

LÊ HẢI CHÂU
NGUYỄN XUÂN QUỲ

Cách tìm lời giải
**CÁC BÀI TOÁN
THCS**

TẬP II
ĐẠI SỐ



NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LÊ HẢI CHÂU – NGUYỄN XUÂN QUỲ

CÁCH TÌM LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN THCS

TẬP 2
ĐẠI SỐ

In lần thứ hai

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI-2001

LỜI NÓI ĐẦU

Đây là bộ sách về *phương pháp học giải toán* nhằm mục đích hình thành cho học sinh thói quen suy nghĩ và tìm lời giải của một bài toán trên cơ sở các kiến thức đã học. Bộ sách này là cầu nối giữa lí thuyết và thực hành toán học.

Học giải toán là một cách tư duy sáng tạo về toán, đồng thời là một vấn đề trừu tượng và khá khó đối với học sinh, nhưng đó lại là điều rất cần thiết cho mỗi học sinh trong quá trình học toán ở trường PTCS.

Bộ sách "Cách tìm lời giải các bài toán THCS" gồm 3 tập : SỐ HỌC, ĐẠI SỐ, HÌNH HỌC. Đây là tập II - Đại số trong bộ sách này.

Mỗi tập giới thiệu các trọng điểm, đều có thêm ba chấm sao **

1) Các bài toán điển hình, mỗi bài toán đều gồm :

- Đề bài
- Tìm hiểu đề bài
- Hướng dẫn cách tìm lời giải
- Cách giải
- Khai thác bài toán

2) Các bài toán tự giải

Các vị phụ huynh học sinh, các thầy cô giáo có thể dùng bộ sách này làm tài liệu hướng dẫn con em mình học tập. Hy vọng rằng bộ sách sẽ giúp ích nhiều cho học sinh để có thể phát huy nội lực trong giải toán nói riêng và học toán nói chung.

CÁC TÁC GIẢ

I. TẬP HỢP Z CÁC SỐ NGUYÊN. TẬP HỢP Q CÁC SỐ HỮU TỈ

A. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

Bài 1

a) Viết tập hợp N các số tự nhiên, tập hợp Z các số nguyên bằng cách liệt kê các phần tử.

b) Tìm giao và hợp của tập hợp N và tập hợp Z .

● Tìm hiểu đề bài

Đề bài yêu cầu liệt kê các phần tử của tập hợp N , tập hợp Z rồi sau đó tìm các tập hợp là giao và hợp của hai tập hợp N và Z .

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, hãy dùng dấu ngoặc nhọn $\{ \}$ để liệt kê các phần tử của tập hợp N , tập hợp Z .

Với câu b, hãy vận dụng khái niệm:

- Giao của hai tập hợp là một tập hợp tạo thành bởi các phần tử chung của hai tập hợp đó.

- Hợp của hai tập hợp là một tập hợp tạo thành bởi những phần tử thuộc ít nhất một trong hai tập hợp đó.

● Cách giải

$$a) N = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$$

$$Z = \{\dots, -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$$

$$b) N \cap Z = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$$

$$N \cup Z = \{\dots, -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$$

● Khai thác bài toán

a) Từ bài toán trên có thể rút ra được những kết luận gì đối với hai tập hợp N và Z ?

Ta thấy:

- Tập hợp \mathbf{N} các số tự nhiên là tập hợp con của tập hợp \mathbf{Z} các số nguyên, kí hiệu $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$.

Có thể nói chính xác hơn: Tập hợp \mathbf{N} các số tự nhiên là *tập hợp con thực sự* của tập hợp \mathbf{Z} các số nguyên, kí hiệu là $\mathbf{N} \subsetneq \mathbf{Z}$.

- Giao của tập hợp \mathbf{N} các số tự nhiên và tập hợp \mathbf{Z} các số nguyên chính là tập hợp \mathbf{N} các số tự nhiên:

$$\mathbf{N} \cap \mathbf{Z} = \mathbf{N}$$

- Hợp của tập hợp \mathbf{N} các số tự nhiên và tập hợp \mathbf{Z} các số nguyên chính là tập hợp \mathbf{Z} các số nguyên:

$$\mathbf{N} \cup \mathbf{Z} = \mathbf{Z}$$

b) Có thể phát biểu như thế nào về số nguyên?

Ta thấy rõ hai cách phát biểu sau đây:

- Số nguyên gồm số tự nhiên và số nguyên âm.

- Số nguyên gồm số nguyên dương, số 0 và số nguyên âm.

Bài 2

a) Tìm số đối của các số nguyên sau: 2; 4; -5; -3.

b) Hãy biểu diễn các số trên và các số đối của chúng trên cùng một trục số.

• Tìm hiểu đề bài

Đề bài yêu cầu tìm các số đối của các số nguyên đã cho, sau đó biểu diễn các số nguyên đã cho và các số đối của chúng trên cùng một trục số.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

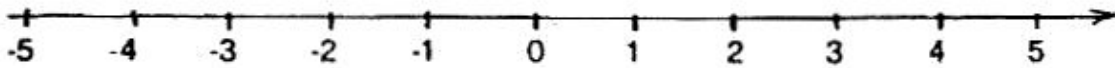
Với câu a, cần nắm vững khái niệm về hai số đối nhau, chẳng hạn như hai số đối nhau a và $-a$ chỉ khác nhau về dấu.

Với câu b, hai điểm biểu diễn hai số đối nhau ở về hai phía của điểm biểu diễn số 0 trên trục số; trong đó số nguyên âm ở bên trái số 0 còn số nguyên dương là số đối của số nguyên âm kể trên ở bên phải số 0.

● Cách giải

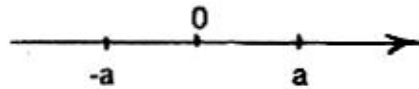
a) Số đối của 2 là -2; của 4 là -4; của -5 là 5; của -3 là 3.

b) Các số trên và các số đối của chúng được biểu diễn trên trục số như hình vẽ dưới đây:



● Khai thác bài toán

Ta hiểu rằng, hai số nguyên được gọi là đối nhau khi: chúng có giá trị tuyệt đối bằng nhau, dấu khác nhau và được biểu diễn bằng hai điểm đối xứng với nhau qua điểm biểu diễn số 0 trên trục số. Chẳng hạn a và $-a$ ($a > 0$) được biểu diễn trên trục số như sau:



Vậy thì số 0 có số đối không?

Ta đã biết rằng, số 0 không thuộc số nguyên dương (tức là không thuộc Z_+) và không thuộc số nguyên âm (tức là không thuộc Z_-), từ đó có $Z = Z_- \cup Z_+ \cup \{0\}$. Như vậy có thể coi số 0 là số không có số đối.

Nhưng nếu công nhận $+0 = -0 = 0$ thì số 0 có thể coi là số có số đối là chính nó, tức là số đối của số 0 chính là số 0.

Bài 3

Cho hai số nguyên a và b , nếu có:

a) $|a| = |b|$

b) $a > 0, b > 0, |a| > |b|$

c) $a < 0, b < 0, |a| < |b|$

thì có thể kết luận thế nào về quan hệ giữa a và b ? Cho ví dụ minh họa.

● Tìm hiểu đề bài

Với câu a, đề bài cho hai số nguyên có giá trị tuyệt đối bằng

nhau, hãy so sánh hai số đó với nhau.

Với câu b, đề bài cho hai số cùng dương và giá trị tuyệt đối của số a lớn hơn giá trị tuyệt đối của số b, cần so sánh hai số a và b đã cho.

Với câu c, đề bài cho hai số cùng âm và giá trị tuyệt đối của số a bé hơn giá trị tuyệt đối của số b, cần so sánh hai số a và b đã cho.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Để làm bài, cần vận dụng định nghĩa giá trị tuyệt đối của một số:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{nếu } a \geq 0 \\ -a & \text{nếu } a < 0 \end{cases}$$

và lưu ý rằng: với hai số cùng dương (hay cùng âm) khi được biểu diễn trên trục số, bao giờ số lớn hơn cũng ở bên phải số bé hơn.

● Cách giải

Theo định nghĩa giá trị tuyệt đối của một số:

a) Nếu $|a| = |b|$ thì a và b bằng nhau hoặc đối nhau.

Ví dụ: $|-8| = |-8|$; $|-8| = |8|$

b) Nếu $a > 0$, $b > 0$, $|a| > |b|$ thì $a > b$.

Ví dụ: $a = 5$; $b = 3$, $|5| > |3|$ rõ ràng $5 > 3$

c) Nếu $a < 0$, $b < 0$, $|a| < |b|$ thì $a > b$.

Ví dụ: $a = -1$; $b = -3$, $|-1| < |-3|$ rõ ràng $-1 > -3$.

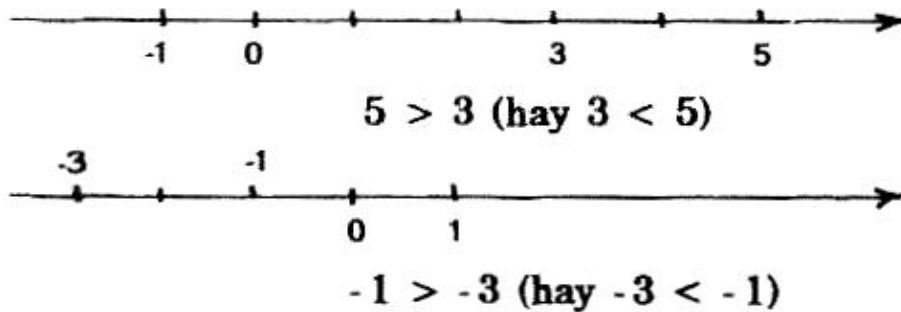
● Khai thác bài toán

Căn cứ vào đề bài và dựa vào cách giải, hãy phát biểu câu b, câu c bằng lời văn. Minh họa các ví dụ cụ thể ở câu b, c trên trục số.

Ta thấy:

+ Trong hai số dương, số có giá trị tuyệt đối lớn hơn thì lớn hơn.

+ Trong hai số âm, số có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn thì lớn hơn.



Bài 4

Cho hai số nguyên âm a, b (chẳng hạn $a = -3$, $b = -9$)

a) So sánh a và b.

b) Tính $|a|$, $|b|$ và so sánh hai số này.

Có thể rút ra kết luận gì về thứ tự giữa hai số nguyên âm và thứ tự giữa hai giá trị tuyệt đối của chúng?

• Tìm hiểu đề bài

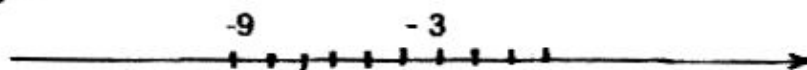
Đề bài cho hai số nguyên âm, yêu cầu so sánh hai số này để biết được trong hai số ấy số nào lớn hơn rồi lại so sánh về giá trị tuyệt đối của chúng, cuối cùng là rút ra kết luận về thứ tự giữa hai số nguyên âm và thứ tự giữa hai giá trị tuyệt đối.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, dựa vào cách biểu diễn số nguyên trên trục số có ngay kết quả so sánh giữa a và b.

Với câu b, trước hết tìm giá trị tuyệt đối của mỗi số, so sánh hai giá trị vừa tìm được để có được kết luận theo yêu cầu của đề bài.

• Cách giải



a) Với $a = -3$, $b = -9$ thì $-9 < -3$ tức là $b < a$ (hay $a > b$).

b) Với $a = -3$ thì $|-3| = 3$ và với $b = -9$ thì $|-9| = 9$. Vì $9 > 3$

nên $|b| > |a|$.

Kết luận: Trong hai số nguyên âm, số lớn hơn ở bên phải số bé hơn trên trục số; số nào nhỏ hơn có giá trị tuyệt đối lớn hơn.

● Khai thác bài toán

Hãy xem xét bài toán trên khi: a, b là hai số nguyên dương; a là số nguyên dương còn b là số nguyên âm.

Ta thấy:

- Nếu a, b là hai số nguyên dương hay có thể nói, đó là hai số tự nhiên, điều này đã học từ lớp dưới. Nếu $a = 7; b = 4$ thì $a > b$ và $|a| > |b|$.

- Nếu a là số nguyên dương còn b là số nguyên âm ta luôn có $a > b$, nhưng về giá trị tuyệt đối của a, b thì phải căn cứ vào giá trị cụ thể của a và b mới có thể so sánh được:

Nếu $a = 1$ còn $b = -10$ thì $|b| > |a|$

Nếu $a = 7$ còn $b = -3$ thì $|a| > |b|$

Nếu $a = 8$ còn $b = -8$ thì $|a| = |b|$.

Bài 5

Tìm tập hợp các số nguyên x sao cho:

a) $-3 < x < 1$ b) $-6 \leq x \leq -4$

c) $-5 \leq x \leq -4$ d) $|x| = 8$

e) $|x| = -3$ g) $|x| < 5$.

● Tìm hiểu đề bài

Đề bài đòi hỏi tìm tập hợp các số nguyên x sao cho:

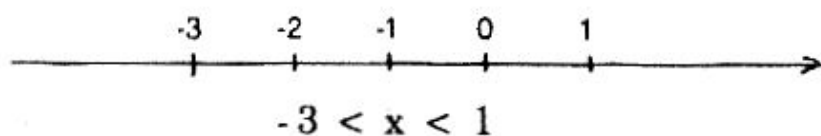
Số x thỏa mãn bất đẳng thức kép (ngặt) đối với câu a, câu g

Số x thỏa mãn bất đẳng thức kép (không ngặt) đối với câu b, câu c

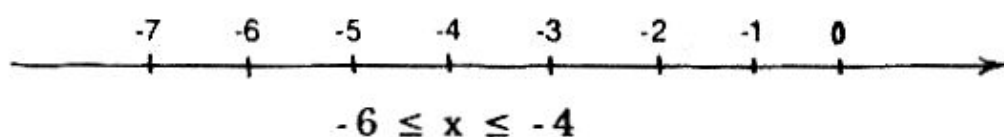
Số x thỏa mãn đẳng thức đối với câu d, câu e.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a cần phải tìm tập hợp các số nguyên x lớn hơn -3 nhưng nhỏ hơn 1 , có thể dựa vào trục số để có câu trả lời:



Với câu b, cần phải tìm tập hợp các số nguyên x lớn hơn hoặc bằng -6 nhưng nhỏ hơn hoặc bằng -4 , có thể dựa vào trục số để có câu trả lời:



Với câu c, nhận thấy -5 và -4 là hai số nguyên âm kề liền nhau, do đó giữa chúng không còn có số nguyên nào nữa, từ đó có câu trả lời.

Với câu d, cần phải tìm tập hợp các số nguyên x sao cho chúng có giá trị tuyệt đối bằng 8 , đây là một đẳng thức, dựa vào định nghĩa giá trị tuyệt đối để có câu trả lời.

Với câu e, cần lưu ý rằng giá trị tuyệt đối của bất kì một số nguyên nào cũng là một số không âm, nên đẳng thức đã cho là một đẳng thức sai.

Với câu g, ta đã biết: nếu có $x > -5$ và $x < 5$ thì có thể viết gộp hai bất đẳng thức trên thành một bất đẳng thức kép là $-5 < x < 5$ hay $|x| < 5$. Do đó câu g là tìm tập hợp các số nguyên x thỏa mãn bất đẳng thức $-5 < x < 5$, cách làm tương tự câu a.

• Cách giải

a) Tập hợp A các số nguyên x thỏa mãn bất đẳng thức kép $-3 < x < 1$ là

$$A = \{-2; -1; 0\}$$

b) Tập hợp B các số nguyên x thỏa mãn bất đẳng thức kép

$-6 \leq x \leq -4$ là

$$B = \{-6; -5; -4\}$$

c) Vì -5 và -4 là hai số nguyên âm kề liền nhau (liên tiếp) nên giữa -5 và -4 không có một số nguyên âm nào nữa, do đó tập hợp C các số nguyên x thỏa mãn bất đẳng thức kép $-5 \leq x \leq -4$ là

$$C = \emptyset$$

d) Vì $|x| = 8$ nên theo định nghĩa về giá trị tuyệt đối, suy ra $x = -8$ hay $x = 8$. Vậy tập hợp D các số nguyên x thỏa mãn đẳng thức $|x| = 8$ là

$$D = \{-8; 8\}$$

e) Biết rằng, giá trị tuyệt đối của bất kì số nguyên nào cũng là một số không âm, nên tập hợp E các số nguyên x thỏa mãn đẳng thức $|x| = -3$ là

$$E = \emptyset$$

g) Vì $|x| < 5$ tương đương với $-5 < x < 5$, nên tập hợp F các số nguyên x thỏa mãn bất đẳng thức $|x| < 5$ là

$$F = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$$

● Khai thác bài toán

Cần chú ý thêm về các dạng bất đẳng thức:

1. Bất đẳng thức đơn, chẳng hạn:

a) Tìm các số nguyên x sao cho $x < 1$

Ta thấy các số nguyên x thỏa mãn bất đẳng thức $x < 1$ là tập hợp:

$$E = \{0; -1; -2; -3; \dots\}$$

b) Tìm các số nguyên x sao cho $-3 < x$

Các số nguyên x thỏa mãn bất đẳng thức $-3 < x$ là tập hợp:

$$F = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$$

c) Tìm các số nguyên x sao cho $x \leq 1$

Các số nguyên x thỏa mãn bất đẳng thức $x \leq 1$ là tập hợp:

$$G = \{1; 0; -1; -2; -3; \dots\}$$

d) Tìm các số nguyên x sao cho $-3 \leq x$

Các số nguyên x thỏa mãn bất đẳng thức $-3 \leq x$ là tập hợp:

$$K = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$$

2. Bất đẳng thức kép, chẳng hạn:

a) Khi ghép hai bất đẳng thức 1a) và 1b) ở trên với nhau ta có bất đẳng thức kép (ngặt) sau đây:

$$-3 < x < 1$$

Theo cách giải ở bài 5 ta có tập hợp:

$$A = \{-2; -1; 0\}$$

b) Khi ghép hai bất đẳng thức 1c) và 1d) ở trên với nhau ta có bất đẳng thức kép (không ngặt) sau đây:

$$-3 \leq x \leq 1$$

Giải tương tự như ở bài toán 5 ta có tập hợp:

$$I = \{-3; -2; -1; 0; 1\}$$

Ta thấy, các tập hợp A và I là hai tập hợp có *hữu hạn* các phần tử, còn các tập hợp E, F, G, K là các tập hợp có *vô hạn* các phần tử.

Bài 6

a) Cho hai dãy số nguyên:

10; 11; 12; ...; 98; 99 (I) và -10; -11; -12; ...; -98; -99 (II).

Trong hai dãy số này, dãy số nào là dãy số tăng, dãy số nào là dãy số giảm?

b) Tìm:

- Số nguyên âm nhỏ nhất và lớn nhất có hai chữ số

- Số nguyên dương nhỏ nhất và số nguyên âm lớn nhất có ba chữ số.

● Tìm hiểu đề bài

Câu a của bài toán cho hai dãy số I và II, trong đó dãy số I là dãy các số nguyên dương, còn dãy số II là dãy các số nguyên âm. Đề bài đòi hỏi xem xét dãy số nào tăng, dãy số nào giảm.

Câu b của bài toán yêu cầu tìm số nguyên âm, số nguyên dương lớn nhất, nhỏ nhất có hai chữ số, có ba chữ số.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, dãy số I là dãy các số nguyên dương, đó chính là dãy các số tự nhiên nên dễ dàng biết được là dãy số tăng; dãy số II cần lưu ý rằng, với hai số nguyên âm, số nào có giá trị tuyệt đối bé hơn sẽ là số lớn hơn, từ đó có câu trả lời.

