$= (x^2 - 2x + 2)^2 + 2x(x^2 - 2x + 2) + 2(x^2 - 2x + 2)$
$= (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x + 2 + 2x + 2) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 4)$

Cách 3:

$(x^2 - x + 2)^2 + (x - 2)^2 = (x^2 - x + 2)^2 - x^2 + (x - 2)^2 + x^2$
$= (x^2 - x + 2 + x)(x^2 - x + 2 - x) + 2(x^2 - x + 2)$
$= (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2 + 2) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 4)$

Cách 4:

$(x^2 - x + 2)^2 + (x - 2)^2 = (x^2 - x + 2)^2 - (x + 2)^2 + (x + 2)^2 + (x - 2)^2$
$= (x^2 - x + 2 + x + 2)(x^2 - x + 2 - x - 2) + 2(x^2 + 4)$
$= (x^2 + 4)(x^2 - 2x + 2)$

Bài 2: Với $a + b = 1$ và $ab \ne 0$, ta có:

$$\frac{a}{b^3 - 1} + \frac{b}{a^3 - 1} = \frac{a(a^3 - 1) + b(b^3 - 1)}{(a^3 - 1)(b^3 - 1)} = \frac{(a^4 + b^4) - (a + b)}{a^3b^3 - (a^3 + b^3) + 1}$$

$$= \frac{(a^2+b^2)^2-2a^2b^2-1}{a^3b^3-(a+b)^2+3ab(a+b)+1} = \frac{[(a+b)^2-2ab]^2-2a^2b^2-1}{a^3b^3+3ab}$$

$$= \frac{1-4ab+4a^2b^2-2a^2b^2-1}{ab(a^2b^2+3)} \text{ (thay } a+b=1)$$

$$= \frac{2ab(ab-2)}{ab(a^2b^2+3)} = \frac{2(ab-2)}{(a^2b^2+3)} \text{ (do } ab \neq 0)$$

Bài 3:

a/ $(x + 1)(x + 5)(x + 2)(x + 4) = 40$

$\Leftrightarrow (x^2 + 6x + 5)(x^2 + 6x + 8) = 40$

đặt $t = x^2 + 6x$, phương trình trở thành:

$(t + 5)(t + 8) = 40 \Leftrightarrow t^2 + 13t = 0 \Leftrightarrow t(t + 13) = 0$

$\Leftrightarrow t = 0$ hay $t = -13$

- Với $t = 0$ thì $x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(x + 6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -6$
- Với $t = -13$ thì $x^2 + 6x + 13 = 0$ vô nghiệm.

Vì $x^2 + 6x + 13 = (x + 3)^2 + 4 > 0\ \forall x$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 0$; $x = -6$

b/ $x^2 + y^2 + xy - 3x - 3y + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 3)x + y^2 - 3y + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2.\frac{(y-3)}{2}.x + \frac{(y-3)^2}{4} + y^2 - 3y + 3 - \frac{(y-3)^2}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{(y-3)}{2}\right)^2 + \frac{4y^2-12y+12-y^2+6y-9}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{y-3}{2} = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $(x = 1; y = 1)$

c/ $x^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = \frac{5}{4}$

TXĐ: $x \neq -1$, phương trình trở thành:

$$\left(x - \frac{x}{x+1}\right)^2 + 2.\frac{x^2}{x+1} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + 2.\frac{x^2}{x+1} + 1 = \frac{5}{4} + 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{x+1} + 1\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x^2}{x+1} + 1 = \frac{3}{2} \\ \frac{x^2}{x+1} + 1 = -\frac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2 - x + 1 = 0 \\ 2x^2 + 5x + 5 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Vì $2x^2 + 5x + 5 = 2(x^2 + 2\frac{5}{4}x + \frac{25}{16}) + \frac{15}{8} = 2(x + \frac{5}{4})^2 + \frac{15}{8} > 0\ \forall x$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$, $x = -\frac{1}{2}$

Bài 4:

Do $a^2 + b^2 + c^2 = 1. \Rightarrow |a| \le 1$; $|b| \le 1$; $|c| \le 1$

Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 - (a^3 + b^3 + c^3) = 0$

$\Leftrightarrow a^2(1 - a) + b^2(1 - b) + c^2(1 - c) = 0$ (*)

Vì $a \le 1 \Rightarrow 1 - a \ge 0$

Tương tự: $b^2(1 - b) \ge 0$, $c^2(1 - c) \ge 0$. Suy ra vế trái của (*) là tổng các số không âm, nên:

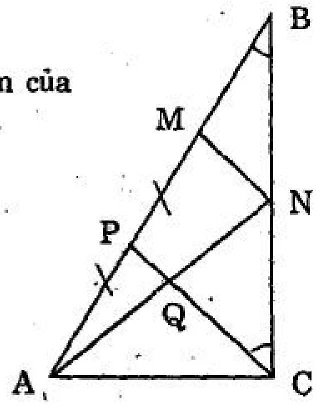
$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2(1-a) = 0 \\ b^2(1-b) = 0 \\ c^2(1-c) = 0 \end{cases}$$

Vậy $a, b, c \in \{0;1\}$ trong đó có hai số bằng 0 và một số bằng 1.

Giả sử $a = b = 0$, $c = 1$ thì $S = a^2 + b^9 + c^{2004} = 0 + 0 + 1^{2004} = 1$

Vậy $S = 1$.

Bài 5:



Cách 1: Gọi P là trung điểm của AM, Q là giao điểm của AM, Q là giao điểm của AN với CP. Ta có:

$\frac{BM}{PM} = 2\frac{BM}{AM} = \frac{BN}{CN} \Rightarrow MN \mathbin{//} CP$ (Talet đảo)

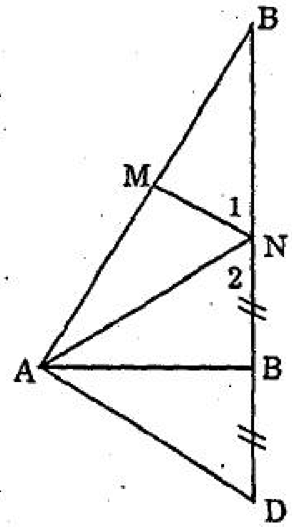
$\Rightarrow \widehat{QCN} = \widehat{MNB} = \widehat{AMC} \Rightarrow \Delta QCN$ cân tại Q.

Mặt khác: $PA = PM$, $PQ \mathbin{//} MN$

$\Rightarrow QA = QN$ nên $QA = QC = QN$

$\Rightarrow \Delta ACN$ vuông tại C.

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại C.



Cách 2: Dựng D là điểm đối xứng của N qua AC

$\Rightarrow ND = CN + CD = 2CN$

Ta có: $2\frac{MB}{MA} = \frac{BN}{CN}$

$\Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{BN}{2CN} = \frac{BN}{ND}$

$\Rightarrow MN \mathbin{//} AD$ (Talet đảo)

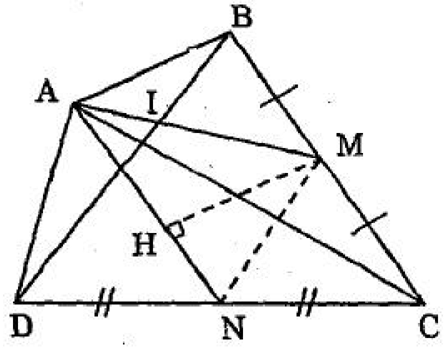
$\Rightarrow \widehat{D} = \widehat{N}_1 = \widehat{N}_2 \Rightarrow \Delta AND$ cân tại A

nên đường trung tuyến AC cũng là đường cao.

Vậy $AC \perp CB \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại C.

Bài 6:

Trong một tam giác, đường trung tuyến chia tam giác thành hai phần có diện tích bằng nhau, nên:



$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = 2S_{AMC} + 2S_{ANC}$

$= 2(S_{AMC} + S_{ANC}) = 2S_{AMCN}$

$= 2(S_{AMN} + S_{CMN}) = 2(S_{AMN} + S_{IMN})$

(với $AM \cap BD = I$)

Do MN // BD nên ΔIMN và ΔCMN có chung đáy và cùng chiều cao.

$\Rightarrow S_{CMN} = S_{IMN}$ và $S_{IMN} \le S_{AMN}$

Vậy $S_{ABCD} \le 2(S_{AMN} + S_{AMN}) = 4S_{AMN} = 4\frac{1}{2}AN.NH$

$\le 2\,AN.AM$ (vì $AH \le AM$)

Ta có: $(AM - AN)^2 \ge 0 \Rightarrow AM^2 + AN^2 \ge 2AM.AN$

$$\Rightarrow (AM + AN)^2 \ge 4AM.AN \Rightarrow \left(\frac{AM + AN}{2}\right)^2 \ge AM.AN$$

Suy ra: $S_{ABCD} \le 2\left(\frac{AM + AN}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(AM + AN)^2$ (đpcm)

BỘ ĐỀ 77

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 8
QUẬN I, TP HỒ CHÍ MINH – NĂM HỌC 2002 – 2003

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a/ $x^2 + 6x + 5$ b/ $(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 2) - 12$

Bài 2:

a/ Cho $x + y + z = 0$. Chứng minh: $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

b/ Rút gọn phân thức: $\dfrac{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2}$

Bài 3: Cho x, y, z là độ dài ba cạnh tam giác.

$A = 4x^2y^2 - (x^2 + y^2 - z^2)^2$. Chứng minh: $A > 0$.

Bài 4: Tìm số dư trong phép chia của biểu thức.

$(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) + 2002$ cho $x^2 + 8x + 12$

Bài 5: Cho tam giác ABC vuông tại A (AC > AB), đường cao AH. Trên tia HC lấy HD = HA. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E.

a/ Chứng minh AE = AB.

b/ Gọi M là trung điểm BE. Tính góc $\widehat{AHM}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

a/ $x^2 + 6x + 5 = x^2 + 5x + x + 5 = x(x + 5) + (x + 5) = (x + 5)(x + 1)$

b/ Đặt $A = (x^2 - x + 1)(x^2 - x + 2) - 12$

Đặt $t = x^2 - x + 1$, ta được:

$A = t(t + 1) - 12 = t^2 + t - 12 = t^2 + 4t - 3t - 12 = t(t + 4) - 3(t + 4)$

$= (t + 4)(t - 3)$

Thay $t = x^2 - x + 1$

$A = (x^2 - x + 5)(x^2 - x - 2) = (x^2 - x + 5)[(x^2 + x) - 2x - 2)]$

$= (x^2 - x + 5)[x(x + 1) - 2(x - 1)] = (x + 1)(x - 2)(x^2 - x + 5)$

Bài 2:

a/ Áp dụng hằng đẳng thức: $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

Ta có: $x^3 + y^3 + z^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) + z^3$

$= (-z)^3 - 3xy(-z) + z^3$ (vì $x + y + z = 0$ nên $z = -(x + y)$) $= 3xyz$

b/ Ta có:

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y)^3 - 3xy(x + y) + z^3 - 3xyz$

$= (x + y + z)^3 - 3(x + y)z(x + y + z) - 3xy(x + y + z)$

$= (x + y + z)[(x + y + z)^2 - 3xz - 3yz - 3xy)]$

$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz - 3xz - 3yz - 3xy)$

$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$

$= (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2$

$= x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2zy + x^2$

$= 2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

Với x, y, z không đồng thời bằng nhau, ta có:

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2} = \frac{(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)}{2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)}$$

$$= \frac{x + y + z}{2}$$

Bài 3: Với x, y, z là độ dài ba cạnh tam giác, ta có:

$A = 4x^2y^2 - (x^2 + y^2 - z^2)^2 = (2xy + x^2 + y^2 - z^2)(2xy - x^2 - y^2 + z^2)$

$= [(x + y)^2 - z^2][z^2 - (x - y)^2] = (x + y - z)(x + y + z)(z + x - y)(z - x + y)$

Theo bất đẳng thức tam giác, ta được:

$$\begin{cases} x + y > z \\ x + z > y \\ y + z > x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z > 0 \\ x + z - y > 0 \\ y + z - x > 0 \end{cases} \Rightarrow (x + y - z)(x + z - y)(y - z + x) > 0$$

Kết hợp với $x + y + z > 0$ cho $A > 0$ (đpcm).

Bài 4:

Cách 1:

Đặt $f(x) = (x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) + 2002$

Ta có: $f(x) = (x + 1)(x + 7)(x + 3)(x + 5) + 2002$

$= (x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 15) + 2002$
$= (x^2 + 8x + 7)[(x^2 + 8x + 12) + 3)] + 2002$
$= (x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 12) + 3(x^2 + 8x + 7) + 2002$
$= (x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 12) + 3(x^2 + 8x + 12) + 2002 - 15$
$= (x^2 + 8x + 12)(x^2 + 8x + 10) + 1987$

Vậy số dư trong phép chia f(x) cho $x^2 + 8x + 12$ là 1987.

Cách 2:

$f(x) = (x^2 + 4x + 3)(x^2 + 12x + 35) + 2002$
$= x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 12x^3 + 48x^2 + 36x + 35x^2 + 140x + 105 + 2002$
$= x^4 + 16x^3 + 86x^2 + 176x + 2107.$

Thực hiện phép chia:

$$\begin{array}{l|l} x^4 + 16x^3 + 86x^2 + 176x + 2107 & x^2 + 8x + 12 \\ \hline -x^4 - 8x^3 - 12x^2 & x^2 + 8x + 10 \\ \hline 8x^3 + 74x^2 + 176x & \\ \quad -8x^3 + 64x^2 - 96x & \\ \hline \quad\quad 10x^2 + 80x + 2107 & \\ \quad\quad -10x^2 - 80x - 120 & \\ \hline \quad\quad\quad\quad 1987 & \end{array}$$

Vậy số dư trong phép chia f(x) cho $x^2 + 8x + 12$ là 1987.

Cách 3:

Bậc của đa thức thương là 2 nên đa thức dư có dạng ax + b. Gọi đa thức thương là Q(x), ta có:

$(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) + 2002 = (x^2 + 8x + 12)Q(x) + ax + b$

Cho $x = -2$, ta có: $-1.1.3.5 + 2002 = -2a + b$

$\Leftrightarrow -2a + b = 1987$

Cho $x = -6$, ta có: $-5.(-3).(-1).1 + 2002 = -6a + b$

$\Leftrightarrow -6a + b = 1987$

Ta có $(-2a + b) - (-6a + b) = 0 \Leftrightarrow a = 0$

Do đó $b = 1987$

Đa thức dư là 1987.

Cách 4:

$f(x) = (x + 1)(x + 7)(x + 3)(x + 5) + 2002 =$
$= (x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 15) + 2002$
$= [(x^2 + 8x + 12) - 5][(x^2 + 8x + 12) + 3] + 2002$
$= (x^2 + 8x + 12)^2 - 2(x^2 + 8x + 12) - 15 + 2002$
$= (x^2 + 8x + 12)^2 - 2(x^2 + 8x + 12) + 1987$

Vậy số dư trong phép chia f(x) cho $x^2 + 8x + 12$ là 1987.

Bài 5:

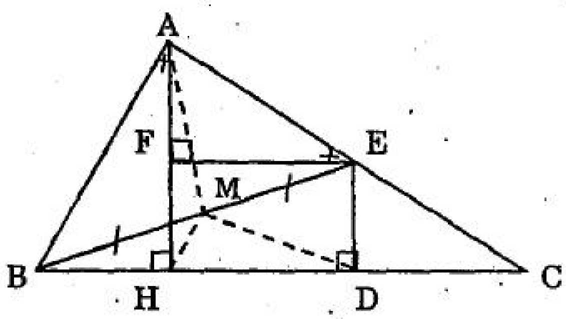
a/ AE = AB

Kẻ $EF \perp AH$, suy ra tứ giác HDEF là hình chữ nhật ($\widehat{H} = \widehat{F} = \widehat{D} = 90^0$)

$\Rightarrow EF = HD$ mà $AH = HD$ (gt) $\Rightarrow EF = AH$

Xét ΔHBA và ΔFAE có: $\widehat{H} = \widehat{F} = 90^0$, $AH = EF$ (chứng minh trên), $\widehat{FEA} = \widehat{HAB}$ (vì cùng phụ với $\widehat{FAE}$) $\Rightarrow \Delta HBA = \Delta FAE$ (g–c–g) $\Rightarrow AB = AE$.

b/ Tính $\widehat{AHM}$.



Do ΔABE vuông cân tại A

nên $AM = \dfrac{BE}{2}$

Lại có ΔBDE vuông tại D, DM là trung tuyến nên $MD = \dfrac{BE}{2}$

Vậy $AM = MD$.

Xét ΔAHM và ΔDHM có HM chung, $AM = MD$ (cmt), $AH = HD$ (gt)

Do đó $\Delta AHM = \Delta DHM$ (c–c–c) $\Rightarrow \widehat{MHA} = MHD = \dfrac{\widehat{AHD}}{2} = \dfrac{90^0}{2} = 45^0$

BỘ ĐỀ 78

ĐỀ THI HỌC BỔNG TOÁN 8 TRƯỜNG THCS HOA LƯ QUẬN 9, TP.HCM – NĂM HỌC 2002 – 2003

Bài 1: Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

a/ $\dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2$ b/ $x^6 - x^4 + 2x^3 + 2x^2$

c/ $(x + 1)^4 + (x^2 + x + 1)^2$ d/ $x^{10} + x^5 + 1$

Bài 2: Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức:

$f(x, y) = \dfrac{x(x+5) + y(y+5) + 2(xy-3)}{x(x+6) + y(y+6) + 2xy}$ với $x + y = 2003$

Bài 3:

Cho ba số x, y, z thỏa mãn đồng thời: $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ xy + yz + zx = 0 \end{cases}$

Hãy tính giá trị của biểu thức: $P = (x - 1)^{2001} + y^{2002} + (z + 1)^{2003}$

Bài 4:

1) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = (2x - 1)^2 + (x - 3)^2$

2) Tìm x biết: $(8x - 4x^2 - 1)(x^2 + 2x + 1) = 4(x^2 + x + 1)$

Bài 5: Cho ΔABC nhọn ($AB < AC$), kẻ đường cao AH. Gọi M, N, D lần lượt là trung điểm các cạnh BC, BA và AC.

1) Chứng minh rằng: ND là trung trực của đoạn thẳng AH và tứ giác MDNH là hình thang cân.

2) Giả sử: HD vuông góc với MN. Chứng minh rằng: $AH = ND + MH$.

3) Trong trường hợp tứ giác MDNH có: $\widehat{M} = \widehat{D} = 90^0$ và $MH = MD = \dfrac{DN}{2}$, lấy một điểm bất kỳ thuộc cạnh MH ($E \neq M$, $E \neq H$), kẻ tia Ex vuông góc với DE và tia này cắt cạnh NH tại F. Chứng minh rằng: ΔDEF vuông cân. (câu 3 độc lập với hai câu trên)

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

a/ $\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 = \frac{1}{2}[(x^2+y^2)^2 - 4x^2y^2]$

$= \frac{1}{2}(x^2+y^2+2xy)(x^2+y^2-2xy) = \frac{1}{2}(x+y)^2(x-y)^2$

b/ $x^6 - x^4 + 2x^3 + 2x^2 = x^2[x^4 - x^2 + 2(x+1)]$

$= x^2[x^2(x-1)(x+1) + 2(x+1)]$

$= x^2(x+1)(x^3 - x^2 + 2) = x^2(x+1)[x^3 + x^2 - 2x^2 + 2]$

$= x^2(x+1)[x^2(x+1) - 2(x-1)(x+1)] = x^2(x+1)^2(x^2 - 2x + 2)$

c/ $(x+1)^4 + (x^2+x+1)^2 = (x+1)^4 + [x(x+1)+1]^2$

$= (x+1)^4 + x^2(x+1)^2 + 2x(x+1) + 1$

$= (x+1)^2[(x+1)^2 + x^2] + (2x^2 + 2x + 1)$

$= (x+1)^2(2x^2+2x+1) + (2x^2+2x+1)$

$= (2x^2+2x+1)(x^2+2x+2)$

d/ $x^{10} + x^5 + 1 = (x^{10} - x) + (x^5 - x^2) + (x^2 + x + 1)$

$= x(x^9 - 1) + x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1)$

$= x(x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1) + x^2(x-1)(x^2+x+1) + (x^2+x+1)$

$= (x^2+x+1)[x(x-1)(x^6+x^3+1) + x^2(x-1) + 1]$

$= (x^2+x+1)(x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1)$

Bài 2: Ta có:

$$f(x, y) = \frac{x^2+5x+y^2+5y+2xy-6}{x^2+6x+y^2+6y+2xy} = \frac{(x^2+y^2+2xy)+5(x+y)-6}{(x^2+y^2+2xy)+6(x+y)}$$

$$= \frac{(x+y)^2+5(x+y)-6}{(x+y)^2+6(x+y)}$$

Đặt $t = x + y$, ta được $f(t) = \dfrac{t^2+5t-6}{t^2+6t} = \dfrac{(t+6)(t-1)}{t(t+6)} = \dfrac{(t-1)}{t}$ $(t \neq 0, t \neq -6)$

Vậy $f(x, y) = \dfrac{x+y-1}{x+y)}$, tại $x + y = 2003$ thì $f(x, y) = \dfrac{2003-1}{2003} = \dfrac{2002}{2003}$

Bài 3: Ta có: $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + x(xy + yz + zx)$ (*)

Vì $x + y + z = 0$ và $xy + yz + zx = 0$ (gt) nên từ (*) cho:

$x^2 + y^2 + z^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0$

Tại $x = y = z = 0$, ta được:

$P = (0-1)^{2001} + 0^{2002} + (0+1)^{2003} = (-1)^{2001} + 1^{2003} = (-1) + 1 = 0$

Bài 4:

1) $A = (2x-1)^2 + (x-3)^2 = 4x^2 - 4x + 1 + x^2 - 6x + 9$

$= 5x^2 - 10x + 10 = 5(x^2 - 2x + 5) + 5 = 5(x-1)^2 + 5 \geq 5\ \forall x$

Vì $(x-1)^2 \geq 0\ \forall x$ nên $(x-1)^2 + 5 \geq 5\ \forall x$

$A = 5 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Vậy min $A = 5$.

2) *Cách 1:*

- $x = -1$, không là nghiệm của phương trình đã cho
- $x \neq -1$ ta có $(8x - 4x^2 - 1)(x^2 + 2x + 1) = 4(x^2 + x + 1)$

$\Leftrightarrow \dfrac{8x - 4x^2 - 1}{4} = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1}$

Xét $\forall x \neq -1$: $\dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1} = \dfrac{4x^2 + 4x + 4}{4(x^2 + 2x + 1)} = \dfrac{3(x^2 + x + 1) + x^2 - 2x + 1}{4(x^2 + 2x + 1)}$

$= \dfrac{3}{4} + \dfrac{(x-1)^2}{4(x+1)^2} \geq \dfrac{3}{4}$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 1$

và $\dfrac{-4x^2 + 8x + 1}{4} = -x^2 + 2x - 1 + \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{4} - (x-1)^2 \leq \dfrac{3}{4}$; dấu "=" xảy ra khi $x = 1$.

Vậy $\dfrac{8x - 4x^2 - 1}{4} = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1} \Leftrightarrow x = 1$

Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$

Cách 2: Ta có: $(8x - 4x^2 - 1)(x^2 + 2x + 1) = 4(x^2 + x + 1)$

$\Leftrightarrow 8x^3 + 16x^2 + 8x - 4x^4 - 8x^3 - 4x^2 - x^2 - 2x - 1 = 4x^2 + 4x + 4$

$\Leftrightarrow -4x^4 + 11x^2 + 6x - 1 = 4x^2 + 4x + 4$

$\Leftrightarrow 4x^4 - 7x^2 - 2x + 5 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(4x^3 + 4x^2 - 3x - 5) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(4x^2 + 8x + 5) = 0$

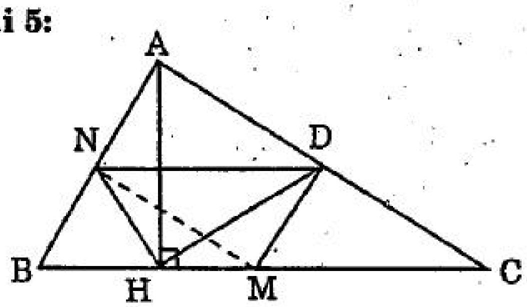
$\Leftrightarrow x = 1$

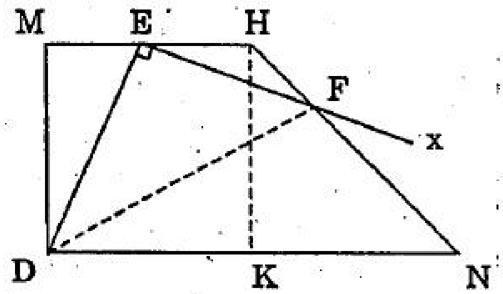
	4	0	−7	−2	5
1	4	4	−3	−5	$\boxed{0}$
1	4	8	5	$\boxed{0}$	

Vì $(4x^2 + 8x + 5) = 4(x^2 + 2x + 1) + 1 = 4(x+1)^2 + 1 > 0\ \forall x$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài 5:





1) Ta có:

$$\begin{cases} NH = NA = \dfrac{AB}{2} \text{ (trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông)} \\ HD = AD = \dfrac{AC}{2} \text{ (trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông)} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ND trung trực AH

ΔABC có N, D trung điểm AB, AC $\Rightarrow$ ND đường trung bình $\Rightarrow$ ND // BC

M là trung điểm BC nên MN đường trung bình $\Rightarrow MN = \dfrac{AC}{2} = HD$

Tứ giác MDNH có ND//MH và MN = HD nên là hình thang cân.

2) Giả sử: $HD \perp MN \Rightarrow HD \perp AC$ tại D và AD = DC nên ΔAHC vuông cân tại H, suy ra AH = HC.

Do AB < AC $\Rightarrow$ BH < HC $\Rightarrow$ M nằm giữa H, C.

Ta có $DN = \dfrac{BC}{2} = MC$

Vậy AH = HC = HM + MC = MH + ND

3) Kẻ $HK \perp DN \Rightarrow HK = MD$, $DK = MH = \dfrac{DN}{2}$ (tính chất đoạn chắn) mà MH = MD (gt) $\Rightarrow$ HK = DK = KN $\Rightarrow$ ΔHKN vuông tại $\widehat{N} \Rightarrow \widehat{N} = 45^0$, vậy $\widehat{NHM} = 135^0$

Lấy $I \in MD$: MI = ME $\Rightarrow$ EH = ID

Vậy ΔMIE vuông cân tại M nên $\widehat{MIE} = 45^0 \Rightarrow \widehat{DIE} = 135^0$

ΔIED và ΔHFE có: EH = ID (chứng minh trên), $\widehat{EID} = \widehat{EHF} = 135^0$

$\widehat{D} = \widehat{E}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$\Rightarrow \Delta IED$ và ΔHFE (g–c–g) $\Rightarrow$ DE = EF

Vậy ΔDEF vuông cân tại E.

BỘ ĐỀ 79

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI GIẢI THƯỞNG LƯƠNG THẾ VINH QUẬN 9, TP.HCM – NĂM HỌC 2002 – 2003

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a/ $x^4 + 6x^2 + 8$ b/ $x^4 - 4x^2 + x^3 - 4x$

Bài 2: Giải các phương trình và bất phương trình sau:

a/ $|2x - 3| + 2x = 3$ b/ $\dfrac{x-342}{15} + \dfrac{x-323}{17} + \dfrac{x-300}{19} + \dfrac{x-273}{21} = 10$

c/ $\dfrac{3x-2}{9x+1} < \dfrac{1}{3}$

Bài 3:

a/ Chứng minh rằng: với mọi a, b có đẳng thức: $(a^2 + b^2)(a^2 + 1) \geq 4a^2b$

b/ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $P = x^4 + (3 - x)^2$

Bài 4:

Cho các số: $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2003}$. Biết rằng:

$a_k = \dfrac{2k+1}{(k^2+k)^2}$ với mọi k = 1, 2, 3 ..., 2003.

Tính tổng: $S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2003}$

Bài 5: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

a/ Chứng minh: ΔAEF và ΔABC đồng dạng

b/ Chứng minh: H là giao điểm ba đường phân giác trong của ΔDEF.

Bài 6: Cho tam giác ABC vuông tại A, kẻ đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC.

a/ Chứng minh: $BD.CE.BC = AH^3$

b/ Giả sử diện tích tam giác ABC gấp đôi diện tích tứ giác ADHE, chứng tỏ tam giác ABC vuông cân.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

a/ $x^4 + 6x^2 + 8 = x^4 + 2x^2 + 4x^2 + 8 = x^2(x^2 + 2) + 4(x^2 + 2)$

$= (x^2 + 2)(x^2 + 4)$

b/ $x^4 - 4x^2 + x^3 - 4x = x(x^3 - 4x + x^2 - 4) = x[x(x^2 - 4) + (x^2 - 4)]$

$= x(x^2 - 4)(x + 1) = x(x - 2)(x + 2)(x + 1)$

Bài 2:

a/ Áp dụng tính chất $|A| = -A \Leftrightarrow A \leq 0$, ta có:

$|2x-3| + 2x = 3 \Leftrightarrow |2x-3| = -(2x-3) \Leftrightarrow 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{3}{2}$

Vậy $S = \left\{x \middle| x \leq \dfrac{3}{2}\right\}$

b/ $\dfrac{x-342}{15} + \dfrac{x-323}{17} + \dfrac{x-300}{19} + \dfrac{x-273}{21} = 10$

$\Leftrightarrow (\dfrac{x-342}{15} - 1) + (\dfrac{x-323}{17} - 2) + (\dfrac{x-300}{19} - 3) + (\dfrac{x-273}{21} - 4) = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-357}{15} + \dfrac{x-357}{17} + \dfrac{x-357}{19} + \dfrac{x-357}{21} = 0$

$\Leftrightarrow (\dfrac{1}{15} + \dfrac{1}{17} + \dfrac{1}{19} + \dfrac{1}{20})(x - 357) = 0 \Leftrightarrow (x - 357) = 0$

$\Leftrightarrow x = 357$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm x = 357.

c/ $\frac{3x-2}{9x+1} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{3x-2}{9x+1} - \frac{1}{3} < 0 \Leftrightarrow \frac{9x-6-(9x+1)}{3(9x+1)} < 0$

$\Leftrightarrow \frac{-7}{3(9x+1)} < 0 \Leftrightarrow 9x + 1 > 0$ (vì $-7 < 0$)

$\Leftrightarrow x > -\frac{1}{9}$ Vậy $S = \left\{x \middle| x > -\frac{1}{9}\right\}$

Bài 3:

a/ Ta có: $a^2 + b^2 \geq 2|a|.|b| \geq 0\ \forall\, a, b$

và $a^2 + 1 \geq 2|a| \geq 0$

$\Rightarrow (a^2 + b^2)(a^2 + 1) \geq 4|a|^2.|b| = 4a^2|b| \geq 4a^2b$ (đpcm)

b/ Ta có: $P = x^4 + (3-x)^2 = x^4 + x^2 - 6x + 9$

$= (x^4 - 2x^2 + 1) + (3x^2 - 6x + 3) + 5 = (x^2-1)^2 + 3(x-1)^2 + 5 \geq 5$

Vì $(x^2 - 1)^2 \geq 0$ và $3(x-1)^2 \geq 0\ \forall\, x$

$P = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 5.

Bài 4: Ta có:

$a_k = \frac{2k+1}{(k^2+k)^2} = \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{(k^2+2k+1)-k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2-k^2}{k^2(k+1)^2}$

$= \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}, \forall k, k = 1, 2, 3 ...., 2003$

với $k = 1$: $a_1 = 1 - \frac{1}{2^2}$

$k = 2$: $a_2 = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}$

....