Với câu b, đối với các số nguyên âm, cần lưu ý đến giá trị tuyệt đối để xác định số lớn nhất. Chẳng hạn như: với các số nguyên âm có hai chữ số, số nào có giá trị tuyệt đối lớn nhất là số nhỏ nhất; số nào có giá trị tuyệt đối nhỏ nhất là số lớn nhất. Đối với số có ba chữ số, suy luận tương tự. Với các số nguyên dương thì việc tìm số lớn nhất giống như việc tìm số lớn nhất trong tập hợp N các số tự nhiên.

● Cách giải

a) Rõ ràng là $10 < 11 < 12 < \dots < 98 < 99$, do đó dãy các số $10; 11; 12; \dots; 98; 99$ là dãy các số tăng.

Với các số âm, số nào có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn sẽ là số lớn hơn. Biết $|-10| < |-11|$, $|-11| < |-12|$, ..., $|-98| < |-99|$ nên có $-10 > -11 > -12 \dots > -98 > -99$, như vậy dãy các số $-10; -11, -12; \dots; -98, -99$ là dãy các số giảm.

b) Theo dãy số II trong câu a, ta có ngay:

Số nguyên âm nhỏ nhất có hai chữ số là -99 .

Số nguyên âm lớn nhất có hai chữ số là -10 .

Biết dãy các số nguyên dương có ba chữ số tăng dần là $100; 101; 102; \dots; 998; 999$, suy ra số nguyên dương nhỏ nhất có ba chữ

số là 100.

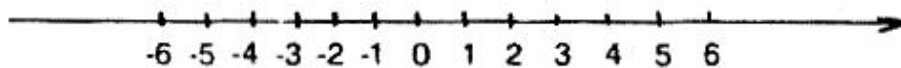
Biết dãy các số nguyên âm có ba chữ số tăng dần là -999; -998;... ; -102; -101; -100, suy ra số nguyên âm lớn nhất có ba chữ số là -100.

● Khai thác bài toán

Như đã biết, các số nguyên âm (kí hiệu là \mathbf{Z}_-) là tập hợp con của tập hợp \mathbf{Z} các số nguyên; các số nguyên dương (kí hiệu là \mathbf{Z}_+) là tập hợp con của tập hợp \mathbf{Z} các số nguyên, nên:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbf{Z}_+$$

Biết rằng, các số nguyên có thể biểu diễn được trên trục số chẳng hạn:

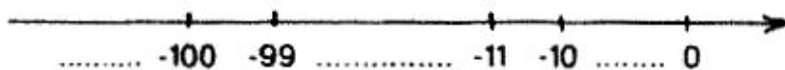


Ta thấy: các điểm biểu diễn các số nguyên âm nằm bên trái điểm biểu diễn số 0, các điểm biểu diễn các số nguyên dương nằm bên phải điểm biểu diễn số 0. Đặc biệt là:

- Các điểm biểu diễn các số nguyên dương càng gần điểm biểu diễn số 0 là số ngày càng nhỏ.
- Các điểm biểu diễn các số nguyên âm càng gần điểm biểu diễn số 0 là số ngày càng lớn.

Với nhận xét như trên, có thể dùng trục số để làm (câu b) bài toán 5.

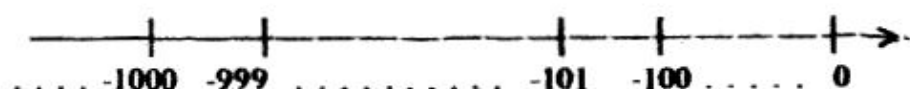
Thật vậy, trên một trục số, có thể biểu diễn các số nguyên âm có hai chữ số bằng các điểm như sau:



Như vậy, số -10 là số nguyên âm lớn nhất có hai chữ số và số -99 là số nguyên âm nhỏ nhất có hai chữ số.

Tương tự, trên một trục số, có thể biểu diễn các số nguyên âm

có ba chữ số bằng các điểm như sau:



Ở hình vẽ trên, ta thấy số -100 là số nguyên âm lớn nhất có ba chữ số và số -999 là số nguyên âm nhỏ nhất có ba chữ số.

Bài 7

Tính các tổng sau:

- $675 + (-587) + (-655) + (-177) + (-23) + 387$
- $1316 + (-315) + (-1216) + 317 + (-85)$
- $4366 + (-3275) + 3634 + (-725) + (-2384) + 6384$
- $5002 + (-2820) + 4715 + (-3002) + 3840 + (-6715)$.

• Tìm hiểu đề bài

Đề bài yêu cầu tính tổng của các số nguyên dương và nguyên âm trong một dãy tính.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Thông thường đối với một dãy các phép tính cộng thì làm tính theo thứ tự từ trái sang phải, song cũng có thể có các cách giải khác, trong bài này ta vận dụng tính chất giao hoán và kết hợp của phép cộng để tính riêng tổng các số nguyên dương, nguyên âm rồi làm phép cộng hai số trái dấu.

• Cách giải

- $$\begin{aligned} & 675 + (-587) + (-655) + (-177) + (-23) + 387 \\ &= (675 + 387) + [(-587) + (-655) + (-167) + (-23)] \\ &= 1062 + (-1442) = -380. \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} & 1316 + (-315) + (-1216) + 317 + (-85) \\ &= (1316 + 317) + [(-315) + (-1216) + (-85)] \\ &= 1633 + (-1616) = 17. \end{aligned}$$
- $$4366 + (-3275) + 3634 + (-725) + (-2384) + 6384$$

$$= (4366 + 3634 + 6384) + [(-3275) + (-725) + (-2384)]$$

$$= 14384 + (-6384) = 8000.$$

d) $5002 + (-2820) + 4715 + (-3002) + 3840 + (-6715)$

$$= (5002 + 4715 + 3840) + [(-2820) + (-3002) + (-6715)]$$

$$= 13557 + (-12537) = 1020.$$

● **Khai thác bài toán**

Có thể vận dụng tính chất giao hoán và kết hợp của phép cộng một cách linh hoạt, không giống cách giải trên để làm nhanh các phép tính cộng trên như sau:

a) $675 + (-587) + (-655) + (-177) + (-23) + 387$

$$= [675 + (-655)] + [(-177) + (-23)] + [387 + (-587)]$$

$$= 20 + (-200) + (-200) = -380$$

b) $1316 + (-315) + (-1216) + 317 + (-85)$

$$= [1316 + (-1216)] + [(-315) + (-85)] + 317$$

$$= 100 + (-400) + 317 = 17$$

c) $4366 + (-3275) + 3634 + (-725) + (-2384) + 6384$

$$= (4366 + 3634) + [(-3275) + (-725)] + [(-2384) + 6384]$$

$$= 8000 + (-4000) + 4000 = 8000$$

d) $5002 + (-2820) + 4715 + (-3002) + 3840 + (-6715)$

$$= [5002 + (-3002)] + [(-6715) + 4715] + [3840 + (-2820)]$$

$$= 2000 + (-2000) + 1020 = 1020.$$

Bài 8

Tính tổng các số nguyên x thỏa mãn:

a) $-9 < x < 7;$

b) $-5 \leq x \leq 5.$

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài đòi hỏi tìm các số nguyên x thỏa mãn bất đẳng thức

kép (ngặt) $-9 < x < 7$, thỏa mãn bất đẳng thức kép (không ngặt) $-5 \leq x \leq 5$, sau đó tính tổng của các số nguyên x vừa tìm được.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với mỗi bất đẳng thức đã cho, trước hết hãy tìm các số nguyên x thỏa mãn từng bất đẳng thức, sau đó làm phép cộng. Cần lưu ý khi cộng các số đối nhau, chúng có tổng bằng 0.

● **Cách giải**

a) Các số nguyên x thỏa mãn bất đẳng thức kép $-9 < x < 7$ là tập hợp A các số sau:

$$A = \{-8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

Tổng của các số nguyên vừa tìm được là:

$$\begin{aligned} &(-8) + (-7) + (-6) + 6 + (-5) + 5 + (-4) + 4 + (-3) + \\ &+ 3 + (-2) + 2 + (-1) + 1 + 0 = (-8) + (-7) = -15. \end{aligned}$$

b) Các số nguyên x thỏa mãn bất đẳng thức kép $-5 \leq x \leq 5$ là tập hợp B các số sau:

$$B = \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}.$$

Tổng của các số nguyên vừa tìm được là:

$$(-5) + 5 + (-4) + 4 + (-3) + 3 + (-2) + 2 + (-1) + 1 + 0 = 0.$$

● **Khai thác bài toán**

Với loại bài toán này, việc tìm tổng các số nguyên sẽ nhanh chóng và đơn giản nếu chú ý đến các số đối nhau. Vì tổng của hai số đối nhau bằng 0, nên việc tìm tổng chỉ còn là tính tổng của các số nguyên còn lại (không phải là số đối nhau).

Thật vậy, với bất đẳng thức $-9 < x < 7$, sau khi loại bỏ các số đối nhau, tổng sẽ là $(-8) + (-7) = -15$. Có thể giải nhầm bài toán trên theo cách lập luận này.

Bài 9. Tìm x biết rằng:

a) $|x - 5| = 8;$

b) $|x| - 7 = 11;$

c) $|x + 8| = 4$; d) $12 - |x + 2| = 7$.

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài yêu cầu tìm giá trị của số nguyên x nằm trong dấu giá trị tuyệt đối, đó là giá trị tuyệt đối của một số hay một tổng, một hiệu.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, câu c áp dụng công thức

$$|a| = \begin{cases} a & \text{nếu } a \geq 0 \\ -a & \text{nếu } a < 0 \end{cases}$$

Với câu b, câu d, trước hết hãy thực hiện các phép tính để có dạng tương tự như câu a, câu c, sau đó mới áp dụng công thức trên.

● **Cách giải**

a) Khi $x - 5$ là số dương, ta có:

$$x - 5 = 8; \quad x = 8 + 5 = 13$$

Khi $x - 5$ là số âm, ta có:

$$x - 5 = -8; \quad x = -8 + 5 = -3$$

b) $|x| - 7 = 11$

$$|x| = 11 + 7 = 18$$

Suy ra $x = \pm 18$

c) Khi $x + 8$ là số dương, ta có:

$$x + 8 = 4; \quad x = 4 - 8 = -4$$

Khi $x + 8$ là số âm, ta có:

$$x + 8 = -4; \quad x = -4 - 8 = -12.$$

d) $12 - |x + 2| = 7$

$$|x + 2| = 5$$

Khi $x + 2$ là số dương, ta có:

$$x + 2 = 5; x = 5 - 2 = 3.$$

Khi $x + 2$ là số âm, ta có:

$$x + 2 = -5; x = -5 - 2 = -7.$$

● **Khai thác bài toán**

Ta đã biết: $x + 5 = 7 \Rightarrow x = 7 - 5$, ngược lại

$$x = 7 - 5 \Rightarrow x + 5 = 7.$$

Có thể viết gọn cách trình bày ở trên như sau:

$$x + 5 = 7 \Leftrightarrow x = 7 - 5.$$

Cách biến đổi như trên gọi là biến đổi tương đương. Có thể áp dụng phép biến đổi tương đương để trình bày lời giải các câu a, câu c như sau:

$$a) |x - 5| = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 = 8 \\ x - 5 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 + 5 \\ x = -8 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 13 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$c) |x + 8| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 8 = 4 \\ x + 8 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 8 \\ x = -4 - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -12 \end{cases}.$$

Với câu b, câu d, cần thực hiện các phép tính để đưa về dạng bài tương tự câu a, câu c, rồi có thể áp dụng cách trình bày trên.

$$b) |x| - 7 = 11 \Rightarrow |x| = 11 + 7 = 18;$$

$$|x| = 18 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 18 \\ x = -18 \end{cases}$$

$$d) 12 - |x + 2| = 7 \Rightarrow |x + 2| = 12 - 7 = 5;$$

$$|x + 2| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 5 \\ x + 2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2 \\ x = -5 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -7 \end{cases}$$

Bài 10

a) Tìm giá trị của x sao cho $x + 5$ là số nguyên dương nhỏ nhất.

b) Điền dấu cộng (+) hoặc dấu trừ (-) vào ô vuông để biểu thức sau có giá trị nhỏ nhất:

1) $75 \square 82$ 2) $45 \square (-37)$.

● **Tim hiểu đề bài**

Đề bài câu a đòi hỏi tìm giá trị của x để biểu thức $x + 5$ có giá trị là số nguyên dương nhỏ nhất.

Câu b đòi hỏi thay \square bằng dấu "+" hay dấu "-" để thỏa mãn điều kiện bài toán.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, trước hết cần khẳng định số nguyên dương nhỏ nhất là số nào? Từ đó dễ dàng tìm được giá trị của x.

Với câu b cần lưu ý:

- Hai số 75 và 82 đều là hai số dương, hãy cộng hoặc trừ nhẩm và xét xem kết quả nào nhỏ hơn, từ đó có câu trả lời.

- Hai số 45 và -37 là hai số không cùng dấu, hãy cộng hoặc trừ nhẩm và xét xem kết quả nào nhỏ hơn, từ đó có câu trả lời.

● **Cách giải**

a) Số nguyên dương nhỏ nhất là 1, theo đầu bài ta có:

$$x + 5 = 1, \text{ suy ra } x = 1 - 5 = -4.$$

Vậy với $x = -4$ thì $x + 5$ sẽ là số nguyên dương nhỏ nhất.

b) Ta thấy $75 + 82 = 157$; $75 - 82 = -7$, rõ ràng $-7 < 157$. Do đó, để biểu thức $75 \square 82$ có giá trị nhỏ nhất phải điền dấu "-" vào \square để có $75 \ominus 82 = -7$.

Ta thấy $45 + (-37) = 8$; $45 - (-37) = 45 + 37 = 82$; rõ ràng $8 < 82$. Do đó, để cho biểu thức $45 \square (-37)$ có giá trị nhỏ nhất phải điền dấu "+" vào \square để có $45 \oplus (-37) = 8$.

● **Khai thác bài toán**

a) Với câu a, có thể thay đổi đề bài như sau: Tìm giá trị của x sao cho $x + 5$ là số nguyên âm lớn nhất.

Ta thấy số -1 là số nguyên âm lớn nhất, theo đề bài có:

$$x + 5 = -1; x = -1 - 5 = -6.$$

Vậy khi $x = -6$ thì $x + 5$ sẽ là số nguyên âm lớn nhất.

b) Với câu b, khi có biểu thức $-45 \square (-37)$ thì phải điền vào ô vuông dấu "+" hay dấu "-" để biểu thức có giá trị lớn nhất.

Ta thấy, nếu điền dấu "+" vào \square ta có $-45 \oplus (-37) = -82$, còn nếu điền dấu "-" vào \square ta được $-45 \ominus (-37) = -45 + 37 = -8$. Rõ ràng $-82 < -8$.

Vậy muốn biểu thức $-45 \square (-37)$ có giá trị lớn nhất phải điền dấu "-" vào \square để có $-45 \ominus (-37) = -8$.

Lưu ý. Trong tập hợp \mathbb{Z} các số nguyên thì:

- Không xác định được số nguyên âm nhỏ nhất và số nguyên dương lớn nhất.

- Chỉ xác định được số nguyên âm lớn nhất và số nguyên dương nhỏ nhất.

Bài 11. Tính tổng:

a) $5 + (-10) + 15 + (-20) + 25 + (-30) + \dots + 95 + (-100)$

b) $3 + (-6) + 9 + (-12) + 15 + (-18) + \dots + 87 + (-90)$.

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài yêu cầu tính tổng của một dãy các số dương và số âm được cho theo một quy tắc viết số nhất định.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, theo giá trị tuyệt đối, là dãy các số tăng dần, theo quy tắc số sau bằng số trước cộng thêm 5. Cần vận dụng tính chất kết hợp của phép cộng để tìm tổng của các cặp số liền nhau vì chúng đều có tổng bằng -5 .

Với câu b, theo giá trị tuyệt đối, là dãy các số tăng dần, theo quy tắc số sau bằng số trước cộng thêm 3. Cần vận dụng tính chất kết hợp của phép cộng để tìm tổng của các cặp số liền nhau vì chúng đều có tổng bằng -3 .

● Cách giải

$$\begin{aligned} \text{a) } & 5 + (-10) + 15 + (-20) + 25 + (-30) + \dots + 95 + (-100) \\ & = [5 + (-10)] + [15 + (-20)] + [25 + (-30)] + \dots + [95 + (-100)] \\ & = (-5) + (-5) + (-5) + \dots + (-5). \end{aligned}$$

Tất cả có 10 cặp số nên tổng trên bằng -50.

$$\begin{aligned} \text{b) } & 3 + (-6) + 9 + (-12) + 15 + (-18) + \dots + 87 + (-90) \\ & = [3 + (-6)] + [9 + (-12)] + [15 + (-18)] + \dots + [87 + (-90)] \\ & = (-3) + (-3) + (-3) + \dots + (-3). \end{aligned}$$

Tất cả có 15 cặp số nên tổng trên bằng -45.

● Khai thác bài toán

Bài toán thuộc dạng này có thể ra rất nhiều bài tập tương tự, vấn đề quan trọng ở đây là xác định được quy tắc viết các số hạng theo giá trị tuyệt đối như thế nào; thông thường cho số các số hạng là một số chẵn để có thể tạo ra một số chẵn các cặp số.

Chẳng hạn, với dãy các số hạng tăng dần theo giá trị tuyệt đối bằng 10 từ 10 đến 100, theo dạng bài toán 11 này có bài toán sau:

Tìm tổng: $10 + (-20) + 30 + (-40) + \dots + 90 + (-100)$. Có thể tính như sau:

$$\begin{aligned} & 10 + (-20) + 30 + (-40) + \dots + 90 + (-100) \\ & = [10 + (-20)] + [30 + (-40)] + \dots + [90 + (-100)] \\ & = (-10) + (-10) + \dots + (-10) \end{aligned}$$

Tất cả có 5 cặp số nên tổng trên bằng -50.

Cũng có thể cho số các số hạng là một số lẻ, chẳng hạn:

Tìm tổng: $10 + (-20) + 30 + (-40) + \dots + 90$.

Có thể tính như sau:

$$\begin{aligned} & 10 + (-20) + 30 + (-40) + \dots + 90 \\ & = [10 + (-20)] + [30 + (-40)] + \dots + 90 \\ & = (-10) + (-10) + \dots + 90 \end{aligned}$$

Tất cả có 4 cặp số, nên tổng trên sẽ là:

$$(-10) + (-10) + (-10) + (-10) + 90 = 50.$$

Bài 12. Tìm x biết:

a) $8 - (12 - x) = 13;$

b) $-72 - (x - 25) = 0;$

c) $-32 + (-9 + x) = 8;$

d) $72 + (15 - x) = 18.$

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài yêu cầu tìm giá trị của x trong các đẳng thức đã cho.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Có thể vận dụng quy tắc "dấu ngoặc" để giải bài toán này với chú ý đặc biệt là: các số của biểu thức trong dấu ngoặc mà trước nó có dấu trừ, khi bỏ ngoặc phải đổi dấu của các số ấy.

● **Cách giải**

a) $8 - (12 - x) = 13;$

b) $-72 - (x - 25) = 0$

$$8 - 12 + x = 13$$

$$-72 - x + 25 = 0$$

$$-4 + x = 13$$

$$-47 - x = 0$$

$$x = 13 - (-4) = 17.$$

$$x = -47.$$

c) $-32 + (-9 + x) = 8;$

d) $72 + (15 - x) = 18$

$$-32 - 9 + x = 8$$

$$72 + 15 - x = 18$$

$$-41 + x = 8$$

$$87 - x = 18$$

$$x = 8 - (-41) = 49.$$

$$x = 87 - 18 = 69.$$

● **Khai thác bài toán**

Ta đã biết:

- Với phép trừ: $SBT - ST = H$, suy ra $SBT = H + ST$;
 $ST = SBT - H$.

- Với phép cộng: $SH_1 + SH_2 = T$, suy ra $SH_1 = T - SH_2$;
 $SH_2 = T - SH_1$.

Có thể vận dụng hiểu biết trên để làm bài toán tìm x.

a) $8 - (12 - x) = 13$

$12 - x = 8 - 13 = -5$

$x = 12 - (-5) = 17$

c) $-32 + (-9 + x) = 8$

$-9 + x = 8 - (-32) = 40$

$x = 40 - (-9) = 49$

b) $-72 - (x - 25) = 0$

$x - 25 = -72$

$x = -72 + 25 = -47$

d) $72 + (15 - x) = 18$

$15 - x = 18 - 72 = -54$

$x = 15 - (-54) = 69.$

Bài 13

Thay đổi vị trí số hạng và đặt dấu ngoặc thích hợp để tính các tổng đại số sau:

a) $-8537 + 523 + 8520 - 661$; b) $1445 - 387 - 1430 + 372$;

c) $-2607 + 324 + 2507 - 424$; d) $5609 - 915 - 4508 + 715$.

● Tìm hiểu đề bài

Đề bài cho tổng đại số, yêu cầu thay đổi vị trí các số hạng và đặt dấu ngoặc một cách thích hợp rồi thực hiện phép tính.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Các tổng đại số đã cho đều gồm 4 số hạng, cần dùng dấu ngoặc để tổng còn hai số hạng. Thực hiện phép tính trong từng dấu ngoặc, cuối cùng tìm tổng của hai số cùng dấu hoặc trái dấu.

● Cách giải

a) $-8537 + 523 + 8520 - 661 = (-8537 + 8520) + (523 - 661)$
 $= -17 + (-138) = -155$

b) $1445 - 387 - 1430 + 372 = (1445 - 1430) + (372 - 387)$
 $= 15 + (-15) = 0$

c) $-2607 + 324 + 2507 - 424 = (-2607 + 2507) + (324 - 424)$
 $= (-100) + (-100) = -200$

d) $5609 - 915 - 4508 + 715 = (5609 - 4508) + (715 - 915)$
 $= 1101 + (-200) = 901.$

● Khai thác bài toán

Với một tổng đại số đã cho, nếu đề bài không có yêu cầu nào khác ngoài việc tính toán, ta có thể chọn cách làm nhanh, hợp lí, tùy thuộc vào đề bài cụ thể. Chẳng hạn:

Tính tổng đại số: $175 - 75 + 100 - 125$.

Ta có thể làm một trong ba cách sau:

- Cách 1

$$\begin{aligned} & 175 - 75 + 100 - 125 \\ & = 100 + 100 - 125 = 200 - 125 = 75 \end{aligned}$$

- Cách 2

$$\begin{aligned} & 175 - 75 + 100 - 125 \\ & = (175 + 100) - (75 + 125) = 275 - 200 = 75. \end{aligned}$$

- Cách 3

$$\begin{aligned} & 175 - 75 + 100 - 125 \\ & = (175 - 125) + (100 - 75) = 50 + 25 = 75. \end{aligned}$$

Nhận thấy cách làm thứ hai hay thứ ba nhanh hơn cách thứ nhất.

Tất nhiên là còn cách làm khác nữa, bạn đọc hãy tự làm.

Bài 14. Tính nhanh:

a) $-125 \cdot 150 \cdot (-8) \cdot (-6)$;

b) $51 - 52 + 53 - 54 + 55 - 56 + \dots + 97 - 98 + 99$.

● Tìm hiểu đề bài

Câu a là tìm tích của 4 thừa số, trong đó có 3 thừa số âm. Câu b là tìm tổng đại số của các số có dấu "+", dấu "-" đan xen nhau bắt đầu từ 51 đến 99.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, cần vận dụng tính chất giao hoán và kết hợp của phép nhân để tính nhanh tích phải tìm.

Với câu b, nhận thấy $51 - 52 = 53 - 54 = \dots = 97 - 98 = -1$, như vậy là hiệu của 2 số liền nhau (bắt đầu từ 51) luôn bằng -1 . Cần tính số các cặp số để tính tổng các số có dấu "+", dấu "-" đan xen nhau từ 51 đến 98. Ta thấy số các cặp số là $\frac{(98-51)+1}{2} = 24$.

Từ đó có thể tính nhanh được kết quả của tổng đại số đã cho.

● **Cách giải**

a) $-125 \cdot 150 \cdot (-8) \cdot (-6)$

$$= [(-125)(-8)] \cdot [150 \cdot (-6)]$$

$$= 1000 \cdot (-900) = -900\,000$$

b) $A = \underbrace{51 - 52} + \underbrace{53 - 54} + \underbrace{55 - 56} + \dots + \underbrace{97 - 98} + 99$

$$= (-1) + (-1) + (-1) + \dots + (-1) + 99$$

Dãy tính từ 51 đến 98 có $\frac{(98-51)+1}{2} = 24$ cặp số, nên có

$$A = (-1) \cdot 24 + 99 = -24 + 99 = 75.$$

● **Khai thác bài toán**

- Ở câu a bài toán trên, số thừa số âm là 3, đây là một số lẻ, nên tích mang dấu trừ. Từ đó, ta thấy rằng, khi làm một dãy tính nhân, ta cứ nhân các giá trị tuyệt đối với nhau, rồi đặt ở tích dấu cộng nếu số thừa số âm là một số chẵn, còn đặt ở tích dấu trừ nếu số thừa số âm là một số lẻ.

Chẳng hạn:

$$(-4) \cdot (-5) \cdot 6 \cdot (-1) = -120$$

$$(-4) \cdot (-5) \cdot 6 \cdot 1 = 120.$$

- Nếu phải tính tổng đại số

$$A = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 97 - 98 + 99 \text{ thì làm thế nào?}$$

Ta nhận thấy cách làm vẫn như trên, chỉ có khác nhau về số các cặp số của A. Số các cặp số ở đây là $\frac{(98-1)+1}{2} = 49$. Vậy

$$A = (-1) \cdot 49 + 99 = -49 + 99 = 50.$$

Bài 15. Tìm x biết:

a) $x(x - 5) = 0$; b) $(x + 7)(x - 3) = 0$;

c) $(x - 1)(x + 2)(x - 7) = 0$.

• **Tìm hiểu đề bài**

Các đẳng thức mà đề bài đã cho, đều có vế phải bằng 0 còn vế trái là một tích của hai hay ba thừa số.

• **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Ta đã biết: $5 \cdot 0 = 0 \cdot 6 = 0 \cdot 8 \cdot 9 = 0$, như vậy nếu tích của hai hay ba thừa số mà bằng không thì một trong các thừa số của tích phải bằng không. Do vậy, để tìm x , cần lần lượt xét các thừa số bằng 0 của tích đã cho.

• **Cách giải**

$$\text{a) } x(x - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 5 \end{cases}$$

Chú ý. Kí hiệu $\begin{cases} A \\ B \end{cases}$ để chỉ A hoặc B.

$$\text{b) } (x + 7)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 7 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 \\ x = 3. \end{cases}$$

$$\text{c) } (x - 1)(x + 2)(x - 7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \\ x - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \\ x = 7. \end{cases}$$

• **Khai thác bài toán**

Nhận thấy, với một đẳng thức có dạng như ở đề bài, nếu vế trái có bao nhiêu thừa số thì có bấy nhiêu giá trị tìm được của x . Chú ý rằng, với một trong các giá trị tìm được của x cũng đủ để cho vế trái bằng không, không phải là tất cả các giá trị tìm được của x mới làm cho vế trái bằng 0.

Thật vậy, ở câu b, ta có $x = -7$ hoặc $x = 3$. Rõ ràng:

- Nếu $x = -7$, ta có $(-7 + 7)(-7 - 3) = 0 \cdot (-7 - 3) = 0$

- Nếu $x = 3$, ta có $(3 + 7)(3 - 3) = (3 + 7) \cdot 0 = 0$.

Lên lớp trên khi học về phương trình, đề bài 15 có thể gọi là: giải các phương trình. Người ta gọi các phương trình có dạng này là *phương trình tích*, mà cách giải cũng giống như đã giải ở trên.

Bài 16. Tìm số nguyên x biết:

a) $x(x - 5) < 0$; b) $x(x - 5) > 0$;

c) $(x + 1)(x + 7) < 0$; d) $(x + 2)(x + 7) > 0$.

● **Tìm hiểu đề bài**

Đây là các bài toán về bất đẳng thức mà vế trái là tích của hai thừa số, còn vế phải cho biết hai thừa số này sẽ là số âm (< 0) hay là số dương (> 0). Đề bài đòi hỏi phải tìm các giá trị của x để vế trái luôn là số âm hay luôn là số dương.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a và câu c, vế trái là số âm nên hai thừa số ở vế trái phải khác dấu, cần phải xác định quan hệ lớn nhỏ giữa hai thừa số đó. Ta thấy $x > x - 5$ và $x + 7 > x + 1$ nên có thể xét $x > 0$ và $x + 7 > 0$, đó là cơ sở đầu tiên để tiếp tục tìm số nguyên x .

Với câu b, câu d, có vế trái là số dương nên hai thừa số ở vế trái phải cùng dương hay cùng âm, từ đó suy ra số nguyên x .

● **Cách giải**

$$\text{a) } x(x - 5) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x - 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 5 \end{cases}$$

Do $x \in \mathbf{Z}$ nên $x \in \{1; 2; 3; 4\}$ hay $x = 1$; $x = 2$; $x = 3$; $x = 4$.

$$\text{b) } x(x - 5) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 5 \end{cases} \Leftrightarrow x > 5$$

$$x(x - 5) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x - 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow x < 0$$

Vậy với các số nguyên $x < 0$ hoặc $x > 5$ thì $x(x - 5) > 0$.

$$c) (x + 1)(x + 7) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 < 0 \\ x + 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > -7 \end{cases}$$

Do $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-6; -5; -4; -3; -2\}$ hay $x = -6; x = -5; x = -4; x = -3; x = -2$.

$$d) (x + 2)(x + 7) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 > 0 \\ x + 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x > -7 \end{cases} \Leftrightarrow x > -2$$

$$(x + 2)(x + 7) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 < 0 \\ x + 7 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x < -7 \end{cases} \Leftrightarrow x < -7$$

Vậy với các số nguyên $x > -2$ hoặc $x < -7$ thì $(x + 2)(x + 7) > 0$.

• Khai thác bài toán

Nói chung, với một bất đẳng thức mà vế trái luôn âm:

- Nếu xác định được quan hệ lớn nhỏ giữa hai thừa số thì chỉ cần xét một trường hợp. Chẳng hạn, tìm số nguyên x sao cho:

$$x(x + 5) < 0.$$

Biết rằng, tích hai thừa số là âm nên hai thừa số đó phải khác dấu. Trong hai thừa số x và $x + 5$ thì $x < x + 5$, do đó chỉ có thể

$$\begin{cases} x < 0 \\ x + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > -5 \end{cases} \Leftrightarrow -5 < x < 0$$

Do $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-4; -3; -2; -1\}$

- Nếu không xác định được quan hệ lớn nhỏ giữa hai thừa số, ta phải xét hai trường hợp. Chẳng hạn, tìm số nguyên x sao cho:

$$(x + 3)(7 - x) < 0.$$

Ta phải có $x + 3$ và $7 - x$ là hai số khác dấu. Xét hai trường hợp:

$$a) \begin{cases} x + 3 < 0 \\ 7 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow x < -3$$

$$b) \begin{cases} x + 3 > 0 \\ 7 - x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x > 7 \end{cases} \Leftrightarrow x > 7$$

Vậy với các số nguyên $x < -3$ hoặc $x > 7$ thì $(x + 3)(7 - x) < 0$.

Bài 17

- a) Tìm tập hợp các ước của 16 mà lớn hơn -4.
b) Tìm số nguyên n biết rằng $n - 3$ là ước của 5.

• Tìm hiểu đề bài

Đề bài câu a đòi hỏi tìm các ước của 16, các ước này phải lớn hơn -4.

Câu b đòi hỏi tìm các số nguyên n mà $n - 3$ lại là ước của 5.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, cần xét xem 16 chia hết cho những số nguyên nào, sau đó loại bỏ các số nguyên âm nhỏ hơn và bằng -4.

Với câu b, trước hết hãy xét xem số 5 chia hết cho những số nguyên nào, sau đó lập mối quan hệ giữa mỗi số nguyên đó với $n - 3$, từ đó suy ra các số nguyên n cần tìm.

• Cách giải

a) 16 chia hết cho $\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8; \pm 16$. Vậy tập hợp A các ước của 16 mà lớn hơn -4 là:

$$A = \{-1; -2; 1; 2; 4; 8; 16\}.$$

b) Các ước của 5 là ± 1 và ± 5 , mà mỗi ước này lại bằng $n - 3$, do đó có:

$$n - 3 = -1 \Rightarrow n = -1 + 3 = 2$$

$$n - 3 = 1 \Rightarrow n = 1 + 3 = 4$$

$$n - 3 = -5 \Rightarrow n = -5 + 3 = -2$$

$$n - 3 = 5 \Rightarrow n = 5 + 3 = 8.$$

Vậy các số nguyên $n \in B$ mà $n - 3$ là ước của 5 là

$$B = \{\pm 2; 4; 8\}.$$

• Khai thác bài toán

- Câu a của đề bài đã cho là tìm tập hợp các ước của một hợp

số (số 16), có thể tìm tập hợp các ước của một số nguyên tố được không?

Câu trả lời là: được. Chẳng hạn: tìm tập hợp các ước của 17 mà lớn hơn -17.

Ta thấy 17 là số nguyên tố, 17 có các ước là ± 1 và ± 17 . Gọi M là tập hợp các ước của 17 mà lớn hơn -17, ta có:

$$M = \{\pm 1; 17\}$$

- Câu b của đề bài lại là tìm các ước của số nguyên tố, nếu thay 5 bằng 6 thì bài toán sẽ có lời giải dài hơn:

Biết các ước của 6 là $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$. Do đó có:

$$n - 3 = -1 \Rightarrow n = -1 + 3 = 2$$

$$n - 3 = 1 \Rightarrow n = 1 + 3 = 4$$

$$n - 3 = -2 \Rightarrow n = -2 + 3 = 1$$

$$n - 3 = 2 \Rightarrow n = 2 + 3 = 5$$

$$n - 3 = -3 \Rightarrow n = -3 + 3 = 0$$

$$n - 3 = 3 \Rightarrow n = 3 + 3 = 6$$

$$n - 3 = -6 \Rightarrow n = -6 + 3 = -3$$

$$n - 3 = 6 \Rightarrow n = 6 + 3 = 9.$$

Vậy các số nguyên n mà n - 3 là ước của 6 là

$$\{-3; 0; 1; 2; 4; 5; 6; 9\}.$$

Bài 18

Tìm các số nguyên a và b sao cho:

a) $(a + 3)(b + 1) = 3;$

b) $(a - 1)(b + 1) = 2.$

• Tìm hiểu đề bài

Đề bài câu a đòi hỏi tìm số nguyên a và b để cho

$$(a + 3)(b + 1) = 3.$$

Câu b đòi hỏi tìm số nguyên a và b để cho

$$(a - 1)(b + 1) = 2.$$

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, ta thấy tích của hai tổng $a + 3$ và $b + 1$ bằng 3, như vậy là $a + 3$ và $b + 1$ đều là ước của 3, mà các ước của 3 là $\pm 1; \pm 3$.

Mặt khác, biết $3 = 1 \cdot 3$ hay $3 = (-1) \cdot (-3)$, do đó cần xem xét các trường hợp sau:

- Nếu $a + 3 = 1$ thì $b + 1 = 3$
- Nếu $a + 3 = 3$ thì $b + 1 = 1$
- Nếu $a + 3 = -1$ thì $b + 1 = -3$
- Nếu $a + 3 = -3$ thì $b + 1 = -1$.

Từ đó sẽ suy ra được các giá trị của số nguyên a, b.

Với câu b, làm tương tự như câu a.

● **Cách giải**

a) Vì $a + 3$ và $b + 1$ là ước của 3, mà 3 có các ước là $\pm 1; \pm 3$, do đó:

- Nếu $a + 3 = 1$ thì $b + 1 = 3$, suy ra $a = -2; b = 2$
- Nếu $a + 3 = 3$ thì $b + 1 = 1$, suy ra $a = 0; b = 0$
- Nếu $a + 3 = -1$ thì $b + 1 = -3$, suy ra $a = -4; b = -4$
- Nếu $a + 3 = -3$ thì $b + 1 = -1$, suy ra $a = -6; b = -2$.

b) Vì $a - 1$ và $b + 1$ là ước của 2, mà 2 có các ước là $\pm 1; \pm 2$, do đó:

- Nếu $a - 1 = 1$ thì $b + 1 = 2$, suy ra $a = 2; b = 1$
- Nếu $a - 1 = 2$ thì $b + 1 = 1$, suy ra $a = 3; b = 0$
- Nếu $a - 1 = -1$ thì $b + 1 = -2$, suy ra $a = 0; b = -3$
- Nếu $a - 1 = -2$ thì $b + 1 = -1$, suy ra $a = -1; b = -2$.

● Khai thác bài toán

- Có thể trình bày cách giải bài toán trên bằng cách lập bảng.

a) Vì $a + 3$ và $b + 1$ là các số nguyên có tích bằng 3 nên chúng là ước của 3, mà 3 có các ước là $\pm 1; \pm 3$. Có thể lập bảng sau:

$a + 3$	1	3	-1	-3
$b + 1$	3	1	-3	-1

 \Rightarrow

a	-2	0	-4	-6
b	2	0	-4	-2

b) Vì $a - 1$ và $b + 1$ là các số nguyên có tích bằng 2 nên chúng là ước của 2, mà 2 có các ước là $\pm 1; \pm 2$. Có thể lập bảng sau:

$a - 1$	1	2	-1	-2
$b + 1$	2	1	-2	-1

 \Rightarrow

a	2	3	0	-1
b	1	0	-3	-2

- Nếu có $(a + 3)(b + 1) = 6$ thì có thể tìm được các số nguyên a và b không?

Hoàn toàn được, với chú ý:

$$6 = 1.6 = -1.(-6) = 2.3 = -2.(-3)$$

Ta có thể lập bảng để tính giá trị của a, b như sau:

$a + 3$	1	6	-1	-6	2	3	-2	-3
$b + 1$	6	1	-6	-1	3	2	-3	-2

 \Rightarrow

a	-2	3	-4	-9	-1	0	-5	-6
b	5	0	-7	-2	2	1	-4	-3

Bài 19

a) Tìm $Ư(-30)$, $Ư(60)$ và tìm $Ư(-30) \cap Ư(60)$.

b) Tìm $Ư(-24)$, $Ư(-16)$ và tìm $Ư(-24) \cap Ư(-16)$.

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài yêu cầu tìm tập hợp các ước của từng số đã cho sau đó là tìm tập hợp giao của hai tập hợp các ước đó.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, trước hết tìm các ước của -30 bằng cách xét xem -30 chia hết cho những số nào. Đối với số 60 cũng làm tương tự. Sau đó hãy tìm các số có mặt trong cả hai tập hợp ước trên, đó là tập hợp giao của hai tập hợp các ước của -30 và 60.

Với câu b, làm tương tự như câu a.