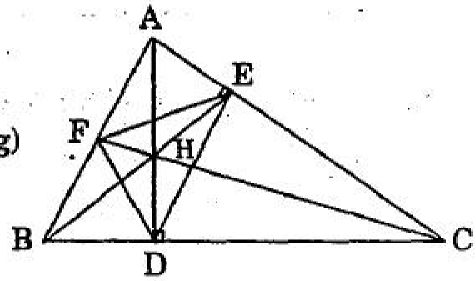
....

$k = 2003$: $a_{2003} = \frac{1}{2003^2} - \frac{1}{2004^2}$

$\Rightarrow S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2003}$

$= 1 - \frac{1}{2004^2} = \frac{2005 \times 2003}{2004^2}$

Bài 5



Xét ΔAEB và ΔAFC có: $\widehat{A}$ chung

$\widehat{AEB} = \widehat{AFC} = 90^0 \Rightarrow \Delta AEB \backsim \Delta AFC$ (g–g)

$\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$

Xét ΔAEF và ΔABC có:

$\hat{A}$ chung, $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta AEF \backsim \Delta ABC$ (g–c) $\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ABC}$

Tương tự: $\Delta CED \backsim \Delta CBA$ (g–c) $\Rightarrow \widehat{CED} = \widehat{CDA}$

Suy ra: $\widehat{AEF} = \widehat{CED} \Rightarrow \widehat{FEB} = \widehat{DEB}$ (cùng phụ với hai góc bằng nhau)

Do đó EH là phân giác FED trong ΔFDE.

Lý luận tương tự ta cũng nhận được DH là phân giác FDE.

$\Rightarrow$ H là giao điểm ba phân giác trong của ΔDEF.

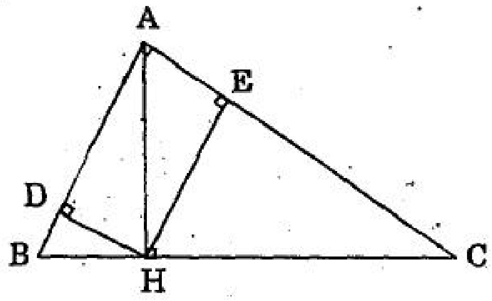
Bài 6:

a/ $AH^3 = BD.CE.BC$

Ta có: $\Delta HAB \backsim \Delta HCA$ (g–g) $\Rightarrow \dfrac{AH}{HC} = \dfrac{HB}{AH} \Rightarrow AH^2 = HB.HC$

$\Delta BDH \backsim \Delta BHA$ (g–g) $\Rightarrow \dfrac{BD}{BH} = \dfrac{BH}{AB} \Rightarrow BH^2 = BD.AB$

$\Delta CEH \backsim \Delta CHA$ (g–g) $\Rightarrow \dfrac{CE}{CH} = \dfrac{CH}{CA} \Rightarrow CH^2 = CE.CA$



ΔABC vuông tại A và $AH \perp BC$ nên

$AH.BC = AB.AC$ (= $2S_{ABC}$)

Từ các điều trên cho:

$AH^2 = HB.HC$

$\Rightarrow AH^4 = BH^2.HC^2$

$= BD.AB.CE.AC$

$= (BD.CE)(AB.AC) = BD.CE.BC.AH$

Vậy $AH^3 = BD.CE.BC$ (đpcm)

b/ ΔABC vuông cân: Gọi M trung điểm BC $\Rightarrow AM = \dfrac{BC}{2}$

Tứ giác ADHE là hình chữ nhật ($\hat{A} = \hat{D} = \hat{E} = 90^0$) nên $S_{ADHE} = 2S_{ADH}$;

ta có $S_{ABC} = 2S_{ADHE}$ (gt) $= 4S_{ADH} \Rightarrow \dfrac{S_{ADH}}{S_{ABC}} = \dfrac{1}{4}$

$\Delta DAH \backsim \Delta ABC$ (g–g) $\Rightarrow \dfrac{S_{ADH}}{S_{ABC}} = \left(\dfrac{AH}{BC}\right)^2 \le \left(\dfrac{AM}{BC}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $H \equiv M \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A.

Vậy nếu $S_{ABC} = 2S_{ADHE}$ thì ΔABC vuông cân tại A.

BỘ ĐỀ 80

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI GIẢI LƯƠNG THẾ VINH QUẬN 9, TP.HCM (NĂM 2002 – 2003)

(ĐỀ DỰ TRỮ)

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a/ $x^4 + 6x^2 + 8$ b/ $x^4 - 5x^2 + x^3 - 5x$

Bài 2: Giải phương trình và bất phương trình:

a/ $x^2 - 2x - 3 = 0$. b/ $\dfrac{x-1}{x-3} > 0$.

Bài 3:

a/ Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \dfrac{6x^2 - 2x + 1}{x^2}$ $(\forall\ x \neq 0)$

b/ Chứng minh $a^4 + a^3b + ab^3 + b^4 \geq 0$

Bài 4: Cho tam giác ABC có chu vi bằng 18cm, trong đó BC là cạnh lớn nhất. Đường phân giác của góc B cắt AC tại M sao cho: $\dfrac{NA}{NB} = \dfrac{1}{2}$. Tính các cạnh của tam giác ABC.

Bài 5: Cho tam giác ABC có AB = 4, AC = 7, đường trung tuyến AM = 3,5. Tính BC.

Bài 6: Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Các điểm D, E theo thứ tự di chuyển trên AB, AC sao cho BD = AE. Xác định vị trí D, E sao cho:

a/ DE có độ dài nhỏ nhất.

b/ Tứ giác BDEC có diện tích nhỏ nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

a/ $x^4 + 6x^2 + 8 = x^4 + 2x^2 + 4x^2 + 8 = x^2(x^2 + 2) + 4(x^2 + 2)$

$= (x^2 + 2) + (x^2 + 4)$

b/ $x^4 - 5x^2 + x^3 - 5x = x(x^3 - 5x + x^2 - 5)$

$= x[x(x^2 - 5) + 1(x^2 + 5)] = x(x^2 - 5)(x + 1) = x(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})(x + 1)$

Bài 2:

a/ $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow x(x + 1) - 3(x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = -1$; $x = 3$

b/ Ta có: $\dfrac{x-1}{x-3} > 2 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x-3} - 2 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1-2(x-3)}{x-3} > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-(2x-5)}{x-3} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x-5}{x-3} < 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-5>0 \text{ và } x-3<0\\2x-5<0 \text{ và } x-3>0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>\frac{5}{2} \text{ và } x<3\\x<\frac{5}{2} \text{ và } x>3\end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{5}{2}<x<3$$

Vậy $S = \left\{x \middle| \frac{5}{2} < x < 3\right\}$

Bài 3:

a/ Với $x \neq 0$ thì $x^2 > 0$

Cách 1: $A = \frac{6x^2-2x+1}{x^2} = \frac{5x^2+(x^2-2x+1)}{x^2} = 5 + \frac{(x-1)^2}{x^2} \geq 5$

Vì $(x-1)^2 \geq 0$ và $x^2 > 0$ nên $\frac{(x-1)^2}{x^2} \geq 0$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 5

Cách 2: Với mọi $x \neq 0$ ta có:

$$A = \frac{6x^2-2x+1}{x^2} = 6 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 2\frac{1}{x} + 1 + 5$$

$$\left(\frac{1}{x}-1\right)^2 + 5 \geq 5 \text{ (vì } \left(\frac{1}{x}-1\right)^2 \geq 0 \ \forall x \neq 0\text{)}$$

$A = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của min A là 5

b/ Ta có:

$a^4 + a^3b + ab^3 + b^4 = a^3(a+b) + b^3(a+b) = (a+b)(a^3+b^3)$

$= (a+b)^2(a^2 - ab + b^2) \geq 0 \ \forall$ a, b

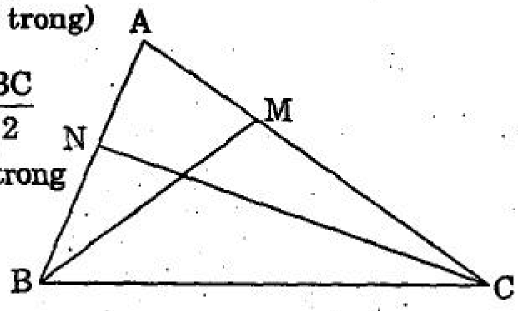
Vì $(a+b)^2 \geq 0$; $a^2 - ab + b^2 = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$

Dấu đẳng thức xảy ra khi: $\left[\begin{array}{l}a+b=0\\a=\frac{b}{2} \text{ và } b=0\end{array}\right. \Leftrightarrow a = -b$

Vậy bất đẳng thức: $a^4 + a^3b + ab^3 + b^4 \geq 0$, được chứng minh .

Bài 4: Xét ΔABC, có BM là đường phân giác trong ABC nên:

$\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{BC}$ (tính chất đường phân giác trong)



mà $\frac{AM}{MC} = \frac{1}{2}$ (gt) $\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow AB = \frac{BC}{2}$

Lý luận tương tự với CN là phân giác trong ACB trong ΔABC ta nhận được:

$\frac{NA}{NB} = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{4} \Rightarrow AC = \frac{3}{4}BC$

Ta lại có: AB + BC + AC = 18

$\Leftrightarrow \dfrac{BC}{2} + BC + \dfrac{3}{4}BC = 18$

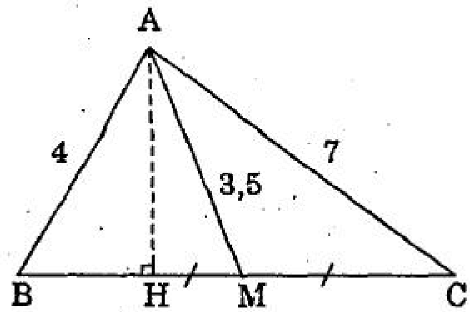
$\Leftrightarrow \dfrac{9}{4}BC = 18 \Leftrightarrow BC = 18\dfrac{4}{9} = 8$ (cm)

Từ đó cho ta: AB = 4 (cm) và AC = 6 (cm)

Vậy ΔABC có: AB = 4 (cm) ; AC = 6 (cm) ; BC = 8 (cm)

Bài 5: Kẻ $AH \perp BC$

Áp dụng định lý Pytago lần lượt với các tam giác vuông, ta có:



$AM^2 = AH^2 + HM^2$

$= \dfrac{(AB^2 - BH^2) + (AC^2 - HC^2)}{2} + HM^2$

$= \dfrac{AB^2 + AC^2}{2} - \dfrac{BH^2 - CH^2}{2} + HM^2$

$= \dfrac{AB^2 + AC^2}{2} - \dfrac{(BH - CH)^2 - 2BH.CH}{2} + HM^2$

$= \dfrac{AB^2 + AC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{2} + BH.CH + HM^2$

$= \dfrac{AB^2 + AC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{2} + (BH - MH)(CM + MN) + HM^2$

$= \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} + BM^2 - MH^2 + MH^2$ (vì $MB = MC = \dfrac{BC}{2}$)

$= \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} + \dfrac{BC^2}{4} = \dfrac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4}$

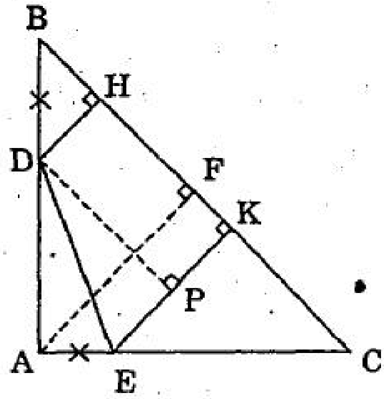
Thay AB = 4, AM = 3,5, AC = 7, ta được:

$4(3,5)^2 - 2\times4^2 - 2\times7^2 = -BC^2 \Leftrightarrow BC^2 = 81 = 9^2 \Leftrightarrow BC = 9$ (BC > 0)

Vậy BC = 9.

Bài 6:

Cách 1:



Kẻ $DH \perp BC$ ($H \in BC$),
$EK \perp BC$ ($K \in BC$)

Ta có: ΔHBD và ΔKCE vuông cân tại H, K (tam giác vuông có một góc bằng 45^0) $\Rightarrow$ BH = DH và EK = KC

Kẻ $AF \perp BC$ ($F \in BC$), do ΔABC vuông cân tại A nên BF = FC và DH // AF // EK (vì cùng vuông góc BC)

Áp dụng hệ quả định lí Talét, ta có: $\frac{BH}{BF} = \frac{BD}{AB}$ và $\frac{CK}{CF} = \frac{EC}{AC}$

Suy ra $\frac{BH}{BF} = \frac{CK}{CF} = \frac{BD}{AB} = \frac{EC}{AC} = \frac{BD + (AC - AE)}{AC}$ (vì AB = AC)

$= \frac{AC}{AC} = 1$ (vì BD = AE)

Do đó BH + CK = BF = $\frac{BC}{2}$ (vì BF = CF = $\frac{BC}{2}$)

Ta có: HK = BC − (BH + CK) = BC − $\frac{BC}{2} = \frac{BC}{2}$

Kẻ DP ⊥ EK ⇒ tứ giác DHKP là hình chữ nhật ($\hat{P} = \hat{H} = \hat{K} = 90^0$)

$\Rightarrow DP = HK = \frac{BC}{2}$

Lại có: $DE \geq DP = \frac{BC}{2}$ (không đổi)

Dấu "=" xảy ra ⇔ E ≡ P ⇔ $\begin{cases} DE // BC \\ DE = \frac{BC}{2} \end{cases}$ ⇔ $\begin{cases} \text{D : trung điểm AB} \\ \text{E:trung điểm AC} \end{cases}$

Vậy min DE = $\frac{BC}{2}$ khi D, E lần lượt là trung điểm AB, AC.

b/ Ta có: $S_{ADE} = \frac{1}{2}AD.AE = \frac{1}{2}AD.BD$ (vì AE = BD)

$= \frac{1}{2}AD(AB - AD) = -\frac{1}{2}(AD^2 - AB.AD)$

$= -\frac{1}{2}(AD^2 - 2\frac{AB}{2}.AD + \frac{AB^2}{4}) + \frac{AB^2}{2} = -\frac{1}{2}(AD - \frac{AB}{2})^2 + \frac{AB^2}{8} \leq \frac{AB^2}{8}$

Vậy $S_{BDEC} = S_{ABC} - S_{ADE} \geq \frac{AB^2}{2} - \frac{AB^2}{8} = \frac{3}{8}AB^2$ (không đổi)

Do đó min $S_{BDEC} = \frac{3}{8}AB^2$ khi D, E lần lượt là trung điểm AB, AC.

Cách 2: Để xác định vị trí của D, E để DE nhỏ nhất, ta đặt AB = AC = a (không đổi), AE = BD = x (0 < x < a)

Áp dụng định lý Pytago đối với ΔADE vuông tại A có

$DE^2 = AD^2 + AE^2 = (a - x)^2 + x^2 = 2x^2 - 2ax + a^2 = 2(x^2 - ax) + a^2$

$= 2(x^2 - 2\frac{a}{2}x + \frac{a^2}{4}) + a^2 - \frac{a^2}{2} = 2(x - \frac{a}{2})^2 + \frac{a^2}{2} \geq \frac{a^2}{2}$

Ta có DE nhỏ nhất ⇔ DE nhỏ nhất

⇔ $x = \frac{a}{2}$ ⇔ BD = AE = $\frac{a}{2}$

⇔ D, E là trung điểm AB, AC

BỘ ĐỀ 81

ĐỀ THI GIẢI HỌC BỔNG – LỚP 8 TRƯỜNG THCS HOA LƯ QUẬN 9, TP.HCM – NĂM HỌC 2003 – 2004

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a/ $(xy + 1)^2 - (x + y)^2$ b/ $(x^2 - 3)^2 + 16$

c/ $x^4 + 2004x + 2003x + 2004$ d/ $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

Bài 2: Tìm x, y biết

a/ $2x^2 + y^2 + 6 = 4(x - y)$

b/ $(2x - 5)^3 + 27(x - 1)^3 + (8 - 5x)^3 = 0$

Bài 3:

Cho hai số a, b thỏa mãn: $2a + b = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = ab$

Bài 4: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn (AB < AC). Gọi H là trực tâm, O là giao điểm ba đường trung trực của tam giác. Gọi D là điểm đối xứng của điểm A qua điểm O.

a/ Chứng minh: Tứ giác BHCD là hình bình hành

b/ Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng: AH = 2.MO

Bài 5: Chứng minh rằng: trong một tam giác có hai cạnh không bằng nhau thì tổng độ dài của cạnh lớn và đường cao tương ứng sẽ lớn hơn tổng độ dài của cạnh nhỏ với đường cao tương ứng.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

a/ $(xy + 1)^2 - (x + y)^2 = (xy + 1 + x + y)(xy + 1 - x - y)$

$= (y + 1)(x + 1)(y - 1)(x - 1)$

b/ $(x^2 - 3)^2 + 16 = x^4 - 6x^2 + 25 = (x^2 + 5)^2 - (4x)^2$

$= (x^2 + 4x + 5)(x^2 - 4x + 5)$

c/ $x^4 + 2004x^2 + 2003x + 2004 = x^4 - x + 2004x^2 + 2004x + 2004$

$= x(x^3 - 1) + 2004(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2004)$

d/ $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b) - 3abc$

$= (a + b + c)(a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab)$

$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$

Bài 2:

a/ $2x^2 + y^2 + 6 = 4(x - y)$

$2x^2 - 4x + 2 + y^2 + 4x + 4 = 0$

$2(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 0$

có $(x - 1)^2 \geq 0$, $(y + 2)^2 \geq 0$

Do đó $x - 1 = 0$ và $y + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1, y = -2$

b/ $(2x - 5)^3 + 27(x - 1)^3 + (8 - 5x)^3 = 0$

$\Leftrightarrow (2x - 5)^3 + (3x - 3)^3 + (8 - 5x)^3 = 0$

có $a + b + c = 0 \Leftrightarrow c = -(a + b)$

Chứng minh được: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Áp dụng: $(2x - 5)^3 + (3x - 3)^3 + (8 - 5x)^3 = 0$

$\Leftrightarrow 3(2x - 5)(3x - 3)(8 - 5x) = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2}, x = 1, x = \frac{8}{5}$

Bài 3:

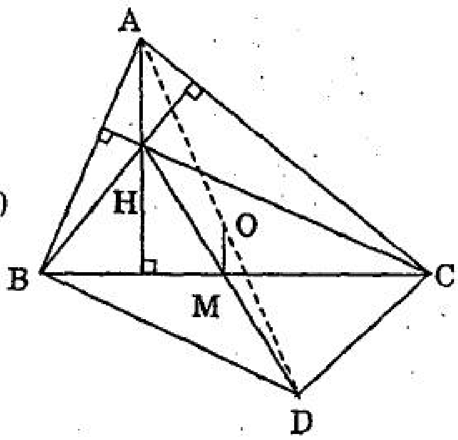
$2a + b = 6 \Rightarrow b = 6 - 2a$

$P = ab = a(6 - 2a) = 6a - 2a^2 = \frac{9}{2} - 2(a - \frac{3}{2})^2 \leq \frac{9}{2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$; b $6 - 2\frac{3}{2} = 3$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{9}{2} \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$ và $b = 3$

Bài 4:



a/ $AO = OC = OD \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại C

$\Rightarrow DC \perp AC$ mà $BH \perp AC$

$\Rightarrow BH // DC$

tương tự $CH // DB$

$\Rightarrow$ BHCD là hình bình hành (2 cặp cạnh //)

b/ M là trung điểm BC

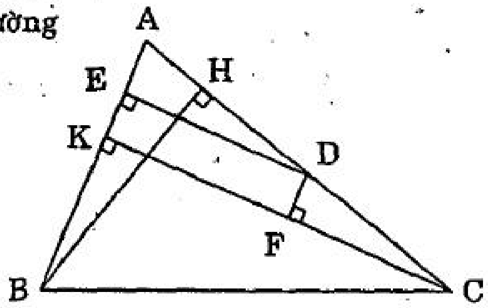
$\Rightarrow$ M là trung điểm HD

O là trung điểm AD

$\Rightarrow$ OM là đường trung bình ΔACD

$\Rightarrow OM = \frac{1}{2}AH$ hay $AH = 2OM$

Bài 5:



Không mất tính tổng quát, giả sử $AB < AC$, BH là đường cao ứng với AC, CK là đường cao ứng với AB

Trên AC lấy D sao cho $AB = AD$;

kẻ $DE \perp AB$, $DF \perp CK$

$\Rightarrow DE = KF$ (tính chất đường chắn)

dễ dàng chứng minh được

$\Delta ABH = \Delta ADE$ (h–g)

$\Rightarrow BH = DE \Rightarrow BH = KF$

ΔDFC vuông tại F $\Rightarrow FC < DC$ (đường xiên > đường vuông góc)

$\Rightarrow AB + CK = AB + KF + FC < AD + BH + DC$

$\Rightarrow AB + CK < AC + BH$

BỘ ĐỀ 82

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI GIẢI LƯƠNG THẾ VINH QUẬN 9, TP.HCM – NĂM HỌC 2003 – 2004

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a/ $60x + 18x^2 - 6x^3$ b/ $x^8 - 2^8$

Bài 2: Giải phương trình, bất phương trình:

a/ $\dfrac{x+3}{x-4} + \dfrac{x-1}{x-2} = \dfrac{2}{6x-8-x^2}$ b/ $(x + 2)^2 (x + 4)(x - 1) \geq 0$

c/ $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x^3 + 14x^2 + 24x = 0$

Bài 3:

a/ Mười vận động viên tham gia chơi quần vợt. Cứ hai người trong họ chỉ chơi đúng một ván. Người thứ nhất thắng x_1 ván và thua y_1 ván, người thứ hai thắng x_2 ván và thua y_2 ván, ..., người thứ mười thắng x_{10} ván và thua y_{10} ván.

Chứng minh rằng: $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{10}^2 = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_{10}^2$

b/ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$A = xy(x - 2)(y + 6) + 12x^2 - 24x + 3y^2 + 18y + 36$

Bài 4: Cho tam giác ABC cân (AB = AC). gọi O là trung điểm của BC, trên cạnh AB lấy điểm D và trên cạnh AC lấy điểm E sao cho: $OB^2 = BD.CE$.

a/ Chứng minh tam giác OBD và tam giác ECO đồng dạng

b/ Chứng minh khoảng cách OH từ O đến đường thẳng DE có độ dài không đổi khi D, E di động trên AB, AC.

Bài 5: Cho tam giác ABC vuông tại A, G là trọng tâm, BM là đường phân giác của tam giác ABC. Cho GM $\perp$ AC. Chứng minh BM vuông góc với trung tuyến AD.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

a/ $60x + 18x^2 - 6x^3 = -6x(x^2 - 3x - 10) = -6x[(x^2 - 5x) + (2x - 10)]$

$= -6x[x(x - 5) + 2(x - 5)] = -6x(x - 5)(x + 2)$

b/ $x^8 - 2^8 = (x^4)^2 - (2^4)^2 = (x^4 + 2^4)(x^4 - 2^4) = (x^4 + 16)(x^2 - 2^2)(x^2 + 2^2)$

$= (x^4 + 16)(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$

Bài 2:

a/ $\dfrac{x+3}{x-4} + \dfrac{x-1}{x-2} = \dfrac{2}{6x-8-x^2} \Leftrightarrow \dfrac{x+3}{x-4} + \dfrac{x-1}{x-2} = \dfrac{-2}{(x-2)(x-4)}$ (1)

Điều kiện: $x \neq 2$ và $x \neq 4$

Quy đồng và khử mẫu, ta có:

$(x + 3)(x - 2) + (x - 4)(x - 1) = -2 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 + x^2 - 5x + 4 = -2$

$\Leftrightarrow 2x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$

$x = 0$ thỏa Điều kiện, $x = 2$ không thỏa Điều kiện, nên phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

b/ ***Nhận xét:*** $x = -2$ là một nghiệm của bất phương trình

Với $x \neq 2$ thì $(x + 2)^2 > 0$, khi đó bất phương trình đã cho ứng với:

$$(x + 4)(x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x+4) \geq 0 \wedge (x-1) \geq 0 \\ (x+4) \leq 0 \wedge (x-1) \leq 0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x \geq 4 \wedge x \geq 1 \\ x \leq 4 \wedge x \leq 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x \geq 1 \\ x \leq -4\end{array}\right.$$

Kết hợp lại thì $x = -2$ hoặc $x \leq -4$ hoặc $x \geq 1$ là nghiệm của phương trình

c/ $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x^3 + 14x^2 + 24x = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 4x + 8)^2 + 2.\frac{3}{2}3x(x^2 + 4x + 8) = -2x^2 + \frac{9}{4}x^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 4x + 8 + \frac{3}{2}x)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2 + 4x + 8 + \frac{3}{2}x = \frac{x}{2} \\ x^2 + 4x + 8 + \frac{3}{2}x = -\frac{x}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2 + 5x + 8 = 0 \\ x^2 + 6x + 8 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow (x + 2)(x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

hay $x = -4$ $\left(x^2 + 4x + 8 = (x + \frac{5}{2}x)^2 + \frac{7}{4} > 0\ \forall x\right)$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x = -2$, $x = -4$.

Bài 3:

a/ Ta nhận thấy mỗi vận động viên chơi đúng 9 ván, tức là $x_1 + y_1 = \ldots = x_{10} + y_{10} = 9$

Ngoài ra: $x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = y_1 + y_2 + \ldots + y_{10}$ (vì một ván đấu chỉ có thắng hoặc thua).

Xét hiệu: $(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{10}^2) - (y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{10}^2)$

$= (x_1^2 - y_1^2) + (x_2^2 - y_2^2) + \ldots + (x_{10}^2 + y_{10}^2)$

$= (x_1 + y_1)(x_1 - y_1) + \ldots + (x_{10} + y_{10})(x_{10} - y_{10})$

$= 9(x_1 - y_1) + 9(x_1 - y_1) + \ldots + 9(x_{10} - y_{10})$

$= 9[(x_1 + \ldots + x_{10}) - (y_1 + \ldots + y_{10})] = 0$

Suy ra: $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{10}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{10}^2$ (đpcm)

b/ Ta có: $A = xy(x - 2)(y + 6) + 12x(x - 2) + 3y(y + 6) + 36$

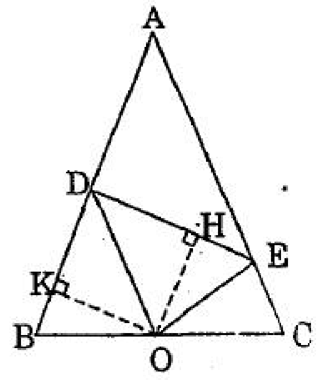
$= x(x - 2)[y(y + 6) + 12] + 3[y(y + 6) + 12] = (y^2 + 6y + 12)(x^2 - 2x + 3)$

$= [(y + 3)^2 + 3][(x - 1)^2 + 2] \geq 3.2 = 6$

Vì $(y + 3)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (y + 3)^2 + 3 \geq 3$ và $(x - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + 2 \geq 2$

Dấu đẳng thức xảy ra khi: $x = 1$ và $y = 3$. Vậy min $A = 6$

Bài 4:



a/ Từ giả thiết cho $OB^2 = BD.CE$

$\Rightarrow OB.OC = BD.CE \Rightarrow \dfrac{OB}{EC} = \dfrac{BD}{OC}$

Xét ΔOBD và ΔEOC có:

$\widehat{B} = \widehat{C}$ (ΔABC cân tại A) và

$\dfrac{OB}{EC} = \dfrac{BD}{OC}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta OBD \backsim \Delta EOC$ (c–g–c) $\Rightarrow \widehat{BDO} = \widehat{COE}$ và $\dfrac{OD}{BD} = \dfrac{OE}{OC} = \dfrac{OE}{OB}$

b/ Ta có: $\widehat{DOC} = \widehat{DOE} + \widehat{COE}$ và $\widehat{DOC} = \widehat{OBD} + \widehat{BDO}$ (góc ngoài tại O của ΔOBD) mà $\widehat{BDO} = \widehat{COE}$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \widehat{DOE} = \widehat{OBD}$

Xét ΔODE và ΔBDO có: $\widehat{DOE} = \widehat{OED}$ (chứng minh trên) và $\dfrac{OD}{BD} = \dfrac{OE}{OB}$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \Delta ODE$ và ΔBDO (c–g–c)

Do đó: $\widehat{BDO} = \widehat{ODE}$ nghĩa là DO là phân giác $\widehat{BDE} \Rightarrow OH = OK$ (với $OK \perp AB$) mà OK không đổi nên OH không đổi khi D, E di động trên AB, AC.

Bài 5:

Gọi I là giao điểm của BM và AD, H là trung điểm AC $\Rightarrow DH \,//\, AB$ và $DH = \dfrac{AB}{2}$ (H là đường trung bình của ΔABC)

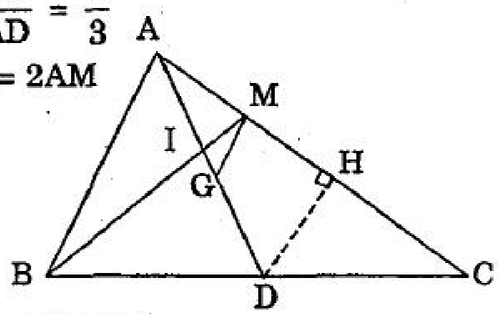
Lại có: $GM \,//\, AB$ (cùng $\perp AC$) $\Rightarrow GN \,//\, DH$. Áp dụng hệ quả định lí Talét ta có:

ΔADH có $GM \,//\, DH$: $\dfrac{GM}{DH} = \dfrac{AG}{AD} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{GM}{DH} = \dfrac{1}{3}$ (vì $AB = 2DH$)

ΔABI có $GM \,//\, AB$: $\dfrac{GM}{AI} = \dfrac{GM}{AB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{GM + AI}{AI} \Rightarrow AI = \dfrac{3.AG}{4} = \dfrac{3}{4}.\dfrac{2}{3}$

$AD = \dfrac{AD}{2} \Rightarrow$ I là trung điểm AD. Vậy ΔABD cân tại B nên BI vừa là phân giác vừa là đường cao. Do đó $BM \perp AD$.

Cách khác: ΔADH có $GM \,//\, DH$: $\dfrac{AM}{AH} = \dfrac{AG}{AD} = \dfrac{2}{3}$



$\Rightarrow 3AM = 2AH = AC = AM + MC \Rightarrow MC = 2AM$

Áp dụng tính chất phân giác với

ΔABC: $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{MC}{MA} = 2$

$\Rightarrow AB = \dfrac{BC}{2} = BD$ (D trung điểm BC)

Vậy ΔABD cân tại B nên BI vừa là phân giác vừa là đường cao. Do đó: $BM \perp AD$ (đpcm)

BỘ ĐỀ 83

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI GIẢI LƯƠNG THẾ VINH QUẬN 9, TP.HCM – NĂM HỌC 2003 – 2004

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a/ $18x^3 - \frac{8}{25}x$ b/ $4x^2 + 22x + 30$

c/ $x^6 + x^4 + x^2y^2 + y^4 - y^6$

Bài 2: Giải phương trình:

a/ $\frac{1}{x-1} + \frac{2x^2-5}{x^3-1} = \frac{4}{x^2+x+1}$

b/ $|x^2 - 3x + 3| = 3x - x^2 - 1$

c/ Tìm các giá trị của m để phương trình (ẩn số x)

$2x^2 - (2m + 7)x + 10m - 15 = 0$ có hai nghiệm phân biệt đều dương

Bài 3: a/ Cho $a^3 - 3ab^2 = 5$ và $b^3 - 3a^2b = 10$. Tính $a^2 + b^2$

b/ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 + y^2 + xy + x + y$

Bài 4: Cho ba phân thức: $\frac{a-b}{1+ab}, \frac{b-c}{1+bc}, \frac{c-a}{1+ac}$. Chứng minh rằng tổng ba phân thức này bằng tích của chúng.

Bài 5: Cho đoạn thẳng AB và điểm I nằm giữa hai điểm A và B. Trong cùng một mặt phẳng bờ AB, kẻ hai tia Ax và By vuông góc với AB. Trên Ax lấy điểm C, tia vuông góc với IC tại I cắt By tại D.

a/ Chứng minh AC.DB = IA.IB

b/ Ba điểm A, B, c cố định, xác định vị trí của I để diện tích tứ giác ABDC đạt giá trị lớn nhất.

Bài 6: Gọi M và N lần lượt là trung điểm các cạnh AD và BC của hình chữ nhật ABCD. Trên tia đối của tia DC lấy điểm P bất kì. Giao điểm của AC với đường PM là Q. Chứng minh rằng: $\widehat{QMN} = \widehat{MNP}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

a/ $18x^3 - \frac{8}{25}x = 2x(9x^2 - \frac{4}{25}) = 2x(3x + \frac{2}{5})(3x - \frac{2}{5})$

b/ $4x^2 + 22x + 30 = 2(x^2 + 11x + 15) = 2[(2x^2 + 6x) + (5x + 15)]$

$= 2[2x(x + 3) + 5(x + 3)] = 2(x + 3)(2x + 5)$

c/ $x^6 + x^4 + x^2y^2 + y^4 - y^6 = (x^6 - y^6) + (x^4 + x^2y^2 + y^4)$

$= (x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4) + (x^4 + x^2y^2 + y^4)$

$= (x^4 + x^2y^2 + y^4)(x^2 - y^2 + 1)$

$= [(x^2 - y^2)^2 - x^2y^2](x^2 - y^2 + 1)$

$= (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy)(x^2 - y^2 + 1)$

Bài 2:

a/ Ta có: $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$

$x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0\ \forall x.$ TXĐ: $x \neq 1$

Phương trình đã trở thành:

$x^2 + x + 1 + 2x^2 - 5 = 4(x-1) \Leftrightarrow 3x^2 + x - 4 = 4x - 4$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 3x = 0 \quad \Leftrightarrow 3x(x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in \text{TXĐ} \\ x = 1 \notin \text{TXĐ} \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 0$

b/ ***Nhận xét:*** $x^2 - 3x + 3 = (x - \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0\ \forall x$

Suy ra $|x^2 - 3x + 3| = x^2 - 3x + 3$

Phương trình đã cho tương đương

$x^2 - 3x + 3 = 3x - x^2 - 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \qquad \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = 1$; $x = 2$

c/ Ta có: $2x^2 - (2m+7)x + 10m - 15 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 3x - 15 - 2mx + 10m = 0$

$\Leftrightarrow 2x(x-5) + 3(x-5) - 2m(x-5) = 0$

$\Leftrightarrow (x-5)(2x+3-2m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = \dfrac{2m-3}{2} > 0 \end{array}\right.$

Vậy $\forall m$ phương trình luôn luôn có nghiệm $x = 5 > 0$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt đều dương

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2m-3}{2} \neq 5 \\ \dfrac{2m-3}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq \dfrac{13}{2}$ và $m > \dfrac{3}{2}$

Bài 3:

a/ Ta có: $a^3 - 3ab^2 = 5 \Rightarrow (a^3 - 3ab^2)^2 = a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = 25$

$b^3 - 3a^2b = 10 \Rightarrow (b^3 - 3a^2b)^2 = b^6 - 6a^2b^4 + 9a^4b^2 = 100$

Suy ra $125 = a^6 + b^6 + 3a^2b^4 - 3a^4b^2 = (a^2 + b^2)^3$

Do đó: $a^2 + b^2 = 5$

b/ Ta có: $A = x^2 + y^2 + xy + x + y = x^2 + (y+1)x + y^2 + y$

$= \underbrace{x^2 + 2.\frac{y+1}{2}x + \frac{(y+1)^2}{4}} + y^2 + y - \frac{(y+1)^2}{4}$

$= (x + \frac{y+1}{2})^2 + \frac{4y^2 + 4y - y^2 - 2y - 1}{4}$

$$= (x + \frac{y+1}{2})^2 + \frac{1}{4}(3y^2 + 2y) - \frac{1}{4}$$

$$= (x + \frac{y+1}{2})^2 + \frac{3}{4}(y^2 + 2.\frac{1}{3}y + \frac{1}{9}) - \frac{1}{4} - \frac{1}{12}$$

$$= (x + \frac{y+1}{2})^2 + \frac{3}{4}(y + \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{3} \geq -\frac{1}{3}$$

$$A = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{y+1}{2} = 0 \\ y + \frac{1}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases} \text{ Vậy min } A = -\frac{1}{3}$$

Bài 4: Với $ab + 1 \neq 0$, $bc + 1 \neq 0$, $ac + 1 \neq 0$, ta có:

$$\frac{a-b}{1+ab} + \frac{b-c}{1+bc} + \frac{c-a}{1+ac} = \frac{a-b}{1+ab} + \frac{b-a+a-c}{1+bc} + \frac{c-a}{1+ac}$$

$$= \frac{a-b}{1+ab} - \frac{a-b}{1+bc} - \frac{c-a}{1+bc} + \frac{c-a}{1+ac}$$

$$= (a-b)(\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc}) + (c-a)(\frac{1}{1+ac} + \frac{1}{1+bc})$$

$$= (a-b)\frac{1+bc-1-ab}{(1+ab)(1+bc)} + (c-a)\frac{1+bc-1-ac}{(1+bc)(1+ac)}$$

$$= \frac{b(a-b)(c-a)}{(1+ab)(1+bc)} + \frac{c(c-a)(b-a)}{(1+bc)(1+ac)}$$

$$= \frac{b(a-b)(c-a)}{(1+ab)(1+bc)(1+ac)}[b(1+ac) - c(1+ab)]$$

$$= \frac{(a-b)(c-a)(b+abc-c-abc)}{(1+ab)(1+bc)(1+ac)} = \frac{a-b}{1+ab}\,\frac{b-c}{1+bc}\,\frac{c-a}{1+ac} \text{ (đpcm)}$$

Bài 5:

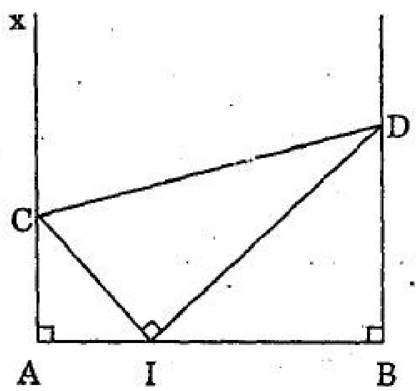
a/ $AC.BD = IA.IB$

Xét ΔAIC và ΔBDI có: $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^0$

$\widehat{AIC} = \widehat{BDI}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$\Rightarrow \Delta AIC$ và ΔBDI (g–g)

$\Rightarrow \frac{IA}{BD} = \frac{AC}{IB} \Rightarrow AC.BD = IA.IB$ (đpcm)



b/ Ta có: ABDC là hình thang vuông (AC // BD vì cùng vuong góc với AB và $\widehat{A} = 90^0$)

nên $S_{ABDC} = \frac{AC + BD}{2}.AB$

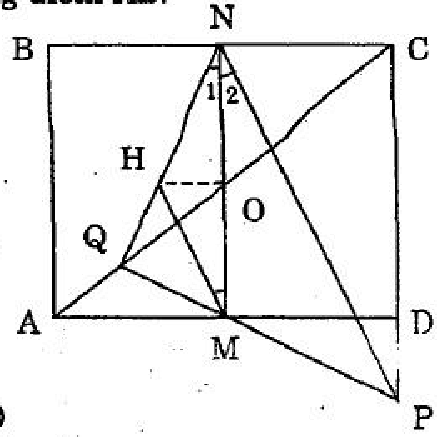
Do A, B, C cố định nên AB, AC không đổi

Vậy S_{ABDC} lớn nhất $\Rightarrow$ BD lớn nhất mà: $\begin{cases} BD = \dfrac{IA.IB}{AC} \text{(chứng minh trên)} \\ IA.IB = IA(AB - IA) = -(IA^2 - AB.IA) = -(IA - \dfrac{AB}{2})^2 + \dfrac{AB^2}{4} \le \dfrac{AB^2}{4} \end{cases}$

$\Rightarrow BD \le \dfrac{AB^2}{4AC}$ (không đổi)

Suy ra S_{ABDC} lớn nhất $\Leftrightarrow IA = \dfrac{AB}{2} \Leftrightarrow$ I trung điểm AB.

Bài 6:



Cách 1: Gọi $AC \cap MN = O$

$\Rightarrow$ O là trung điểm MN

Kẻ đường thẳng vuông góc MN tại O cắt QN tại H $\Rightarrow$ OH là trung trực MN nên HN = HM $\Rightarrow$ ΔHMN cân tại H $\Rightarrow$ $\widehat{N}_1 = \widehat{HMN}$ (1)

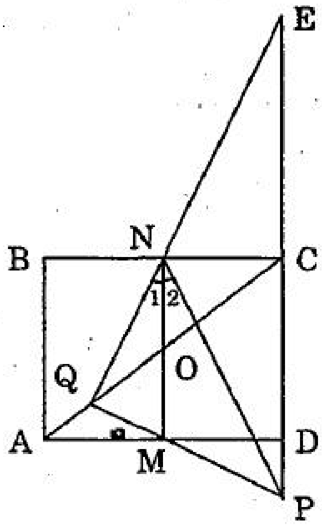
Do OH // NC (vì cùng $\perp$ MN) nên $\dfrac{QH}{HN} = \dfrac{QO}{OC}$

OM // CD nên: $\dfrac{QO}{OC} = \dfrac{QM}{MP}$. Vậy $\dfrac{QH}{HN} = \dfrac{QM}{MP}$

$\Rightarrow$ HM // NP

Do đó $\widehat{N}_2 = \widehat{HMN}$ (so le trong) (2)

Từ (1) và (2) cho $N_1 = N_2$ nghĩa là QNM = MNP (đpcm)



Cách 2: Gọi $AC \cap MN = 0 \Rightarrow 0$ là trung điểm MN và MN // PE

$QN \cap PC = \widehat{E}$. Suy ra: $\widehat{N}_1 = \widehat{E}$ (đồng vị, MN //CE) (1)

$\widehat{N}_2 = \widehat{P}$ (so le trong, MN // PE) (2)

Mặt khác vì MN // PE nên:

$\dfrac{ON}{CE} = \dfrac{OQ}{QC} = \dfrac{OM}{CP}$, ON = OM (chứng minh trên)

$\Rightarrow$ CE = CP $\Rightarrow$ ΔNPE cân tại N (vì có NC là đường cao vừa là trung tuyến)

$\Rightarrow \widehat{E} = \widehat{P}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) cho $\widehat{N}_1 = \widehat{N}_2$, nghĩa là $\widehat{QMN} = \widehat{MNP}$ (đpcm)

BỘ ĐỀ 84

ĐỀ THI GIẢI LÊ QUÝ ĐÔN
QUẬN TÂN BÌNH, TP.HCM – NĂM HỌC 2002 – 2003

Bài 1: Cho biểu thức $A = \dfrac{x^4 + 2x^2 - 3}{3x^3 - x^2 - 3x + 1}$

1) Tìm điều kiện có nghĩa của A.

2) Tìm điều kiện của x để A âm.

Bài 2:

1) Giải phương trình: $\left(\dfrac{1}{3}x - 2\right)^3 + \left(\dfrac{3}{2}x - 7\right)^3 + (9 - x)^3 = 0$

2) Chứng minh rằng: $1 \le \dfrac{2(x^2 + x + 1)}{x^2 + 1} \le 3$

Bài 3:

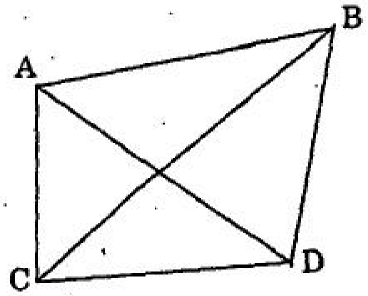
1) Cho hình bình hành ABCD. Gọi M là điểm bất kỳ di động trên cạnh CD và N là điểm bất kỳ di động trên cạnh BC sao cho BM = DN. Hai đường thẳng BM và DN cắt nhau tại P. Chứng minh PA là tia phân giác của góc BPD.

2) Cho tam giác ABC với AB = 4cm, AC = 8cm, BC = 6cm

Hai tia phân giác trong AD và BE cắt nhau tại O.

Chứng minh rằng đoạn thẳng nối điểm O với trọng tâm G của tam giác ABC song song với BC.

Bài 4: Có bốn ngôi làng A, B, C, D nằm ở vị trí như hình vẽ bên. Người ta cần xây dựng một ngôi chợ chung cho bốn làng đó. Hỏi phải xây dựng chợ ở vị trí nào để tổng quãng đường từ chợ đến bốn ngôi làng ngắn nhất.



HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $3x^3 - x^2 - 3x + 1 = x^2(3x - 1) - (3x - 1) = (3x - 1)(x^2 - 1)$
$= (3x - 1)(x + 1)(x - 1) \neq 0$

$\Leftrightarrow 3x - 1 \neq 0,\ x + 1 \neq 0,\ x - 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq \dfrac{1}{3},\ x \neq -1,\ x \neq 1.$

A có nghĩa $\Leftrightarrow x \neq \dfrac{1}{3},\ x \neq -1,\ x \neq 1$

2) $A = \dfrac{x^4 + 2x^2 - 3}{3x^3 - x^2 - 3x + 1} = \dfrac{(x^4 + 2x^2 + 1) - 4}{(3x - 1)(x^2 - 1)} = \dfrac{(x^2 + 1)^2 - 2^2}{(3x - 1)(x^2 + 1)}$

$$= \frac{(x^2+1+2)(x^2+1-2)}{(3x-1)(x^2-1)} = \frac{x^2+3}{3x-1}$$

$A < 0$ khi $3x - 1 < 0$, $x \neq \frac{1}{3}$, $x \neq \pm 1$

$\Leftrightarrow 3x < 1$, $x \neq \frac{1}{3}$, $x \neq \pm 1 \quad \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$ và $x \neq -1$

Vậy A âm khi $x < \frac{1}{3}$ và $x \neq -1$

Bài 2:

1) $\left(\frac{1}{3}x-2\right)^3 + \left(\frac{3}{2}x-7\right)^3 + (9-x)^3 = 0$

$\left(\frac{1}{3}x-2\right)^3 + \left(\frac{3}{2}x-7\right)^3 + [(2-\frac{1}{3}x) + (7-\frac{2}{3}x)]^3 = 0$

$\left(\frac{1}{3}x-2\right)^3 + \left(\frac{3}{2}x-7\right)^3 + (2-\frac{1}{3}x)^3 + (7-\frac{2}{3}x)^3 + 3(2-\frac{1}{3}x)(7-\frac{2}{3}x)$

$(2-\frac{1}{3}x+7-\frac{2}{3}x) = 0$

$3(2-\frac{1}{3}x)(7-\frac{2}{3}x)(9-x) = 0$

$2-\frac{1}{3}x = 0$ hoặc $7-\frac{2}{3}x = 0$ hoặc $9-x = 0$

$-\frac{1}{3}x = -2$ hoặc $-\frac{2}{3}x = -7$ hoặc $-x = -9$

$x = 6$ hoặc $x = \frac{21}{2}$ hoặc $x = 9$

Nghiệm của phương trình là $x = 6$; $x = \frac{21}{2}$; $x = 9$

b/ $\frac{2(x^2+x+1)}{x^2+1} = \frac{2x^2+x+1}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x^2+1} + \frac{x^2+2x+1}{x^2+1} = 1 + \frac{(x^2+1)^2}{x^2+1} \geq 1$

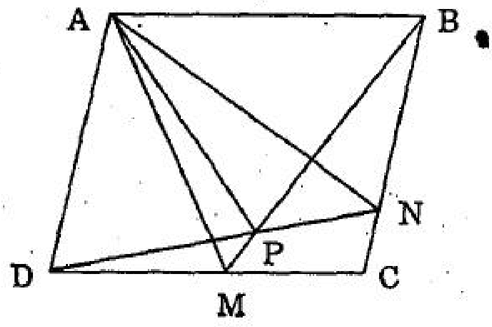
Mặt khác $\frac{2(x^2+x+1)}{x^2+1} = \frac{2x^2+2x+2}{x^2+1}$

$$= \frac{3x^2+3}{x^2+1} + \frac{-x^2+2x-1}{x^2+1} = 3 - \frac{(x^2+1)^2}{x^2+1} \leq 1$$

Vậy $1 \leq \frac{2(x^2+x+1)}{x^2+1} \leq 3$

Bài 3:

1) Gọi h, t lần lượt là độ dài đường cao ứng với cạnh AB, AD của hình bình hành ABCD.



Ta có: $S_{ABCD} = h.AB = t.AD$

mà $S_{ABCD} = \frac{1}{2}h.AB$ và $S_{NAD} = \frac{1}{2}t.AD$

Do đó: $S_{MAB} = S_{NAD}$

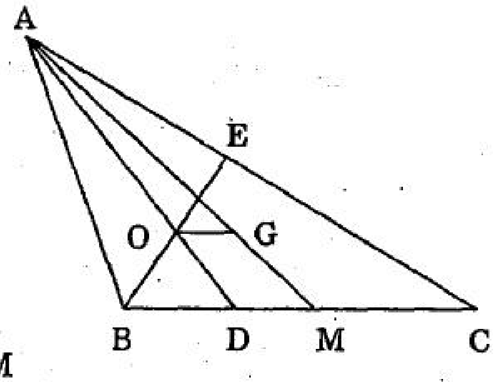
Mặt khác: BM = DN (gt)

nên độ dài các đường cao vẽ từ A đến BM và DN bằng nhau:

⇒ A thuộc tia phân giác của góc BPD

⇒ PA là tia phân giác của góc BPD .

2) ΔABC có AD là đường phân giác nên $\frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC}$



$\Rightarrow \frac{DB}{AB} = \frac{DB + DC}{AB + AC}$

Do đó $\frac{DB}{4} = \frac{6}{4+8}$

⇒ DB = 2cm

ΔABC có BO là đường phân giác nên:

$\frac{OA}{AB} = \frac{OD}{DB} \Rightarrow \frac{OA}{AD} = \frac{AB}{DB} = 2cm$

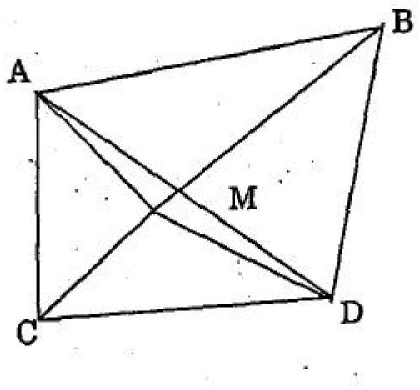
Gọi AM là đường trung tuyến của ΔABC.

⇒ G thuộc đoạn thẳng AM và AG = 2GM

Do đó $\frac{OA}{OD} = \frac{AG}{GM} (= 2)$, áp dụng định Talét lí đảo vào ΔADM, ta có OG//DM. Vậy OG // BC.

Bài 4:

Gọi M là vị trí chợ



Xét ba điểm M, A, D ta có: MA + MD ≥ BC

Xét ba điểm M, B, C ta có: MB + MC ≥ BC

Do đó MA + MB + MC + MD ≥ AD + BC, AD + BC không đổi

Dấu "=" xảy ra ⇔ $\begin{cases} \text{M nằm giữa A và D} \\ \text{M nằm giữa B và C} \end{cases}$

⇔ M là giao điểm của AD và BC.

Vậy M là giao điểm của AD và BC thì tổng khoảng cách từ chợ đến bốn ngôi làng ngắn nhất.

BỘ ĐỀ 85

ĐỀ THI GIẢI LÊ QUÝ ĐÔN – TRƯỜNG THCS LÊ QUÝ ĐÔN QUẬN 3, TP.HCM – NĂM HỌC 2002 – 2003

Bài 1: Chứng tỏ biểu thức sau đây dương với mọi $x \neq \pm 1$

$$A = \left[\left(\frac{1-x^3}{1-x}+x\right)\left(\frac{1+x^3}{1+x}-x\right)\right]: \frac{(1-x^2)^2}{1+x^2}$$

Bài 2: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a/ $4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$ b/ $x^5 + x + 1$

Bài 3:

a/ Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$

b/ Giải phương trình ẩn x sau: $\frac{x-ab}{a+b} + \frac{x-bc}{b+c} + \frac{x-ca}{c+a} \geq a+b+c$

Bài 4: Cho hình chữ nhật ABCD, vẽ BH vuông góc với AC ($H \in AC$). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AH và CD. Chứng minh rằng: $BM \perp MN$.

Bài 5: Cho tam giác ABC nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Chứng minh rằng:

a/ $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$

b/ EB là tia phân giác của góc DEF.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

$$A = \left[\frac{(1-x)(1+x+x^2)}{1-x}+x\right]\left[\frac{(1-x)(1-x+x^2)}{1+x}-x\right]: \frac{(1-x^2)^2}{1+x^2}$$

$$= (1 + x + x^2 + x)(1 - x + x^2 - x): \frac{[(1+x)(1-x)]^2}{1+x^2}$$

$$= (1 + x)^2(1 - x)^2: \frac{(1+x)^2(1-x)^2}{1+x^2} = 1 + x^2$$

Vì $x^2 \geq 0$. Do đó $A = 1 + x^2 > 0$

Bài 2:

a/ $4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$

$= (2ab - a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2) = [(a + b)^2 - c^2][c^2 - (a - b)^2]$

$= (a + b + c)(a + b - c)(c + a - b)(c - a + b)$

b/ $x^5 + x + 1 = x^5 + x^4 + x^3 - x^4 - x^3 - x^2 + x^2 + x + 1$

$= x^3(x^2 + x + 1) - x^2(x^2 + x + 1) + 1(x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$

Bài 3:

a/ Bài toán phụ: Cho x, y, z > 0

Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{y+z} \geq \frac{4x-y-z}{4}$

$[2x-(y+z)]^2 \geq 0 \Rightarrow 4x^2 - 4x(y+z) + (y+z)^2 \geq 0$

$\Rightarrow 4x^2 \geq 4x(y+z) + (y+z)^2 \Rightarrow \frac{x^2}{y+z} \geq \frac{4x-y-z}{4}$

Áp dụng bài toán phụ trên ta có:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{4a-b-c}{4} + \frac{4b-c-a}{4} + \frac{4c-a-b}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

b/ $\frac{x-ab}{a+b} + \frac{x-bc}{b+c} + \frac{x-ca}{c+a} = a+b+c$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-ab}{a+b} - c\right) + \left(\frac{x-bc}{b+c} - a\right) + \left(\frac{x-ca}{c+a} - b\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-ab-ca-bc}{a+b} + \frac{x-bc-bc-ca}{b+c} + \frac{x-ca-bc-ab}{c+a} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-ab-ca-bc)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) = 0$$

* $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = 0$

Ta có: $0(x-ab-ca-bc) = 0$

x tùy ý

* $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \neq 0$

Ta có: $x - ab - ca - bc = 0$

$x = ab + ca + bc$

Kết luận: $a = -b$ hoặc $b = -c$ hoặc $c = -a$

Phương trình vô nghiệm: $a \neq -b$; $b \neq -c$; $c \neq -a$

$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = 0$

Phương trình có nghiệm tùy ý

$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \neq 0$

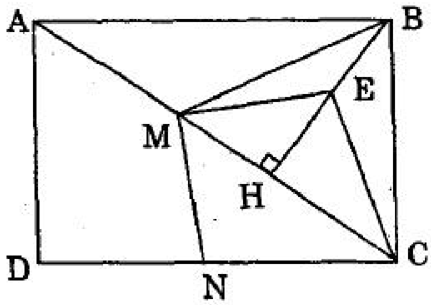
Phương trình có nghiệm $x = ab + ca + bc$

Bài 4:

Gọi E là trung điểm của BH

Ta có ME là đường trung bình của ΔHAB

$\Rightarrow$ ME // AB và ME = $\frac{AB}{2}$



Mà AB $\perp$ BC, NC = $\frac{DC}{2}$,

AB = DC, AB // BC

Do đó ME // NC, ME = NC, ME $\perp$ BC

Tứ giác NECN có ME // NC và ME = NC nên là hình bình hành.

$\Rightarrow$ MN // CE

ΔMBC có ME và BH là hai đường cao cắt nhau tại E.

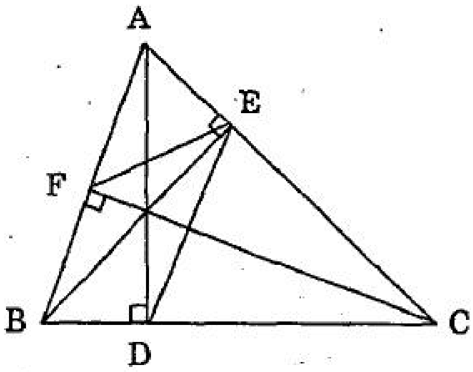
$\Rightarrow$ E là trực tâm ΔMBC $\Rightarrow$ CE $\perp$ MB

MN // CE, CE $\perp$ MB $\Rightarrow$ BM $\perp$ MN

Bài 5:

a/ Xét ΔABE và ΔACF có $\widehat{BAE}$ (chung) ; $\widehat{AEB} = \widehat{AFC}$ $(= 90^0)$

Do đó $\Delta ABE \backsim \Delta ACF$



$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AB}$

Xét ΔAEF và ΔABC có

$\frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB}$; $\widehat{EAF}$ (chung)

Do đó $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$

$\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ABC}$

b/ Theo câu a/ ta có $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$

Chứng minh tương tự câu a/ ta có $\widehat{DEC} = \widehat{ABC}$

do đó $\widehat{AEF} = \widehat{DEC}$ $(= \widehat{ABC})$

Mà $\widehat{AEF} + \widehat{BEF} = 90^0$; $\widehat{DEC} + \widehat{BED} = 90^0$

Suy ra $\widehat{BEF} = \widehat{BED}$

Vậy EB là tia phân giác của góc $\widehat{DEF}$.

BỘ ĐỀ 86

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN 8 TRƯỜNG THCS NGUYỄN GIA THIỀU, QUẬN TÂN BÌNH, TP.HCM – NĂM HỌC 2002 – 2003

Bài 1: Cho biểu thức: $A = \dfrac{(x^2+y)(\frac{1}{4}+y) + x^2y^2 + \frac{3}{4}(\frac{1}{3}+y)}{x^2y^2 + 1 + (x^2-y)(1-y)}$

a/ Tìm tập xác định của A.

b/ Chứng minh rằng giá trị của A không phụ thuộc vào x.

c/ Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị tương ứng của y (nếu có).

Bài 2:

1) Giải phương trình: $\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x-1}{x^2+x+1} - \frac{2(x+3)^2}{x^6-1} = 0$

2) Cho biết: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ và $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$

Chứng minh rằng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Bài 3: Cho tam giác ABC có CM là trung tuyến. Qua điểm D bất kỳ thuộc cạnh AB (D khác A, B) vẽ đường thẳng xy song song với CM; xy cắt các đường thẳng BC và AC lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng nếu DA.DB = DE.DF thì tam giác ADF là tam giác cân và tam giác ABC là tam giác vuông.

Bài 4: Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn và M là một điểm thuộc miền trong của tam giác ABC. Vẽ các đoạn thẳng MH, MK, ML lần lượt vuông góc với BC, AC, AB (với H; K; L là chân các đoạn thẳng vuông góc).

a/ Chứng minh rằng: $AL^2 + BH^2 + CK^2 = BL^2 + CH^2 + AK^2$

b/ Chứng minh rằng: $AL^2 + BH^2 + CK^2 \geq \frac{1}{4}(AB^2 + BC^2 + AC^2)$

c/ Xác định vị trí của M để $AL^2 + BH^2 + CK^2$ nhỏ nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

a/ $x^2y^2 + 1 + (x^2 - y)(1 - y) \neq 0 \Leftrightarrow x^2y^2 + 1 + x^2 - x^2y - y + y^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow x^2y^2 - x^2y + x^2 + y^2 - y + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2(y^2 - y + 1) + (y^2 - y + 1) \neq 0$

$\Leftrightarrow (y^2 - y + 1) + (x^2 + 1) \neq 0 \Leftrightarrow [(y^2 - y + \frac{}{4}) + \frac{}{4}] + (x^2 + 1) \neq 0$

$\Leftrightarrow [(y - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}] + (x^2 + 1) \neq 0 \Leftrightarrow$ x, y tùy ý

TXĐ của A: $\{(x,y) | x \in R, y \in R\}$

$$b/\ A = \frac{\frac{1}{4}x^2 + x^2y + \frac{1}{4}y + y^2 + x^2y^2 + \frac{1}{4} + \frac{4}{3}y)}{x^2y^2 + 1 + (x^2 - y)(1 - y)}$$

$$= \frac{x^2y + x^2y + \frac{1}{4}x^2 + y^2 + y + \frac{1}{4}}{(y^2 - y + 1)(x^2 + 1)} = \frac{x^2(y^2 + y + \frac{1}{4}) + (y^2 + y + \frac{1}{4})}{(y^2 - y + 1)(x^2 + 1)}$$

$$= \frac{(y^2 + y + \frac{1}{4}) + (x^2 + 1)}{(y^2 - y + 1)(x^2 + 1)} = \frac{(y^2 + y + \frac{1}{4})}{(y^2 - y + 1)}$$

Vậy A không phụ thuộc vào x.

c) $A = \dfrac{(y+\frac{1}{2})^2}{(y^2-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4})} \geq 0$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow y + \dfrac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $0 \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{2}$

Bài 2:

1) ĐKXĐ $x \neq \pm 1$

Quy đồng và khử mẫu, ta có:

$(x+1)(x-1)(x^3+1) - (x-1)(x+1)(x^3-1) - 2(x+3)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2-1)(x^3+1) - (x^2-1)(x^3-1) - 2(x^2+6x+9) = 0$

$\Leftrightarrow x^5 + x^2 - x^3 - 1 - x^5 + x^2 + x^3 - 1 - 2x^2 - 12x - 18 = 0$

$\Leftrightarrow -12x - 20 = 0 \Leftrightarrow -12x = 20 \Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{3}$

$x = -\dfrac{5}{3}$ thỏa mãn ĐKXĐ

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -\dfrac{5}{3}$

b/ $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$, $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} + \dfrac{c}{z} = 0$

Do đó $(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c})^2 = 1$

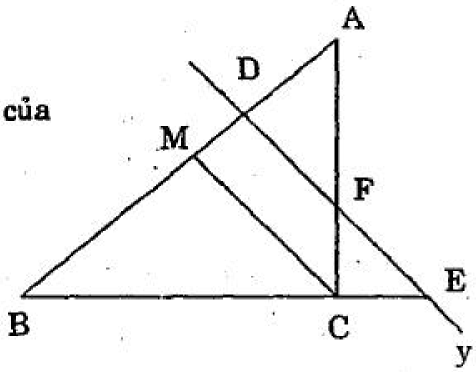
$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} + 2(\dfrac{xy}{ab} + \dfrac{xz}{ac} + \dfrac{yz}{bc}) = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} + \dfrac{2xyz}{abc}(\dfrac{c}{z} + \dfrac{b}{y} + \dfrac{a}{x}) = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} + \dfrac{2xyz}{abc}.0 = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

Bài 3:



ΔAMC có DF // MC (gt) theo hệ quả của định lý Talét, ta có: $\dfrac{DA}{AM} = \dfrac{DF}{MC}$

ΔBDE có MC // DE (gt), theo hệ quả của định lý Talét, ta có:

$\dfrac{DB}{MB} = \dfrac{DE}{MC}$

Do đó $\dfrac{DA.DB}{AM.MB} = \dfrac{DE.DF}{MC^2}$

Mà DA.DB = DE.DF . AM = MB

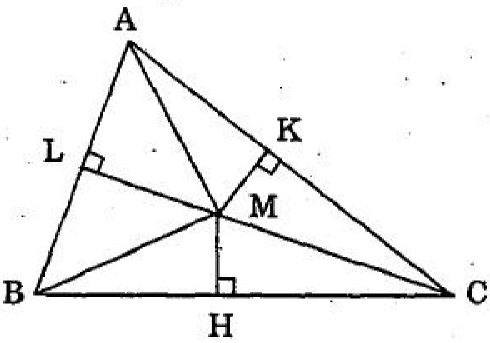
nên AM = MC = MB

$\dfrac{DA}{AM} = \dfrac{DF}{MC}$, AM = MC $\Rightarrow$ DA = DF

$\Rightarrow$ ΔABC có CM là đường trung tuyến và $CM = \dfrac{AB}{2}$

$\Rightarrow$ ΔABC vuông tại C

Bài 4:



ΔMAL vuông tại L, theo định lý Pytago có:

$AL^2 + ML^2 = MA^2$

$\Rightarrow AL^2 = MA^2 - ML^2$

Tương tự có: $BH^2 = MB^2 - MH^2$

$CK^2 = MC^2 - MK^2$

Do đó $AL^2 + BH^2 + CK^2 = (MA^2 + MB^2 + MC^2) - (ML^2 + MH^2 + MK^2)$

Chứng minh tương tự cũng có $BL^2 + CH^2 + AK^2 = (MA^2 + MB^2 + MC^2) - (ML^2 + MH^2 + MK^2)$

Suy ra $AL^2 + BH^2 + CK^2 = BL^2 + CH^2 + AK^2$

b/ Ta có: $(AL - BL)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (AL + BL)^2 + (AL - BL)^2 \geq (AL + BL)^2$

$\Leftrightarrow 2(AL^2 + BL^2) \geq AB^2$

$\Leftrightarrow 2AL^2 + 2BL^2 \geq AB^2$ (1)

Tương tự có: $2BH^2 + 2CH^2 \geq BC^2$ (2)

$2CK^2 + 2AK^2 \geq AC^2$ (3)

Cộng (1), (2) và (3) vế theo vế, ta có:

$2(AL^2 + BH^2 + CK^2) + 2(BL^2 + CH^2 + AK^2) \geq AB^2 + BC^2 + AC^2$

Mà $AL^2 + BH^2 + CH^2 = BL^2 + CH^2 + AK^2$ (câu a)

Do đó $4(AL^2 + BH^2 + CK^2) \geq AB^2 + BC^2 + AC^2$

$\Rightarrow AL^2 + BH^2 + CK^2 \geq \dfrac{1}{4}(AB^2 + BC^2 + AC^2)$

c/ Theo câu b/ ta có: $AL^2 + BH^2 + CK^2 \geq \dfrac{1}{4}(AB^2 + BC^2 + AC^2)$

Mà $\dfrac{1}{4}(AB^2 + BC^2 + AC^2)$ (không đổi)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} AL = BL \\ BH = CH \\ CK = AK \end{cases} \Leftrightarrow$ M là giao điểm các đường trung trực của ΔABC.