● **Cách giải**

a) $U(-30) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 5; \pm 6; \pm 10; \pm 15; \pm 30\}$

$$U(60) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 5; \pm 6; \pm 10; \pm 12; \pm 15; \pm 20; \pm 30; \pm 60\}.$$

$$U(-30) \cap U(60) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 5; \pm 6; \pm 10; \pm 15; \pm 30\}$$

b) $U(-24) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 8; \pm 12; \pm 24\}$

$$U(-16) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8; \pm 16\}.$$

$$U(-24) \cap U(-16) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}.$$

● **Khai thác bài toán**

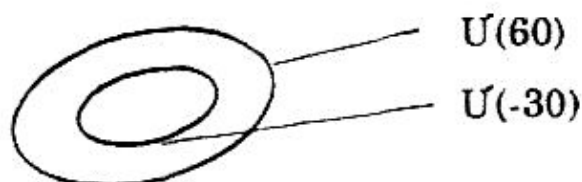
a) Có nhận xét gì về $U(-30) \cap U(60)$?

Ta thấy -30 là ước của 60, nên

$$U(-30) \cap U(60) = U(-30)$$

b) Có thể dùng hình vẽ để minh họa $U(-30) \cap U(60)$ được không?

Vì -30 là ước của 60 và $U(-30) \cap U(60) = U(-30)$ nên $U(-30) \subseteq U(60)$, ta có hình vẽ sau:



c) Tìm $Ư(-24) \cap Ư(-16) \cap Ư(-30)$?

Ta có:

$$Ư(-24) \cap Ư(-16) \cap Ư(-30) = \{\pm 1; \pm 2\}.$$

Bài 20

Viết tập hợp các phân số bằng:

a) $-\frac{15}{20}$; b) $\frac{6}{9}$.

• Tìm hiểu đề bài

Đề bài yêu cầu viết tập hợp các phân số bằng phân số $-\frac{15}{20}$ (câu

a), bằng phân số $\frac{6}{9}$ (câu b).

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, trước hết cần rút gọn phân số đã cho để có phân số tối giản. Biết rằng, theo tính chất cơ bản của phân số: giá trị của một phân số không thay đổi khi nhân tử và mẫu của phân số với cùng một số khác không. Chẳng hạn $\frac{1}{2} = \frac{1.2}{2.2} = \frac{1.3}{2.3} = \dots$ Từ đó suy ra kết quả của bài toán.

Với câu b, làm tương tự câu a.

• Cách giải

a) Trước hết, cần rút gọn phân số đã cho:

$$-\frac{15}{20} = -\frac{15:5}{20:5} = -\frac{3}{4}.$$

Với $m \in \mathbb{Z}$ và $m \neq 0$, tập hợp A các phân số bằng phân số $-\frac{15}{20}$ là:

$$A = \left\{ -\frac{3m}{4m} \mid m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}.$$

b) Trước hết, cần rút gọn phân số đã cho:

$$\frac{6}{9} = \frac{6:3}{9:3} = \frac{2}{3}$$

Với $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$, tập hợp B các phân số bằng phân số $\frac{6}{9}$ là:

$$B = \left\{ \frac{2n}{3n} \mid n \in \mathbf{Z}, n \neq 0 \right\}.$$

● Khai thác bài toán

Vấn đề đặt ra là tại sao cần rút gọn phân số trước khi tìm tập hợp các phân số bằng phân số đã cho?

Giả sử như không rút gọn phân số $-\frac{15}{20}$ thì tập hợp C các phân số bằng nó sẽ là

$$C = \left\{ -\frac{15 \cdot m}{20 \cdot m} \mid m \in \mathbf{Z}, m \neq 0 \right\}$$

Làm như trên là bỏ sót nhiều phân số, chẳng hạn $-\frac{3}{4}$, $-\frac{6}{8}$, $-\frac{12}{16}$, ...

Từ đó, ta thấy rằng để viết tập hợp các phân số bằng phân số $-\frac{15}{20}$ chẳng hạn (hay là viết dạng chung của các phân số bằng phân số $-\frac{15}{20}$) cần thực hiện theo hai bước sau:

- *Bước 1:* Rút gọn phân số $-\frac{15}{20}$ đến khi tử và mẫu không còn ước chung khác ± 1 , được phân số tối giản $-\frac{3}{4}$.

- *Bước 2:* Dựa vào tính chất cơ bản của phân số để viết tập hợp các phân số bằng phân số $-\frac{15}{20}$ là $\left\{ -\frac{3 \cdot m}{4 \cdot m} \mid m \in \mathbf{Z}, m \neq 0 \right\}$ (hay viết được dạng chung của các phân số bằng $-\frac{15}{20}$ là $-\frac{3 \cdot m}{4 \cdot m}$ với m là

số nguyên khác 0).

Bài 20

a) Viết tập hợp các phân số bằng $-\frac{16}{18}$.

b) Viết dạng chung của các phân số bằng $\frac{-107107}{214214}$.

• Tìm hiểu đề bài

Đề bài câu a yêu cầu viết tập hợp các phân số bằng $-\frac{16}{18}$, câu b yêu cầu viết dạng chung của các phân số bằng $\frac{-107107}{214214}$.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Làm theo các bước 1 và 2 như phần khai thác bài toán của bài 19.

• Cách giải

a) Trước hết, cần rút gọn phân số

$$-\frac{16}{18} = -\frac{8}{9}.$$

Theo tính chất cơ bản của phân số thì có thể viết tập hợp M các phân số bằng phân số $-\frac{16}{18}$ là:

$$M = \left\{ -\frac{8m}{9m} \mid m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}.$$

b) Trước hết cần rút gọn phân số:

$$\frac{-107107}{214214} = \frac{-1}{2}.$$

Theo tính chất cơ bản của phân số thì có thể viết dạng chung của các phân số bằng $\frac{-107107}{214214}$ là phân số $\frac{-1m}{2m}$ với m là số nguyên khác 0.

- Khai thác bài toán

Khi cho phân số $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0$ thì tập hợp các phân số bằng $\frac{a}{b}$ sẽ viết như thế nào?

Theo tính chất cơ bản của phân số, thì tập hợp P các phân số bằng $\frac{a}{b}$ sẽ viết được như sau:

$$P = \left\{ \frac{am}{bm} \mid a, b, m \in \mathbf{Z}, (a, b) = 1, b \neq 0, m \neq 0 \right\}.$$

Bài 21

a) Các phân số sau có bằng nhau không:

$$\frac{-2}{6} \text{ và } \frac{3}{-9}; \quad \frac{-3}{2} \text{ và } \frac{4}{-5}?$$

b) Rút gọn các phân số:

$$\frac{-14}{49}, \frac{63}{-90}, \frac{-180}{288}, \frac{55}{-165}$$

- Tìm hiểu đề bài

Câu a của đề bài là xem xét các cặp hai phân số đã cho có bằng nhau không?

Câu b là rút gọn các phân số đã cho để được các phân số tối giản.

- Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, cần vận dụng điều đã biết $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$ để có câu trả lời.

Với câu b, vận dụng dấu hiệu chia hết để rút gọn dần các phân số.

- Cách giải

a) Ta thấy $(-2) \cdot (-9) = 6 \cdot 3 = 18$ nên $\frac{-2}{6} = \frac{3}{-9}$

Ta thấy $(-3) \cdot (-5) = 15 \neq 2 \cdot 4 = 8$ nên $\frac{-3}{2} \neq \frac{4}{-5}$.

$$\text{b) } \frac{-14}{49} = \frac{-14:7}{49:7} = \frac{-2}{7}$$

$$\frac{63}{-90} = \frac{63:9}{-90:9} = \frac{7}{-10}$$

$$\frac{-180}{288} = \frac{-180:2}{288:2} = \frac{-90}{144} = \frac{-90:2}{144:2} = \frac{-45}{72} = \frac{-45:9}{72:9} = \frac{-5}{8}$$

$$\frac{55}{-165} = \frac{55:5}{-165:5} = \frac{11}{-33} = \frac{11:11}{-33:11} = \frac{1}{-3}$$

● Khai thác bài toán

- Muốn xét xem hai phân số có bằng nhau hay không ta thường vận dụng điều đã biết $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$; cũng có thể sử dụng cách quy đồng mẫu.

$$\text{Chẳng hạn: } \frac{-3}{2} = \frac{-3 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{-15}{10}; \quad \frac{4}{-5} = \frac{4 \cdot 2}{-5 \cdot 2} = \frac{8}{-10}$$

$$\text{Rõ ràng } \frac{-15}{10} \neq \frac{8}{-10} \text{ nên } \frac{-3}{2} \neq \frac{4}{-5}.$$

- Rút gọn phân số có thể vận dụng liên tiếp các dấu hiệu chia hết cho 2; cho 3; cho 5; ..., đối với tử và mẫu, cũng có thể tìm UCLN của tử và mẫu rồi lấy tử và mẫu chia cho UCLN đó. Chẳng hạn:

$$\frac{-180}{288} = \frac{-180:36}{288:36} = \frac{-5}{8} \text{ vì UCLN}(180, 288) = 36.$$

Bài 22

Cho ba phân số $\frac{1}{-5}$; $\frac{7}{-3}$; $\frac{3}{-4}$.

a) Viết ba phân số lần lượt bằng ba phân số đã cho và có mẫu là số dương.

b) Viết ba phân số lần lượt bằng ba phân số đã cho và có mẫu là số dương bằng nhau.

● **Tìm hiểu đề bài**

Câu a của đề bài yêu cầu viết ba phân số có mẫu là số dương, lần lượt bằng ba phân số $\frac{1}{-5}$; $\frac{7}{-3}$; $\frac{3}{-4}$.

Câu b yêu cầu viết ba phân số có mẫu là số dương bằng nhau và lần lượt bằng ba phân số $\frac{1}{-5}$; $\frac{7}{-3}$; $\frac{3}{-4}$.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, để viết một phân số bằng phân số đã cho, có thể nhân tử và mẫu của phân số đó với cùng một số khác 0; nhưng để được một phân số bằng phân số đã cho và có mẫu là số dương thì cần nhân tử và mẫu của phân số đó với cùng một số âm.

Với câu b, trước hết viết các phân số đã cho có mẫu là số dương bằng cách nhân tử và mẫu của mỗi phân số đó với -1, sau đó quy đồng mẫu các phân số ta sẽ được các phân số có mẫu là số dương bằng nhau.

● **Cách giải**

a) Theo tính chất cơ bản của phân số ta có:

$$\frac{1}{-5} = \frac{1 \cdot (-2)}{(-5) \cdot (-2)} = \frac{-2}{10},$$

$$\frac{7}{-3} = \frac{7 \cdot (-3)}{(-3) \cdot (-3)} = \frac{-21}{9},$$

$$\frac{3}{-4} = \frac{3 \cdot (-5)}{(-4) \cdot (-5)} = \frac{-15}{20}.$$

b) Theo tính chất cơ bản của phân số ta có:

$$\frac{1}{-5} = \frac{1 \cdot (-1)}{(-5) \cdot (-1)} = \frac{-1}{5}; \quad \frac{7}{-3} = \frac{7 \cdot (-1)}{(-3) \cdot (-1)} = \frac{-7}{3};$$

$$\frac{3}{-4} = \frac{3 \cdot (-1)}{(-4) \cdot (-1)} = \frac{-3}{4}$$

Mẫu chung của 3 phân số trên là BCNN (5; 3; 4) = 60. Do đó:

$$\frac{-1}{5} = \frac{-1 \cdot 12}{5 \cdot 12} = \frac{-12}{60}; \quad \frac{-7}{3} = \frac{(-7) \cdot 20}{3 \cdot 20} = \frac{-140}{60}$$

$$\frac{-3}{4} = \frac{(-3) \cdot 15}{4 \cdot 15} = \frac{-45}{60}$$

● Khai thác bài toán

Vì sao trong hướng dẫn tìm lời giải bài toán này với cùng một yêu cầu là viết các phân số đã cho có mẫu là số dương, mà ở câu a thì nói: nhân tử và mẫu của phân số đó với cùng một số âm, còn ở câu b thì nói: nhân tử và mẫu của phân số đó với -1?

Sở dĩ như vậy là vì:

- Với câu a, sau khi có mẫu là số dương, công việc đã kết thúc
- Với câu b, sau khi có mẫu là số dương, còn phải tìm mẫu chung của ba phân số đã cho, mà việc tìm mẫu chung của các mẫu thì nếu là của các số nhỏ sẽ thuận lợi hơn so với các số lớn.

Thật vậy, tìm mẫu chung của 3 phân số $\frac{-1}{5}$; $\frac{-7}{3}$ và $\frac{-3}{4}$ sẽ đơn giản hơn, thuận lợi hơn khi tìm mẫu chung của 3 phân số $\frac{-3}{15}$; $\frac{-49}{21}$ và $\frac{-18}{24}$ (vì $\frac{1}{-5} = \frac{1 \cdot (-3)}{(-5) \cdot (-3)} = \frac{-3}{15}$; $\frac{7}{-3} = \frac{7 \cdot (-7)}{(-3) \cdot (-7)} = \frac{-49}{21}$; $\frac{3}{-4} = \frac{3 \cdot (-6)}{(-4) \cdot (-6)} = \frac{-18}{24}$).

Nêu nhận xét này để lưu ý rằng, khi làm một bài toán ngoài việc tìm ra hướng giải, tìm quy tắc giải, còn rất cần chú ý đến lời giải ngắn gọn.

Bài 23

- a) Xét xem trong các phân số sau, các phân số nào biểu diễn

cùng một số hữu tỉ:

$$\frac{-39}{52}; \frac{-14}{21}; \frac{-33}{44}; \frac{-32}{48}; \frac{-38}{57}$$

b) Viết tập hợp các số nguyên z sao cho số hữu tỉ sau có giá trị là một số nguyên:

$$\text{a) } \frac{8}{z}; \quad \text{b) } \frac{z+6}{2}$$

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài câu a cho các phân số, cần xét xem những phân số nào biểu diễn cùng một số hữu tỉ.

Câu b là tìm các số nguyên z để số hữu tỉ đã cho có giá trị là một số nguyên.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, trước hết hãy rút gọn các phân số đã cho về dạng tối giản, rồi xét xem những phân số nào bằng nhau thì các phân số đó cùng biểu diễn một số hữu tỉ.

Với câu b ta thấy: $\frac{8}{z}$ sẽ là số nguyên khi z là ước của 8, còn $\frac{z+6}{2}$ sẽ là số nguyên khi $z + 6$ chia hết cho 2; mà 6 luôn chia hết cho 2, nên $z + 6$ chia hết cho 2 khi $z \vdots 2$.

● **Cách giải**

$$\text{a) Ta có: } \frac{-39}{52} = \frac{(-39):13}{52:13} = \frac{-3}{4}; \quad \frac{-14}{21} = \frac{(-14):7}{21:7} = \frac{-2}{3};$$

$$\frac{-33}{44} = \frac{(-33):11}{44:11} = \frac{-3}{4}; \quad \frac{-32}{48} = \frac{(-32):16}{48:16} = \frac{-2}{3};$$

$$\frac{-38}{57} = \frac{(-38):19}{57:19} = \frac{-2}{3}$$

Nhận thấy:

1) $\frac{-39}{52} = \frac{-33}{44} (= \frac{-3}{4})$, nên hai phân số $\frac{-39}{52}$ và $\frac{-33}{44}$ cùng biểu diễn số hữu tỉ $\frac{-3}{4}$.

2) $\frac{-14}{21} = \frac{-32}{48} = \frac{-38}{57} (= \frac{-2}{3})$, nên ba phân số $\frac{-14}{21}$, $\frac{-32}{48}$ và $\frac{-38}{57}$ cùng biểu diễn số hữu tỉ $\frac{-2}{3}$.

b) Phân số $\frac{8}{z}$ là số nguyên khi z là ước của 8; 8 có các ước là ± 1 ; ± 2 ; ± 4 ; ± 8 .

Vậy tập hợp A các số nguyên z để phân số $\frac{8}{z}$ là số nguyên là

$$A = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}$$

Phân số $\frac{z+6}{2}$ là số nguyên khi $z + 6$ chia hết cho 2, mà 6 luôn chia hết cho 2, vậy $z + 6$ sẽ chia hết cho 2 khi có z chia hết cho 2, tức là z thuộc tập hợp B:

$$B = \{z = 2k \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

• Khai thác bài toán

- Theo câu a, ta thấy có hai phân số hoặc có ba phân số cùng biểu diễn một số hữu tỉ. Vấn đề đặt ra là có phải mỗi điểm trên trục số hữu tỉ chỉ có thể viết là 2 hoặc 3 phân số không?

Không phải, mỗi điểm trên trục số có thể được viết bởi vô số các phân số có cùng một giá trị.

Chẳng hạn, điểm biểu diễn số hữu tỉ $\frac{3}{5}$ trên trục số có thể viết bằng vô số các phân số như sau:

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{12}{20} = \dots = \frac{600}{1000} = \dots$$

- Ở câu b, phân số $\frac{z+6}{2}$ là số nguyên với $z = 2k$, $k \in \mathbf{Z}$ tức là z

là một số nguyên chẵn, nên tập hợp B kể trên có thể viết cách khác như sau:

$$B = \{0; \pm 2; \pm 4; \pm 6; \dots\}$$

Thật vậy khi $z = 0$ thì $\frac{z+6}{2} = 3$

Khi $z = -2$ thì $\frac{z+6}{2} = 2$

Khi $z = 2$ thì $\frac{z+6}{2} = 4, \dots$

Bài 24. Thực hiện phép tính sau một cách hợp lí:

a) $\frac{1}{42} + \frac{1}{12} - (-\frac{5}{9}) - (+\frac{7}{45}) + \frac{2}{3} - (-\frac{1}{4}) + \frac{3}{5}$;

b) $\frac{1}{2} - (-\frac{16}{17}) + \frac{4}{5} - (-\frac{4}{9}) - \frac{11}{45} + \frac{19}{34} + \frac{17}{105}$.

● **Tim hiểu đề bài**

Câu a, câu b của đề bài là một dãy phép cộng và trừ các số hữu tỉ.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, trước hết viết dãy tính đã cho thành một tổng đại số, sau đó vận dụng tính chất giao hoán và kết hợp để có thể tiến hành việc quy đồng mẫu một cách thuận tiện, giúp thực hiện phép tính được nhanh chóng.

Với câu b, làm tương tự như câu a.

● **Cách giải**

$$\begin{aligned} \text{a) } & \frac{1}{42} + \frac{1}{12} - (-\frac{5}{9}) - (+\frac{7}{45}) + \frac{2}{3} - (-\frac{1}{4}) + \frac{3}{5} \\ &= \frac{1}{42} + \frac{1}{12} + \frac{5}{9} - \frac{7}{45} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \\ &= (\frac{1}{12} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{5}{9} + \frac{3}{5} - \frac{7}{45}) + \frac{1}{42} \end{aligned}$$

$$= \frac{1+8+3}{12} + \frac{25+27-7}{45} + \frac{1}{42}$$

$$= \frac{12}{12} + \frac{45}{45} + \frac{1}{42} = 1 + 1 + \frac{1}{42} = 2\frac{1}{42}$$

$$\text{b) } \frac{1}{2} - \left(-\frac{16}{17}\right) + \frac{4}{5} - \left(-\frac{4}{9}\right) - \frac{11}{45} + \frac{19}{34} + \frac{17}{105}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{16}{17} + \frac{4}{5} + \frac{4}{9} - \frac{11}{45} + \frac{19}{34} + \frac{17}{105}$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{16}{17} + \frac{19}{34}\right) + \left(\frac{4}{5} + \frac{4}{9} - \frac{11}{45}\right) + \frac{17}{105}$$

$$= \frac{17+32+19}{34} + \frac{36+20-11}{45} + \frac{17}{105}$$

$$= \frac{68}{34} + \frac{45}{45} + \frac{17}{105} = 2 + 1 + \frac{17}{105} = 3\frac{17}{105}$$

● *Khai thác bài toán*

Có thể giải bài toán trên bằng cách khác để thấy rõ hơn cách giải trình bày ở trên là hợp lí.