Vậy khi M là giao điểm các đường trung trực của tam giác ABC thì $AL^2 + BH^2 + CK^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

BỘ ĐỀ 87

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 8
THÀNH PHỐ PLEIKU – GIA LAI – NĂM HỌC 2002 – 2003

Bài 1: Tìm số có bốn chữ số $\overline{abcd}$, biết rằng nếu đem số ấy nhân với 2 rồi trừ đi 1004 thì kết quả nhận được là số bốn chữ số viết bởi các chữ số như số ban đầu nhưng theo thứ tự ngược lại.

Bài 2:

a/ Phân tích đa thức: $x^4 - 30x^2 + 31x - 30$ thành nhân tử

b/ Giải phương trình: $x^4 - 30x^2 + 31x - 30 = 0$

Bài 3:

Cho $m^2 + n^2 = 1$ và $a^2 + b^2 = 1$

Chứng minh $-1 \le am + bn \le 1$

Bài 4: Cho tam giác ABC có $B = C = 70^0$, đường cao AH. Các điểm E và F theo thứ tự thuộc các đoạn thẳng AH, AC sao cho $\widehat{ABE} = \widehat{CBF} = 30^0$. Gọi M là trung điểm AB.

a/ Chứng minh $\Delta AMF \backsim \Delta BHE$

b/ Chứng minh $AB \times BE = BC \times AE$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: Ta có: $\overline{abcd}.2 - 1004 = \overline{abcd} < 10000$ (1)

$\Rightarrow \overline{abcd} < (10000 + 1004) : 2 = 5502 \Rightarrow a \le 5$

Mặt khác, do (1) a chẵn, vậy $a \in \{2, 4\}$

* Nếu a = 4 thì: (1) $\Leftrightarrow \overline{4bcd}.2 = 1004 + \overline{abc4}$ (2)

$\Rightarrow$ d.2 có chữ số tận cùng là 8 $\Rightarrow d \in \{4, 9\}$

– Khi d = 4 thì $1004 + \overline{4bc4} < 6000 < 8000 <$ VT (2) (loại)

– Khi d = 9 thì $\overline{4bc9}.2 < 9000 < 10000 <$ VT (2) (loại)

Vậy a = 2, thì $\overline{2bcd}.2 = 1004 + \overline{dcb2}$ (3)

$\Rightarrow$ d.2 có chữ số tận cùng là 6 $\Rightarrow d \in \{3, 8\}$

– Khi d = 8 thì $\overline{2bc8}.2 < 6000 < 9000 <$ VT (3) (loại)

Suy ra d = 3, thì $\overline{2bc3}.2 = 1004 + \overline{3bc2}$

$\Leftrightarrow \overline{10bc}.2 + 2003.2 = 1004 + 3002 + \overline{10bc}$

$\Leftrightarrow 2.\overline{bc} = \overline{cb} \Leftrightarrow 20b + 2c = 10c + b$

$\Leftrightarrow 19b = 8c$

mà b, c là chữ số nên $8c \vdots 19$; $(8, 19) = 1 \Rightarrow c \vdots 19$

$\Rightarrow c = 0$ (vì c là chữ số) $\Rightarrow b = 0$

Vậy $\overline{abcd} = 2003$

Ta có: 003.2 – 1004 = 3002 (thử lại đúng)

Vậy 2003 là số cần tìm.

Bài 2:

a/ $x^4 - 30x^2 + 31x - 30 = x^4 + x\ 30(x^2 - x + 1)$

$= x(x^3 + 1) - 30(x^2 - x + 1) = x(x + 1) - (x^2 - x + 1) - 30(x^2 - x + 1)$

$= (x^2 - x + 1)(x^2 + x - 30)$

b/ $x^4 - 30x^2 + 31x - 30 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - x + 1)(x^2 + x - 30) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 30 = 0$ (vì $x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$)

$\Leftrightarrow x^2 + 6x - 5x - 30 = 0 \Leftrightarrow (x + 6)(x - 5) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -6 \\ x = 5 \end{array}\right.$ Vậy $S = \{-6{,}5\}$

Bài 3:

Ta có: $(m^2 + n^2)(a^2 + b^2) = a^2m^2 + m^2b^2 + n^2a^2 + n^2b^2$

$= a^2m^2 + b^2n^2 + m^2b^2 + n^2a^2 + 2mbna - 2mbna$

$= (am + bn)^2 + (mb - na)^2$

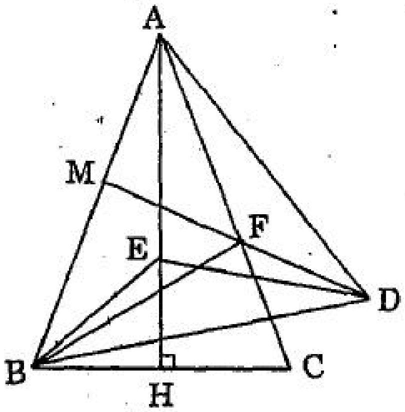
mà $m^2 + n^2 = a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow 1 = (am + bn)^2 + (mb - na)^2$

$\Rightarrow (am + bn)^2 \le 1$ (vì $(mb - na)^2 \ge 0$)

$\Rightarrow |am + bn| \le 1 \Rightarrow -1 \le am + bn \le 1$ (đpcm)

Bài 4:

a/ $\Delta AMF \backsim \Delta BHE$



Vì $\widehat{CBF} < \widehat{CBA}$ $(30^0 < 70^0)$

$\Rightarrow$ Tia BF nằm giữa hai tia BC, BA

$\Rightarrow \widehat{CBF} + \widehat{ABF} = \widehat{ABC}$

Vậy $\widehat{ABF} = \widehat{ABC} - CBF = 70^0 - 30^0 = 40^0$

Lại có ΔABC cân tại A nên $\widehat{A} = 180^0 - 2\widehat{B}$

$= 180^0 - 140^0 = 40^0$

Vậy ΔABF cân tại F $\Rightarrow$ đường trung tuyến FM cũng là đường cao hay $FM \perp AB \Rightarrow \widehat{AMF} = 90^0$

Lý luận tương tự: $\widehat{CBE} = 40^0 = \widehat{BAC}$

Xét ΔAMF ΔBHE có: $\widehat{AMF} = \widehat{BHE} = 90^0$, $\widehat{CBE} = \widehat{BAC} = 40^0$

$\Rightarrow \Delta AMF \backsim \Delta BHE$ (g–g)

b/ AB.BE= BC.AE

Dựng ΔABD đều (ở nửa mặt phẳng bờ AB có chứa C)

Ta có: $AB = AD = BD$ và $\widehat{ABD} = 60^0$, mà $\widehat{ABE} = 30^0$

$\Rightarrow \widehat{EBD} = 30^0 = \widehat{ABE}$

Xét ΔABE và ΔDBE có $AB = BD$ (cách dựng), $\widehat{ABE} = \widehat{DBE} = 30^0$

BE chung $\Rightarrow \Delta ABE = \Delta DBE$ (c–g–c) $\Rightarrow AE = DE$

Vậy ΔADE cân tại E

Vì ΔABC đều nên $\widehat{BAD} = 60^0$, mặt khác $\hat{B} = \hat{C} = 70^0 \Rightarrow \Delta ABC$ cân có đường cao AH cũng là phân giác $\Rightarrow \widehat{BAH} = 20^0$

$\Rightarrow \widehat{HAD} = \widehat{BDA} - \widehat{HAB} = 60^0 - 20^0 = 40^0 = \widehat{EDA}$ (do ΔADE cân)

Xét ΔABF và ΔADE có: AB = AD (cách dựng), $\widehat{BAF} = \widehat{DAE} = 40^0$

$\widehat{ABF} = \widehat{ABE} = 40^0 \Rightarrow \Delta ABF = \Delta ADE$ (g–c–g) $\Rightarrow AF = AE$

Vì $\Delta AMF \backsim \Delta BHE$ (chứng minh trên) nên:

$$\frac{AM}{BH} = \frac{AF}{BE} \Rightarrow \frac{AF}{BE} = \frac{2AM}{2BH} = \frac{AB}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{BE} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AE.BC = AB.BE \text{ (đpcm)}$$

BỘ ĐỀ 88

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 8
HUYỆN YÊN LẠC – TỈNH VĨNH PHÚC – NĂM HỌC 2002 – 2003

Bài 1: Cho $A = \dfrac{a^2 + 4a + 4}{a^3 + 2a^2 - 4a - 8}$

a/ Rút gọn A.

b/ Tìm $a \in Z$ để A là số nguyên.

Bài 2:

a/ Cho $a + b + c = 1$ và $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 0$. Tính $a^2 + b^2 + c^2$.

b/ Cho ba số a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn

$$\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$$

Chứng minh rằng trong ba số a, b, c phải có một số âm và một số dương.

Bài 3: Giải phương trình

a/ $|x + 1| = |x(x + 1)|$ b/ $x^2 + \dfrac{1}{x^2} + y^2 + \dfrac{1}{y^2} = 4$

Bài 4: Tổng một số tự nhiên và các chữ số của nó bằng 2359. Tìm số tự nhiên đó.

Bài 5: Cho tam giác vuông ABC vuông ở A và điểm H di chuyển trên BC. Gọi E, F lần lượt là điểm đối xứng qua AB, AC của H.

a/ Chứng minh E, A, F thẳng hàng

b/ Chứng minh BEFE là hình thang. Có thể tìm được vị trí của H để BEFC trở thành hình thang vuông, hình bình hành, hình chữ nhật được không?

c/ Xác định vị trí của H để tam giác EHF có diện tích lớn nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

a/ Ta có: $a^2 + 4a + 4 = (a + 2)^2$

$a^3 + 2a^2 - 4a - 8 = a^2(a + 2) - 4(a + 2) = (a + 2)(a^2 - 4) = (a + 2)^2(a - 2)$

ĐKXĐ: $a \neq \pm 2$

$$A = \frac{a^2 + 4a + 4}{a^3 + 2a^2 - 4a - 8} = \frac{(a+2)^2}{(a+2)^2(a-2)} = \frac{1}{a-2}$$

b/ Với $a \in Z$, $a \neq \pm 2$

Để A là số nguyên thì $1 \vdots (a - 2) \Rightarrow a - 2 \in \{-1, 1\}$

$\Rightarrow a \in \{1, 3\}$

Bài 2:

a/ Ta có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \Leftrightarrow \frac{ab + bc + ac}{abc} = 0$ $(abc \neq 0)$

$\Leftrightarrow ab + bc + ac = 0$

Ta lại có: $a + b + c = 1$ nên $(a + b + c)^2 = 1$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = 1$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 1$ (vì $ab + bc + ac = 0$)

b/ *Cách 1:* Đặt $A = b - c$; $B = c - a$; $C = a - b$, ta có:

$A + B + C = 0$ (1)

$aA + bB + cC = 0$ (2)

Đem chia đẳng thức đầu bài $\frac{a}{A} + \frac{b}{B} + \frac{c}{C} = 0$ lần lượt cho $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$ và $\frac{1}{C}$ ta nhận được:

$$\frac{a}{A^2} + \frac{b}{AB} + \frac{c}{AC} = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{a}{AB} + \frac{b}{B^2} + \frac{c}{AC} = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{a}{AC} + \frac{b}{BC} + \frac{c}{C^2} = 0 \qquad (5)$$

Sử dụng (1) có: $\frac{a}{AB} + \frac{a}{AC} = \frac{a(C+B)}{ABC} = \frac{-aA}{ABC}$ (6)

Lý luận tương tự ta nhận được: $\frac{b}{AB} + \frac{b}{BC} = \frac{-bB}{ABC}$ (7)

$\frac{c}{AC} + \frac{c}{BC} = \frac{-cC}{ABC}$ (8)

Cộng từng vế của (3), (4) và (5) ta được:

$$\frac{a}{A^2} + \frac{b}{B^2} + \frac{c}{C^2} + \left(\frac{a}{AB} + \frac{a}{AC}\right) + \left(\frac{b}{AB} + \frac{b}{BC}\right) + \left(\frac{c}{AC} + \frac{c}{BC}\right) = 0$$

$\Rightarrow \frac{a}{A^2} + \frac{b}{B^2} + \frac{c}{C^2} + \frac{-aA}{ABC} + \frac{-bB}{ABC} + \frac{-cC}{ABC} = 0$ (sử dụng (6), (7), (8))

$$\Rightarrow \frac{a}{A^2}+\frac{b}{B^2}+\frac{c}{C^2}-\frac{aA+bB+cC}{ABC}=0$$

$$\Rightarrow \frac{a}{A^2}+\frac{b}{B^2}+\frac{c}{C^2}=0 \text{ (sử dụng (2))}$$

Từ đẳng thức cuối, hiển nhiên trong ba số a, b, c phải có một số âm và một số dương.

Cách 2:

Ta có: $\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0 \Leftrightarrow \frac{a}{b-c}=-\frac{b}{c-a}-\frac{c}{a-b}$

$$\Rightarrow \frac{a}{b-c}.\frac{1}{b-c}=(-\frac{b}{c-a}-\frac{c}{a-b})\frac{1}{b-c}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{(b-c)^2}=\frac{-ab+b^2-c^2+ca}{(a-b)(b-c)(c-a)} \text{ (a)}$$

Tương tự cũng có: $\frac{b}{(b-c)^2}=\frac{-bc+c^2-a^2+ab}{(a-b)(b-c)(c-a)}$ (b)

$$\frac{c}{(a-b)^2}=\frac{-cc+a^2-b^2+bc}{(a-b)(b-c)(c-a)} \text{ (c)}$$

Từ (a), (b) và (c) cho ta: $\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0$

$\Rightarrow$ Trong ba số a, b, c phải có một số âm và một số dương

Bài 3:

$a|x+1|=|x(x+1)| \Leftrightarrow |x||x+1|-|x+1|=0 \Leftrightarrow |x+1|(|x|-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ |x|-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm 1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\pm 1$

b/ $x^2+\frac{1}{x^2}+y^2+\frac{1}{y^2}=4$ (TXĐ: $x\neq 0,\ y\neq 0$)

$$\Leftrightarrow (x^2+\frac{1}{x^2}-2)+(y^2+\frac{1}{y^2}-2)=0 \Leftrightarrow (x+\frac{1}{x})^2+(y+\frac{1}{y})^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{1}{x}=0 \\ y-\frac{1}{y}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $(x, y) \in \{(1,1);(1;-1);(-1,1);(-1,-1)\}$

Bài 4: Gọi n là số tự nhiên cần tìm. S(n) là tổng các chữ số của tự nhiên.

Ta có: $n + S(n) = 2359$ nên $n < 2359 \Rightarrow$ n là số không quá bốn chữ số, do đó $S(n) \leq 4.9 = 36 \Rightarrow n \geq 2359$.

Vậy $2323 \le n \le 2359$

Suy ra hai chữ số đầu tiên của n là 2 và 3. Gọi a, b là các chữ số hàng chục và hàng trăm đơn vị của n ($0 \le a, b \le 9$)

Ta có: $n = \overline{23ab}$

Vì $n + S(n) = 2359 \Rightarrow \overline{23ab} + (2 + 3 + a + b) = 2359$

$\Rightarrow 2300 + 10a + b + a + b + 5 = 2359 \Rightarrow 11a + 2b = 54$

Vì $0 \le 2b \le 18 \Rightarrow 54 - 18 \le 11a \le 54 \Rightarrow 36 \le 11a \le 54 \Rightarrow a = 4$

Với $a = 4$ thì $2b = 54 - 4.11 = 10 \Rightarrow b = 5$

Vậy $n = 2345$.

Kiểm tra: $2345 + (2 + 3 + 4 + 5) = 2345 + 14 = 2359$

Số tự nhiên cần tìm là 2345.

Bài 5:

a/ E, A, F thẳng hàng.

Do E, H đối xứng qua AB, F và H đối xứng qua AC, nên theo tính chất đối xứng ta có: $\widehat{HAB} = \widehat{BAE} = \dfrac{\widehat{EAH}}{2}$ và $HAC = \widehat{CAF} = \dfrac{\widehat{HAC}}{2}$

suy ra $\widehat{EAH} + \widehat{HAF} = 2(\widehat{BAH} + \widehat{HAC}) = 2\widehat{BAC} = 180^0$

$\Rightarrow$ E, A, F thẳng hàng

b/ BEFC hình thang

Ta có: $\begin{cases} \widehat{EBA} = \widehat{ABH} = \dfrac{\widehat{EBH}}{2} \text{ (tính chất đối xứng)} \\ \widehat{FCA} = \widehat{ACH} = \dfrac{\widehat{FCH}}{2} \text{ (tính chất đối xứng)} \end{cases}$

suy ra: $\widehat{EBH} + \widehat{FCH} = 2(\widehat{ABH} + \widehat{ACH}) = 2.90^0 = 180^0$ (vì ΔABC vuông tại A)

mà hai góc ở vị trí trong cùng phía nên EB // CF. Vậy tứ giác BEFC là hình thang.

– BEFC thang vuông $\Leftrightarrow EF \perp EB \Leftrightarrow \widehat{AEB} = \widehat{AHB} = 90^0$ (tính đối xứng)

$\Leftrightarrow AH \perp BC \Leftrightarrow$ H là hình chiếu A trên BC.

– BEFC hình bình hành $\Leftrightarrow EB = FC \Leftrightarrow BH = HC$ (vì $EB = BH$ và $FC = HC$)

$\Leftrightarrow$ H là trung điểm BC.

+ Nếu ΔABC cho trước có $AB \ne AC$ thì không có vị trí nào của H để tứ giác BEFC là hình chữ nhật.

+ Nếu ΔABC vuông cân tại A: BEFC hình chữ nhật $\Leftrightarrow$ H: trung điểm BC.

c/ Định vị trí H để S_{EHF} lớn nhất

Ký hiệu S_{ABC} là S, S_{BHM} là S_1 và S_{CHN} là S_2, ta thấy S_{EHF} lớn nhất $\Leftrightarrow$ S_{AMHN} lớn nhất $\Leftrightarrow S_1 + S_2$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow \dfrac{S_1 + S_2}{S}$ nhỏ nhất

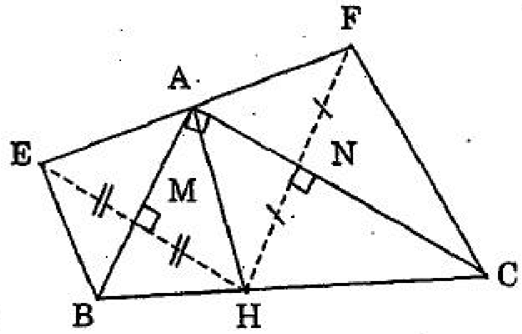
Các tam giác MBH và NHC đồng dạng với ΔABC nên:

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{BH}{BC}\right)^2 \text{ và } \frac{S_2}{S} = \left(\frac{CH}{BC}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{S_1 + S_2}{S} = \frac{BH^2 + CH^2}{BC^2} \geq \frac{1}{2}$$

(vì $BC^2 = (BH + CH)^2 \leq 2(BH^2 + CH^2)$

$$\Rightarrow \frac{BH^2 + CH^2}{BC^2} \geq \frac{1}{2})$$



Như vậy: $S_1 + S_2 \geq \frac{1}{2}S \Rightarrow S_{EHF} \leq \frac{S}{4}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $BH = CH \Leftrightarrow H$ là trung điểm BC.

BỘ ĐỀ 89

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN LỚP 8 TRƯỜNG THCS THỰC NGHIỆM SƯ PHẠM – TP.HCM – NĂM HỌC 2003 – 2004

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a/ $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ b/ $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 1$

Bài 2: Tìm số tự nhiên n để $n^3 - 3n^2 - 3n - 1$ chia hết cho $n^2 + n + 1$

Bài 3: Giải và biện luận phương trình ẩn số là y

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a + b + y}$$

Bài 4: Cho tam giác ABC và G là một điểm thuộc miền trong của tam giác. Kéo dài AG, BG, CG cắt BC, AC, AB lần lượt tại M, N, P.

Chứng minh rằng: $\frac{GM}{AM} + \frac{GN}{BN} + \frac{GP}{CP} = 1$

Bài 5: Cho tam giác ABC có diện tích là S. Lấy các điểm M, N, P lần lượt trên các cạnh AB, BC, CA sao cho: $\frac{AM}{BM} + \frac{BN}{CN} + \frac{CP}{AP} = \frac{1}{3}$

Tính diện tích tam giác MNP theo S.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

a/ $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b)^3 - 3abc(a + b) + c^3 - 3abc$ (áp dụng $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$) $= (a + b + c)^3 - 3(a + b)c(a + b + c) - 3ab(a + b + c)$

$= (a + b + c)[(a + b + c)^2 - 3ac - 3bc - 3ab]$.

$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac - 3ab - 3bc - 3ac)$

$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ac)$

b/ $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 1 = (x + 1)(x + 4)(x + 2)(x + 3) + 1$

$= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) + 1$

$= [(x^2 + 5x + 5) - 1][(x^2 + 5x + 5) + 1] + 1$

$= (x^2 + 5x + 5) - 1 + 1 = (x^2 + 5x + 5)^2$

Bài 2: Với $n \in N$, ta có:

$n^3 - 3n^2 - 3n - 1 = n^3 + n^2 + n - 4n^2 - 4n - 4 + 3$

$= n(n^2 + n + 1) - 4(n^2 + n\ 1) + 3$

$= (n^2 + n + 1)(n - 4) + 3$

Vậy $n^3 - 3n^2 - 3n - 1$ chia hết cho $n^2 + n + 1$ khi $(n^2 + n + 1)(n - 4) + 3$ chia hết cho $n^2 + n + 1$.

Suy ra $(n^2 + n + 1)|3$.

Do $n \in N$ nên $n^2 + n + 1 \geq 1$. Vậy

$$\left[\begin{array}{l} n^2+n+1=1 \\ n^2+n+1=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n(n+1)=0 \\ n^2+n+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=0 (\text{vì } n+1>0) \\ (n+2)(n-1)=0 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow n = 0$ hay $n = 1$ (vì $n + 2 > 0$)

Vậy $n = 0$ hay $n = 1$ là các giá trị cần tìm.

Bài 3: Điều kiện để phương trình có nghĩa: $a \neq 0, b \neq 0$

TXĐ: $y \neq 0$ và $y \neq -(a + b)$

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{1}{a+b+y} - \frac{1}{y} = \frac{a+b}{ab} \Leftrightarrow \frac{a+b}{-y(a+b+c)} = \frac{a+b}{ab} \quad (1)$$

+ Nếu $a + b = 0$ thì (1) vô số nghiệm; y bất kỳ $\neq 0$

+ Nếu $a + b \neq 0$ thì: $-y(a + b + c) = ab$

$$\Leftrightarrow y^2 + ay + by + ab = 0 \Leftrightarrow (y + a)(y + b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-a \\ y=-b \end{array}\right.$$

Để $-a \in$ TXĐ ta phải có:

$$\begin{cases} -a \neq 0 \\ -a \neq -b-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$$ các điều kiện này đã có.

Để $-b \in$ TXĐ, tương tự ta phải có $a \neq 0, b \neq 0$.

Kết luận:

– Nếu $a \neq 0, b \neq 0, a + b \neq 0$ thì phương trình có vô số nghiệm y bất kỳ khác 0.

– Nếu $a \neq 0, b \neq 0, a + b \neq 0$ thì phương trình có nghiệm $-a$ và $-b$.

Bài 4:

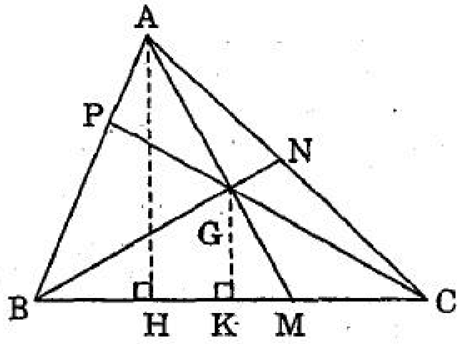
Cách 1: Kẻ AH và GK cùng vuông góc với BC $\Rightarrow$ AH // GK

Áp dụng hệ quả Talét, ta có:

$$\frac{GM}{AM} = \frac{GK}{AH} = \frac{\frac{1}{2}BC.GK}{\frac{1}{2}BC.AH} = \frac{S_{GAB}}{S_{ABC}}$$

Lý luận tương tự ta cũng nhận được:

$$\frac{GN}{BN} = \frac{S_{GAB}}{S_{ABC}} \text{ và } \frac{GP}{CP} = \frac{S_{GAB}}{S_{ABC}}$$



Suy ra: $\frac{GN}{AM} + \frac{GN}{BN} + \frac{GP}{CP}$

$$= \frac{S_{BGC} + S_{AGC} + S_{ABG}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1 \text{ (đpcm)}$$

Cách 2: Ta có:

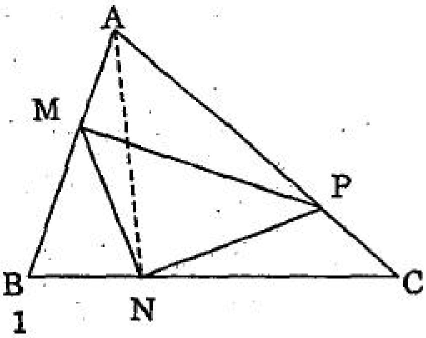
$$\frac{GM}{AM} = \frac{S_{BGM}}{S_{ABM}} = \frac{S_{CGM}}{S_{AMC}} = \frac{S_{BGM} + S_{CGM}}{S_{ABM} + S_{AMC}} = \frac{S_{BGC}}{S_{ABC}}$$

Lý luận tương tự ta được:

$$\frac{GN}{BN} = \frac{S_{AGC}}{S_{ABM}} \text{ và } \frac{GP}{CP} = \frac{S_{GAB}}{S_{ABC}}$$

Suy ra: $\frac{GM}{AM} + \frac{GN}{BN} + \frac{GP}{CP} = \frac{S_{BGC} + S_{AGC} + S_{ABG}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$

Bài 5:



Ta có: $\frac{S_{BMN}}{S_{ABN}} = \frac{BM}{AB}$ và $\frac{S_{ABN}}{S} = \frac{BN}{BC}$

mà $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{BM}{AB} = \frac{3}{4}$

$\frac{BN}{CN} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{BN}{BC} = \frac{1}{4}$

Suy ra: $\frac{S_{BMN}}{S_{ABN}} \times \frac{S_{ABN}}{S} = \frac{BM}{AB} \times \frac{BN}{BC} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{S_{ABN}}{S} = \frac{3}{16}$ hay $S_{BMN} = \frac{3}{16}S$

Lý luận tương tự ta cũng nhận được: $S_{BMN} = S_{CNP} = \frac{3}{16}S$

Vậy $S_{MNP} = S - (S_{BMN} + S_{AMP} + S_{CNP}) = S - \frac{9}{16}S = \frac{7}{16}S$

BỘ ĐỀ 90

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN TÂN PHÚ TP.HCM – NĂM HỌC 2003 – 2004

Bài 1:

1) Phân tích các đa thức thành nhân tử:

a/ $x^4 + 2x^3 - 4x - 4$ b/ $x(x + 2y)^3 - y(2x + y)^3$

2) Giải phương trình sau:

$$\frac{x+1-a}{x-a}+\frac{x+1-b}{b-x}-\frac{a}{(x-a)(x-b)}=0\text{, với a, b là hằng số.}$$

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = 2x^2 - 2x + 9 - 2xy + y^2$

Bài 2:

Cho hình thang ABCD có AB là đáy nhỏ. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Đường thẳng qua O và song song với CD lần lượt cắt AD và BC tại E và F.

1) Chứng minh: $S_{AOD} = S_{BOC}$

2) Chứng minh rằng: $\dfrac{OC}{AC} = \dfrac{OD}{BD}$

3) Chứng minh: OE = OF

4) Cho $S_{AOB} = a^2$, $S_{COD} = b^2$. Tính diện tích hình thang ABCD theo a, b.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) a/ $x^4 + 2x^3 - 4x - 4 = x^4 - 4 + 2x^3 - 4x$

$= (x^2 + 2)(x^2 - 2) + 2x(x^2 - 2) = (x^2 - 2)(x^2 + 2 + 2x)$

$= (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x^2 + 2x + 2)$

b/ $x(x + 2y)^3 - y(2x + y)^3 =$

$= x(x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3) - y(8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3)$

$= x^4 + 6x^3y + 12x^2y^2 + 8xy^3 - 8x^3y - 12x^2y^2 - 6xy^3 - y^4$

$= x^4 - 2x^3y + 2xy^3 - y^4 = (x^4 - 2x^3y + x^2y^2) - (x^2y^2 - 2xy^3 + y^4)$

$= (x^2 - xy)^2 - (xy - y^2)^2 = (x^2 - xy + xy - y^2)(x^2 - xy - xy + y^2)$

$= (x^2 - y^2)(x - y)^2 = (x + y)(x - y)^3$

2) $\dfrac{x+1-a}{x-a}+\dfrac{x+1-b}{b-x}-\dfrac{a}{(x-a)(x-b)}=0$

$$\frac{x-a}{x-a}+\frac{1}{x-a}+\frac{x-b}{b-x}+\frac{1}{b-x}-\frac{a}{(x-a)(x-b)}=0$$

$$1+\frac{1}{x-a}-1+\frac{1}{b-x}-\frac{a}{(x-a)(x-b)}=0$$

$$\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}-\frac{a}{(x-a)(x-b)}=0$$

Điều kiện $x \neq a$, $x \neq b$

Quy đồng và khử mẫu, ta có:

$x - b - x + a - a = 0$

$0x = -b$

- $b = 0$ ta có $0x = 0$; x tùy ý
- $b \neq 0$ ta có $0x = -b$; $x \in \phi$

Vậy nếu $b \neq 0$, phương trình vô nghiệm;

Nếu $b = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi x khác a và b.

3) $A = 2x^2 - 2x + 9 - 2xy + y^2$

$A = (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2x + 1) + 8$

$A = (x - y)^2 + (x - 1)^2 + 8$

$A \geq 8$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $x - y = 0$ và $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = y = 1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 8.

Bài 2:

1) $S_{ADC} = S_{BDC}$ (hai tam giác ADC có chung đáy DC, đường cao vẽ từ A, B đến DC bằng nhau)

$\Rightarrow S_{ADC} - S_{ODC} = S_{BDC} - S_{ODC} \Rightarrow S_{AOD} = S_{BOC}$

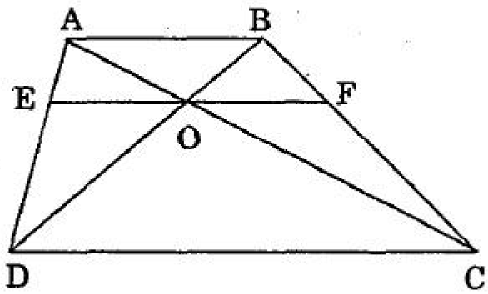
2) Xét ΔODC có AB // DC (gt), theo hệ quả của định lí Talét, ta có: $\dfrac{OC}{OA} = \dfrac{OD}{OB}$

$\Rightarrow \dfrac{OC}{OA + OC} = \dfrac{OD}{OB + OD} \Rightarrow \dfrac{OC}{AC} = \dfrac{OD}{BD}$

3) ΔADC có OE // DC, theo hệ quả của định lí Talét, ta có: $\dfrac{OA}{AC} = \dfrac{OB}{BD}$

Do đó: $\dfrac{OE}{DC} = \dfrac{OF}{DC} \Rightarrow OE = OF$

4) $\dfrac{S_{BOC}}{S_{AOD}} = \dfrac{OB}{OD}$ (hai tam giác AOB, AOD có chung đường cao vẽ từ A đến BD)



Tượng tự: $\dfrac{S_{BOC}}{S_{COD}} = \dfrac{OB}{OD}$

Mà $S_{AOB} = a^2$, $S_{COD} = b^2$, $S_{AOD} = S_{BOC}$

Do đó: $\dfrac{a^2}{S_{AOD}} = \dfrac{S_{AOD}}{b^2}$

$\Rightarrow S^2_{AOD} = (ab)^2 \Rightarrow S_{AOD} = |ab|$

nên $S_{BOC} = |ab|$.

Ta có: $S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{COD} + S_{AOD} + S_{BOC} = a^2 + b^2 + |ab| + |ab| = (|a| + |b|)^2$

BỘ ĐỀ 91

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 8 TRƯỜNG THCS NGÔ SĨ LIÊN QUẬN TÂN BÌNH, TP.HCM NĂM HỌC 2003 – 2004

Bài 1: Giải phương trình:

a/ $|x| - |2x + 3| = x - 1$

b/ $\dfrac{1}{x^2 + 9x + 20} + \dfrac{1}{x^2 + 11x + 30} + \dfrac{1}{x^2 + 13x + 42} = \dfrac{1}{18}$

Bài 2: Rút gọn biểu thức sau rồi tìm giá trị của x để biểu thức rút gọn dương.

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 2x^2 - (4x - 8)}$$

Bài 3: Tìm giá trị của a để phương trình: $\frac{a(x+1)}{2x-1} = a + 1$ có nghiệm dương.

Bài 4: Cho $a > 0$, $b > 0$ và $a + b = 1$. Chứng minh: $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$

Bài 5: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Trên HB và HC lần lượt lấy M và N sao cho $\widehat{AMC} = \widehat{AMB} = 90^0$.

a/ Chứng minh $\Delta ABD \backsim \Delta ACE$

b/ Chứng minh ΔAMN cân.

Bài 6: Từ điểm D trên cạnh huyền BC của tam giác ABC vuông vẽ $DE \perp AB$, $DF \perp AC$.

a/ Chứng minh: $BE^2 + ED^2 + DC^2 = BD^2 + DF^2 + FC^2$

b/ Chứng minh: $DB.DC = AE.BE + AF.CF$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

a/ Xét $x < -\frac{3}{2}$

Phương trình trở thành $-x + 2x + 3 = x - 1 \Leftrightarrow 0x = -4 \Leftrightarrow x = \phi$

Xét $-\frac{3}{2} \leq x \leq 0$

Phương trình trở thành $-x - 3x - 3 = x - 1$

$\Leftrightarrow -4x = 2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

$x = -\frac{1}{2}$ thỏa mãn điều kiện $-\frac{3}{2} \leq x \leq 0$. Xét $x > 0$

Phương trình trở thành $x - 2x - 3 = x - 1 \Leftrightarrow -2x = 2 \Leftrightarrow x = -1$

$x = -1$ không thỏa mãn điều kiện $x > 0$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -\frac{1}{2}$

b/ $\frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2 + 4x + 5x + 20} + \frac{1}{x^2 + 5x + 6x + 30} + \frac{1}{x^2 + 6x + 7x + 42} = \frac{1}{18}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x(x + 4x) + 5(x + 4)} + \frac{1}{x(x + 5) + 6(x + 5)} + \frac{1}{x(x + 6) + 7(x + 6)} = \frac{1}{18}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{(x + 4)(x + 5)} + \frac{1}{(x + 5)(x + 6)} + \frac{1}{(x + 6)(x + 7)} = \frac{1}{18}$

ĐKXĐ: $x \neq -4, x \neq -5, x \neq -6, x \neq -7$

Do đó, ta có:

$$\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+7}=\frac{1}{18}\Leftrightarrow\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+7}=\frac{1}{18}$$

$\Leftrightarrow 18(x+7)-18(x+4)=(x+4)(x+7)$

$\Leftrightarrow 18x+126-18x-72=x^2+7x+4x+28$

$\Leftrightarrow x^2+11x-26=0 \qquad \Leftrightarrow x^2-2x+13x-26=0$

$\Leftrightarrow x(x-2)+13(x-2)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+13)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ x+13=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-13 \end{array}\right.$$

$x=2$, $x=-13$ đều thỏa mãn ĐKXĐ.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=2$ và $x=-13$

Bài 2:

$x^3-2x^2-(4x-8)=x^2(x-2)-4(x-2)$

$=(x-2)(x^2-4)=(x-2)(x-2)(x+2)=(x-2)^2(x+2)$

Do vậy ĐKXĐ: $x \neq 2$ và $x \neq -2$.

Ta có: $\dfrac{x^2-4x+4}{x^3-2x^2-(4x-8)}=\dfrac{(x-2)^2}{(x-2)^2(x+2)}=\dfrac{1}{x+2}$

$\dfrac{1}{x+2}>0 \Leftrightarrow x+2>0 \Leftrightarrow x>-2$

Bài 3: ĐKXĐ: $x \neq \dfrac{1}{2}$

Ta có: $\dfrac{a(x+1)}{2x-1}=a+1$

$\Leftrightarrow a(x+1)=(a+1)(2x-1) \Leftrightarrow ax+a=2ax-a+2x-1$

$\Leftrightarrow ax-2ax-2x=-a-1-a \Leftrightarrow (a+2)x=2a+1$

Phương trình có nghiệm dương.

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+2\neq 0 \\ x=\dfrac{2a+1}{a+2}>0 \\ x\neq\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a\neq -2 \\ \left[\begin{array}{l} 2a+1>0 \text{ và } a+2>0 \\ 2a+1<0 \text{ và } a+2<0 \end{array}\right. \\ \dfrac{2a+1}{a+2}\neq\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

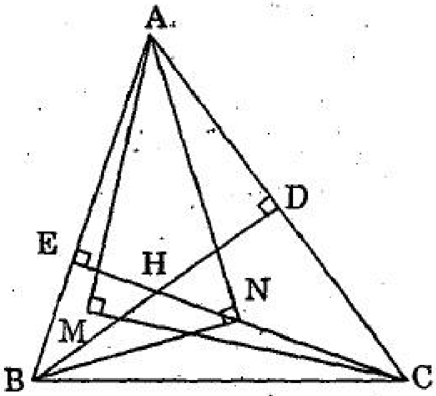
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a\neq -2 \\ \left[\begin{array}{l} 2a>-1 \text{ và } a>-2 \\ 2a<-1 \text{ và } a<-2 \end{array}\right. \\ 2(2a+1)\neq a+2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a\neq -2 \\ \left[\begin{array}{l} a>-\dfrac{1}{2} \text{ và } a>-2 \\ a<-\dfrac{1}{2} \text{ và } a<-2 \end{array}\right. \\ a\neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a>\dfrac{1}{2} \text{ và } a\neq 0 \\ a<-2 \end{array}\right.$$

Bài 4: Từ a + b =1, ta có: b = 1 − a

Do đó $a^2 + b^2 = a^2 + (1 - a)^2 = a^2 + 1 - 2a + a^2$

$= 2a^2 - 2a + 1 = 2(a^2 - a + \frac{1}{4}) + \frac{1}{2} = 2(a - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$

Bài 5:



a/ Xét ΔABD và ΔACE có $\widehat{BAD}$ chung

$\widehat{ADB} = \widehat{AEC}$ $(= 90^0)$

Do đó $\Delta ABD \backsim \Delta ACE$

$\Delta ABD \backsim \Delta ACE$

$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$ (1)

$\Rightarrow AE.AB = AD.AC$

ΔANB vuông tại N, NE là đường cao

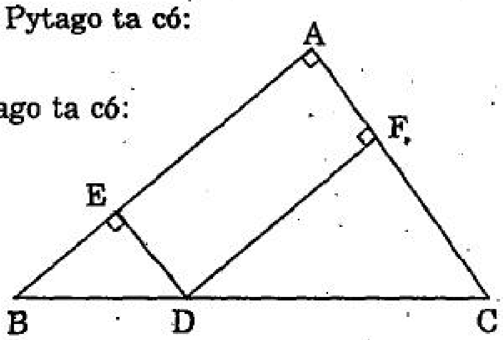
$\Rightarrow AN^2 = AE.AB$ (2)

Tương tự $AM^2 = AD.AC$ (3)

Từ (1), (2) và (3) có $AN^2 = AM^2$

$\Rightarrow AN = AM \Rightarrow \Delta AMN$ cân tại A

Bài 6: ΔEBD vuông tại E (gt), theo định lí Pytago ta có:



$BE^2 + ED^2 = BD^2$

ΔFDC vuông tại F (gt), theo định lí Pytago ta có:

$DF^2 + FC^2 = DC^2$

Do đó $BE^2 + ED^2 + DC^2 = BD^2 + DF^2 + FC^2$ $(= BD^2 + DC^2)$

b/ $DE \perp AB$ (gt), $AC \perp AB$ (gt)

$\Rightarrow DE \parallel AC$

ΔABC có $DE \parallel AC$, theo định lí Talét ta có:

$\frac{AE}{AB} = \frac{DC}{BC}$ và $\frac{BE}{AB} = \frac{BD}{BC}$

$\Rightarrow \frac{AE}{AB} \cdot \frac{BE}{AB} = \frac{DC}{BC} \cdot \frac{BD}{BC} \Rightarrow \frac{AE.BE}{AB^2} = \frac{BD.DC}{BC^2}$

Chứng minh tương tự cũng có $\frac{AF.CF}{AC^2} = \frac{BD.DC}{BC^2}$

Do đó $\frac{AE.BE}{AB^2} = \frac{AF.CF}{AC^2} = \frac{BD.DC}{BC^2}$

$\Rightarrow \frac{AE.BE + AF.CF}{AB^2 + AC^2} = \frac{BD.DC}{BC^2}$ (1)

Mà ΔABC vuông tại A nên $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $AE.BE + AF.CF = BD.DC$

BỘ ĐỀ 92

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI GIẢI THƯỞNG LÊ QUÝ ĐÔN QUẬN TÂN BÌNH, TP.HCM NĂM HỌC 2003 – 2004

Bài 1: Phân tích các đa thức thành các nhân tử:

1) $x^4 + 2005x^2 + 2004x + 2005$ 2) $a^3 + b^3 - c^3 + 3abc$

Bài 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của M biết:

$$M = \frac{x^2 - 2x + 2004}{x^2} \text{ với } x \neq 0$$

Bài 3:

1) Giải phương trình: $\dfrac{x+2}{x^2+2x+4} - \dfrac{x-2}{x^2-2x+4} = \dfrac{16(x^2+x)}{x^6-8^2}$

2) Giải bất phương trình: $\dfrac{x+5}{1997} + \dfrac{x+7}{1997} \geq \dfrac{x+9}{1995} + \dfrac{x+11}{1993}$

Bài 4: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn (AB < AC). Gọi BD là đường phân giác trong của tam giác ABC, dựng đường trung trực của đoạn thẳng BD cắt đường thẳng AC tại M.

1) Chứng minh: hai tam giác MAB và MBC đồng dạng.

2) Cho AD = 4cm và DC = 6cm. Tính độ dài đoạn thẳng MD.

Bài 5: Cho tam giác nhọn ABC có ba đường cao AD, BM, CN. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC.

Chứng minh rằng: $\dfrac{HD}{AD} + \dfrac{HM}{BM} + \dfrac{HN}{CN} = \dfrac{DB}{DC} \cdot \dfrac{MC}{MA} \cdot \dfrac{NA}{NB}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $x^4 + 2005x^2 + 2004x + 2005$

$= x^4 + x^3 + x^2 - x^3 + x^2 - x + 2005x^2 + 2004x + 2005$

$= x^2(x^2 + x + 1) - x(x^2 + x + 1) + 2005(x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2005)$

2) $a^3 + b^3 - c^3 + 3abc = (a + b)^3 - 3ab(a + b) - c^3 + 3abc$

$= (a + b)^3 - c^3 - 3ab(a + b) + 3abc$

$= [(a + b) - c][(a + b)^2 + (a + b)c + c^2] - 3ab(a + b - c)$

$= (a + b - c)(a^2 + 2ab + b^2 + ac + bc + c^2 - 3ab)$

$= (a + b - c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab + ac + bc)$

Bài 2:

$$M = \frac{x^2 - 2x + 2004}{x^2} = \frac{2004x^2 - 2.2004x + 2004^2}{2004x^2}$$

$$= \frac{2003x^2 + x^2 - 2.2004x + 2004^2}{2004x^2} = \frac{2003}{2004} + \frac{(x-2004)^2}{2004x^2} \geq \frac{2003}{2004}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x - 2004 = 0 \Leftrightarrow x = 2004$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $\dfrac{2003}{2004}$

Bài 3:

1) $x^2 + 2x + 4 = (x + 1)^2 + 3 > 0$

$x^2 - 2x + 4 = (x - 1)^2 + 3 > 0$

$x^6 - 8^2 \neq 0 \Leftrightarrow x^6 \neq 8^2 \Leftrightarrow x \neq \pm 2$

ĐKXĐ: $x \neq \pm 2$

Quy đồng và khử mẫu, ta được:

$(x + 2)(x - 2)(x^3 + 2^3) - (x - 2)(x + 2)(x^3 - 2^3) = 16(x^2 + x)$

$(x^2 - 4)(x^3 + 8 - x^3 + 8) = 16(x^2 + x)$

$(x^2 - 4) . 16 = 16(x^2 + x)$

$x^2 - 4 = x^2 + x$

$x = -4 \in$ ĐKXĐ

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = -4$

2) $\dfrac{x+5}{1999} + \dfrac{x+7}{1997} \geq \dfrac{x+9}{1995} + \dfrac{x+11}{1993}$

$\dfrac{x+5}{1999} + \dfrac{x+7}{1997} - \dfrac{x+9}{1995} - \dfrac{x+11}{1993} \geq 0$

$(\dfrac{x+5}{1999} + 1) + (\dfrac{x+7}{1997} + 1) - (\dfrac{x+9}{1995} + 1) - (\dfrac{x+11}{1993} + 1) \geq 0$

$\dfrac{x+2004}{1999} + \dfrac{x+2004}{1997} - \dfrac{x+2004}{1995} - \dfrac{x+2004}{1993} \geq 0$

$(x + 2004)(\dfrac{1}{1999} + \dfrac{1}{1997} - \dfrac{1}{1995} - \dfrac{1}{1993}) \geq 0$

Mà $\dfrac{1}{1999} < \dfrac{1}{1997}$; $\dfrac{1}{1995} < \dfrac{1}{1993}$ nên

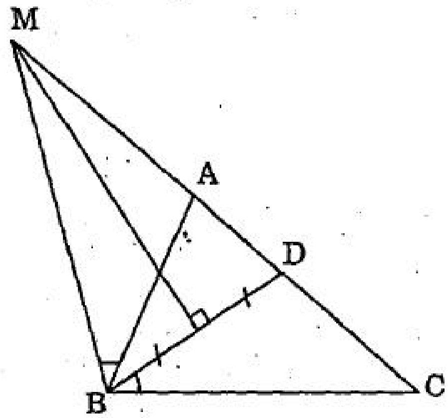
$\dfrac{1}{1999} + \dfrac{1}{1997} - \dfrac{1}{1995} - \dfrac{1}{1993} < 0$

Do đó, ta có $x + 2004 \leq 0$

$x \leq -2004$

Nghiệm của bất phương trình là $x \leq -2004$

Bài 4:



1) MB = MD (M thuộc đường trung trực của đoạn thẳng BD)

$\Rightarrow \Delta MBD$ cân tại M

$\Rightarrow \widehat{MBD} = \widehat{MDB}$, MB = MD

Mà $\widehat{MBD} = \widehat{MBA} + \widehat{ABD}$

$\widehat{MDB} = \widehat{DCB} + \widehat{DBC}$

($\widehat{MDB}$ là góc ngoài của ΔDBC)

$\widehat{ABD} = \widehat{DBC}$ (BD là đường phân giác của ΔABC)

Do đó $\widehat{MBA} = \widehat{DCB}$

Xét ΔMAB và ΔMBC có

$\widehat{AMB}$ (chung), $\widehat{MBA} = \widehat{DCB}$

Do đó $\Delta MAB \backsim \Delta MBC$

2) $\Delta MAB \backsim \Delta MBC$

$\Rightarrow \dfrac{MB}{MC} = \dfrac{AB}{BC}$

ΔABC có BD là đường phân giác

nên $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DA}{DC} \Rightarrow \dfrac{DA}{DC} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

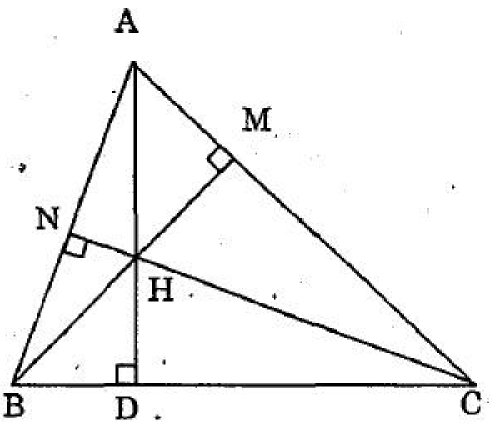
Do vậy $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{MD}{2} = \dfrac{MC}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{MD}{2} = \dfrac{MC - MD}{3 - 2} = \dfrac{DC}{1} = 6$

$\Rightarrow MD = 6 \,.\, 2 = 12$ (cm)

Bài 5:

$\dfrac{HD}{AD} + \dfrac{HM}{BM} + \dfrac{HN}{CN} =$



$$= \frac{\frac{HD.BC}{2}}{\frac{AD.BC}{2}} + \frac{\frac{HM.AC}{2}}{\frac{BM.AC}{2}} + \frac{\frac{HN.AB}{2}}{\frac{CN.AB}{2}}$$

$$= \frac{S_{MBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{MAC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{MAB}}{S_{ABC}}$$

$$= \frac{S_{MBC} + S_{MAC} + S_{MAB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$$

Mặt khác

Xét Δ DHB và Δ MHA có

$\widehat{BHD} = \widehat{MHA}$ (đối đỉnh), $\widehat{DHB} = \widehat{HMA}$ $(= 90^0)$

Do đó $\Delta DHB \backsim \Delta MHA \Rightarrow \dfrac{DB}{MA} + \dfrac{HB}{HA}$.

Chứng minh tương tự cũng có:

$\dfrac{MC}{NB} + \dfrac{HC}{HB}, \dfrac{NA}{DC} + \dfrac{HA}{HC}$

Do đó $\dfrac{DB}{MA} \cdot \dfrac{MC}{NB} \cdot \dfrac{NA}{DC} = \dfrac{HB}{HA} \cdot \dfrac{HC}{HB} \cdot \dfrac{HA}{HC} \Rightarrow \dfrac{DB}{DC} \cdot \dfrac{MC}{MA} \cdot \dfrac{NA}{NB} = 1$

Vậy $\dfrac{HD}{AD} + \dfrac{HM}{BM} + \dfrac{HN}{CN} = \dfrac{DB}{DC} \cdot \dfrac{MC}{MA} \cdot \dfrac{NA}{NB}$ (= 1)

BỘ ĐỀ 93

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN 8
QUẬN 1, TP.HCM NĂM HỌC 2003 – 2004

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1) $(2x-1)^2-(4x-2)-3$ 2) $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$

3) $x(x+1)(x+2)(x+3)-8$

Bài 2:

1) Cho $a+b=1$ và $ab \neq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b^3-1}+\frac{b}{a^3-1}=\frac{2(ab-2)}{a^2b^2+3}$$

2) Tam giác ABC có BC = a, AC = b, AB = c là độ dài ba cạnh của tam giác thỏa hệ thức:

$$\frac{ab}{b+c}+\frac{bc}{c+a}+\frac{ca}{a+b}=\frac{ca}{b+c}+\frac{ab}{c+a}+\frac{bc}{a+b}$$

Chứng minh tam giác ABC là tam giác cân.

Bài 3:

1) Giải phương trình sau: $\frac{x-1}{x+2}+\frac{x+1}{x-2}=\frac{2(x^2+2)}{x^2-4}$

2) Tính giá trị của biểu thức:

$E=\left|x^2+y^2+5+2x-4y\right|-\left|-(x+y-1)^2\right|+2xy$ với $x=2^{2003}$ và $y=16^{501}$

Bài 4: Giải bài toán bằng cách lập phương trình.

Trong ba cái bình có đựng nước. Nếu ta rót $\frac{1}{3}$ lượng nước từ bình thứ nhất sang bình thứ hai, rồi rót $\frac{1}{4}$ lượng nước hiện có ở bình thứ hai sang bình thứ ba và cuối cùng $\frac{1}{10}$ lượng nước ở bình thứ ba sang bình thứ nhất thì trong mỗi bình có 9 lít nước. Hỏi lúc đầu mỗi bình chứa bao nhiêu lít nước?

Bài 5: Cho tam giác nhọn ABC với ba đường cao AD, BE, CF. Gọi điểm H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\frac{HD}{AD}+\frac{HE}{BE}+\frac{HE}{CF}=\frac{DB}{DC}\cdot\frac{EC}{EA}\cdot\frac{FA}{FB}$$

Bài 6: Cho tam giác ABC. gọi M, N, Q theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, AC, BC. Điểm P thuộc miền trong của tam giác ABC. Ba điểm A', B', C' theo thứ tự là điểm đối xứng của điểm P qua các điểm Q, N, M. Tìm điều kiện của tam giác ABC và vị trí điểm P để lục giác AB'CA'BC' là lục giác đều.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $(2x-1)^2-(4x-2)-3=(2x-1)^2-2(2x-1)+1-4$

$=[(2x-1)-1]^2=(2x-1)^2-2^2=(2x-2+2)(2x-2-2)$

$=2x(2x-4)=4x(x-2)$

2) Áp dụng hằng đẳng thức $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$

$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=(a-b)^3-[(a-b)+(c-a)]^3+(c-a)^3$

$=2(a-b)(b-c)(c-a)$

3) $x(x+1)(x+2)(x+3)-8=(x^2+3x)(x^2+3x+2)-8$

$=[(x^2+3x+1)-1][(x^2+3x+1)+1]-8$

$=(x^2+3x+1)^2-9=(x^2+3x+1+3)(x^2+3x+1-3)$

$=(x^2+3x-2)(x^2+3x+4)$

Bài 2:

1) Với $a+b=1$ và $ab\neq 0$, ta có:

$$\frac{a}{b^3-1}+\frac{b}{a^3-1}=\frac{a(a^3-1)+b(b^3-1)}{(a^3-1)(b^3-1)}=\frac{(a^4+b^4)-(a+b)}{a^3b^3-(a^3+b^3)+1}$$

$$=\frac{(a^2+b^2)^2-2a^2b^2-1}{a^3b^3-(a+b)^3+3ab(a+b)+1}=\frac{[(a+b)^2-2ab]^2-2a^2b^2-1}{a^3b^3+3ab}$$

$$=\frac{1+4a^2b^2-2a^2b^2-1}{ab(a^2b^2+3)}\text{ (vì } a+b=1)$$

$$=\frac{2a^2b^2-4ab}{ab(a^2b^2+3)}=\frac{2ab(ab-2)}{ab(a^2b^2+3)}=\frac{2(ab-2)}{a^2b^2+3}\ (ab\neq 0)$$

2) Với a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác, ta có:

$$\frac{ab}{b+c}+\frac{bc}{c+a}+\frac{ca}{a+b}=\frac{ca}{b+c}+\frac{ab}{c+a}+\frac{bc}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow ab\left(\frac{1}{b+c}-\frac{1}{a+c}\right)+bc\left(\frac{1}{a+c}-\frac{1}{a+b}\right)+ac\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{b+c}\right)=0$$

$$\frac{ab(a-c)}{(b+c)(a+c)}\Leftrightarrow+\frac{bc(b-c)}{(a+c)(a+b)}+\frac{ac(c-a)}{(a+b)(b+c)}=0$$

$\Leftrightarrow ab(a-b)(a+b)+bc(b-c)(b+c)+ac(c-a)(a+c)=0$

$\Leftrightarrow ab(a-b)(a+b)-bc(b+c)[(c-a)+(a-b)]+ac(c-a)(a+c)=0$

$\Leftrightarrow ab(a-b)(a+b)-bc(b+c)(c-a)-bc(b+c)(a-b)+ac(c-a)(a+c)=0$

$\Leftrightarrow b(a-b)(a^2+ab-bc-c^2)+c(c-a)(a^2+ac-b^2-bc)=0$

$\Leftrightarrow b(a-b)[(a-c)(a+c)+b(a-c)]+c(c-a)[(a-b)(a+b)+c(a-b)]=0$

$\Leftrightarrow b(a-b)(a-c)(a+b+c)-c(a-c)(a-b)(a+b+c)=0$

$\Leftrightarrow (a+b+c)(a-b)(a-c)(b-c)=0$

$\Leftrightarrow a-b=0$ hoặc $a-c=0$; $b-c=0$ (vì $a+b+c>0$)

$\Leftrightarrow a=$ hoặc $a=c$; $b=c\Leftrightarrow \Delta ABC$ cân

Bài 3:

1) TXĐ: $x \neq \pm 2$

Phương trình đã cho trở thành:

$(x - 1)(x - 2) + (x + 1)(x + 2) = 2x^2 + 4$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 + x^2 + 3x + 2 = 2x^2 + 4$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 4 = 2x^2 + 4 \Leftrightarrow 0x = 0$ $x \in Q$ (x tùy ý)

Vậy phương trình có vô số nghiệm $x \neq \pm 2$

2) $E = \left|x^2 + y^2 + 5 + 2x - 4y\right| - \left|-(x + y - 1)^2\right| + 2xy$

$= \left|(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4)\right| - \left|(x + y - 1)^2\right| + 2xy$

$= x^2 + y^2 + 5 + 2x - 4y - x^2 - y^2 - 1 - 2xy + 2x + 2y + 2xy$

$= 4x - 2y - 4 = 2(2x - y) + 4$

Với $x = 2^{2003}$ và $y = 16^{501} = (2^4)^{501} = 2^{2004}$ thì

$E = 2(2.2^{2003} - 2^{2004}) + 4 = 2.0 + 4 = 4$

Bài 4: Gọi x (*l*) là lượng nước ở bình thứ ba trước khi rót sang bình thứ nhất (x > 0)

Sau khi rót $\frac{1}{10}x$ (*l*) đi sang bình thứ nhất thì lượng nước còn lại $\frac{9}{10}x$ (*l*)

Sau khi rót mỗi bình còn lại 9 lít, nên ta có phương trình:

$$\frac{9}{10}x = 9 \Leftrightarrow x = 10$$

Vậy lượng nước của bình thứ ba trước khi rót sang bình thứ nhất 10l là:

Lượng nước của bình ba rót sang bình thứ nhất 1*l*

Suy ra: Lượng nước của bình thứ nhất ban đầu là:

$$(9 - 1) : (1 - \frac{1}{3}) = 12\ (l)$$

Lượng nước của bình thứ hai ban đầu có là:

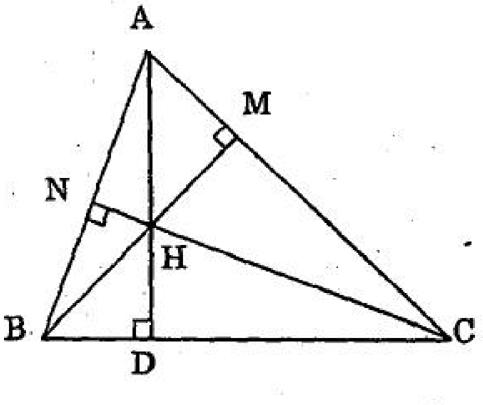
$$9 : (1 - \frac{1}{4}) - 12.\frac{1}{3} = 8\ (l)$$

Lượng nước của bình thứ ba ban đầu có là:

$$9.3 - (12 + 8) = 7\ (l)$$

Bài 5:

Do ΔABC nhọn nên trực tâm H ở miền trong của ΔABC.



$$\frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}BC.HD}{\frac{1}{2}BC.AD} = \frac{HD}{AD}$$

Tương tự, ta cũng có:

$$\frac{HE}{BE} = \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} \text{ và } \frac{HF}{BF} = \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}}$$

Suy ra: $\dfrac{HD}{AD}+\dfrac{HE}{BE}+\dfrac{HF}{BF}=\dfrac{S_{HBC}+S_{HAC}+S_{HAB}}{S_{ABC}}=\dfrac{S_{ABC}}{S_{ABC}}=1$ (1)

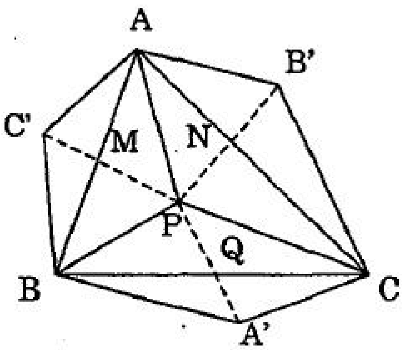
Ta có: $\dfrac{S_{AHB}}{S_{AHC}}=\dfrac{\frac{1}{2}AH.BD}{\frac{1}{2}AH.DC}=\dfrac{BD}{DC}$

Tương tự, ta có: $\dfrac{EC}{EA}=\dfrac{S_{BHC}}{S_{AHB}}$ và $\dfrac{FA}{FB}=\dfrac{S_{HAC}}{S_{BHC}}$

Suy ra: $\dfrac{BD}{DC}.\dfrac{EC}{EA}.\dfrac{FA}{FB}=\dfrac{S_{AHB}}{S_{AHC}}.\dfrac{S_{BHC}}{S_{AHB}}.\dfrac{S_{AHC}}{S_{BHC}}=1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$\dfrac{HD}{AD}+\dfrac{HE}{BE}+\dfrac{HE}{CF}=\dfrac{DB}{DC}.\dfrac{EC}{EA}.\dfrac{FA}{FB}$ (đpcm)



Bài 6:

Lục giác AB'CA'BC' là lục giác đều

$\Rightarrow \begin{cases}\widehat{B'}=\widehat{A'}=\widehat{C'}=120^0\\ AB'=BC'=CA'=AB'=BC'=CA'\end{cases}$

$\Rightarrow \Delta AB'C=\Delta CA'B=\Delta BC'A$ (c–g–c)

$\Rightarrow AC=CB=AB \Rightarrow \Delta ABC$ đều.