Chẳng hạn với câu a, sau khi viết dãy tính đã cho về một tổng đại số, ta thấy 45 chia hết cho 9 và 5; 12 chia hết cho 3 và 4 nên chỉ cần tìm mẫu chung của các phân số có mẫu là 42; 45 và 12, tức là tìm BCNN(42; 45; 12).

Ta có $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$; $45 = 3^2 \cdot 5$; $12 = 2^2 \cdot 3$, nên $\text{BCNN}(42; 45; 12) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 1260$. Do đó có:

$$\frac{1}{42} + \frac{1}{12} + \frac{5}{9} - \frac{7}{45} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{3}{5}$$

$$= \frac{30 + 105 + 700 - 196 + 840 + 315 + 756}{1260}$$

$$= \frac{2550}{1260} = \frac{255}{126} = 2\frac{3}{126} = 2\frac{1}{42}$$

Nếu chỉ quan tâm đến mẫu là 45 và 12 thì BCNN(45; 12) = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$. Do đó có:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{42} + \frac{1}{12} + \frac{5}{9} - \frac{7}{45} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \\ &= \frac{1}{42} + \frac{15 + 100 - 28 + 120 + 45 + 108}{180} \\ &= \frac{1}{42} + \frac{360}{180} = \frac{1}{42} + 2 = 2\frac{1}{42}. \end{aligned}$$

Rõ ràng qua các cách giải khác của bài này như trình bày ở trên, ta thấy cách giải như đã làm là hợp lý nhất. Do vậy, khi được giao làm một bài toán, cần có ý thức tìm cách giải hợp lý nhất. Cũng có thể cứ giải bài toán theo cách thông thường, từ đó sẽ tìm thấy được cách giải khác hợp lý hơn.

Bài 25. Tìm x biết:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{-4}{15} - x &= \frac{-7}{10}; & \text{b) } \frac{17}{20} + \left(\frac{4}{5} + x\right) &= \frac{5}{6}; \\ \text{c) } x + \frac{3}{4} &= \frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{6}\right); & \text{d) } \left|x + \frac{1}{4}\right| &= \frac{11}{12}. \end{aligned}$$

● **Tim hiểu đề bài**

Câu a là tìm x khi x là số trừ. Câu b là tìm biểu thức chứa x . Câu c có dạng tìm x khi x là một trong hai số hạng của tổng. Câu d là tìm x nằm trong một biểu thức có dấu giá trị tuyệt đối.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a vận dụng cách tìm ST = SBT - H.

Với câu b, trước hết vận dụng cách tìm số hạng thứ hai bằng cách lấy tổng trừ đi số hạng thứ nhất, sau đó lại làm tiếp một lần nữa như trên.

Với câu c, trước hết thực hiện phép trừ ở bên phải dấu bằng, rồi áp dụng cách giải tương tự câu b.

Với câu d, cần xét hai trường hợp: $x + \frac{1}{4} > 0$ và $x + \frac{1}{4} < 0$.

• Cách giải

$$\text{a) } \frac{-4}{15} - x = \frac{-7}{10}$$

$$x = \frac{-4}{15} - \frac{-7}{10} = \frac{-8+21}{30} = \frac{13}{30}$$

$$\text{b) } \frac{17}{20} + \left(\frac{4}{5} + x\right) = \frac{5}{6}$$

$$\frac{4}{5} + x = \frac{5}{6} - \frac{17}{20} = \frac{50-51}{60} = \frac{-1}{60}$$

$$x = \frac{-1}{60} - \frac{4}{5} = \frac{-1-48}{60} = -\frac{49}{60}$$

$$\text{c) } x + \frac{3}{4} = \frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{6}\right)$$

$$x + \frac{3}{4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{4+1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$x = \frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{1}{12}$$

d) Xét hai trường hợp

* Khi $x + \frac{1}{4} > 0$, ta có:

$$x + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}; x = \frac{11}{12} - \frac{1}{4} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

* Khi $x + \frac{1}{4} < 0$, ta có:

$$x + \frac{1}{4} = -\frac{11}{12}; x = -\frac{11}{12} - \frac{1}{4} = \frac{-14}{12} = -\frac{7}{6} = -1\frac{1}{6}$$

• Khai thác bài toán

Với loại toán tìm x này, sau khi tìm được giá trị của x cần thử lại, sau đó mới trả lời.

Chẳng hạn, thử lại với câu a bài toán này.

Thay $x = \frac{13}{30}$ vào bên trái dấu bằng của đề bài, ta có:

$$-\frac{4}{15} - x = \frac{-4}{15} - \frac{13}{30} = \frac{-8-13}{30} = \frac{-21}{30} = \frac{-7}{10}. \text{ Vế trái bằng vế}$$

phải, nên giá trị $x = \frac{13}{30}$ là đúng.

Bạn đọc hãy tự thử lại các câu b, c, d của bài toán này.

Bài 26. Tìm các số nguyên x, y biết rằng:

$$\frac{x}{8} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4}.$$

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài yêu cầu tìm các số x, y nguyên thỏa mãn đẳng thức

$$\frac{x}{8} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4}.$$

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Cần xem lại bài số 18 để có gợi ý về cách giải bài này. Trước hết cho y phụ thuộc x bằng cách biến đổi như sau $\frac{1}{y} = \frac{x}{8} - \frac{1}{4} =$

$\frac{x-2}{8}$. Sau đó áp dụng điều đã biết là: nếu có $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì có $ad = bc$,

từ đó suy ra $y(x-2) = 8$. Như vậy y và $x-2$ là ước của 8. Biết các ước của 8 là $\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8$. Vận dụng từng trường hợp đối với mỗi ước của 8 sẽ suy ra x, y .

● **Cách giải**

$$\text{Từ } \frac{x}{8} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \text{ suy ra } \frac{1}{y} = \frac{x}{8} - \frac{1}{4} =$$

$$\text{Quy đồng mẫu ở vế phải, có } \frac{1}{y} = \frac{x-2}{8}.$$

Biết rằng, nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì suy ra $ad = bc$. Áp dụng điều này vào bài toán đang giải có:

$$y(x - 2) = 8.$$

Đẳng thức trên chứng tỏ rằng y và $x - 2$ là ước của 8. Mà 8 có các ước là $\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8$.

Bằng cách lập bảng để suy ra các số nguyên x, y cần tìm

y	1	-1	2	-2	4	-4	8	-8
$x - 2$	8	-8	4	-4	2	-2	1	-1
x	10	-6	6	-2	4	0	3	1

● Khai thác bài toán

Đề bài đã ra có x và y là tử và mẫu của hai số hữu tỉ $\frac{x}{8}$ và $\frac{1}{y}$ trong mối quan hệ của hiệu hai số hữu tỉ ấy.

Vấn đề được đặt ra là hai số hữu tỉ có liên quan đến các số nguyên x, y trong mối quan hệ của tổng hai số hữu tỉ, chẳng hạn như cho $\frac{1}{y} + \frac{x}{6} = \frac{1}{2}$, có thể tìm được các số nguyên x, y không?

Được, có thể làm như sau:

$$\frac{1}{y} + \frac{x}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{2} - \frac{x}{6} = \frac{3-x}{6}.$$

Từ $\frac{1}{y} = \frac{3-x}{6}$ suy ra $y(3-x) = 6$. Các ước của 6 là $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$. Lập bảng để tìm x, y :

y	1	-1	2	-2	3	-3	6	-6
$3-x$	6	-6	3	-3	2	-2	1	-1
x	-3	9	0	6	1	5	2	4

Bài 27. Tìm giá trị:

a) nhỏ nhất của biểu thức $A = \left| x - \frac{2}{3} \right| + 1$;

b) lớn nhất của biểu thức $B = 5 - \left| \frac{3}{4} - x \right|$.

• **Tìm hiểu đề bài**

Câu a của đề bài đòi hỏi tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A và khi đó giá trị của x bằng bao nhiêu?

Câu b đòi hỏi tìm giá trị lớn nhất của biểu thức B và khi đó giá trị của x bằng bao nhiêu?

• **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Trước hết hãy làm quen với khái niệm: giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của một biểu thức.

Chẳng hạn, có:

1) $x \geq 2$, thì hiểu rằng x luôn nhận mọi giá trị lớn hơn hoặc bằng 2 và khi x bằng 2 thì đó là giá trị nhỏ nhất của x.

2) $x \leq 3$, thì hiểu rằng x luôn nhận mọi giá trị nhỏ hơn hoặc bằng 3 và khi x bằng 3 thì đó là giá trị lớn nhất của x.

Ở đề bài này cần lưu ý sử dụng định nghĩa về giá trị tuyệt đối của một biểu thức: $|a| \geq 0$. Cũng cần chú ý đến việc đặt dấu trừ trước một số dương, chẳng hạn, nếu có $a \geq 0$ thì $-a \leq 0$.

• **Cách giải**

a) Ta đã biết rằng, với mọi giá trị của x thì $\left| x - \frac{2}{3} \right| \geq 0^{(*)}$. Thêm vào hai vế của bất đẳng thức (*) số 1, ta có:

$$A = \left| x - \frac{2}{3} \right| + 1 \geq 1$$

Nhận thấy biểu thức A luôn luôn lớn hơn hoặc bằng 1, vậy khi A bằng 1 thì biểu thức A có giá trị nhỏ nhất:

$$|x - \frac{2}{3}| + 1 = 1 \Rightarrow |x - \frac{2}{3}| = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

Vậy khi $x = \frac{2}{3}$ thì biểu thức A có giá trị nhỏ nhất bằng 1.

b) Ta đã biết rằng, với mọi giá trị của x thì $|\frac{3}{4} - x| \geq 0$, từ đó có $5 - |\frac{3}{4} - x| \leq 5$ (**).

Thêm vào hai vế của bất đẳng thức (**) số 5, ta có:

$$B = 5 - |\frac{3}{4} - x| \leq 5.$$

Nhận thấy biểu thức B luôn luôn nhỏ hơn hoặc bằng 5, vậy khi B bằng 5 thì biểu thức B có giá trị lớn nhất:

$$5 - |\frac{3}{4} - x| = 5 \Rightarrow |\frac{3}{4} - x| = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

Vậy khi $x = \frac{3}{4}$ thì biểu thức B có giá trị lớn nhất bằng 5.

● Khai thác bài toán

Ở bài toán trên, người ta đã khẳng định một biểu thức nào đó là có giá trị nhỏ nhất hay có giá trị lớn nhất. Bây giờ có hai biểu thức:

$$a) C = |x + \frac{1}{4}| \quad b) D = |x - \frac{1}{2}| + 1$$

thì mỗi biểu thức này có giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất?

Ta có thể lập luận như sau:

a) Biết rằng $C = |x + \frac{1}{4}| \geq 0$, chứng tỏ rằng C luôn nhận mọi giá trị lớn hơn hoặc bằng 0 và khi $C = 0$ thì đó là giá trị nhỏ nhất của C; $C = 0$ hay $|x + \frac{1}{4}| = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$.

Vậy khi $x = -\frac{1}{4}$ thì biểu thức C có giá trị nhỏ nhất bằng 0.

b) Tương tự có $|x - \frac{1}{2}| \geq 0$. Thêm vào hai vế của bất đẳng thức số 1, có

$$D = |x - \frac{1}{2}| + 1 \geq 1,$$

chứng tỏ rằng D luôn nhận mọi giá trị lớn hơn hoặc bằng 1 và khi $D = 1$ thì đó là giá trị nhỏ nhất của D.

$$D = 1 \text{ suy ra } |x - \frac{1}{2}| = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Vậy khi $x = \frac{1}{2}$ thì biểu thức D có giá trị nhỏ nhất bằng 1.

Bài 28. Thực hiện các phép tính sau:

a) $[6 \cdot (-\frac{1}{3})^2 - 3 \cdot (-\frac{1}{3}) + 1] : (-\frac{1}{3} - 1);$

b) $6 \cdot (-\frac{2}{3})^3 - 3 \cdot (-\frac{2}{3})^2 - 2 \cdot (-\frac{2}{3}) + 8;$

c) $\frac{(\frac{2}{3})^3 \cdot (-\frac{3}{4})^2 \cdot (-1)^5}{(\frac{2}{5})^2 \cdot (-\frac{5}{12})^3};$

d) $16^{16} : 8^7.$

• **Tim hiểu đề bài**

Câu a là một dãy tính có dấu móc vuông gồm các phép tính: nhân, lũy thừa, chia và cộng trừ.

Câu b là một dãy tính gồm các phép tính lũy thừa, nhân và cộng trừ.

Câu c là một dãy tính gồm các phép tính lũy thừa, nhân và chia.

Câu d là chia hai lũy thừa.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a cần làm các phép tính trong dấu móc vuông trước. Trong móc vuông làm phép tính lũy thừa, phép nhân rồi làm cộng, trừ. Cuối cùng làm phép chia.

Với câu b cần làm phép tính lũy thừa, nhân rồi cộng trừ.

Với câu c cần làm phép tính lũy thừa, nhân và cuối cùng là phép chia.

Với câu d là phép chia hai lũy thừa, cần biến đổi để hai lũy thừa có cùng một cơ số rồi áp dụng quy tắc chia hai lũy thừa của cùng một số.

● **Cách giải**

$$\text{a) } [6 \cdot (-\frac{1}{3})^2 - 3(-\frac{1}{3}) + 1] : (-\frac{1}{3} - 1)$$

$$= [6 \cdot \frac{1}{9} + 1 + 1] : (-\frac{4}{3})$$

$$= [\frac{2}{3} + 2] : (-\frac{4}{3}) = \frac{8}{3} \cdot (-\frac{3}{4}) = -2.$$

$$\text{b) } 6 \cdot (-\frac{2}{3})^3 - 3 \cdot (-\frac{2}{3})^2 - 2(-\frac{2}{3}) + 8$$

$$= 6 \cdot (-\frac{8}{27}) - 3 \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{3} + 8$$

$$= -\frac{16}{9} - \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + 8 = \frac{-16+72}{9} = \frac{56}{9} = 6\frac{2}{9}.$$

$$\text{c) } \frac{(\frac{2}{3})^3 \cdot (-\frac{3}{4})^2 \cdot (-1)^5}{(\frac{2}{5})^2 \cdot (-\frac{5}{12})^3} = \frac{\frac{8}{27} \cdot \frac{9}{16} \cdot (-1)}{\frac{4}{25} \cdot \frac{-125}{144 \cdot 12}} = \frac{-\frac{1}{6}}{-\frac{5}{144 \cdot 3}}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{144 \cdot 3}{5} = \frac{72}{5} = 14,4.$$

$$d) 16^{16} : 8^7 = (2^4)^{16} : (2^3)^7 = 2^{64} : 2^{21} = 2^{43}.$$

Bài 29. Tìm x biết rằng:

$$a) (2x - 3)^2 = 9; \quad b) \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} = \frac{1}{8};$$

$$c) \left(-\frac{1}{3}\right)^{x-3} = \frac{1}{81}; \quad d) 3^{x-1} = \frac{1}{243};$$

$$e) 2^x + 2^{x+3} = 144; \quad f) 81 \cdot 2^x \cdot 27^x = 9^{10}.$$

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài yêu cầu tìm giá trị của x trong các đẳng thức có chứa biểu thức lũy thừa.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a cần lưu ý rằng, lũy thừa bậc chẵn của một số âm hoặc số dương luôn là số dương.

Với câu b, hãy biến đổi để đẳng thức có cùng một cơ số.

Với câu c, lưu ý đến lũy thừa bậc chẵn và cần biến đổi để đẳng thức có cùng một cơ số.

Với câu d, cần biến đổi 243 thành một lũy thừa có cơ số là 3 và lưu ý lũy thừa $a^0 = 1$.

Với câu e, lưu ý sử dụng quy tắc về tích 2 lũy thừa của cùng một số, tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng, rồi chia 2 vế của đẳng thức cho cùng một số và cuối cùng xem xét hai lũy thừa có cùng cơ số từ đó có x.

Với câu f, biến đổi các lũy thừa về cùng cơ số 3, áp dụng các quy tắc về lũy thừa để tìm x.

● **Cách giải**

$$a) (2x - 3)^2 = (\pm 3)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 3 \\ 2x - 3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 6 \\ 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 0. \end{cases}$$

$$b) \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow 2x - 1 = 3 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2.$$

$$c) \left(-\frac{1}{3}\right)^{x-3} = \frac{1}{81} \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{3}\right)^{x-3} = \left(-\frac{1}{3}\right)^4 \Leftrightarrow x - 3 = 4 \Leftrightarrow x = 7.$$

$$d) 3^{x-1} = \frac{1}{243} \Leftrightarrow 3^{x-1} = \frac{1}{3^5}$$

$$3^{x-1} \cdot 3^5 = 1 \Leftrightarrow 3^{x+4} = 1 = 3^0 \Leftrightarrow x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4.$$

$$e) 2^x + 2^{x+3} = 144 \Leftrightarrow 2^x + 2^x \cdot 2^3 = 144 \Leftrightarrow$$

$$2^x(1 + 2^3) = 144 \Leftrightarrow 9 \cdot 2^x = 144 \Leftrightarrow 2^x = 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^x = 2^4 \Leftrightarrow x = 4.$$

$$f) 81^{-2x} \cdot 27^x = 9^{10} \Leftrightarrow (3^4)^{-2x} \cdot (3^3)^x = (3^2)^{10}$$

$$\Leftrightarrow 3^{-8x} \cdot 3^{3x} = 3^{20} \Leftrightarrow 3^{-5x} = 3^{20}$$

$$\Leftrightarrow -5x = 20 \Leftrightarrow x = -4.$$

● Khai thác bài toán

Sau khi tìm được giá trị của x , cần thử lại để kiểm tra kết quả. Chẳng hạn với câu a, ta có $x = 3$ thì $(2x - 3)^2 = 3^2 = 9$; $x = 0$ thì $(2x - 3)^2 = (-3)^2 = 9$.

Tương tự như trên, bạn đọc có thể tự thử lại.

Bài 30. So sánh các cặp số sau:

a) $(-32)^9$ và $(-16)^{13}$;

b) 10^{20} và 90^{10} ;

c) $(-5)^{30}$ và $(-3)^{50}$;

d) $\left(\frac{1}{16}\right)^{10}$ và $\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$.

● Tìm hiểu đề bài

Đề bài ở mỗi câu cho hai lũy thừa, yêu cầu so sánh xem trong hai lũy thừa đó thì số nào lớn hơn.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Cách làm chung cho các bài toán so sánh hai lũy thừa là tìm cách đưa hai lũy thừa đã cho về hai lũy thừa có cùng số mũ hoặc có cùng cơ số, từ đó dễ dàng so sánh chúng với nhau. Cụ thể:

Với câu a, trước hết hãy biến đổi 32^9 và 16^{13} về cùng cơ số 2 và

cần lưu ý như sau: biết $4 < 8$ hay $2^2 < 2^3$, nhưng nếu nhân 4 và 8 với -1 ta sẽ có $-4 > -8$ hay $-2^2 > -2^3$.

Với câu b, hãy biến đổi để có cùng số mũ là 10 và với lưu ý rằng, lũy thừa nào có cơ số lớn hơn sẽ lớn hơn, chẳng hạn như $5^{10} > 4^{10}$.