$\begin{cases}\text{Ba điểm M, N, Q theo thứ tự là trung điểm AB, AC, BC (gt)}\\ \text{A, B, C là điểm đối xứng điểm P qua các điểm Q, N, M}\end{cases}$

$\Rightarrow$ Các tứ giác PCA'B, PCB'A, PAC'B là hình bình hành.

Vậy PA = PB = PC $\Rightarrow$ điểm P là giao điểm của đường trung trực ba cạnh của ΔABC.

Ngược lại, nếu có ΔABC là tam giác đều và P là giao điểm ba đường trung trực của ba cạnh tam giác thì ta dễ dàng chứng minh được AB'CA'BC' là lục giác đều.

B. MỘT SỐ VẤN ĐỀ NÂNG CAO TOÁN 8

I. MẸO NHỎ GIÚP GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp tách một hạng tử thành nhiều hạng tử và phương pháp thêm bớt cùng một hạng tử là vấn đề tương đối khó với học sinh lớp 8. Việc tìm kiếm "mẹo" để giúp giải một số bài toán dạng này rất cần thiết.

Qua bài viết này xin được giúp các em học sinh lớp 8 một chút "mẹo" nhỏ, để giải một số bài toán phân tích đa thức thành nhân tử.

Dạng 1: Phân tích đa thức $ax^2 + bx + c$ thành nhân tử

1) Cơ sở tìm kiếm

$ax^2 + bx + c = (mx + n)(px + q) = mpx^2 + (mq + np)x + nq$

Nhận ra rằng $ac = (mp)(nq) = (mq)(np)$ và $b = mq + np$ giúp ta đến với "mẹo". Tìm cặp số u, v sao cho $a.c = u.v$ và $b = u + v$, rồi tách bx thành $ux + vx$, tiếp tục vận dụng phương pháp nhóm nhiều hạng tử.

2) Mẹo nhớ

Tìm hai số u, v thỏa mãn $u.v = a.c$ và $u + v = b$. Tách bx thành $ux + vx$, tiếp tục vận dụng phương pháp nhóm nhiều hạng tử.

3) Các ví dụ

Ví dụ 1: Phân tích đa thức thành nhân tử: $15x^2 - 11x - 12$

• *Tìm kiếm lời giải*

$a.c = 15(-12) = -20.9$ và $b = -11 = -20 + 9$

Tách $-11x$ thành $-20x + 9x$

• *Lời giải*

$15x^2 - 11x - 12 = 15x^2 - 20x + 9x - 12$

$= 5x(3x - 4) + 3(3x - 4) = (3x - 4)(5x + 3)$

Ví dụ 2: Phân tích đa thức thành nhân tử $14x^2 + 33x - 5$

• *Tìm kiếm lời giải*

$a.c = 14(-5) = -2.35$ và $b = 33 = -2 + 35$

Tách $33x$ thành $-2x + 35x$

• *Lời giải*

$14x^2 + 33x - 5 = 14x^2 - 2x + 35x - 5$

$= 2x(7 - 1) + 5(7x - 1) = (7x - 1)(2x + 5)$

Dạng 2: Phân tích đa thức $x^{3m+2} + x^{3n+1} + 1$ thành nhân tử

1) Cơ sở tìm kiếm

$x^{3k+r} = x^r(x^{3k} - 1) + x^r$, với $r = 0, 1, 2$

Ta có: $x^{3k} - 1 = [(x^3)^k - 1^k] \vdots (x^3 - 1)$; $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

Do vậy khi phân tích đa thức $x^{3m+2} + x^{3n+1} + 1$ thành nhân tử có một nhân tử là $x^2 + x + 1$

2) Mẹo nhớ

Đa thứ $x^a + x^b + 1$ nếu có a chia cho 3 dư 2, b chia cho 3 dư 1. Thêm bớt cùng hạng tử để biến đổi đa thức $x^a + x^b + 1$ đó về tích có chứa nhân tử $x^2 + x + 1$

3) Các ví dụ

Ví dụ 1: Phân tích đa thức thành nhân tử $x^5 + x^4 + 1$

• *Tìm kiếm lời giải*

5 chia cho 3 dư 2, 4 chia cho 3 dư 1. Đa thức $x^5 + x^4 + 1$ khi viết dưới dạng tích có một nhân tử là $x^2 + x + 1$.

• *Lời giải*

$x^5 + x^4 + 1 = x^5 + x^4 + x^3 - x^3 - x^2 - x + x^2 + x + 1$

$= x^3(x^2 + x + 1) - x(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1)$

Ví dụ 2: **Phân tích đa thức sau thành nhân tử $x^{10} + x^5 + 1$**

• *Tìm kiếm lời giải*

10 chia cho 3 dư 1, 5 chia cho 3 dư 2. Đa thứ $x^{10} + x^5 + 1$ khi viết dưới dạng tích có một nhân tử là $x^2 + x + 1$.

• *Lời giải*

$$x^{10} + x^5 + 1 = x^{10} + x^9 + x^8 - x^9 - x^8 - x^7 + x^7 + x^6 + x^5 - x^6 - x^5 - x^4 + x^5 + x^4 + x^3 - x^3 - x^2 - x + x^2 + x + 1$$

$$= x^8(x^2 + x + 1) - x^7(x^2 + x + 1) + x^5(x^2 + x + 1) - x^4(x^2 + x + 1) + x^3(x^2 + x + 1) - x(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1)$$

Một số bài toán tự luyện

Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

1) $12x^2 + 7x - 12$ **2)** $8x^2 + 6x - 35$ **3)** $21x^2 - 5x - 6$

4) $10x^2 + 11x + 3$ **5)** $-6x^2 + 7x + 3$ **6)** $x^{10} + x^2 + 1$

7) $x^5 + x + 1$ **8)** $x^7 + x^5 + 1$ **9)** $x^{11} + x^4 + 1$

10) $x^8 + x + 1$

II. TỪ BÀI TOÁN QUEN THUỘC ĐẾN NHỮNG BÀI TOÁN THI CHỌN HỌC SINH GIỎI

Từ bài toán quen thuộc với những ý tưởng sáng tạo nhiều khi dẫn chúng ta đến với những bài toán thi chọn học sinh giỏi.

Xin được cùng bạn đọc đi từ bài toán rất quen thuộc sau.

Bài toán A: Chứng minh rằng $m^2 - mn + n^2 \geq 0$ với mọi m, n

HƯỚNG DẪN GIẢI

$$m^2 - mn + n^2 = (m^2 - mn + \frac{n^2}{4}) + \frac{3}{4}n^2 = (m - \frac{n}{2})^2 + \frac{3}{4}n^2 \geq 0$$

Nhận ra rằng nếu cho $m = x - 1$; $n = 1 - y$ thì:

$(x - 1)^2 - (x - 1)(1 - y) + (1 - y)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - x + xy + 1 - y + 1 - 2y + y^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + xy - 3x - 3y + 3 \geq 0$

Ta đã đến với bài toán.

Bài toán 1: Chứng tỏ rằng: $x^2 + y^2 + xy - 3x - 3y + 3 \geq 0$

(Đề thi chọn đội tuyển toán 9, Trường THCS Nguyễn Gia Thiều, Quận Tân Bình, TPHCM 2000 – 2001)

Và nếu cho $m = x - 2$, $n = 1 - y$ thì:

$(x - 2)^2 - (x - 2)(1 - y) + (1 - y)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - x + xy + 2 - 2y + 1 - 2y + y^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + xy - 5x - 4y + 7 \geq 0$

Cho bài toán

Bài toán 2: Chứng minh rằng: $x^2 + y^2 + xy - 5x - 4y + 7 \geq 0$

(Đề kiểm tra đội tuyển toán 9, Trường THCS Hai Bà Trưng và Trường THCS Lê Quý Đôn, Quận 3, TPHCM 2000 – 2001)

Tiếp tục cho m = a; n = –b thì ta có:

$a^2 - a(-b) + (-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + ab + b^2 \geq 0$

Mà $(a - b)2 \geq 0$ với mọi a; b.

Do đó: $(a^2 + ab + b^2)(a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow [(a^2 + ab + b^2)(a - b)](a - b) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a^3 - b^3)(a - b) \geq 0 \quad \Leftrightarrow a^4 - a^3b - ab^3 + b^4 \geq 0$

$\Leftrightarrow a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$

Ta đến với bài toán

Bài toán 3: Chứng minh $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$ với mọi a, b

(Đề thi tuyển sinh lớp 10 Trường THCS chuyên Lê Hồng Phong, TPHCM 1998 – 1999)

Từ bài toán 3 cho $a = x^2$, $b = y^2$ và x, y khác 0 giúp ta đến:

$(x^2)^4 + (y^2)^4 \geq (x^2)^3y^2 + x^2(y^2)^3$

$$\Leftrightarrow \frac{x^8}{x^2y^2} + \frac{y^8}{x^2y^2} \geq \frac{x^6y^2}{x^2y^2} + \frac{x^2y^2}{x^2y^2} \Leftrightarrow \frac{x^6}{y^2} + \frac{y^6}{x^2} \geq x^4 + y^4$$

Cho ta bài toán

Bài toán 4: Chứng tỏ rằng với x, y khác 0, bất đẳng thức sau đúng:

$$x^4 + y^4 \leq \frac{x^6}{y^2} + \frac{y^6}{x^2}$$

(Đề thi tuyển vào lớp 10 chuyên toán trường THCS chuyên Lê Hồng Phong, TPHCM 1998 – 1999)

$(x^2)^4 + (y^2)^4 \geq (x^2)^3 y^2 + x^2(y^2)^3 \Leftrightarrow x^8 + y^8 \geq x^6y^2 + x^2y^6$

$$\Leftrightarrow \frac{x^8}{x^4y^4} + \frac{y^8}{x^4y^4} \geq \frac{x^6y^2}{x^4y^4} + \frac{x^2y^6}{x^4y^4} \Leftrightarrow \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} \geq \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} \geq 0$$

và nếu x > 0, y > 0 ta có: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{(x-y)^2}{xy} + 2 \geq 2$

Do đó, ta có: $\frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \frac{x^2}{y^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ giúp ta đến bài toán

Bài toán 5: Tìm các cặp số dương (x, y) để: $\frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

(Đề thi vô địch toán Cộng hòa dân chủ Đức, 1973)

Ở bài toán A cho m = x, n = y và x, y khác 0

Ta có: $x^2 - xy + y^2 \geq 0$, $\frac{(x-y)^2}{x^2y^2} \geq 0$

Do đó: $(x^2 - xy + y^2).\frac{(x-y)^2}{x^2y^2} \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - xy + y^2}{xy}.\frac{x^2 - 2xy + y^2}{xy} \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} - 1 + \frac{y}{x}\right).\left(\frac{x}{y} - 2 + \frac{y}{x}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{y^2} - 2.\frac{x}{y} + 1 - \frac{x}{y} + 2 - \frac{y}{x} + 1 - 2.\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4 - 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \geq 0$$

Bài toán 6: Cho x, y là hai số thực khác 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 4 \geq 0$$

(Đề thi vô địch toán Cộng hòa Secbi, 1977)

Đề thi chọn lọc học sinh giỏi toán 9 toàn quốc 1994 – 1995

Đề thi chọn học sinh giỏi toán 9, Quận 1 và Quận Tân Bình, TP.HCM 1999 – 2000)

Các bạn đã tìm được thêm các bài toán thi học sinh giỏi từ bài toán A này chưa ?

Bài toán B: Chứng minh rằng $(a + b)^3 - a^3 - b^3 = 3ab(a + b)$

Lời giải vắn tắt:

$(a + b)^3 - a^3 - b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - a^3 - b^3$

$= 3a^2b + 3ab^2 = 3ab(a + b)$

Nhận ra rằng nếu cho a = x – 3 , b = 2x + 1 thì a + b = 3x – 2,

$(3x - 2)^2 - (x - 3)^3 - (2x + 1)^3 = 3(x - 3)(2x + 1)(3x - 2)$

ta đến với bài toán mới.

Bài toán 1: Giải phương trình sau: $(3x - 2)^2 - (x - 3)^3 = (2x + 1)^3$

Và nếu cho a = x – 2, b = y + 2 thì a + b = x + y , ta đến với bài toán.

Bài toán 2: Giải phương trình nghiệm nguyên sau:

$(x + y)^3 = (x - 2)^3 + (y + 2)^3 + 6$

tiếp tục cho a = x – y , b = y – z thì a + b = x – z,

$(x - z)^3 - (x - y)^3 - (y - z)^3 = 3(x - y)(y - z)(x - z)$, ta đến với bài toán

Bài toán 3: Phân tích thành nhân tử: $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (x - z)^3$

(Đề thi học sinh giỏi toán cấp II, miền Bắc 1962)

Và nếu cho a = x, b = y + z ta sẽ có:

$(x + y + z)^3 - x^3 - (y + z)^3 = 3x(y + z)(x + y + z)$ (1) và thêm nữa

$(y + z)^3 - y^3 - z^3 = 3yz(y + z)$ **(2)**

Cộng (1) và (2) vế theo vế sẽ đến:

$(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 = 3(x + y)(y + z)(z + x)$

Bài toán 4: Phân tích đa thức thành nhân tử:

$(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$

(Đề thi học sinh giỏi toán Blantsia, 1952)

Bài toán 5: Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$(x + y + z)^3 - (x + y - z)^3 - (x - y + z)^3 - (x + y + z)^3$

Tiếp tục cho $a = x^2 - z^2$, $b = y^3 + z^2$ ta lại có bài toán

Bài toán 6: Phân tích đa thức thành nhân tử:

$(x^2 + y^2)^3 - (x^2 + z^2)^3 - (y^2 + z^2)^3$

(Đề thi học sinh giỏi toán Blantsia, 1957)

Còn nếu cho $a + b = -c$ ta có $(-c)^3 - a^3 - b^3 = 3ab(-c)$

hay $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Cho ta lời giải các bài toán sau:

Bài toán 7: Cho a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 0$

Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Bài toán 8: Cho a, b, c khác 0 thỏa mãn $a + b + c = 0$

Tính giá trị của biểu thức $\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab}$

Từ bài toán B tiếp tục cho $a + b = -(c + d)$ ta được

$-(c + d)^3 - a^3 - b^3 = -3ab(c + d) \Leftrightarrow a^3 + b^3 + (c + d)^3 = 3ab(c + d)$

Mặt khác: $-(c + d)^3 + c^3 + d^3 = -3cd(c + d)$

Do đó ta có: $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(c + d)(ab - cd)$

Bài toán 9: Cho $a + b + c + d = 0$

Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(c + d)(ab - cd)$

(Đề thi chọn học sinh giỏi học bổng Marie Curie Trường THCS Nguyễn Du TP. Hồ Chí Minh 1998 – 1999)

Và nếu cho $a = x^2$, $b = y^2$ ta nhận được

$(x^2 + y^2)^3 - (x^2)^3 - (y^2)^3 = 3x^2y^2(x^2 + y^2)$

nếu có x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$ ta có $x^6 + y^6 = 1 - 3x^2y^2$,

và vì $0 \le x^2y^2 \le \frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2 = \frac{1}{4}$ ta có bài toán hay và khó sau:

Bài toán 10: Cho x, y là hai số thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x^6 + y^6$.

Bài toán B chắc chắn còn nhiều điều hấp dẫn nữa nếu ta tiếp tục suy nghĩ, tìm tòi.

III. TRAO ĐỔI VỀ VIỆC DẠY VÀ HỌC MỘT DẠNG TOÁN

Trong tạp chí Trung học phổ thông (Vụ phổ thông) số 28(7 – 1999) có bài viết "Dùng chữ số tận cùng và phương pháp chứng minh phản chứng" để giải bài toán "Không tồn tại các số nguyên thỏa mãn các đẳng thức nào đó". Các bài toán có thể phát biểu rằng:

Chứng minh rằng, không tồn tại các số nguyên a, b, c, d thỏa mãn các đẳng thức sau:

a/ abcd – a = số lẻ (1) ;
abcd – b = số lẻ (2) ;
abcd – c = số lẻ (3) ;
abcd – d = số lẻ (4) .

b/ abcd + a = số lẻ ;
abcd + b = số lẻ ;
abcd + c = số lẻ ;
abcd + d = số lẻ .

Các lời giải của bài toán dạng này trên bài viết hơi dài dòng và phức tạp mà thực ra có lời giải gọn hơn như sau:

Từ (1) $\Rightarrow$ a (bcd – 1) = số lẻ $\Rightarrow$ a là số lẻ.

Tương tự (2), (3), (4) ta có b, c, d là các số lẻ.

Do vậy vế phải của các đẳng thức (1), (2), (3), (4) là số lẻ còn vế trái là số chẵn. Vô lí!

Vậy ta có điều cần chứng minh.

Bài toán b) lời giải hoàn toàn tương tự.

Hơn nữa lời giải này vẫn đúng khi vế trái của các đẳng thức (1), (2), (3), (4) được thay đổi thành abcd – a ; abcd + 5b ; abcd + 7 c; abcd – 9 d mà lời giải cũ bị hạn chế. Đồng thời, lời giải trên giúp ta đến với bài toán tổng quát cho dạng toán này như sau:

Bài toán:

Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên a_1; a_2 ; ...; a_{n-1}; a_n thỏa mãn các đẳng thức sau

$a_1 . a_2 ... a_n + (-1)^{m_1} . a_1.t_1$ = số lẻ ;

$a_1 . a_2 ... a_n + (-1)^{m_2} . a_2.t_2$ = số lẻ ;

....

$a_1 . a_2 ... a_n + (-1)^{m_{n-1}} . a_{n-1}.t_{n-1}$ = số lẻ ;

$a_1 . a_2 ... a_n + (-1)^{m_n} . a_n.t_n$ = số lẻ ;

(trong đó $m_i \in N$, t_n là số lẻ và $i = \overline{1,n}$)

Qua bài viết này tôi mong muốn cùng bạn đọc trao đổi để cùng tìm ra giải pháp tốt cho việc dạy và học dạng toán này có hiệu quả cao, rất mong nhận được ý kiến từ bạn đọc.

IV. VỀ MỘT BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC

Chúng tôi xin được cùng bạn trao đổi về một bài toán bất đẳng thức có điều kiện sau:

Bài toán: Cho a, b, c $\in$ [0; 2] thỏa mãn a + b + c = 3.

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$

Xin đề xuất ba cách giải.

Cách 1: a, b, c $\in$ [0;2] $\Rightarrow \begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ 2-a,\ 2-b,\ 2-c \geq 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} abc \geq 0 \\ (2-a)(2-b)(2-c) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow abc + (2-a)(2-b)(2-c) \geq 0$$

$\Rightarrow 8 - 4(a + b + c) + 2(ab + bc + ca) \geq 0 \Rightarrow -2(ab + bc + ca) \leq -4$

Do đó: $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 9 - 2(ab + bc + ca) \leq 5$

Cách 2: Vai trò a, b, c như nhau, không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c \geq 0$

Ta có: $3a \geq a + b + c = 3 \Rightarrow a \geq 1$

$1 \leq a \leq 2 \Rightarrow a + b + c = 3 \Rightarrow (a-1)(a-2) \leq 0$

$\Rightarrow a^2 - 3a + 2 \leq 0$

Do đó: $a^2 + b^2 + c^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2bc = a^2 + (b + c)^2$

$= a^2 + (3-a)^2 = 2a^2 - 6ab + 9 = 2(a^2 - 3a + 2) + 5 \leq 5$

Cách 3: Đặt $a = x + 1$, $b = y + 1$, $c = z + 1$

$a, b, c \in [0, 2] \Rightarrow x, y, z \in [-1, 1]$

$a + b + c = 3 \Rightarrow x + y + z = 0$

$x + y + z = 0$

trong đó ba số x, y, z có hai số cùng dấu không mất tính tổng quát, giả sử x và y.

Ta có $xy \geq 0$, $z \in [-1, 1] \Rightarrow z^2 \leq 1$

Do đó: $a^2 + b^2 + c^2 = (x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2$

$= x^2 + y^2 + z^2 + 2(x + y + z) + 3 = (x + y)^2 + z^2 + 3$

$= (-z)^2 + z^2 + 3 = 2x^2 + 3 = 2z^2 + 3 \leq 5$

Từ ba lời giải trên giúp ta giải được bài toán tổng quát sau:

Cho $a, b, c \in [\alpha, \beta]$ thỏa mãn $a + b + c = \gamma$ trong đó $2\alpha + \beta \leq \gamma \leq 2\beta + \alpha$

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 \leq \alpha^2 + \beta^2 + (\gamma - \alpha - \beta)^2$

Các bạn còn tìm thêm điều gì thú vị từ bài toán này chăng?

V. MỘT THỦ THUẬT ĐỔI BIẾN ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC CÓ ĐIỀU KIỆN

Trên tạp chí Toán học và tuổi trẻ số 295 (1 – 2002), thầy giáo Hoàng Văn Đắc (Trường THCS Tân Việt, Bình Giang, Hải Dương) đã trình bày một số bài toán đổi biến để chứng minh bất đẳng thức có điều kiện. Bài viết này xin nêu một số thủ thuật biến đổi giúp giải được một số bài toán bất đẳng thức có điều kiện và đôi khi khá độc đáo.

Trong một số bài toán bất đẳng thức nếu có xuất hiện $a_1 + a_2 + ... + a_n \leq m$,

Có thể đổi biến $x_1 = a_1 - \dfrac{m}{n}$, $x_2 = a_2 - \dfrac{m}{n}$, ... , $x_n = a_n - \dfrac{m}{n}$

Do vậy $a_1 + a_2 + ... + a_n \underset{\geq}{\leq} m \Leftrightarrow x_1 + x_2 + ... + x_n \underset{\geq}{\leq} 0$

Bất đẳng thức cần chứng minh viết dưới dạng biến mới, từ đó dễ dàng tìm được lời giải. Chẳng hạn:

Bài toán 1: Cho a, b, c thỏa mãn $a + b \geq c \geq 0$.

Chứng minh rằng $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}c^2$.

Lời giải: Đặt $x = a - \frac{c}{2}$, $y = b - \frac{c}{2}$.

Vì $a + b \geq 0$ nên $x + y = a + b - c \geq 0$.

Ta có: $a^2 + b^2 = (x + \frac{c}{2})^2 + (y + \frac{c}{2})^2 = x^2 + cx + \frac{1}{4}c^2 + y^2 + cy + \frac{1}{4}c^2$

$$= x^2 + y^2 + c(x + y) + \frac{1}{2}c^2 \geq \frac{1}{2}c^2$$

Vì $x^2 \geq 0$; $y^2 \geq 0$; $c(x + y) \geq 0$

Bài toán 2: Cho a, b thỏa mãn $a^3 + b^3 \leq 2$. Chứng minh rằng $a + b \leq 2$.

Lời giải: Đặt $x = a - 1$, $y = b - 1$

Ta có: $a^3 + b^3 = (x + 1)^3 + (y + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + y^3 + 3y^2 + 3y + 1$

$= (x^3 + y^3) + 3(x + y) + 3(x^2 + y^2) + 2$

$= (x + y)(x^2 - xy + y^2 + 3) + 3(x^2 + y^2) + 2$

mà $x^2 - xy + y^2 + 3 = 3(x - \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2 + 3 > 0$

$3(x^2 + y^2) \geq 0$, $a^3 + b^3 \geq 2$

Do đó: $x + y \leq 0$.

Vậy $a + b = x + 1 + y + 1 = (x + y) + 2 \leq 2$.

Bài toán 3: Cho a, b, $c \in [0,2]$ thỏa mãn $a + b + c = 3$.

Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$

Lời Giải: Đặt $x = a - 1$, $y = b - 1$, $z = c - 1$.

$a + b + c = 3$ (gt)

Do đó $x + y + z = 0$

Suy ra hai trong ba số x, y, z cùng dấu.

Không mất tính tổng quát, giả sử x và y.

Ta có: $xy \geq 0$

Mà $c \in [0,2]$ nên $z \in [-1,1] \Rightarrow z^2 \leq 1$

Vậy $a^2 + b^2 + c^2 = (x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2$

$= x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 + z^2 + 2z + 1 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(x + y + z) + 3$

$= x^2 + y^2 + z^2 + 3 \leq 2xy + x^2 + y^2 + z^2 + 3 = (x + y)^2 + z^2 + 3 = (-z)^2 + 3 \leq 5$

VI. VỀ ỨNG DỤNG CỦA MỘT BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC ĐẠI SỐ TRONG MỘT SỐ BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC

Bài toán bất đẳng thức đại số rất quen thuộc sau:

Bài toán: Chứng minh rằng nếu a, b, c > 0 thì:

$(a + b + c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \geq 9$ (*)

Lời giải vắn tắt:

$$(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})-9=1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1-9$$

$$=(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2)+(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-2)+(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}-2)$$

$$=\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(b-c)^2}{bc}+\frac{(c-a)^2}{ac}\geq 0$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow a-b=b-c=c-a=0 \Leftrightarrow a=b=c$.

Bài toán (*) giúp giải quyết và sáng tạo khá nhiều bài toán khác về cực trị hình học. Xin được trao đổi cùng bạn đọc một số ví dụ.

Bài toán 1: Cho tam giác đều ABC, M là điểm nằm trong tam giác. Gọi khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA, AB lần lượt là x, y, z. Xác định vị trí của điểm M để:

1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

2) $\frac{1}{x+1998}+\frac{1}{y+1998}+\frac{1}{z+1998}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

3) $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

4) $\frac{1}{x^2+2yz}+\frac{1}{y^2+2xz}+\frac{1}{z^2+2xy}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

HƯỚNG DẪN

Gọi a, h là cạnh, đường cao của tam giác ABC, h không đổi.

$S_{ABC}=S_{MBC}+S_{MAC}+S_{MAB} \Leftrightarrow ah=ax+ay+az \Leftrightarrow h=x+y+z$

1) $(x+y+z)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})\geq 9$ (từ (*)) $\Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{9}{h}$

2) $(x+1998+y+1998+z+1998)(\frac{1}{x+1998}+\frac{1}{y+1998}+\frac{1}{z+1998})\geq 9$ (từ (*))

3) $(x+y+z+z+x)(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x})\geq 9$ (từ (*))

$\Leftrightarrow \frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\geq\frac{9}{2h}$

4) $(x^2+2yz+y^2+2xz+z^2+2xy)\frac{1}{x^2+2yz}+\frac{1}{y^2+2xz}+\frac{1}{z^2+2xy}\geq 9$ (từ (*))

$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2+2yz}+\frac{1}{y^2+2xz}+\frac{1}{z^2+2xy}\geq\frac{9}{h^2}$

Bài toán 2: Cho a, b, c là số đo ba cạnh của một tam giác. Xác định hình dạng của tam giác để:

1) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

2) $\frac{a+999}{b+c+1998} + \frac{b+999}{c+a+1998} + \frac{c+999}{a+b+1998}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

3) $\frac{a}{-a+b+c} + \frac{b}{a-b+c} + \frac{c}{a+b-c}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

4) $\frac{b+c}{-a+b+c} + \frac{a+c}{a-b+c} + \frac{a+b}{a+b-c}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

HƯỚNG DẪN

1) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = (\frac{a}{b+c} + 1) + (\frac{b}{c+a} + 1) + (\frac{c}{a+b} + 1) - 3$

$= (a + b + c)(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}) - 3$

$= \frac{1}{2}[(b + c)+(c + a)+(a + b)](\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}) - 3 \geq \frac{1}{2}.9 - 3$ (từ (*))

2) Tương tự 1)

3) $\frac{a}{-a+b+c} + \frac{b}{a-b+c} + \frac{c}{a+b-c}$

$= (\frac{a}{-a+b+c} + \frac{1}{2}) + (\frac{b}{a-b+c} + \frac{1}{2}) + (\frac{c}{a+b-c} + \frac{1}{2}) - \frac{3}{2}$

$= \frac{1}{2}(a + b + c)(\frac{a}{-a+b+c} + \frac{b}{a-b+c} + \frac{c}{a+b-c}) - \frac{3}{2}$

$= \frac{1}{2}[(-a + b + c) + (a - b + c) + (a + b - c)]$

$(\frac{1}{-a+b+c} + \frac{1}{a-b+c} + \frac{1}{a+b-c}) - \frac{3}{2} \geq \frac{1}{2}.9 - \frac{3}{2} = 3$ (từ (*))

4) $\frac{b+c}{-a+b+c} + \frac{a+c}{a-b+c} + \frac{a+b}{a+b-c} = (\frac{b+c}{-a+b+c} - \frac{1}{2})$

$+ (\frac{a+c}{a-b+c} - \frac{1}{2}) + (\frac{a+b}{a+b-c} - \frac{1}{2}) + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(a + b + c)$

$(\frac{1}{-a+b+c} + \frac{1}{a-b+c} + \frac{1}{a+b-c}) + \frac{3}{2} \geq \frac{1}{2}.9 + \frac{3}{2} = 6$

Bài toán 3: Cho tam giác ABC có góc đều nhọn. Gọi H là trực tâm của tam giác ; A_1, B_1, C_1 là chân ba đường cao kẻ từ A, B, C.

Tìm giá trị nhỏ nhất của:

1) $\frac{AA_1}{HA_1} + \frac{BB_1}{HB_1} + \frac{CC_1}{HC_1}$ 2) $\frac{HA_1}{HA} + \frac{HB_1}{HB} + \frac{HC_1}{HC}$

HƯỚNG DẪN

Gọi S, S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích các tam giác ABC, HBC, HAC, HAB.

Ta có:

1) $\dfrac{HA_1}{AA_1} = \dfrac{S_1}{S}, \dfrac{HB_1}{BB_1} = \dfrac{S_2}{S}, \dfrac{HC_1}{CC_1} = \dfrac{S_3}{S}, \dfrac{HA_1}{AA_1 - HA_1} = \dfrac{S_1}{S_1 + S_2}$.

Do đó: $\dfrac{AA_1}{HA} + \dfrac{BB_1}{HB} + \dfrac{CC_1}{HC} \geq 9$

2) $\dfrac{HA_1}{AA_1} = \dfrac{S_1}{S} \Rightarrow \dfrac{HA_1}{AA_1 - HA_1} = \dfrac{S_1}{S_1 + S_2}$.

Do đó: $\dfrac{HA_1}{HA} + \dfrac{HB_1}{HB} + \dfrac{HC_1}{HC} \geq \dfrac{3}{2}$

Bài toán 4: Trong số các tam giác có khoảng cách từ giao điểm đến các đường phân giác trong tam giác đến các cạnh bằng nhau, hãy tìm tam giác có tổng độ dài ba đường cao đạt giá trị nhỏ nhất.

HƯỚNG DẪN

Gọi h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao tương ứng với các cạnh a, b, c của tam giác ABC, r là khoảng cách từ giao điểm các đường phân giác trong tam giác đến các cạnh tam giác.

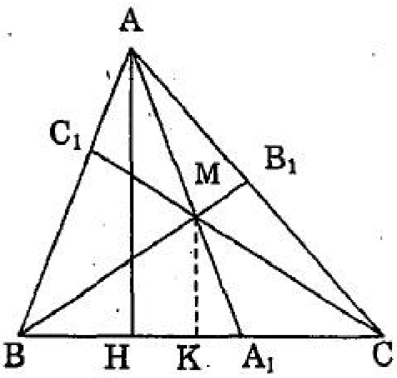
Tương tự bài 3 phần 1) ta có: $\dfrac{r}{h_a} + \dfrac{r}{h_b} + \dfrac{r}{h_c} = 1$

Áp dụng (*) ta có: $h_a + h_b + h_c = (h_a + h_b + h_c)\left(\dfrac{r}{h_a} + \dfrac{r}{h_b} + \dfrac{r}{h_c}\right) \geq 9r$

Bài toán 5: Cho tam giác ABC và M là điểm thuộc miền trong của tam giác. AM, BM, CM lần lượt cắt các cạnh tại A_1, B_1, C_1. Xác định vị trí của điểm M để:

1) $\dfrac{AA_1}{MA_1} + \dfrac{BB_1}{MB_1} + \dfrac{CC_1}{MC_1}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

2) $\dfrac{MA_1}{MA} + \dfrac{MB_1}{MB} + \dfrac{MC_1}{MC}$ đạt giá trị nhỏ nhất.



HƯỚNG DẪN

Gọi S, S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích các tam giác ABC, MBC, MAC, MAB.

Vẽ $AH \perp BC$, $MK \perp BC$ $(H, K \in BC)$

Suy ra: $\dfrac{MA_1}{AA_1} = \dfrac{MK}{AH} = \dfrac{S_1}{S}$

Giải tương tự bài 3.

Bài toán 6: Cho tam giác ABC, AA_1, BB_1, CC_1 là các phân giác. Gọi a_1, b_1, c_1 lần lượt là các khoảng cách từ A_1 đến AB, B_1 đến BC, C_1 đến CA. Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là ba đường cao của tam giác kẻ từ A, B, C.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $\dfrac{a_1}{h_a} + \dfrac{b_1}{h_b} + \dfrac{c_1}{h_c}$.

Hướng dẫn:

Vẽ AH ⊥ BC , $A_1K \perp AB$.

Ta có: $A_1K \cdot AB = AH \cdot BA_1$, $\dfrac{BA_1}{CA_1} = \dfrac{AB}{AC}$.

Từ đó chứng minh rằng: $\dfrac{a_1}{h_a} = \dfrac{b}{b+c}$

Tương tự $\dfrac{b_1}{h_b} = \dfrac{b}{c+a}$; $\dfrac{c_1}{h_c} = \dfrac{c}{a+b}$ (a = BC , b = AC, c = AB)

Áp dụng (*) ta có: $\dfrac{a_1}{h_a} + \dfrac{b_1}{h_b} + \dfrac{c_1}{h_c} < \dfrac{3}{2}$

Xoay quanh bài toán (*) còn nhiều điều hấp dẫn nữa nếu ta tiếp tục suy nghĩ, tìm tòi.

VII. MỘT PHONG CÁCH HỌC TOÁN

Khai thác bài toán trong sách giáo khoa nhiều khi đem đến cho chúng ta những điều lý thú và sâu sắc. Tôi tin rằng đây là một phong cách học toán tốt, góp phần tìm kiếm cái mới trong toán học.

Xin được cùng bạn đọc trao đổi về bài toán sau.

Bài toán A:

Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là các trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA.

Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình bình hành. (Bài 6, trang 24 SGK Hình học 8, NXB Giáo dục 2000).

HƯỚNG DẪN

MN là đường trung bình của tam giác ABC

$\Rightarrow$ MN // AC và MN = $\frac{1}{2}$AC

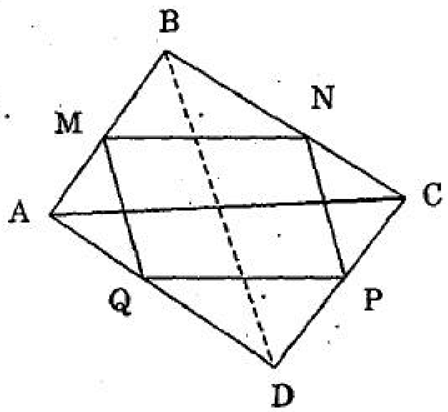
QP là đường trung bình của tam giác ADC .

$\Rightarrow$ QP // AC và QP = $\frac{1}{2}$AC

Do đó: MN // QP và MN = QP.

$\Rightarrow$ Tứ giác MNPQ là hình bình hành.

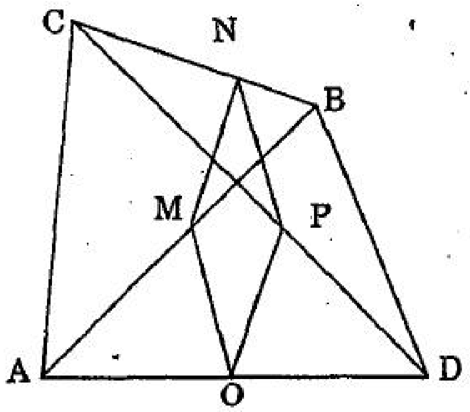
Câu hỏi được đặt ra: Liệu tứ giác ABCD không lồi thì tứ giác MNPQ có là hình bình hành không?



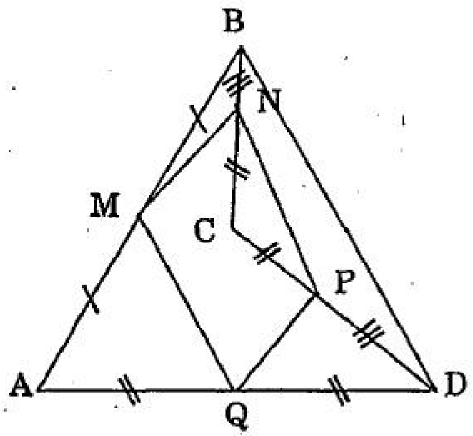
Hình 1

Dễ thấy hoàn toàn tương tự trên ta chứng minh được tứ giác MNPQ là hình bình hành. Ta có hai bài toán mới.

Bài toán 1: Cho tứ giác ABCD. Gọi M, P lần lượt là trung điểm của hai đường chéo AB,DC. N, Q lần lượt là trung điểm các cạnh BC, DA. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình bình hành.



Hình 2



Hình 3

Bài toán 2: Cho tam giác ABD, C là điểm nằm trong tam giác ABD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình bình hành.

Từ bài toán A nhận ra rằng nếu trên các cạnh BC có điểm E , trên cạnh AD có điểm F ($E \neq N$, $F \neq Q$) mà tứ giác MEPF là hình bình hành thì cũng có tứ giác ENFQ là hình bình hành, do vậy giúp ta giải được bài toán hay và khó sau.

Bài toán 3: Cho tứ giác ABCD có M, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, E và F lần lượt là các điểm thuộc các cạnh BC và DA sao cho ($EB \neq EC$, $FA \neq FD$) tứ giác MEPF là hình bình hành.

Chứng minh rằng BC // AD. Bài toán A giúp ta giải được bài toán sau:

Bài toán 4: Cho ngũ giác ABCDE, gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, DE, AE. H là trung điểm của NQ, K là trung điểm của MP. Chứng minh rằng KH // DC.

Và nếu I, J lần lượt là trung điểm các đường chéo AC, BD, bài toán A và bài toán 1 giúp ta đến với bài toán Giecgôn:

Bài toán 5: Chứng minh rằng đoạn thẳng nối trung điểm hai đường chéo và các đoạn thẳng nối trung điểm các cạnh đối của tứ giác lồi gặp nhau tại một điểm.

Hơn nữa, ta cũng nhận ra rằng, ở bài toán A còn có:

$AC \perp BD \Leftrightarrow MN \perp MQ \Leftrightarrow$ MNPQ là hình chữ nhật .

$AC = BD \Leftrightarrow MN = MQ \Leftrightarrow$ MNPQ là hình thoi.

Giúp ta đến với bài toán 6.

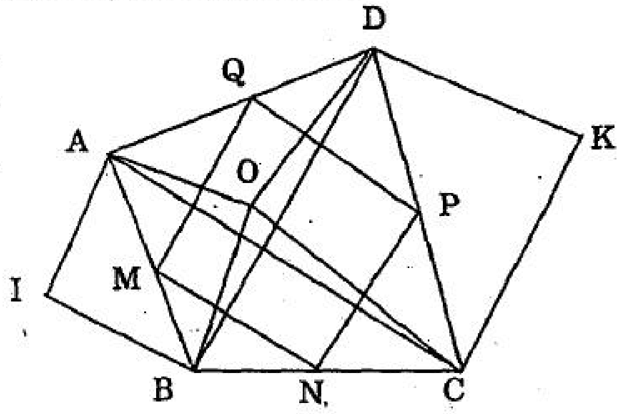
Bài toán 6: Gọi M,N,P,Q là các trung điểm các cạnh của tứ giác ABCD. Hai đường chéo AC và BD phải thỏa mãn những điều kiện nào để M, N, P, Q là bốn đỉnh của:

a/ Hình chữ nhật? b/ Hình thoi? c/ Hình vuông?

Câu c bài toán 6 giúp ta có lời giải bài toán hay và khó sau:

Bài toán 7: Cho tam giác OBC. Về phía ngoài tam giác, dựng các hình vuông OBIA, OCKD. Gọi M, P lần lượt là tâm của các hình vuông OBIA, OCKD. Và N, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, AD. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình vuông.

Vẽ hình bài toán 7, nhận ra rằng M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA của tứ giác ABCD.



Do vậy "chìa khóa vàng" của bài toán là chứng minh AC = BD, AC $\perp$ BD.

Điều này có được từ $\Delta OAC = \Delta OBD$ (c–g–c)

Và như vậy từ hình 2 cũng cho ta bài toán mới.

Bài toán 8: Cho tứ giác ABCD, gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, AC, CD, BD. Tứ giác ABCD phải thỏa mãn những điều kiện nào để M, N, P, Q là đỉnh của:

a/ Hình chữ nhật? b/ Hình thoi? c/ Hình vuông?

Tương tự từ hình 3 cũng đến với ta bài toán 9.

Bài toán 9: Cho tam giác ABC, C là điểm nằm trong tam giác ABD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA.

Các điểm A, B, C, D phải thỏa mãn những điều kiện nào để M, N, P, Q là bốn đỉnh của:

a/ Hình chữ nhật? b/ Hình thoi? c/ Hình vuông?

Và như vậy từ các bài toán: A, 1, 2, 6, 8, 9 có được bài toán tổng quát sau chăng?

Bài toán: Cho 4 điểm A, B, C, D trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA.

Các điểm A, B, C, D phải thỏa mãn những điều kiện nào để M, N, P, Q là bốn đỉnh của:

a/ Hình chữ nhật? b/ Hình thoi? c/ Hình vuông?

Lại nhận ra rằng $S_{MNP} = \frac{1}{4}S_{MNPQ}$, $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Do vậy $S_{MNP} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$, đến với bài toán hay và khó sau:

Bài Toán 10: Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD. Chứng minh rằng $S_{MNP} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$.

Bài toán A chắc chắn còn nhiều điều hấp dẫn và thú vị, nếu ta tiếp tục suy nghĩ và tìm tòi.

VIII. KHAI THÁC MỘT BÀI TOÁN QUEN THUỘC

Chúng ta bắt đầu từ bài toán sau:

Bài toán *

Cho hình bình hành ABCD (AB $\neq$ BC). Các đường phân giác các góc lần lượt cắt nhau tại E, F, G, H. Chứng minh tứ giác EFGH là hình chữ nhật.

Lời giải vắn tắt

$\hat{A}_1 = \frac{1}{2}\hat{A}$, $\hat{B}_1 = \frac{1}{2}B$, $\hat{A} + \hat{B} = 180^0$ (AB // BC)

Tam giác EAB có: $AEB + \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{AEB} = 180^0 - (\hat{A}_1 + \hat{B}_1) = 90^0$

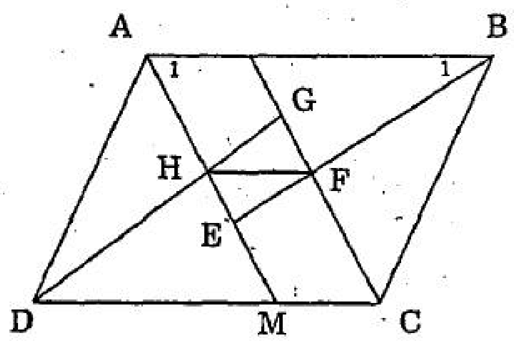
Tương tự: $\widehat{BFC} = 90^0$, $\widehat{DGC} = 90^0$

Từ đó, ta có tứ giác EFGH có $\hat{G} = \hat{F} = \hat{E} = 90^0$ nên là hình chữ nhật.

Chú ý: AB = BC thì E , F, G, H trùng nhau

Nhận ra rằng: $\widehat{AEB} = 180^0 - \frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D})$ cho ta bài toán.

Bài toán 1: Cho tứ giác ABCD. Các đường phân giác các góc của tứ giác ABCD lần lượt cắt nhau tại E, F, G, H. Chứng minh rằng tứ giác EFGH có các cặp góc đối bù nhau.



Ta thấy BF là tia phân giác góc $\widehat{ABC}$, BF $\perp$ GC.

Do vậy nếu gọi N là giao điểm của CF với AB, ta có tam giác BNC cân tại B, suy ra F là trung điểm NC.

Tương tự M là giao điểm của AH với DC ta có H là trung điểm AM. Cho ta một kết quả đẹp HF // AB và như vậy GE // AD.

Do vậy nếu $\hat{A} = \hat{B} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \Rightarrow$ ABFH là hình thang cân, cho ta bài toán mới.

Bài toán 2: Cho hình chữ nhật ABCD (AB > BC). Các phân giác trong của góc A, D cắt nhau tại H, các phân giác trong của góc B, C cắt nhau tại F. Chứng minh tứ giác ABFH là hình thang cân.

Tiếp tục khai thác, ta nhận ra rằng tứ giác ANFH là hình bình hành, tam giác BNC cân tại B. Từ đây cho ta bài toán mới.

Bài toán 3: Cho hình bình hành ABCD (AB ≠ BC). Các đường phân giác các góc lần lượt cắt nhau tại E, F, G, H. Chứng minh rằng $EG = FH = |AB - BC|$

Kết quả này cho ta sáng tạo các bài toán hay và khó sau:

Bài toán 4: Cho đoạn thẳng AB cố định, C là điểm chuyển động trên đường tròn (C, m) (m cho trước), A, B, C không thẳng hàng. Vẽ hình bình hành ABCD. Các đường phân giác các góc lần lượt cắt nhau tại E, F, G, H. Chứng minh rằng:

1) Độ dài đoạn thẳng FH không đổi khi C di động.

2) Đường thẳng FH có phương cố định.

Bài toán 5: Cho hình thang vuông ABC'D' ($B = C = 90^0$), C là điểm di động trên cạnh D'C'. Vẽ hình bình hành ABCD. Các đường phân giác các góc của tứ giác ABCD lần lượt cắt nhau tại E, F, G, H. Cho biết AB < BC'. Xác định vị trí điểm C để độ dài đoạn thẳng EG nhỏ nhất, lớn nhất. Và hơn nữa vì AB // HF, BC // GE nên nếu $AB \perp BC$ thì $HF \perp GE$. Khai thác điều này cho ta các bài toán mới nữa.

Bài toán 6: Cho hình chữ nhật ABCD (AB ≠ BC). Các đường phân giác các góc lần lượt cắt nhau tại E, F, G, H. Chứng minh tứ giác EFGH là hình vuông.

Bài toán 7: Cho hình chữ nhật ABCD (AB ≠ BC). Các đường phân giác các góc lần lượt cắt nhau tại E, F, G, H . Cho biết $P_{ABCD} = 22$ cm, $S_{EFGH} = 4{,}5$ cm^2. Tính S_{ABCD}. Suy nghĩ giúp ta đến với bài toán hay sau.

Bài toán 8: Cho hình thang ABCD (AB // CD) có các cạnh AB = a, BC = b, CB = c, DA = d. Các phân giác của các góc A và D cắt nhau tại H, các phân giác của các góc B và C cắt nhau tại F. Tính độ dài đoạn thẳng HF theo a, b, c, d.

Bài toán * Có còn gì nữa chăng nếu ta tiếp tục khai thác?

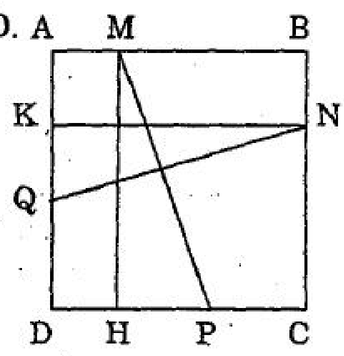
IX. VỀ MỘT BÀI TOÁN HÌNH VUÔNG

Bài toán: Cho hình vuông ABCD và các điểm M, N, P, Q lần lượt trên các cạnh (hoặc trên các đường thẳng chứa cạnh) AB, BC, CD, DA sao cho MP = NQ. Chứng minh rằng $MP \perp NQ$.

Lời giải

Vẽ $MH \perp DC$ ($H \in DC$), $NK \perp AD$ ($K \in AD$)

Tứ giác AMHD là hình chữ nhật, suy ra MH = AD.



Tương tự tứ giác ABNK là hình chữ nhật, suy ra: NK = AB .

$\Delta HMP = \Delta KNQ$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông) $\Rightarrow \widehat{HMP} = \widehat{KNQ}$.

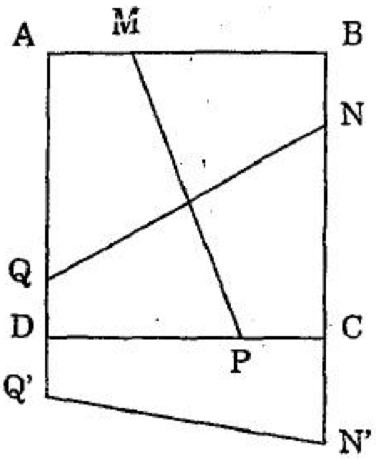
Từ đó suy ra: $MP \perp NQ$.

Bạn có ý kiến gì chăng? Tôi đã nhận ra rằng: Gọi Q' là điểm đối xứng của Q qua DC, N' là điểm đối xứng của N qua DC (hình vẽ) (Vị trí M, N , P, Q như hình ở lời giải)

Nhận ra rằng: $M \in AB$, $N' \in BC$ $P \in DC$, $Q' \in AD$, $MP \in N'Q'$ (= NQ)

Nhưng MP không vuông góc với N'Q'.

Đầu đề bài toán và lời giải có "vấn đề". Vì vậy tôi xin đề xuất cách khắc phục như sau



Bài toán: Cho hình vuông ABCD và điểm M, N, P, Q lần lượt trên các cạnh (và trên các đường thẳng chứa cạnh) AB, BC, CD, DA sao cho MP = NQ. Chứng minh rằng $MP \perp NQ$ hoặc $MP \perp N'Q'$.

Biết rằng Q' là điểm đối xứng của Q qua đường thẳng d, N' là điểm đối xứng của N qua đường thẳng d và d là đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng DC. Có ai đồng ý với ý kiến này của tôi không?

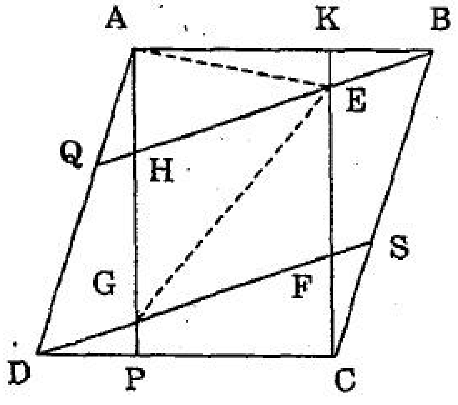
X. MỘT CHÚT SUY NGHĨ VỀ MỘT BÀI TOÁN DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

Qua bài viết này, tôi xin trao đổi cùng bạn đọc một chút suy nghĩ về một bài toán diện tích đa giác.

Bài toán *

Cho hình bình hành ABCD. Vẽ bốn đường thẳng lần lượt nối các đỉnh A, B, C, D với các trung điểm P, Q, R, S của các cạnh CD, AD, AB, BC. Chứng minh rằng tứ giác tạo bởi các đường thẳng này có diện tích bằng $\frac{1}{2}$ diện tích hình hình hành ABCD.

Hướng dẫn giải



Chứng minh:

HE = EB , EF = FC , FG = GD, GH = HA.

Ta có $S_{ABH} = 2S_{AHE} = 2S_{HEG}$

Tương tự: $S_{DFC} = 2S_{EGF}$

Do đó: $S_{ABH} + S_{DFC} = 2S_{EFGH}$

Tương tự: $S_{ADG} + S_{BCE} = 2S_{EFGH}$

Suy ra: $S_{ABCD} = 5S_{EFGH}$

Do đó: $S_{EFGH} = \frac{1}{5}S_{ABCD}$

Ta nhận thấy rằng tứ giác EFGH cũng là hình bình hành. Bài toán trên có thể sửa lại thành:

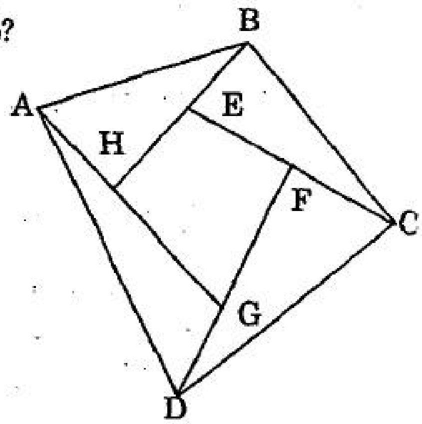
Bài 1: Cho hình bình hành EFGH. Trên các tia đối của các tia FE, GF, HG, EH lần lượt lấy các điểm C, D, A, B sao cho E, F, G , H lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng HB, EC, FD, GA. Chứng minh rằng diện tích tứ giác EFGH bằng $\frac{1}{5}$ diện tích tứ giác ABCD.

Lời giải của bài toán (*) là lời giải của bài toán 1 và cũng thấy rằng lời giải không cần đến tứ giác ABCD là hình bình hành, tứ giác EFGH là hình bình hành. Như vậy ta có bài toán tổng quát hơn.

Bài 2: Cho tứ giác EFGH. Trên các tia đối của các tia FE, GF, HG, EH lần lượt lấy các điểm C, D, A, B sao cho E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng HB, EC, FD, GA. Chứng minh rằng diện tích tứ giác EFGH bằng $\frac{1}{5}$ diện tích tứ giác ABCD.

Và ... từ bài toán 2 ta cũng nhận ra rằng: $\frac{EB}{HE} = \frac{FC}{EF} = \frac{GD}{FD} = \frac{HA}{GH} = 1$

thì $\frac{S_{ABCD}}{S_{EFGH}} = 5$



Thay "1" bởi "m" thì "5" được thay bởi số nào?

Ta đi tìm câu trả lời:

Nếu $\frac{EB}{HE} = \frac{FC}{EF} = \frac{GD}{FD} = \frac{HA}{GH} = m$

($m > 0$, m cho trước)

thì $EB = mHE$, $FC = mEF =$

$GD = mFD$, $HA = mGH$.

Do đó: $S_{ABH} = (m + 1)S_{AHE} = (m + 1)(mS_{HEG})$

$= m(m + 1)S_{HEG}$

Tương tự: $S_{DFC} = m(m + 1)S_{EGF}$

Do đó: $S_{ABH} + S_{DFC} = m(m + 1)S_{EFGH}$

Tương tự: $S_{ADG} + S_{BCE} = m(m + 1)S_{EFGH}$

Suy ra: $S_{ABCD} = [2(m + 1) + 1]S_{EFGH}$

Như vậy "5" được thay bởi "2m(m + 1) + 1"

Như vậy, chúng ta đã tìm được và giải được bài toán tổng quát hơn:

Bài 3: Cho tứ giác EFGH. Trên các tia đối của các tia FE, GF, HG, EH lần lượt lấy các điểm C, D, A, B sao cho $\frac{EB}{HE} = \frac{FC}{EF} = \frac{GD}{FD} = \frac{HA}{GH} = m$ (m, m cho trước)

Tính tỷ số S_{EFGH} theo m.

Đặt $2m(m + 1) = p > 1$, ta có thể đề ra bài toán sau.

Bài 4: Cho tứ giác EFGH. Trên các tia đối của các tia FE, GH, HG, EH lần lượt hãy xác định các điểm C, D, A, B sao cho thỏa mãn hai điều kiện sau:

1) $\frac{EB}{HE} = \frac{FC}{EF} = \frac{GD}{FD} = \frac{HA}{GH} = m$

2) $\dfrac{S_{ABCD}}{S_{EFGH}} = p$ (p cho trước, $p > 1$).

Ta có: $2m(m + 1) = p \Leftrightarrow 2m^2 + 2m + 1 - p = 0$

Phương trình bậc hai ẩn m trên có một nghiệm dương, tức là luôn tìm được giá trị $m > 0$.

Ví dụ: Cho $p = 61$, phương trình $2m(m + 1) + 1 = 61$ cho nghiệm $m = 5 > 0$, và các điểm C, D, A, B được xác định bởi $\dfrac{EB}{HE} = \dfrac{FC}{EF} = \dfrac{GD}{FD} = \dfrac{HA}{GH} = 5$

XI. SÁNG TẠO TỪ MỘT BÀI TOÁN QUEN THUỘC

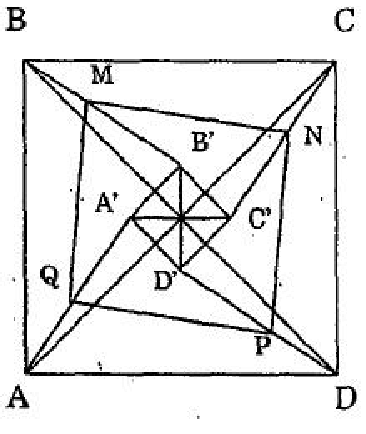
Trong việc học toán có những điều thật đơn giản, thật quen thuộc nhưng nếu chúng ta tiếp tục suy nghĩ thì chắc chắn sẽ đem đến cho chúng ta nhiều điều không đơn giản.

Xin được cùng bạn đọc đi từ một bài toán rất quen thuộc sau:

Bài toán: Cho hình vuông ABCD. Đặt một hình vuông A'B'C'D' bên trong hình vuông ABCD sao cho tâm hai hình vuông đó trùng nhau. Chứng minh rằng trung điểm của AA', BB', CC', DD' là đỉnh của một hình vuông khác.

Xin được nêu ba cách giải trong số các cách giải.

Cách 1:



$\Delta BOB' = \Delta AOA'$ (c–g–c)

$\Rightarrow BB' = AA'$

Tương tự ta lại có: $AA' = BB' = CC' = DD'$.

Suy ra $OM = ON = OP = OQ$.

BB'DD' là hình bình hành do đó

$BB' \parallel DD'$

Suy ra BMDP là hình bình hành, O là trung điểm của MP.

Tương tự O là trung điểm của QN.

Vậy MNPQ là hình chữ nhật.

$\Delta CON = \Delta DOP$ (c–g–c) $\Rightarrow \widehat{CON} = \widehat{DON} \Rightarrow \widehat{NOP} = 90^0$.

Do đó MNPQ là hình vuông.

Cách 2:

Thực hiện phép quay, tâm O góc quay 90^0, cùng chiều kim đồng hồ thì các đoạn thẳng AA', BB', CC', DD' sẽ lần lượt trùng nhau.

Từ đó: $OM = ON = OP = OQ$.

Và $\widehat{MON} = \widehat{NOP} = \widehat{POQ} = \widehat{QOM} = 90^0$

Vậy MNPQ là hình vuông.

Cách 3: Nối B'C, C'D, D'A, B'A. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng đó (đề nghị các bạn tự vẽ hình).

$\Delta MHQ = \Delta NFP$ (c.g.c) $\Rightarrow MQ = NP$
$\Delta MEN = \Delta NFP$ (c.g.c) $\Rightarrow MN = NP$
$\Delta MHQ = \Delta PGQ$ (c.g.c) $\Rightarrow MQ = PQ$
Suy ra $MN = NP = PQ = MQ$.
MNPQ là hình thoi.
Mặt khác $\widehat{HME} = \widehat{ABC}$ (góc có cạnh tương ứng song song).
$\widehat{ABC} = 90^0$ (giả thiết)
Suy ra $\widehat{HME} = 90^0$ và $\widehat{QMN} = 90^0$
Vậy MNPQ là hình vuông.
Dễ thấy rằng nếu cho: $\dfrac{AA'}{AQ} = \dfrac{BB'}{BM} = \dfrac{CC'}{CN} = \dfrac{DD'}{DP} = m \ (m > 0)$.

Và áp dụng định lí Talet, ta có bài toán sau đây, bài toán tổng quát hơn bài toán (*).

Bài toán 1: Cho hình vuông ABCD. Đặt một hình vuông A'B'C'D' bên trong hình vuông ABCD sao cho hai tâm hình vuông đó trùng nhau. Gọi M, N, P, Q là các điểm sao cho $\dfrac{BB'}{BM} = \dfrac{CC''}{CN} = \dfrac{DD''}{DP} = \dfrac{AA'}{AQ} = m \ (m > 0)$

Chứng minh rằng MNPQ là hình vuông.
Với $m = 2$, ta có bài toán (*).
Mặt khác, khai thác cách giải 2 giúp ta tìm đến bài toán tổng quát sang hướng khác như sau:

Bài toán 2: Cho đa giác đều $A_1A_2...A_n$, đặt trên đa giác này một đa giác đều $A'_1A'_2...A'_n$ sao cho tâm hai đa giác đều đó trùng nhau. Gọi $A''_1, A''_2, ..., A''_n$ là các điểm nằm trên các đoạn thẳng $A_1A'_1$, $A_2A'_2, ..., A_nA'_n$ sao cho $\dfrac{A_1A'_1}{A_1A''_1} =$

$\dfrac{A_2A'_2}{A_2A''_2} = \dfrac{A_nA'_n}{A_nA''_n} = m \ (m > 0)$.