Với câu c, vì 30 và 50 đều là các số chẵn, nên các lũy thừa đã cho là lũy thừa với cơ số dương, hãy tìm cách biến đổi để hai lũy thừa có cùng số mũ là 10.

Với câu d, hãy biến đổi hai lũy thừa để có cùng cơ số là $\frac{1}{2}$ và chú ý như sau: với cơ số nhỏ hơn 1, lũy thừa nào có số mũ nhỏ hơn sẽ lớn hơn, chẳng hạn $(\frac{1}{2})^2 > (\frac{1}{2})^3$.

● Cách giải

a) Ta có $(32)^9 = (2^5)^9 = 2^{45}$

$$16^{13} = (2^4)^{13} = 2^{52}.$$

Rõ ràng $2^{45} < 2^{52}$ Nhân hai vế với -1 , ta có:

$$-2^{45} > -2^{52} \text{ hay } (-2^5)^9 > (-2^4)^{13}$$

$$\text{Vậy } (-32)^9 > (-16)^{13}.$$

b) Ta có $10^{20} = (10^2)^{10} = 100^{10}$.

Rõ ràng $100 > 90$ nên $100^{10} > 90^{10}$

$$\text{Vậy } 10^{20} > 90^{10}.$$

c) Ta có $(-5)^{30} = 5^{30} = (5^3)^{10} = 125^{10}$

$$(-3)^{50} = 3^{50} = (3^5)^{10} = 243^{10}.$$

Rõ ràng $243 > 125$ nên $243^{10} > 125^{10}$, vậy

$$(-5)^{30} < (-3)^{50}.$$

d) Ta có $(\frac{1}{16})^{10} = (\frac{1}{2^4})^{10} = [(\frac{1}{2})^4]^{10} = (\frac{1}{2})^{40}$.

Vì $\frac{1}{2} < 1$ nên $(\frac{1}{2})^{40} > (\frac{1}{2})^{50}$, vậy

$$(\frac{1}{16})^{10} > (\frac{1}{2})^{50}.$$

● Khai thác bài toán

Như đã nói ở phần hướng dẫn cách tìm lời giải, khi phải so sánh hai lũy thừa thì căn cứ vào đề bài cụ thể mà biến đổi các lũy thừa đã cho để chúng có cùng cơ số (hay cùng số mũ), khi đó sẽ so sánh số mũ (hay so sánh cơ số) để có kết luận.

Tuy vậy, cũng có đề bài có thể làm theo cả hai cách đã nói ở trên. Chẳng hạn, với câu d, trong cách giải đã trình bày cách biến đổi cơ số, bây giờ sẽ trình bày cách biến đổi số mũ như sau:

$$(\frac{1}{2})^{50} = [(\frac{1}{2})^5]^{10} = (\frac{1}{2^5})^{10} = (\frac{1}{32})^{10}.$$

Biết $16 < 32$ suy ra $\frac{1}{16} > \frac{1}{32}$, vậy

$$(\frac{1}{16})^{10} > (\frac{1}{32})^{10} \text{ hay}$$

$$(\frac{1}{16})^{10} > (\frac{1}{2})^{50}.$$

Chú ý: Nếu $a > b > 0$ và $n \in \mathbf{N}$, $n \neq 0$ thì $a^n > b^n$. Chẳng hạn $a = 8$, $b = 5$, $n = 2$, ta sẽ có $8^2 > 5^2$.

Bài 31. Tìm các số a , b , c biết rằng:

$$3a = 6b = 9c \text{ và } a - b + c = 45.$$

● Tìm hiểu đề bài

Đề bài cho $3a = 6b = 9c$ và tổng đại số $a - b + c = 45$, yêu cầu tìm giá trị của ba số a , b , c .

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Từ giả thiết $3a = 6b = 9c$ phải lập ra được một dãy các tỉ số

bằng nhau bằng cách chia $3a$, $6b$, $9c$ cho BCNN của 3; 6; 9. Sau đó áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau để tìm a , b , c .

● Cách giải

Từ $3a = 6b = 9c$ suy ra $\frac{3a}{18} = \frac{6b}{18} = \frac{9c}{18}$ hay $\frac{a}{6} = \frac{b}{3} = \frac{c}{2}$.

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{6} = \frac{b}{3} = \frac{c}{2} = \frac{a-b+c}{6-3+2} = \frac{45}{5} = 9.$$

$$\text{Từ } \frac{a}{6} = 9 \Rightarrow a = 54,$$

$$\frac{b}{3} = 9 \Rightarrow b = 27,$$

$$\frac{c}{2} = 9 \Rightarrow c = 18.$$

Vậy $a = 54$, $b = 27$, $c = 18$.

● Khai thác bài toán

Có thể kiểm tra lại kết quả trên bằng cách nào?

Kiểm tra như sau:

- Cách 1. Tính $a - b + c$ có bằng 45 không?

$$a - b + c = 54 - 27 + 18 = 45$$

- Cách 2. Xét xem có $3a = 6b = 9c$ không?

$$3a = 3 \cdot 54 = 162; 6b = 6 \cdot 27 = 162; 9c = 9 \cdot 18 = 162.$$

B. CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

ĐỀ BÀI

Bài 32. Biết rằng $|a + b| = |a| + |b|$ khi và chỉ khi $ab \geq 0$.
Hãy tìm số nguyên x , nếu biết:

a) $|x - 3| + |5 - x| = 2$;

b) $|x - 4| + |5 - x| = 1$.

Bài 33. Tìm các số nguyên x, y sao cho:

a) $(x - 3)(y - 2) = 5;$

b) $(x + 1)(y + 3) = 7.$

Bài 34. Cho tổng

$M = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 99 - 100$, hãy xét xem tổng M có chia hết cho 2; 3; 4 và 5 không?

Bài 35. Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức

a) $|3 + 2x| + 3;$

b) $5 - |x - 2|.$

Bài 36. Tìm x biết:

a) $|3x - 5| = 4;$

b) $|2x + 1| + 2 = 5.$

Bài 37. Tìm các giá trị của x để biểu thức $Q = x^2 - 2x$ có giá trị âm.

Bài 38. Tìm x biết:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} = \frac{1}{27};$

b) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{x-1} = \frac{1}{729}.$

HƯỚNG DẪN - CÁCH GIẢI

Bài 32. ● Hướng dẫn cách tìm lời giải. Hãy sử dụng triệt để các điều đã cho của đề bài để làm.

● Cách giải

a) $|x - 3| + |5 - x| = 2 = |(x - 3) + (5 - x)|.$

Theo đề bài có $(x - 3)(5 - x) \geq 0$, suy ra $x - 3$ và $5 - x$ cùng dấu, do đó có $3 \leq x \leq 5$. Vì $x \in \mathbf{Z}$ nên $x \in \{3; 4; 5\}$.

b) $|x - 4| + |5 - x| = 1 = |(x - 4) + (5 - x)|.$

Theo đề bài có $(x - 4)(5 - x) \geq 0$, suy ra $x - 4$ và $5 - x$ cùng dấu, do đó có $4 \leq x \leq 5$. Vì $x \in \mathbf{Z}$ nên $x \in \{4; 5\}$.

Bài 33. • Hướng dẫn cách tìm lời giải.

a) Cần xét mối quan hệ giữa các ước cụ thể của 5 với hai ước phụ thuộc vào x, y của 5 là $x - 3$ và $y - 2$.

b) Tương tự, cần xét mối quan hệ giữa các ước cụ thể của 7 với hai ước phụ thuộc vào x, y của 7 là $x + 1$ và $y + 3$.

• Cách giải

a) Biết $(x - 3)(y - 2) = 5$ nên $x - 3$ và $y - 2$ là ước của 5, mà số 5 có các ước là $\pm 1; \pm 5$, do đó có thể lập bảng để tìm số nguyên x, y như sau:

$x - 3$	1	-1	5	-5
$y - 2$	5	-5	1	-1

 \Rightarrow

x	4	2	8	-2
y	7	-3	3	1

b) Biết $(x + 1)(y + 3) = 7$ nên $x + 1$ và $y + 3$ là ước của 7, mà số 7 có các ước là $\pm 1; \pm 7$, do đó có thể lập bảng để tìm số nguyên x, y như sau:

$x + 1$	1	-1	7	-7
$y + 3$	7	-7	1	-1

 \Rightarrow

x	0	-2	6	-8
y	4	-10	-2	-4

Bài 34. • Hướng dẫn cách tìm lời giải. Trước hết phải tính tổng M , muốn vậy hãy để ý 2 số liên tiếp bắt đầu từ số 1, chúng có hiệu bằng -1 , tất cả có 50 hiệu, do đó tính được M . Sau đó vận dụng dấu hiệu chia hết để trả lời.

• Cách giải

$$\begin{aligned}
 M &= \underbrace{1 - 2} + \underbrace{3 - 4} + \underbrace{5 - 6} + \dots + \underbrace{99 - 100} \\
 &= \underbrace{(-1) + (-1) + (-1) + \dots + (-1)}_{\text{có 50 số } -1} \\
 &= -50
 \end{aligned}$$

Số -50 chia hết cho 2 và cho 5 vì có chữ số tận cùng bằng số 0.

Số -50 không chia hết cho 3 và cho 4.

Bài 35. • Hướng dẫn cách tìm lời giải. Chú ý vận dụng về giá trị tuyệt đối của một biểu thức: $|A| \geq 0$, $-|A| \leq 0$.

a) Ta biết rằng, với mọi giá trị của x thì $|3 + 2x| \geq 0$.

Thêm 3 vào hai vế của bất đẳng thức trên, ta có:

$$|3 + 2x| + 3 \geq 3.$$

Nhận thấy biểu thức $|3 + 2x| + 3$ luôn lớn hơn hoặc bằng 3 và khi nó bằng 3 là giá trị nhỏ nhất.

$$\text{Từ } |3 + 2x| + 3 = 3 \Rightarrow |3 + 2x| = 0 \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

Vậy khi $x = -\frac{3}{2}$ thì $|3 + 2x| + 3$ có giá trị nhỏ nhất bằng 3.

b) Ta biết rằng, với mọi giá trị của x thì $|x - 2| \geq 0$, từ đó có $-|x - 2| \leq 0$.

Thêm 5 vào hai vế của bất đẳng thức trên, ta có:

$$5 - |x - 2| \leq 5$$

Nhận thấy biểu thức $5 - |x - 2|$ luôn nhỏ hơn hoặc bằng 5 và khi nó bằng 5 là giá trị lớn nhất.

$$\text{Từ } 5 - |x - 2| = 5 \Rightarrow |x - 2| = 0 \Rightarrow x = 2$$

Vậy khi $x = 2$ thì $5 - |x - 2|$ có giá trị lớn nhất bằng 5.

Bài 36. • Hướng dẫn cách tìm lời giải

Câu a cần xét khi $3x - 5 > 0$ và $3x - 5 < 0$

Câu b cần xét khi $2x + 1 > 0$ và $2x + 1 < 0$.

• Cách giải

a) Khi $3x - 5 > 0$ hay $x > \frac{5}{3}$ thì $|3x - 5| = 3x - 5$, do đó có:

$$3x - 5 = 4 \Leftrightarrow x = 3 \text{ (thỏa mãn điều kiện } x > \frac{5}{3} \text{)}$$

Khi $3x - 5 < 0$ hay $x < \frac{5}{3}$ thì $|3x - 5| = -(3x - 5) = 5 - 3x$,

do đó có:

$$5 - 3x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ (thỏa mãn).}$$

b) Khi $2x + 1 > 0$ hay $x > -\frac{1}{2}$ thì $|2x + 1| = 2x + 1$, do đó có:

$$2x + 1 + 2 = 5 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn)}$$

Khi $2x + 1 < 0$ hay $x < -\frac{1}{2}$ thì $|2x + 1| = -(2x + 1) = -2x - 1$, do đó có:

$$-2x - 1 + 2 = 5 \Leftrightarrow 1 - 2x = 5 \Leftrightarrow x = -2 \text{ (thỏa mãn).}$$

Bài 37. • Hướng dẫn cách tìm lời giải. Biến đổi sao cho Q viết được thành một tích của hai thừa số. Tích của hai thừa số này là âm khi hai thừa số này trái dấu.

• Cách giải

$$Q = x^2 - 2x = x(x - 2)$$

$Q < 0$ khi các thừa số x và $x - 2$ trái dấu. Biết rằng $x > x - 2$ nên khi x và $x - 2$ trái dấu thì $x > 0$ còn $x - 2 < 0$ tức là $0 < x < 2$.

Vậy với $0 < x < 2$ thì Q có giá trị âm, có thể biểu diễn kết quả trên trục số như sau:

$$0 < x < 2$$



Bài 38. • Hướng dẫn cách tìm lời giải. Hãy viết số ở vế phải dưới dạng một lũy thừa có cùng cơ số với lũy thừa ở vế trái.

• Cách giải

$$\text{a) } \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} = \frac{1}{27} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = 3 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2.$$

$$\text{b) } \left(-\frac{1}{3}\right)^{x-1} = \frac{1}{729} \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{3}\right)^{x-1} = \left(-\frac{1}{3}\right)^6 \Leftrightarrow x - 1 = 6 \Leftrightarrow x = 7.$$

II. ĐA THỨC VÀ CÁC PHÉP TÍNH

A. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

Bài 1. Tính giá trị của các biểu thức:

$$a) A = \frac{x^2 + y^2 - 2xy}{x - y} \text{ với } x = 2; y = -1,5;$$

$$b) B = \frac{4xy}{(x + y)^2 - (x - y)^2} \text{ với } x = 2; y = -0,75;$$

$$c) C = (x^7 + 11y^2)(x^{11} + 2y)(x^4 + y)(x^2 - y) \text{ với } x = -\frac{1}{5};$$

$y = 0,04;$

$$d) D = 6x^2 - 4|x| + 2x - 5 \text{ với } x = 2; x = -3;$$

$$e) E = 4x^3 - 2x^2 + 3x + 1 \text{ với } |x| = \frac{1}{2}.$$

• Tìm hiểu đề bài

Đề bài cho các biểu thức có một biến hoặc hai biến và giá trị bằng số của biến, đòi hỏi tính giá trị của biểu thức.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Phương pháp chung để tính giá trị của một biểu thức đại số gồm 2 bước sau:

- Bước 1. Thay chữ bởi giá trị số đã cho, với giá trị là số âm cần lưu ý đặt trong dấu ngoặc.

- Bước 2. Thực hiện các phép tính: lũy thừa, nhân, chia và cuối cùng là cộng, trừ.

Cụ thể:

+ Các câu a, b có thể áp dụng ngay hướng dẫn trên.

+ Câu c, hãy thay chữ bởi số đã cho đối với thừa số cuối cùng của biểu thức đã cho, từ đó sẽ có ngay kết quả.

+ Câu d, cho giá trị bằng số của x , phải tính $|x|$.

+ Câu e, cho $|x| = \frac{1}{2}$, phải tính x , cần xét hai trường hợp

$$x = \frac{1}{2} \text{ và } x = -\frac{1}{2}.$$

• Cách giải

a) Với $x = 2, y = -1,5 = -1\frac{1}{2}$, có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2^2 + (-1\frac{1}{2})^2 - 2 \cdot 2 \cdot (-1\frac{1}{2})}{2 - (-1\frac{1}{2})} = \frac{4 + \frac{9}{4} + 6}{2 + 1\frac{1}{2}} \\ &= \frac{12\frac{1}{4}}{3\frac{1}{2}} = \frac{49}{4} : \frac{7}{2} = \frac{49}{4} \cdot \frac{2}{7} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

b) Với $x = 2; y = -0,75 = -\frac{3}{4}$, có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{4 \cdot 2 \cdot (-\frac{3}{4})}{[2 + (-\frac{3}{4})]^2 - [2 - (-\frac{3}{4})]^2} = \frac{-6}{(\frac{5}{4})^2 - (\frac{11}{4})^2} = \frac{-6}{\frac{25}{16} - \frac{121}{16}} \\ &= \frac{-6}{-\frac{96}{16}} = \frac{-6}{-6} = 1. \end{aligned}$$

c) Với $x = -\frac{1}{5} = -0,2, y = 0,04$. Trước hết tính $x^2 - y$, có:

$$(-0,2)^2 - 0,04 = 0,04 - 0,04 = 0.$$

C là tích của bốn thừa số, thừa số thứ tư bằng 0, vậy $C = 0$.

d) * Với $x = 2$, có:

$$\begin{aligned} D &= 6 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 5 \\ &= 24 - 8 + 4 \cdot 5 = 15 \end{aligned}$$

* Với $x = -3$, có:

$$\begin{aligned} D &= 6 \cdot (-3)^2 - 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-3) - 5 \\ &= 54 - 12 - 6 - 5 = 31. \end{aligned}$$

e) Xét hai trường hợp:

* Với $x = \frac{1}{2}$, có:

$$\begin{aligned} E &= 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{2} + 1 \\ &= 4 \cdot \frac{1}{8} - 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 1 = 2\frac{1}{2} \end{aligned}$$

* Với $x = -\frac{1}{2}$, có:

$$\begin{aligned} E &= 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \\ &= 4 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) - 2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 1 = -1\frac{1}{2} \end{aligned}$$

● Khai thác bài toán

Một vài chú ý khi giải loại toán tính giá trị của biểu thức:

- Với loại bài như câu c, nếu cứ làm theo phương pháp chung ta có:

$$[(-0,2)^7 + 11 \cdot (0,04)^2][(-0,2)^{11} + 2 \cdot (0,04)][(-0,2)^4 + 0,04] \cdot [(-0,2)^2 \cdot 0,04]$$

Nhận thấy, nâng $-0,2$ lên lũy thừa 4; 7; 11 được số thập phân với nhiều chữ số ở phần thập phân, tính toán rất phức tạp. Sau một hồi tính toán kiên trì, ta sẽ gặp thừa số thứ tư bằng 0, đến đây có thể bỏ không cần tính toán cụ thể các thừa số thứ nhất, thứ hai, thứ ba, mà biết ngay biểu thức này bằng 0, vì trong một tích có một trong các thừa số bằng không thì cả tích đó sẽ bằng 0.

Điều chú ý thứ nhất rút ra: cần làm thử, mò mẫm để tìm kết quả, do đó sẽ có cách giải nhanh, gọn.

- Với loại bài như câu e, biểu thức đã cho chứa biến x , còn giá

trị của x đã cho là $|x| = \frac{1}{2}$. Ta cần tính x .

Theo định nghĩa về giá trị tuyệt đối, ta có: $|\frac{1}{2}| = |+\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$,
nên $|x| = \frac{1}{2}$ suy ra $x = \frac{1}{2}$; $x = -\frac{1}{2}$. Do vậy câu này cần xét hai trường hợp đối với x .

Điều chú ý thứ hai rút ra: Chẳng những quan tâm tìm hiểu đề bài mà còn quan tâm đến các giá trị đã cho của x để làm bài cho đầy đủ.

Bài 2. Tìm các giá trị thích hợp của biến trong biểu thức:

a) $\frac{x}{5x + 1}$;

b) $\frac{4}{x^2 - 9}$;

c) $\frac{x + 3}{x^2 - xy}$;

d) $\frac{5x - 8}{x^2 + 4}$.

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài cho các biểu thức phân, đòi hỏi phải tìm giá trị thích hợp của biến để mỗi biểu thức phân đó có nghĩa.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Như đã biết trong phép chia, số chia phải khác 0 thì mới thực hiện được phép tính. Cũng vậy, một biểu thức phân có nghĩa khi giá trị của các biến ở mẫu không làm cho mẫu đó bằng 0 tức là mẫu phải khác 0. Từ đó phải xét lần lượt các mẫu khác 0 để tìm giá trị thích hợp của các biến trong mỗi phân thức.