Chứng minh rằng $A''_1A''_2...A''_n$ là đa giác đều.
Với $m = 2$, $n = 4$ đó là bài toán (*).
Chắc rằng với cách giải 1, 2 nếu "dừng ở vị trí này hoặc nọ" ta còn có tìm thêm các bài toán mới nữa.
Nhưng với cách giải 3 có tìm được điều gì lý thú không? Với cách giải 3, khi chứng minh MNPQ là hình bình hành ta không cần đến tâm O chung mà các cách giải 1, 2 phải sử dụng. Ta tìm được bài toán sau:

Bài toán 3: Cho hình bình hành ABCD. Đặt một hình bình hành A'B'C'D' sao cho các đỉnh A', B', C', D' nằm trong hình bình hành ABCD. Chứng minh rằng trung điểm của AA', BB', CC', DD' là các đỉnh của một hình bình hành.

Cũng khai thác như trên từ bài toán 3 ta lại xuất hiện bài toán 4 sau:

Bài toán 4: Cho hình bình hành ABCD. Đặt một hình bình hành $A'B'C'D'$ sao cho các đỉnh A', B', C', D' nằm trong hình bình hành ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm nằm trên các đoạn thẳng AA', BB', CC', DD' sao cho:

$$\frac{AA'}{AM} = \frac{BB'}{BN} = \frac{CC'}{CP} = \frac{DD'}{DQ} \ m \ (m > 0).$$

Chứng minh rằng MNPQ là hình bình hành?

Với m = 2 là bài toán 4 .

Và ... liệu ta có hai bài toán sau không?

Bài toán 5: Trên mặt phẳng cho hai hình bình hành ABCD và $A'B'C'D'$. Gọi M, N, P, Q là các điểm nằm trên các đoạn thẳng AA', BB', CC', DD' sao cho:

$$\frac{AA'}{AM} = \frac{BB'}{BN} = \frac{CC'}{CP} = \frac{DD'}{DQ} \ m \ (m > 0).$$

Chứng minh rằng MNPQ là hình bình hành.

Bài toán 6: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau. Trên (P) cho hình bình hành ABCD, trên (Q) cho hình bình hành $A'B'C'D'$. Gọi M, N, P, Q là các điểm nằm trên các đoạn thẳng AA', BB', CC', DD' sao cho:

$$\frac{AA'}{AM} = \frac{BB'}{BN} = \frac{CC'}{CP} = \frac{DD'}{DQ} \ m \ (m > 0).$$

Chứng minh rằng MNPQ là hình bình hành .

Từ bài toán (*) có lẽ còn nhiều bài toán mới độc đáo và thú vị nữa!

Mời các bạn tiếp tục!

XII. ĐI TÌM BÀI TOÁN TỔNG QUÁT TỪ BÀI TOÁN ĐƠN GIẢN BÀI TOÁN QUEN THUỘC

Trong học toán và dạy toán từ một bài toán đơn giản – bài toán quen thuộc đi đến bài toán tổng quát một công cụ toán học rất thường dùng là *phép đồng dạng*. Trong Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 2 (200/ 1994), thầy giáo Nguyễn Khánh Nguyên với bài viết "Thử nhìn bằng con mắt đồng dạng" đã nêu ba bài toán rất quen thuộc để đi đến bài toán tổng quát. Trong bài viết này, tôi muốn trao đổi cùng bạn đọc năm bài toán quen thuộc khác nữa mà nhờ *phép đồng dạng* chúng ta có bài toán hay, bài toán tổng quát.

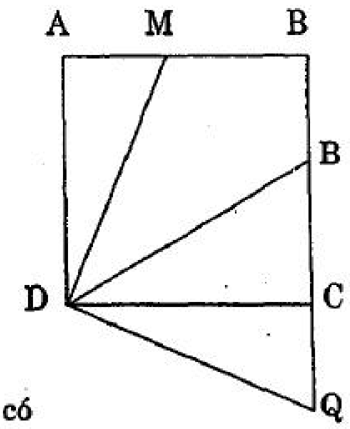
Bài toán 1: Cho hình vuông ABCD. Gọi M là điểm tùy ý trên cạnh AB. Phân giác của góc CDM cắt BC tại P.

Chứng minh rằng DM = AM + CP.

(Đề thi chọn đội tuyển học sinh giỏi Quận Phú Nhuận, TP.HCM – năm 2001 – 2002).

Hướng dẫn giải

Trên tia đối của tia CB lấy điểm Q sao cho CQ = AM .



$\Delta AMD = \Delta CQD$ (c–g–c)

Suy ra DM = DQ, $\widehat{ADM} = \widehat{QDC}$.

Mà $\widehat{ADP} = \widehat{QPD}$ (AD // BC)

Do đó $\widehat{QDP} = \widehat{QPD}$

Suy ra DQ = PQ.

Mà PQ = CQ + CP.

Vậy DM = AM + CP (đpcm)

Ta cũng nhận ra rằng: $\Delta AMD \backsim \Delta CQD$.

Do đó $\dfrac{DM}{DQ} = \dfrac{AM}{CQ} = \dfrac{AD}{DC} = m\ (m > 0)$ ... Giúp ta có bài toán 1 *, bài toán tổng quát của bài toán 1.

Bài Toán 1*: Cho hình chữ nhật ABCD có AD = m . DC (m >0). M là điểm trên cạnh AB. Phân giác của góc CDM cắt BC tại P. Chứng minh rằng DM = AM + mCP.

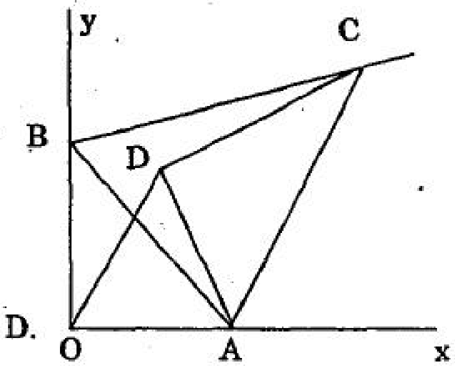
Với m = 1 đó là bài toán 1 và nhớ rằng ở bài toán 1* điểm Q nằm trên tia đối của tia CB và m.CQ = AM.

Và chúng ta cùng tiếp tục nữa!

Bài toán 2: Cho góc vuông xOy trên cạnh Ox lấy điểm A cố định ($A \neq 0$), B là điểm di động trên Oy. Tìm quỹ tích điểm C sao cho tam giác ABC đều.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 Trường THCS chuyên Lê Hồng Phong, TP.HCM 1989 – 1990).

HƯỚNG DẪN GIẢI



Dựng điểm D trong góc $\widehat{xOy}$ sao cho

$\widehat{OAD} = 60^0$, AD = OA.

Ta có D là điểm cố định.

$\Delta OAB = \Delta DAC$ (c–g–c)

$\Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{ADC}$

$\widehat{ADC} = 90^0$

C thuộc đường thẳng vuông góc với AD tại D.

Như vậy ta có $\Delta OAB \backsim \Delta DAC$.

Cho ta $\widehat{AOB} = \widehat{ADC}$, $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{OA}{AD} = \dfrac{OB}{DC} = m\ (m > 0)$...

Từ đó, cho ta bài toán 2* , bài toán tổng quát của bài toán 2.

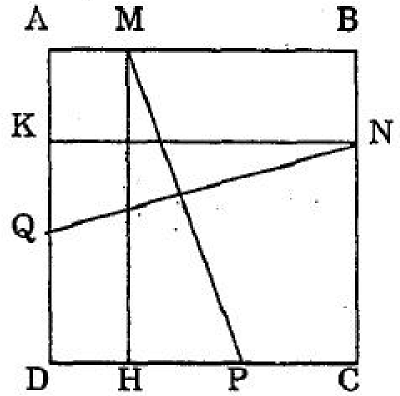
Bài toán 2*: Cho góc $\widehat{xOy}$ ($\widehat{xOy} \neq 180^0$), trên cạnh Ox lấy điểm A cố định ($A \neq O$) B là điểm chuyển động trên cạnh Oy . Tìm quỹ tích điểm C sao cho tam giác $\widehat{ABC}$ có: BAC = α, AB = mAC ($m > 0$; $\alpha < 180^0$).

Với $\widehat{xOy} = 90^0$, $\widehat{BAC} = 60^0$, m = 1 đó là bài toán 2.

Chúng ta lại tiếp tục với bài toán 3.

Bài toán 3: Cho hình vuông ABCD, lấy các điểm M, N, P, Q lần lượt trên các cạnh (hoặc trên các đường thẳng chứa cạnh) AB, BC, CD, DA sao cho $MP \perp NQ$. Chứng minh rằng MP = NQ.

Hướng dẫn giải



Vẽ MH // AD ($H \in DC$), MK // AB ($K \in AD$)

$\Delta HMP = \Delta KNQ$ (c–g–c)

$\Rightarrow MP = NQ$.

Chúng ta cũng có: $\Delta HMP \backsim \Delta KNQ$

Do vậy: $\dfrac{MP}{NQ} = \dfrac{MH}{NQ} = \dfrac{BC}{AB} = m\ (m > 0)$.

Giúp ta đến với bài toán 3*, bài toán tổng quát của bài toán 3.

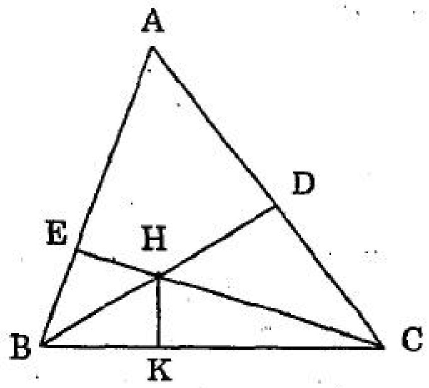
Bài toán 3*: Cho hình chữ nhật ABCD có BC = mAB (m > 0), các điểm M, N, P, Q lần lượt trên các cạnh (hoặc trên các đường thẳng chứa cạnh) AB, BC, CD, DA sao cho $MP \perp NQ$. Chứng minh rằng MP = mNQ.

Tin chắc rằng nếu tiếp tục tìm tòi suy nghĩ chúng ta còn có nhiều và rất nhiều bài toán quen thuộc mà bằng con đường *"Phép đồng dạng"*, đi đến bài toán hay, bài toán tổng quát.

XIII. LỜI GIẢI "THẬT BẤT NGỜ" CỦA MỘT BÀI TOÁN THI CHỌN HỌC SINH GIỎI

Ngày 16–3–2002 Trường THCS Lê Quý Đôn, quận 3, Tp Hồ Chí Minh tổ chức kỳ thi chọn học sinh giỏi giải thưởng Lê Quý Đôn. Trong đề thi toán khối lớp 8, có bài toán sau: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, BD và CE là hai đường cao cắt nhau tại H. Chứng minh rằng HD . HB = HE . HC và BH . BD + CH . CE = BC^2

HƯỚNG DẪN GIẢI



$\Delta HBE \backsim \Delta HCD$ (g–g)

$\Rightarrow \dfrac{HB}{HC} = \dfrac{HE}{HD} \Rightarrow HD \,.\, HB = HE \,.\, HC.$

Vẽ đường cao HK của tam giác HBC.

$\Delta BHK \backsim \Delta BCD$ (g–g) $\Rightarrow \dfrac{BH}{BC} = \dfrac{BK}{BD}$

$\Rightarrow BH \,.\, BD = BC \,.\, BK$

$\Delta CHK \backsim \Delta CBE \Rightarrow \dfrac{CH}{BC} = \dfrac{KC}{CE}$

$\Rightarrow CH \,.\, CE = BC \,.\, BK$

Do đó: $BH \,.\, BD + CH \,.\, CE = BC \,.\, BK + BC \,.\, KC = BC\,(BK + KC) = BC^2$

Lời giải trên là đáp án và cũng là lời giải truyền thống.

Nhưng ...! Thật độc đáo là có một học sinh đã tìm được lời giải mà không cần đến việc vẽ thêm đường phụ HK. Xin nêu để bạn đọc cùng tham khảo.

$\Delta HBE \backsim \Delta HCD$ (g–g) $\Rightarrow \dfrac{HB}{HC} = \dfrac{HE}{HD} \Rightarrow HD \,.\, HB = HE \,.\, HC.$

Ta có: $BH \,.\, BD + CH \,.\, CE = BH\,(BH + HD) + CH\,(CH + HE)$

$= BH^2 + BH.\,HD + CH^2 + CH \,.\, HE = BH^2 + 2.BH \,.\, HD + CH^2$

$= BH^2 + 2.BH \,.\, HD + HD^2 + DC^2 = (BH + HD)^2 + DC^2 = DB^2 + DC^2 = BC^2$

(Vì $HD \,.\, HB = HE \,.\, HC$, tam giác DHC vuông tại D

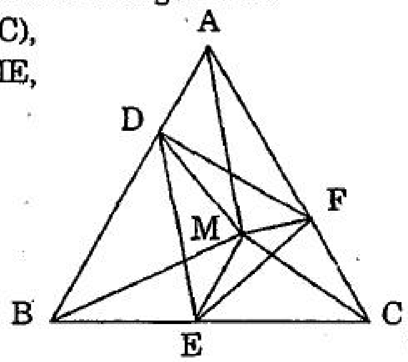
nên $CH^2 = HD^2 + DC^2$, ΔDBC vuông tại D nên $DB^2 + DC^2 = BC^2$)

XIV. LỜI GIẢI HAY CỦA MỘT BÀI TOÁN LỚP 8

Bài toán: Cho một điểm M nằm bên trong tam giác đều ABC. Chứng minh rằng trong ba đoạn thẳng MA, MB, MC đoạn lớn nhất nhỏ hơn tổng hai đoạn kia.

Trong các sách báo về toán mà tôi đã được đọc, có hai cách giải sau:

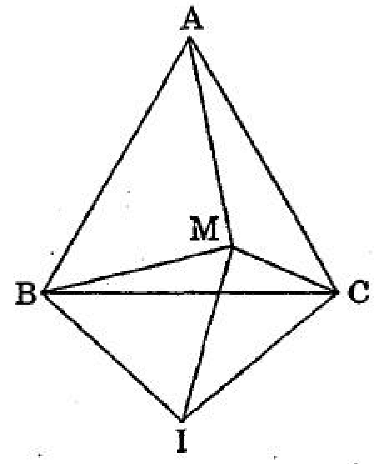
Cách 1: Vẽ MD // AC ($D \in AB$), ME // AB ($E \in BC$), MF // BC ($F \in AC$). Các tứ giác AFMD, BDME, MFCE là các hình thang cân.



Do đó MA = DF, MB = DE, MC = MF

Các đoạn thẳng MA, MB, MC là độ dài các cạnh của tam giác DEF.

Cách 2: Dựng tam giác đều BMI (C, I nằm trên cùng nửa mặt phẳng bờ BM không chứa A).



Ta có: $\widehat{ABC} = \widehat{MBI} = 60^0 \Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{CBI}$

$\Delta ABM = \Delta CBI$ (c–g–c)

Do đó: AM = CI .

Tam giác MIC có MA = CI, MB = MI, MC = MC.

Bài toán chính là nội dung của định lý Pompiu, hai cách giải thật hay và đều cần phải vẽ thêm đường phụ.

Nhưng ...! Còn một lời giải khác nữa và rất hay, rất độc đáo vì không phải vẽ thêm đường phụ.

Cách 3: Không mất tính tổng quát, giả sử MA là đoạn thẳng có độ dài lớn nhất trong các đoạn thẳng MA, MB, MC.

M nằm trong tam giác đều ABC

$\Rightarrow \widehat{MAB} < 60^0$, $\widehat{MBA} < 60^0$

Xét tam giác MAB có $\widehat{AMB} > 60^0$

Tam giác MAB có $\widehat{MBA} < \widehat{AMB}$

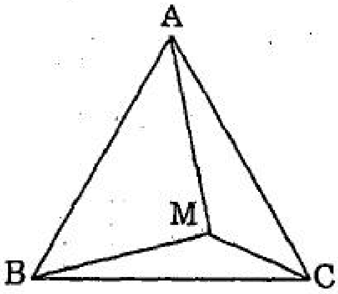
$\Rightarrow$ MA < AB

Tam giác MBC có BC < MB + MC

AB = BC (tam giác ABC đều)

Do đó MA < MB + MC

Các bạn có ý kiến gì nữa chăng ?



XV. VỀ MỘT BÀI TOÁN THI VÔ ĐỊCH TÂY BAN NHA

Trong kỳ thi vô địch toán Tây Ban Nha năm 1990 có bài toán sau:

Bài toán 1: Cho tam giác ABC. Gọi AM và AD lần lượt là các đường trung tuyến và phân giác trong của góc A. Đường thẳng đối xứng với AM qua phân giác AD cắt BC tại N.

Chứng minh rằng: $\dfrac{BN}{CN} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$

Bài "Định lý hàm số sin, định lý hàm số cosin và ứng dụng". (Trần Nam Dũng – Toán học và tuổi trẻ số 5 (251/1998) đã đề xuất lời giải bằng cách áp dụng định lý hàm số sin mà phải với kiến thức toán THPT mới lĩnh hội được). Bài toán còn có thể giải bằng cách khác cho học sinh lớp 8 như sau.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Từ giả thiết suy ra $\widehat{BAM} = \widehat{CAN}$, $\widehat{BAN} = \widehat{CAM}$.

Vẽ NK $\perp$ AC, MH $\perp$ AB. (K $\in$ AC, H $\in$ AB)

$\Delta HAM \backsim \Delta KAN$

(vì $\widehat{HAM} = \widehat{KAN}$, $\widehat{AHM} = \widehat{AKN} = 90^0$) $\Rightarrow \dfrac{AM}{AN} = \dfrac{MH}{NK}$

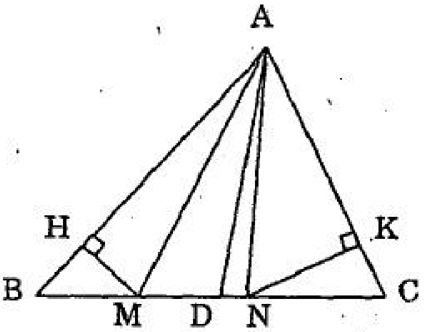
Do đó: $\dfrac{S_{ABM}}{S_{ACN}} = \dfrac{BM}{CN} = \dfrac{MH.AB}{NK.AC} = \dfrac{AM.AB}{AN.AC}$.

Vậy $\dfrac{BM}{CN} = \dfrac{AM}{AN} \cdot \dfrac{AB}{AC}$ (1)

Tương tự: $\dfrac{BN}{CM} = \dfrac{AN}{AM} \cdot \dfrac{AB}{AC}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\dfrac{BM}{CN} \cdot \dfrac{BN}{CN} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$.

Mà BM = CM nên $\dfrac{BN}{CN} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$



Từ lời giải này giúp ta giải được bài toán tổng quát hơn sau:

Bài toán 2: Cho tam giác ABC có đường phân giác trong AD. Ở miền trong góc BAD và góc CAD lần lượt vẽ hai tia AM, AN sao cho $\widehat{MAD} = \widehat{NAD}$ (M thuộc đoạn BD, N thuộc đoạn CD).

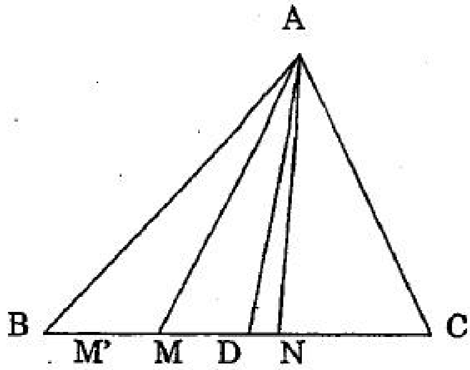
Chứng minh rằng: $\frac{BM}{CM} \cdot \frac{BN}{CN} = \frac{AB^2}{AC^2}$

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán 9, TP Hồ Chí Minh 1996 – 1997)

Rõ ràng khi thay giả thiết M thuộc đoạn BD, N thuộc đoạn CD bởi giả thiết rộng hơn M, N thuộc đường thẳng BC thì bài toán vẫn đúng và lời giải như trên. Đây cũng chính là định lý Steiner (1796 – 1863).

Câu hỏi được đặt ra, liệu có bài toán đảo chăng? Ta tìm câu trả lời.

Gọi M' là điểm trên đường thẳng BC sao cho M'AD = NAD, M ≠ N.



$$\frac{BM'}{CM'} \cdot \frac{BN}{CN} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

mà $\frac{BM}{CM} \cdot \frac{BN}{CN} = \frac{AB^2}{AC^2}$ (gt)

Suy ra: $\frac{BM'}{CM'} = \frac{BM}{CM}$

$$\Rightarrow \frac{BM'}{BM'+CM'} = \frac{BM}{BM+CM}$$

hay $\frac{BM'}{BC} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow BM' = BM \Rightarrow M' \equiv M \Rightarrow MAD = NAD.$

Lời giải bài toán 3, bài toán " thuận và đảo" đã có:

Bài toán 3: Cho tam giác ABC, AD là phân giác trong của tam giác ABC, M và N thuộc đường thẳng BC.

Chứng minh rằng: $\widehat{MAD} = \widehat{NAD} \Leftrightarrow \frac{BM}{CM} \cdot \frac{BN}{CN} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

Hơn nữa lại nhận ra rằng: $\widehat{MAD} = \widehat{NAD} = 60^0$

$$\Leftrightarrow \widehat{M} \equiv \widehat{N} \equiv \widehat{D} \Leftrightarrow \frac{BD^2}{CD^2} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

$\Leftrightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$ (tính chất đường phân giác trong của một tam giác).

AD' là đường phân giác ngoài của tam giác ABC.

$$\widehat{MAD} = \widehat{NAD} = 90^0 \Leftrightarrow \widehat{M} \equiv \widehat{N} \equiv \widehat{D}' \Leftrightarrow \frac{BD'^2}{CD'^2} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

$\Leftrightarrow \frac{BD'}{CD'} = \frac{AB}{AC}$ (tính chất đường phân giác ngoài của một tam giác).

Xoay quanh bài toán một chắc chắn còn nhiều điều thú vị nữa, các bạn tiếp tục tìm tòi và suy nghĩ nhé!

XVI. VẬN DỤNG HẰNG ĐẲNG THỨC $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ ĐỂ GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN CỰC TRỊ CỦA BIỂU THỨC BẬC HAI

Một số bài toán tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN), giá trị lớn nhất (GTLN) của biểu thức bậc hai vận dụng hằng đẳng thức $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, $x^2 \geq 0$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$ và một chút khéo léo sẽ giúp giải bài toán dạng này.

Chúng tôi xin được trao đổi cùng bạn đọc vấn đề này.

DẠNG 1: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = ax^2 + bx + c$.

a, b, c là hằng số, $a \neq 0$.

Một số bài toán

Bài 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x^2 - 6x + 8$

Hướng dẫn: $A = x^2 - 6x + 8 = (x^2 - 6x + 9) - 1$

$= (x - 3)^2 - 1 \geq -1$

Bài 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của: $B = 2x^2 - 3x + 1$

Hướng dẫn: $B = 2x^2 - 3x + 1 = 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}\right) - \frac{9}{8} + 1$

$= 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{-1}{8} \geq \frac{-1}{8}$

Bài 3: Tìm giá trị lớn nhất của: $C = -3x^2 + 2x + 5$

Hướng dẫn: $C = -3x^2 + 2x + 5 = -3\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{3} + 5$

$= -3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{16}{3} \leq \frac{16}{3}$

Nhận xét: $M = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + c$

$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$

Như vậy:

1) Nếu $a > 0$ GTNN của M là $\frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-b}{2a}$ và không có GTLN.

2) Nếu $a < 0$ GTLN của M là $\frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-b}{2a}$ và không có GTNN.

Từ nhận xét trên, ta đã có phương pháp chung để giải bài toán tìm GTNN, GTLN của biểu thức bậc hai một biến.

DẠNG 2: Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$

(a, b, c, d, e, f là hằng số ; $ab \neq 0$)

Một số bài toán

Bài 4: Tìm giá trị nhỏ nhất, của biểu thức

$$D = x^2 + 2y^2 - 2xy + 4x - 2y + 15$$

Hướng dẫn:
$$\begin{aligned} D &= x^2 + 2y^2 - 2xy + 4x - 2y + 15 \\ &= x^2 + 2(2-y)x + 2y^2 - 2y + 15 \\ &= x^2 + 2(2-y)x + (4 - 4y + y^2) + (y^2 + 2y + 1) + 10 \\ &= x^2 + 2(2-y)x + (2-y)^2 + (y+1)^2 + 10 \\ &= (x + 2 - y)^2 + (y+1)^2 + 10 \geq 10 \end{aligned}$$

Bài 5: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$E = 3x^2 + 14y^2 - 12xy + 6x - 8y + 10$$

Hướng dẫn:
$$\begin{aligned} E &= 3x^2 + 14y^2 - 12xy + 6x - 8y + 10 \\ &= 3x^2 + 6(1-2y)x + 14y^2 - 8y + 10 \\ &= -3[x^2 + 2(1-2y)x + (1-2y)^2] - 3(1-2y)^2 + 14y^2 - 8y + 10 \\ &= 3(x + 1 - 2y)^2 - 3 + 12y - 12y^2 + 14y^2 - 8y + 10 \\ &= 3(x + 1 - 2y)^2 + 2(y^2 + 2y + 1) + 5 \\ &= 3(x + 1 - 2y)^2 + 2(y^2 + 1)^2 + 5 \geq 5 \end{aligned}$$

Bài 6: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$F = -x^2 - 10y^2 + 6xy - 2x + 10y + 3$$

Hướng dẫn:
$$\begin{aligned} F &= -x^2 - 10y^2 + 6xy - 2x + 10y + 3 \\ &= -x^2 + 2(3y-1)x - 10y^2 + 10y + 3 \\ &= -[x^2 - 2(3y-1)x + (3y-1)^2] + (3y-1)^2 - 10y^2 + 10y + 3 \\ &= -(x - 3y + 1)^2 + 9y^2 - 6y + 1 - 10y^2 + 10y + 3 \\ &= -(x - 3y + 1)^2 - (y^2 - 4y + 4) + 8 \\ &= -(x - 3y + 1)^2 - (y-2)^2 + 8 \leq 8. \end{aligned}$$

Nhận xét: $P = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$

$= ax^2 + (cy + d)x + by^2 + ey + f$

$$= a[x^2 + \frac{1}{a}(cy + d)x + \frac{1}{4a^2}(cy + d)^2] - \frac{1}{4a}(cy + d)^2 + by^2 + ey + f$$

$$= ... = a\,(x + \frac{1}{2a}(cy + d)^2 + m(y + x)^2 + p)$$

Chú ý: – Nếu $|a|$ là bình phương đúng nên chọn x làm ẩn (xem bài 4) nếu $|b|$ là bình phương đúng nên chọn y làm ẩn.

– Nếu $|a| < |b|$ nên chọn x làm ẩn (xem bài 5)

Bài tập tự luyện

1) Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a/ $x^2 - x + 1$

b/ $3x^2 + 5x - 2$

c/ $x^2 + 2y^2 - 2xy - 4y + 5$

d/ $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 2x + 2y$

e/ $2x^2 + 4y^2 - 4xy - 4x - 4y + 2003$

2) Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

a/ $-x^2 + 3x$

b/ $-2x^2 + x - 1$

c/ $-x^2 - y^2 + xy + 2x + 2y$

d/ $-5x^2 - 2xy - 2y^2 + 14x + 10y - 1$

e/ $-8x^2 - 3y^2 - 26x + 6y + 100$

XVII. HAI BÀI TOÁN TỔNG QUÁT CỦA MỘT DẠNG BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG ĐẠI SỐ

Các bài toán bất đẳng thức đại số mà các biến tham gia trong bài toán là các số dương có vai trò hoán vị vòng quanh, đồng thời có một vế là tổng của các phân thức mà mỗi phân thức có tử là đa thức bậc hai và mẫu là đa thức bậc nhất rất đa dạng và phong phú. Việc tìm kiếm bài toán tổng quát để giúp học sinh với một lượng thời gian ít mà hiểu được vấn đề tương đối khó là điều hết sức cần thiết.

Tôi xin đề xuất hai bài toán tổng quát cho một dạng bài toán này:

Bài Toán 1: Cho $a, b, c > 0$; $p, m, n \geq 0$; m và n không đồng thời bằng 0 thỏa mãn $p \geq 2mn$.

Chứng minh rằng:

$$\frac{m^2b^2+n^2c^2+pbc}{a}+\frac{m^2c^2+n^2a^2+pca}{b}+\frac{m^2a^2+n^2b^2+pab}{c}$$

$\geq (m^2 + n^2 + p)(a + b + c)$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Áp dụng bất đẳng thức Cosi cho hai số dương, ta có:

$$\frac{mb+nc}{(m+n)a}+\frac{(m+n)a}{mb+nc}\geq 2$$

Do đó $(m + n)(mb + nc)\left[\frac{mb+nc}{(m+n)a}+\frac{(m+n)a}{mb+nc}\right]\geq (m + n)(mb + nc).2$

$$\Leftrightarrow \frac{(mb+nc)^2}{a}+(m+n)^2a\geq 2(m+n)(mb+nc) \quad (1)$$

Tương tự có: $\frac{(mc+na)^2}{b}+(m+n)^2b\geq 2(m+n)(mc+na)$ (2)

$$\frac{(ma+nb)^2}{c}+(m+n)^2c\geq 2(m+n)(ma+nb) \quad (3)$$

Kết hợp (1), (2), (3) và (*), biết rằng

$$\frac{(p-2mn)bc}{a}+\frac{(p-2mn)ca}{b}+\frac{(p-2mn)ab}{c}\geq (p-2mn)(a+b+c) \quad (*)$$

ta có dpcm.

Với $m = n = 1$, $p = 2$

Với $m = 2$, $n = 3$, $p = 6$

... là các bài toán rất thường gặp ở các sách báo về toán *BẤT ĐẲNG THỨC*

Bài toán 2: Cho a, b, c, m , n > 0

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{mb+nc}+\frac{b^2}{mc+na}+\frac{c^2}{ma+nb}\geq \frac{1}{m+n}(a+b+c)$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương, ta có:

$$\frac{(m+n)a}{mb+nc}+\frac{mb+nc}{(m+n)a}\geq 2$$

Do đó: $\frac{a}{m+n}\left[\frac{(m+n)a}{mb+nc}+\frac{mb+nc}{(m+n)a}\right]\geq \frac{a}{m+n}.2$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{mb+nc}+\frac{mb+nc}{(m+n)^2}\geq \frac{2}{m+n}.a \quad (4)$$

Tương tự có: $\dfrac{b^2}{mc+na} + \dfrac{mc+na}{(m+n)^2} \geq \dfrac{2}{m+n}.b$ (5)

$\dfrac{c^2}{ma+nb} + \dfrac{ma+nb}{(m+n)^2} \geq \dfrac{2}{m+n}.c$ (6)

Từ (4), (5), (6) ta có đpcm.

Với m = n =1

Với m = 2, n = 3

... là các bài toán rất thường gặp ở các sách báo về toán *BẤT ĐẲNG THỨC*

Các bạn có tìm thêm được điều gì nữa chăng?

MỤC LỤC