● **Cách giải**

a) Ta có $5x + 1 \neq 0 \Rightarrow 5x \neq -1 \Rightarrow x \neq -\frac{1}{5}$.

Vậy giá trị thích hợp của biến x trong biểu thức $\frac{x}{5x + 1}$ là

$$x \neq -\frac{1}{5}$$

b) Ta có $x^2 - 9 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 9 \Rightarrow x \neq \pm 3$.

Vậy giá trị thích hợp của biến x trong biểu thức $\frac{4}{x^2 - 9}$ là $x \neq 3; x \neq -3$.

c) Ta có $x^2 - xy = x(x - y) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0; x - y \neq 0 \Rightarrow x \neq y$.

Vậy giá trị thích hợp của biến x, y trong biểu thức $\frac{x+3}{x^2 - xy}$ là $x \neq 0; x \neq y$.

d) Ta có $x^2 + 4$ luôn khác 0 với mọi giá trị của x .

Vậy giá trị thích hợp của biến x trong biểu thức $\frac{5x-8}{x^2+4}$ là với mọi giá trị của x .

● Khai thác bài toán

- Khi mẫu của một biểu thức phân là tổng của một bình phương và một số dương nào đó, chẳng hạn $x^2 + 4$, thì $x^2 + 4$ luôn là một số dương và chắc chắn rằng $x^2 + 4 \neq 0$ với mọi giá trị của x . Do đó giá trị thích hợp của biến x trong biểu thức phân là mọi giá trị của x , biểu thức đã cho luôn có nghĩa.

- Khi làm toán với một phân số có dạng $\frac{a}{b}$ và một biểu thức phân có dạng $\frac{A}{B}$ thì phải có điều kiện $b \neq 0; B \neq 0$ vì phép chia cho số 0 là không có nghĩa.

Bài 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

a) $M = (x - 4)^2 + 1;$

b) $N = (2x + 1)^2 - 3;$

c) $Q = (x^2 - 9)^6 + |y - 5| - 1.$

● Tìm hiểu đề bài

Câu a là tổng một bình phương và số 1, câu b là hiệu một bình phương và số 3, câu c là tổng một lũy thừa bậc 6 và giá trị tuyệt đối của một biểu thức với số -1. Ta phải tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức M, N, Q .

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Lưu ý rằng, lũy thừa bậc chẵn của một biểu thức A chẳng hạn luôn là một số không âm, tức là $A \geq 0$. Mặt khác cũng biết rằng giá trị tuyệt đối của một số hay một biểu thức cũng là số không âm.

Khi thêm cùng một số vào hai vế của bất đẳng thức $A \geq 0$ thì được một bất đẳng thức cùng chiều với bất đẳng thức đó, chẳng hạn từ $A \geq 0$ suy ra $A + 5 \geq 5$ hay $A - 3 \geq -3$.

Dựa vào gợi ý trên hãy giải bài toán đã cho.

● **Cách giải**

a) Với mọi x ta đều có $(x - 4)^2 \geq 0$ nên $(x - 4)^2 + 1 \geq 1$.

Ta thấy $(x - 4)^2 + 1$ luôn lớn hơn hoặc bằng 1, nên giá trị nhỏ nhất của $(x - 4)^2 + 1$ bằng 1 khi $x - 4 = 0$ hay $x = 4$.

Vậy khi $x = 4$ thì biểu thức M có giá trị nhỏ nhất bằng 1.

b) Với mọi x ta đều có $(2x + 1)^2 \geq 0$ nên $(2x + 1)^2 - 3 \geq -3$.

Ta thấy $(2x + 1)^2 - 3$ luôn lớn hơn hoặc bằng -3, vậy giá trị nhỏ nhất của $(2x + 1)^2 - 3$ bằng -3 khi $2x + 1 = 0$ hay $x = -\frac{1}{2}$.

Vậy khi $x = -\frac{1}{2}$ thì biểu thức N có giá trị nhỏ nhất bằng -3.

c) Với mọi x ta đều có $(x^2 - 9)^6 \geq 0$ và với mọi y ta đều có $|y - 5| \geq 0$, do đó $(x^2 - 9)^6 + |y - 5| \geq 0$ nên

$$(x^2 - 9)^6 + |y - 5| - 1 \geq -1.$$

Ta thấy $(x^2 - 9)^6 + |y - 5| - 1$ luôn lớn hơn hoặc bằng -1, vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức Q bằng -1 khi

$$(x^2 - 9)^6 + |y - 5| = 0.$$

Tổng của hai số hạng không âm bằng không khi và chỉ khi mỗi số hạng đó bằng 0 tức là có:

$$(x^2 - 9)^6 = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$|y - 5| = 0 \Rightarrow y - 5 = 0 \Rightarrow y = 5.$$

Vậy với $x = \pm 3$ và $y = 5$ thì biểu thức Q có giá trị nhỏ nhất bằng -1 .

● **Khai thác bài toán.** Một lưu ý về phương pháp giải:

Nhận thấy các biểu thức M, N, Q đã cho đều có lũy thừa bậc chẵn, mà lũy thừa bậc chẵn của một số hay của một biểu thức luôn là một số không âm. Đó là cơ sở chủ yếu để dựa vào đó mà làm loại toán này. Bạn đọc cần lưu ý và làm quen cách lập luận này.

Bài 4. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

a) $M = 12 - x^2;$

b) $N = 5 - (3x - 1)^4;$

c) $Q = \frac{3}{3x^2 + 6}$

● **Tìm hiểu đề bài**

Câu a cho hiệu của 12 với bình phương của x , câu b cho hiệu của 5 với lũy thừa bậc 4 của một biểu thức, câu c cho thương của 3 với một biểu thức có chứa lũy thừa bậc 2. Ta phải tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức M, N, Q .

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, ta thấy rằng, với mọi x thì $x^2 \geq 0$, nhưng nếu nhân với -1 thì có $-x^2 \leq 0$. Thêm 12 vào hai vế ta có $12 - x^2 \leq 12$. Từ đó tìm được giá trị lớn nhất của biểu thức M .

Với câu b, làm tương tự câu a.

Với câu c, với mọi giá trị của x , ta luôn có $3x^2 + 6 \geq 6$, do đó $\frac{3}{3x^2+6} \leq \frac{3}{6}$, vì với hai phân số có cùng tử nếu phân số nào có mẫu

lớn hơn thì nhỏ hơn. Lại biết $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, từ đó tìm được giá trị lớn nhất của biểu thức Q .

• Cách giải

a) Với mọi giá trị của x ta đều có $x^2 \geq 0$. Nhân hai vế với -1 ta có $-x^2 \leq 0$. Thêm 12 vào hai vế được $12 - x^2 \leq 12$.

Ta thấy $12 - x^2$ luôn nhỏ hơn hoặc bằng 12 , nên giá trị lớn nhất của biểu thức $M = 12 - x^2$ bằng 12 khi $x^2 = 0$ hay $x = 0$.

Vậy khi $x = 0$ thì biểu thức M có giá trị lớn nhất bằng 12 .

b) Với mọi x ta đều có $(3x - 1)^4 \geq 0$. Nhân hai vế với -1 ta có $-(3x - 1)^4 \leq 0$. Thêm 5 vào hai vế được $5 - (3x - 1)^4 \leq 5$.

Ta thấy $5 - (3x - 1)^4$ luôn nhỏ hơn hoặc bằng 5 , nên giá trị lớn nhất của biểu thức $N = 5 - (3x - 1)^4$ bằng 5 khi $3x - 1 = 0$ hay

$$x = \frac{1}{3}.$$

Vậy khi $x = \frac{1}{3}$ thì biểu thức N có giá trị lớn nhất bằng 5 .

c) Ta luôn có $3x^2 + 6 \geq 6$ với mọi x . Biết rằng, nếu hai phân số có cùng tử là 3 thì phân số nào có mẫu lớn hơn sẽ là phân số nhỏ hơn, do đó có $\frac{3}{3x^2+6} \leq \frac{1}{2}$.

Ta thấy $\frac{3}{3x^2+6}$ luôn nhỏ hơn hoặc bằng $\frac{1}{2}$, vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \frac{3}{3x^2+6}$ bằng $\frac{1}{2}$ khi $x = 0$.

Vậy khi $x = 0$ thì biểu thức Q có giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{2}$.

• Khai thác bài toán. Một lưu ý về phương pháp giải:

Ngược lại với bài toán tìm giá trị nhỏ nhất của một biểu thức, ở bài toán tìm giá trị lớn nhất của một biểu thức, ta lập luận để cho biểu thức đã cho nhỏ hơn hoặc bằng một số nào đó. Cái giống nhau của đề bài loại toán này là các lũy thừa của biến hay biểu thức đã cho đều là lũy thừa bậc chẵn.

Hãy làm đi làm lại một số lần với mỗi bài để có thói quen và kỹ năng về cách giải loại toán này.

Bài 5

a) Tìm giá trị nguyên của biến x để biểu thức $A = \frac{3x-5}{x}$ có giá trị nguyên nhỏ nhất.

b) Tìm giá trị nguyên của biến x để biểu thức $B = \frac{2}{6-x}$ có giá trị nguyên lớn nhất.

• Tìm hiểu đề bài

Câu a, phải tìm giá trị nguyên của biến x để biểu thức $A = \frac{3x-5}{x}$ cũng là một số nguyên, nhưng có giá trị nhỏ nhất.

Câu b, phải tìm giá trị nguyên của biến x để biểu thức $B = \frac{2}{6-x}$ cũng là một số nguyên, nhưng có giá trị lớn nhất.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, trước hết cần lưu ý rằng, nếu phải trừ hai phân số có cùng mẫu, chẳng hạn $\frac{x}{7}$ trừ $\frac{3}{7}$, thì có thể viết $\frac{x}{7} - \frac{3}{7} = \frac{x-3}{7}$. Ở đây ta quan tâm đến điều ngược lại, tức là $\frac{x-3}{7} = \frac{x}{7} - \frac{3}{7}$.

Vận dụng cách viết này để biến A thành một số nguyên và một biểu thức phân, rồi tiếp tục suy luận để tìm ra kết quả.

Với câu b, vì tử là số dương không đổi, nên biểu thức B có giá trị lớn nhất khi $6 - x$ là số nguyên nhỏ nhất. Biết rằng $6 - x$ không thể là một số nguyên âm vì không có số nguyên âm nhỏ nhất, tức là $6 - x > 0$. Như vậy B có giá trị lớn nhất khi $6 - x$ là số nguyên dương nhỏ nhất.

• Cách giải

a) Ta có $A = \frac{3x-5}{x} = \frac{3x}{x} - \frac{5}{x}$ (dựa theo cách viết khi phải trừ

hai phân số có cùng mẫu).

$$\text{Vậy } A = 3 - \frac{5}{x}.$$

Ta thấy A là hiệu của 3 và $\frac{5}{x}$ sẽ có giá trị nhỏ nhất khi số trừ $\frac{5}{x}$ là số nguyên dương lớn nhất.

Phân số $\frac{5}{x}$ là số dương khi $x > 0$. Phân số $\frac{5}{x}$ có tử là số không đổi, sẽ là số nguyên dương lớn nhất khi x là số nguyên dương bé nhất.

Biết số nguyên dương bé nhất bằng 1, nên có $\frac{5}{x} = \frac{5}{1} = 5$, từ đó suy ra: giá trị nhỏ nhất của $A = 3 - \frac{5}{x} = 3 - 5 = -2$ khi $x = 1$.

Vậy khi $x = 1$ thì biểu thức $A = \frac{3x-5}{x}$ có giá trị nhỏ nhất bằng -2.

b) Vì biểu thức phân B có tử bằng 2 là một số nguyên dương không đổi nên $B = \frac{2}{6-x}$ sẽ có giá trị lớn nhất khi $6 - x > 0$ và $6 - x$ phải là số nguyên dương nhỏ nhất.

Biết số nguyên dương nhỏ nhất bằng 1, nên có $6 - x = 1$, suy ra $x = 5$.

Vậy khi $x = 5$ thì biểu thức $B = \frac{2}{6-x}$ có giá trị lớn nhất bằng 2.

● Khai thác bài toán

Ta thấy:

- Trong cách giải đối với câu a, dựa vào cách viết về phép trừ hai phân số cùng mẫu để biến đổi biểu thức phân đã cho thành một số nguyên và một biểu thức phân khác đơn giản hơn.

Đến đây ta được một hiệu, hiệu này có giá trị nhỏ nhất khi số trừ có giá trị lớn nhất, dẫn đến phải lập luận phân số $\frac{5}{x}$ là số nguyên dương lớn nhất với giá trị nguyên dương nào của x . Tiếp tục những suy luận có lí ta sẽ đi tới kết quả bài toán.

- Trong cách làm đối với câu b, do tử là một số dương, nên cần những suy luận có lí đối với mẫu để biểu thức B có giá trị lớn nhất.

Chú ý rằng, cả hai câu a và b đều phải lập luận với giá trị nào của x để $\frac{5}{x}$ và $\frac{2}{6-x}$ có giá trị lớn nhất. Cả hai lập luận đều đi đến mẫu của hai biểu thức phân này phải bằng 1.

Đây là loại bài toán đòi hỏi dùng một dãy các suy luận có lí lẽ chặt chẽ để đi tới lời giải. Bạn đọc cần làm quen với loại toán này để phát triển tư duy toán học.

Bài 6. Các biểu thức sau có bằng nhau không:

- a) $(x + 1)^2$ và $x^2 + 1$; c) $(x - 1)^2$ và $(1 - x)^2$;
b) $(x - 1)^3$ và $(1 - x)^3$; d) $(x - y)^2$ và $(y - x)^2$.

● **Tim hiểu đề bài**

Mỗi câu của đề bài gồm hai biểu thức, phải xét xem hai biểu thức đó có bằng nhau hay không?

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Cách thức chung để giải bài toán trên là biến đổi biểu thức này về biểu thức kia dựa vào định nghĩa về lũy thừa, quy tắc đổi dấu các thừa số của một tích để có kết luận rằng, hai biểu thức này có bằng nhau hay không. Nếu không biến đổi được có thể cho biến một giá trị số nào đó, rồi tính giá trị mỗi biểu thức, từ đó có kết luận, cần chú ý rằng với cách làm này chỉ có thể kết luận được cho hai biểu thức không bằng nhau.

Với câu a và câu b hãy cho x một giá trị số rồi tính giá trị mỗi

biểu thức. Các câu c, d có thể biến đổi được.

● Cách giải

a) Hai biểu thức đã cho không bằng nhau. Chẳng hạn với $x = 2$ thì $(x + 1)^2 = (2 + 1)^2 = 9$, còn $x^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$. Rõ ràng $9 \neq 5$ nên $(x + 1)^2 \neq x^2 + 1$.

b) Hai biểu thức đã cho không bằng nhau. Chẳng hạn với $x = 3$ thì $(x - 1)^3 = (3 - 1)^3 = 8$, còn $(1 - x)^3 = (1 - 3)^3 = (-2)^3 = -8$. Rõ ràng $8 \neq -8$ nên $(x - 1)^3 \neq (1 - x)^3$.

c) Hai biểu thức đã cho bằng nhau, vì:

$$\begin{aligned}(x - 1)^2 &= (x - 1)(x - 1) \text{ (theo định nghĩa lũy thừa)} \\ &= (1 - x)(1 - x) \text{ (quy tắc đổi dấu hai thừa số của tích)} \\ &= (1 - x)^2 \text{ (theo định nghĩa lũy thừa)}.\end{aligned}$$

d) Hai biểu thức đã cho bằng nhau, vì:

$$\begin{aligned}(x - y)^2 &= (x - y)(x - y) \text{ (theo định nghĩa lũy thừa)} \\ &= (y - x)(y - x) \text{ (quy tắc đổi dấu hai thừa số của tích)} \\ &= (y - x)^2 \text{ (theo định nghĩa lũy thừa)}.\end{aligned}$$

● Khai thác bài toán

Ta biết rằng $2 \neq -2$, nhưng $2 = -(-2)$. Vận dụng nhận xét này, ta nhận thấy: hai biểu thức ở câu b trong bài 6 là hai biểu thức đối nhau. Thật vậy:

$$(x - 1)^3 = (x - 1)(x - 1)(x - 1)$$

Đổi dấu ba thừa số của tích ta được:

$$-(1 - x)(1 - x)(1 - x) = -(1 - x)^3$$

Do vậy, ta có: $(x - 1)^3 = -(1 - x)^3$.

Có thể nêu tổng quát như sau:

Với mọi $n \in \mathbf{N}$ thì:

$$(a - b)^{2n + 1} = -(b - a)^{2n + 1}$$

$$(a - b)^{2n} = (b - a)^{2n}, \text{ tức là:}$$

- + Lũy thừa lẻ cùng bậc của hai số đối nhau thì đối nhau.
- + Lũy thừa chẵn cùng bậc của hai số đối nhau thì bằng nhau.

CÔNG, TRỪ ĐƠN THỨC, ĐA THỨC

Bài 7

a) Cho $A = 3x - 4 - |2x - 1|$

1) Rút gọn biểu thức A

2) Với giá trị nào của x thì $A = 10$?

b) Cho $B = |3x - 3| + (x - 5)$.

1) Rút gọn biểu thức B

2) Với giá trị nào của x thì $B = 2$?

• Tìm hiểu đề bài

Câu a của đề bài là trừ hai đa thức, sau đó là tìm giá trị của x (nếu có) để $A = 10$.

Câu b của đề bài là cộng hai đa thức, sau đó là tìm giá trị của x (nếu có) để $B = 2$.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Để rút gọn biểu thức A, B đã cho phải khử được dấu giá trị tuyệt đối với lưu ý là:

$$|P| = \begin{cases} P & \text{với } P \geq 0 \\ -P & \text{với } P < 0 \end{cases}$$

Để tìm giá trị của x (nếu có) phải căn cứ vào các biểu thức A, B đã được rút gọn cùng với điều kiện của x khi khử dấu giá trị tuyệt đối.

• Cách giải

a) 1) Rút gọn biểu thức A.

- Nếu $x \geq \frac{1}{2}$ thì $2x - 1 \geq 0$ nên $|2x - 1| = 2x - 1$. Khi đó, có:

$$A = 3x - 4 - (2x - 1)$$

$$= 3x - 4 - 2x + 1 = x - 3.$$

- Nếu $x < \frac{1}{2}$ thì $2x - 1 < 0$ nên $|2x - 1| = 1 - 2x$. Khi đó, có:

$$A = 3x - 4 - (1 - 2x)$$

$$= 3x - 4 - 1 + 2x = 5x - 5$$

2) Tìm giá trị của x để $A = 10$.

Phải xét hai trường hợp sau:

$$+ \text{ Trường hợp 1: } \begin{cases} x - 3 = 10 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 13 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 13$$

$$+ \text{ Trường hợp 2: } \begin{cases} 5x - 5 = 10 \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \text{Không tồn tại } x.$$

Vậy với $x = 13$ thì $A = 10$.

b) 1) Rút gọn biểu thức B

- Nếu $x \geq 1$ thì $3x - 3 \geq 0$ nên $|3x - 3| = 3x - 3$. Khi đó, có:

$$B = 3x - 3 + (x - 5)$$

$$= 3x + x - 3 - 5 = 4x - 8$$

- Nếu $x < 1$ thì $3x - 3 < 0$ nên $|3x - 3| = 3 - 3x$. Khi đó, có:

$$B = 3 - 3x + (x - 5)$$

$$= 3 - 3x + x - 5 = -2x - 2.$$

2) Tìm giá trị của x để $B = 2$

Phải xét hai trường hợp sau:

+ Trường hợp 1:

$$\begin{cases} 4x - 8 = 2 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 10 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

+ Trường hợp 2:

$$\begin{cases} -2x - 2 = 2 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = 4 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2$$

Vậy với $x = \frac{5}{2}$; $x = -2$ thì $B = 2$.

● Khai thác bài toán

a) Để tự tin và khẳng định tính đúng đắn của đáp số một bài toán đã tìm được, nên có thói quen thử lại. Dưới đây ta thử lại đối với câu b như sau:

- Với $x = \frac{5}{2}$, ta có:

$$\begin{aligned} B &= |3x - 3| + (x - 5) \\ &= \left| 3 \cdot \frac{5}{2} - 3 \right| + \left(\frac{5}{2} - 5 \right) = \left| \frac{15-6}{2} \right| + \left(\frac{5-10}{2} \right) \\ &= \left| \frac{9}{2} \right| + \left(-\frac{5}{2} \right) = \frac{9}{2} - \frac{5}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

- Với $x = -2$, ta có:

$$\begin{aligned} B &= |3x - 3| + (x - 5) \\ &= |3 \cdot (-2) - 3| + (-2 - 5) \\ &= |-6 - 3| + (-7) = |-9| + (-7) \\ &= 9 - 7 = 2 \end{aligned}$$

b) Cần lưu ý khi trình bày việc khử dấu giá trị tuyệt đối. Chẳng hạn, với câu b, để tìm điều kiện về x , ta làm như sau:

$$|3x - 3| = \begin{cases} 3x - 3 & \text{với } 3x - 3 \geq 0 \\ -(3x - 3) & \text{với } 3x - 3 < 0 \end{cases}$$

$$\text{Với } 3x - 3 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq 3 \Rightarrow x \geq 1$$

$$\text{Với } 3x - 3 < 0 \Rightarrow 3x < 3 \Rightarrow x < 1$$

Việc tìm điều kiện của x do làm nhiều, thành quen, nên có thể

viết ngay được kết quả cần có. Nếu không, phải viết ra như đã trình bày như trên ở vở nháp, còn khi trình bày bài làm phải bắt đầu từ: nếu $x \geq 1$ (hoặc nếu $x < 1$)...

Trên đây trình bày các lưu ý về cách làm bài, trình bày lời giải để bạn đọc suy ngẫm mà thực hành tốt.

Bài 8. Tìm P biết:

a) $P + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$;

b) $(25xy^2 - 13x^2y + x^3) - P = 11xy^2 - 2x^3$;

c) $(8xyz + 20x^2yz^2 - 5xy^3) + P = 0$;

d) $P - (3x^3y^2 - 5xyz^2 + 3xyz) = 2x^3y^2 + 4xyz^2 - 2xyz$.

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài đòi hỏi phải tìm đa thức P, trong đó P là một số hạng của một tổng (câu a, câu c), hay P là số trừ (câu b), hay P là số bị trừ (câu d).

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Vận dụng mối quan hệ giữa các số hạng và tổng trong phép cộng, số bị trừ, số trừ và hiệu trong phép trừ.

● **Cách giải**

a) $P + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$

$$P = 6x^2 + 9xy - y^2 - (5x^2 - 2xy)$$

$$= 6x^2 + 9xy - y^2 - 5x^2 + 2xy = x^2 + 11xy - y^2$$

b) $(25xy^2 - 13x^2y + x^3) - P = 11xy^2 - 2x^3$

$$P = (25xy^2 - 13x^2y + x^3) - (11xy^2 - 2x^3)$$

$$= 25xy^2 - 13x^2y + x^3 - 11xy^2 + 2x^3 = 3x^3 + 14xy^2 - 13x^2y$$

c) $(8xyz + 20x^2yz^2 - 5xy^3) + P = 0$

$$P = 0 - (8xyz + 20x^2yz^2 - 5xy^3) = -8xyz - 20x^2yz^2 + 5xy^3$$

d) $P - (3x^3y^2 - 5xyz^2 + 3xyz) = 2x^3y^2 + 4xyz^2 - 2xyz$

$$\begin{aligned}
 P &= 2x^3y^2 + 4xyz^2 - 2xyz + (3x^3y^2 - 5xyz^2 + 3xyz) \\
 &= 2x^3y^2 + 4xyz^2 - 2xyz + 3x^3y^2 - 5xyz^2 + 3xyz \\
 &= 5x^3y^2 - xyz^2 + xyz.
 \end{aligned}$$

● **Khai thác bài toán**

Như đã biết hai số đối nhau hay hai biểu thức đối nhau thì có giá trị tuyệt đối bằng nhau còn dấu khác nhau.

Với câu c, tổng của hai biểu thức bằng 0, chắc chắn rằng đó là hai biểu thức đối nhau, từ đó có thể viết ra ngay $P = -8xyz - 20x^2yz^2 + 5xy^3$. Biểu thức này chính là biểu thức đã cho trong bài toán nhưng được viết với dấu ngược lại.

Đây là một nhận xét, lưu ý bạn đọc có thể làm nhầm bài toán và trong tính toán đòi hỏi phải làm nhanh.

Bài 9. Cho các đa thức:

$$f(x) = 6x^3 - 3x^2 + x - 5;$$

$$g(x) = 3x^3 - 4x^2 + 4;$$

$$h(x) = 4x^3 + 8x.$$

Tính: a) $f(x) + g(x) - h(x)$

b) $f(x) - g(x) + h(x)$

c) $g(x) + h(x) - f(x)$.

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài cho ba đa thức một biến, phải tìm tổng và hiệu của các đa thức đã cho.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Vận dụng quy tắc về phép trừ số hữu tỉ: muốn trừ đi đa thức $h(x)$ (hoặc $g(x)$), ta cộng với $-h(x)$ (hoặc $-g(x)$).

Khi cộng các đa thức đã sắp xếp, cần viết các đơn thức đồng dạng ở cùng một cột, rồi cộng các hệ số của các đơn thức với nhau.

● Cách giải

a) Tính $f(x) + g(x) - h(x)$:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & 6x^3 - 3x^2 + x - 5 \\ g(x) & = & 3x^3 - 4x^2 + 4 \\ -h(x) & = & -4x^3 - 8x \end{array}$$

$$f(x) + g(x) - h(x) = 5x^3 - 7x^2 - 7x - 1$$

b) Tính $f(x) - g(x) + h(x)$:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & 6x^3 - 3x^2 + x - 5 \\ -g(x) & = & -3x^3 + 4x^2 - 4 \\ h(x) & = & 4x^3 + 8x \end{array}$$

$$f(x) - g(x) + h(x) = 7x^3 + x^2 + 9x - 9$$

c) Tính $g(x) + h(x) - f(x)$:

$$\begin{array}{rcl} g(x) & = & 3x^3 - 4x^2 + 4 \\ h(x) & = & 4x^3 + 8x \\ -f(x) & = & -6x^3 + 3x^2 - x + 5 \end{array}$$

$$g(x) + h(x) - f(x) = x^3 - x^2 + 7x + 9$$

● Khai thác bài toán

Các đa thức đã cho trong đề bài là các đa thức đã được sắp xếp, nếu các đa thức cho chưa sắp xếp, ta cần sắp xếp theo lũy thừa tăng (hoặc giảm) rồi làm phép tính. Chẳng hạn: cho các đa thức $f(x) = x^4 + 3x^5 - x^3 + 2x^2 - 7$ và $g(x) = -x - 7 + x^4$, tính $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$ và $g(x) - f(x)$.

Trước hết ta sắp xếp đa thức theo lũy thừa giảm dần, có:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & 3x^5 + x^4 - x^3 + 2x^2 - 7 \\ g(x) & = & x^4 - x - 7 \end{array}$$

- Tính tổng $f(x) + g(x)$

$$f(x) = 3x^5 + x^4 - x^3 + 2x^2 - 7$$

$$g(x) = x^4 - x - 7$$

$$f(x) + g(x) = 3x^5 + 2x^4 - x^3 + 2x^2 - x - 14$$

- Tính hiệu $f(x) - g(x)$:

$$f(x) = 3x^5 + x^4 - x^3 + 2x^2 - 7$$

$$-g(x) = -x^4 + x + 7$$

$$f(x) - g(x) = 3x^5 - x^3 + 2x^2 + x$$

- Tính hiệu $g(x) - f(x)$:

$$g(x) = x^4 - x - 7$$

$$-f(x) = -3x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 + 7$$

$$g(x) - f(x) = -3x^5 + x^3 - 2x^2 - x$$

Chú ý: Khi phải tính hiệu của $g(x)$ và $f(x)$ thì ta đã tính tổng của $g(x)$ với đa thức đối của đa thức $f(x)$ chính là $-f(x)$.

Bài 10. Thu gọn các đa thức sau rồi tìm nghiệm của chúng:

a) $(9x + 1) - (4x + 2)$; b) $(2x^2 - 5x + 1) - (x^2 + 3x + 1)$

c) $(3x^2 - 2x + 1) - (3x^2 - 2x + 5)$; d) $x(x + 4) - (x^2 + 4x)$;

e) $x^2 + 2x + 2$; f) $x^2 + x + 1$

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài yêu cầu thu gọn các đa thức đã cho, sau đó tìm nghiệm của đa thức sau khi đã thu gọn.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Thu gọn các đa thức bằng cách thực hiện phép cộng các đơn thức đồng dạng. Riêng đối với các câu e, f phải biến đổi để làm xuất hiện các số hạng đồng dạng.

Để tìm nghiệm của đa thức cần giải phương trình $f(x) = 0$,

nếu tồn tại giá trị của x thì giá trị này là nghiệm của đa thức.

Với câu a, cần bỏ ngoặc, thu gọn đa thức, sau đó xét $f(x) = 0$.

Với câu b, làm tương tự câu a.

Với câu c, bỏ ngoặc, thu gọn, sẽ được một hằng số không thể bằng 0 nên không có nghiệm.

Với câu d, bỏ ngoặc, thu gọn, sẽ được số 0, hãy xét nghiệm.

Với các câu e, f cần biến đổi để làm xuất hiện các số hạng đồng dạng, rồi xem xét nghiệm.

• Cách giải

$$\text{a) } (9x + 1) - (4x + 2) = 9x + 1 - 4x - 2 = 5x - 1.$$

$$\text{Xét } 5x - 1 = 0 \Leftrightarrow 5x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}.$$

Nghiệm của đa thức là $x = \frac{1}{5}$.

$$\text{b) } (2x^2 - 5x + 1) - (x^2 + 3x + 1)$$

$$= 2x^2 - 5x + 1 - x^2 - 3x - 1 = x^2 - 8x.$$

$$\text{Xét } x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(x - 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 8 \end{cases}$$

Nghiệm của đa thức là $x = 0$; $x = 8$.

$$\text{c) } (3x^2 - 2x + 1) - (3x^2 - 2x + 5)$$

$$= 3x^2 - 2x + 1 - 3x^2 + 2x - 5 = -4, \text{ không thể bằng } 0.$$

Đa thức này không có nghiệm.

d) $x(x + 4) - (x^2 + 4x) = x^2 + 4x - x^2 - 4x = 0$. Đa thức này có vô số nghiệm.

$$\text{e) } x^2 + 2x + 2 = x^2 + x + x + 1 + 1$$

$$= (x^2 + x) + (x + 1) + 1$$

$$= x(x + 1) + (x + 1) + 1$$

$$= (x + 1)(x + 1) + 1 = (x + 1)^2 + 1$$

Vì $(x + 1)^2 \geq 0$ nên $(x + 1)^2 + 1 > 0$. Vậy đa thức $x^2 + 2x + 2$

không có nghiệm.

$$\begin{aligned} f) \quad x^2 + x + 1 &= x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \\ &= (x^2 + \frac{1}{2}x) + (\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}) + \frac{3}{4} \\ &= x(x + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}) + \frac{3}{4} \\ &= (x + \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2}) + \frac{3}{4} = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Vì $(x + \frac{1}{2})^2 \geq 0$ nên $(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$.

Vậy đa thức $x^2 + x + 1$ không có nghiệm.

● Khai thác bài toán

Qua cách giải bài toán trên, ta thấy:

- Đa thức ở câu c bằng -4 , đó là "đa thức bậc 0" ($-4 = -4x^0$).

Đa thức bậc 0 thì không có nghiệm.

- Đa thức ở câu d bằng 0, đa thức này được gọi là "đa thức 0" (đa thức này không có bậc). Đa thức 0 thì có vô số nghiệm.

Thật vậy, nếu:

$$x = 1, \text{ ta có } 1(1 + 4) - (1^2 + 4 \cdot 1) = 5 - 5 = 0$$

$$x = 2, \text{ ta có } 2(2 + 4) - (2^2 + 4 \cdot 2) = 12 - 12 = 0, \dots$$

Rõ ràng đa thức luôn bằng 0 với mọi giá trị của x

- Các đa thức ở hai câu e, f được thu gọn có dạng là tổng của một bình phương và một số. Biết bình phương của một số là luôn lớn hơn hay bằng 0, khi cộng thêm một số vào, thì nó luôn lớn hơn 0, tức không bằng 0, nên không thể có nghiệm được.

Ở câu e, f, đa thức đã cho gồm ba đơn thức. Ta đã tách $2x$ và 2 cũng như x và 1 để biến đổi đa thức đã cho thành 5 đơn thức. Bằng cách kết hợp các số hạng ta đã làm xuất hiện các thừa số

chung từ đó theo định nghĩa lũy thừa, đã biến đổi mỗi đa thức về dạng tổng của một bình phương và một số. Đây là một thủ thuật trong biến đổi đồng nhất một biểu thức rất hay dùng, tuy khó nhưng làm nhiều lần sẽ thành quen.

Bài 11. Tìm nghiệm của các đa thức sau:

a) $3x - 2$;

b) $8 - 3x$;

c) $x^2 - 4$;

d) $x^2 + 1$;

e) $x^2 - 2x$;

f) $x^3 - x^2 + x - 1$.

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài yêu cầu tìm xem trong các đa thức đã cho đa thức nào có nghiệm, đa thức nào không có nghiệm. Nếu có nghiệm thì nghiệm đó bằng bao nhiêu?

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Cần xét xem mỗi đa thức đã cho có bằng 0 hay không? Chỉ có đa thức nào bằng 0 mới có thể tìm nghiệm được.

● **Cách giải**

a) $3x - 2 = 0$ từ đó $x = \frac{2}{3}$.

Đa thức $3x - 2$ có nghiệm $x = \frac{2}{3}$.

b) $8 - 3x = 0$ từ đó $x = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$.

Đa thức $8 - 3x$ có nghiệm $x = 2\frac{2}{3}$.

c) $x^2 - 4 = 0$ từ đó $x = \pm 2$

Đa thức $x^2 - 4$ có nghiệm $x = 2$; $x = -2$.

d) Vì $x^2 \geq 0$ nên $x^2 + 1 > 0$.

Đa thức $x^2 + 1$ không có nghiệm.

$$e) x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Đa thức $x^2 - 2x$ có nghiệm $x = 0$; $x = 2$.

f) $x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 1) + (x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 1) = 0$. Trường hợp $x - 1 = 0$ cho $x = 1$. Trường hợp $x^2 + 1 = 0$ không xảy ra.

Đa thức $x^3 - x^2 + x - 1$ có nghiệm $x = 1$.

● Khai thác bài toán

Qua cách giải bài toán trên, nhận thấy:

- Đa thức $x^2 - 4$ và đa thức $x^2 - 2x$ là hai đa thức có nghiệm.
- Đa thức $x^2 + 1$ là đa thức không có nghiệm.

Như vậy, một đa thức gồm 2 đơn thức, trong đó đơn thức thứ nhất là một bình phương, nếu đơn thức thứ hai mang dấu trừ thì chắc chắn đa thức gồm 2 đơn thức đó sẽ có nghiệm; còn nếu đơn thức thứ hai mang dấu cộng thì đa thức gồm 2 đơn thức này sẽ vô nghiệm. Bạn đọc hãy tự thử lại.

NHÂN ĐA THỨC

Bài 12. Chứng minh rằng biểu thức sau không phụ thuộc vào biến y :

a) $A = (3y - 5)(2y + 11) - (2y + 3)(3y + 7)$;

b) $B = (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2) + 8y^3$.

● Tìm hiểu đề bài

Đề bài câu a đã cho hiệu của hai tích các đa thức với biến y , phải chứng minh rằng biểu thức A không phụ thuộc y .

Đề bài câu b đã cho tích của hai đa thức cộng với một đơn thức, phải chứng minh rằng biểu thức B không phụ thuộc y .

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, thực hiện các phép nhân đa thức, sau đó bỏ dấu

ngoặc trước có dấu trừ, rồi ước lược các đơn thức đồng dạng. Với câu b, làm tương tự câu a.

● **Cách giải**

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= (3y - 5)(2y + 11) - (2y + 3)(3y + 7) \\ &= 6y^2 + 33y - 10y - 55 - (6y^2 + 14y + 9y + 21) \\ &= 6y^2 + 33y - 10y - 55 - 6y^2 - 14y - 9y - 21 = -76. \end{aligned}$$

Vậy biểu thức A không phụ thuộc vào biến y.

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2) + 8y^3 \\ &= x^3 + 2x^2y + 4xy^2 - 2x^2y - 4xy^2 - 8y^3 + 8y^3 \\ &= x^3 \end{aligned}$$

Vậy biểu thức B không phụ thuộc vào biến y.

● **Khai thác bài toán**

Ta nhận thấy:

- Ở câu a, kết quả biến đổi biểu thức A là một hằng số, vậy biểu thức A luôn có giá trị là -76, giá trị này chứng tỏ rằng A không phụ thuộc vào y.

- Còn ở câu b, kết quả biến đổi biểu thức B là một đơn thức x^3 , vậy biểu thức B luôn có giá trị là x^3 , giá trị này chứng tỏ rằng B không phụ thuộc vào y, nhưng B có phụ thuộc vào giá trị của x.

Bạn đọc hãy xem xét kết quả của biểu thức:

$$C = 3x(2x - 5y) - (3x - 1)2x - x(2 - 15y) - 2$$

để rút ra kết luận về giá trị của C và các biến x, y.

Bài 13. Sắp xếp đa thức theo một biến chính rồi làm phép nhân:

- $(xy^2 + x^2y + x^3 + y^3)(x - y);$
- $(x^3 - y^3 - 2xy^2)(y^3 - 2x^2y + x^3);$
- $(x - y)(y^4 + x^2y^2 + xy^3 + x^3y + x^4);$
- $(16 + 4x^2 - 2x^3 - 8x + x^4)(x + 2).$

● **Tim hiểu đề bài**

Đề bài đòi hỏi phải sắp xếp các đa thức đã cho cùng theo lũy thừa tăng hoặc giảm của một biến nào đó, rồi thực hiện phép nhân đa thức với đa thức.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, ở đa thức thứ hai, biến x có bậc một, bậc không, tức biến x được xếp theo thứ tự giảm dần, do đó đa thức thứ nhất cũng cần được sắp xếp theo lũy thừa giảm dần đối với biến x , ta có: $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$.

Sau đó viết đa thức thứ hai dưới đa thức thứ nhất, rồi thực hiện phép nhân.

Với các câu b, c, d làm tương tự câu a.

● **Cách giải**

a) Sắp xếp đa thức theo lũy thừa giảm dần đối với biến x , ta có:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 \\
 x \qquad \qquad x - y
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 \\
 + \quad - x^3y - x^2y^2 - xy^3 - y^4
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 x^4 \qquad \qquad \qquad - y^4
 \end{array}
 \end{array}$$

b) Sắp xếp đa thức theo lũy thừa giảm dần đối với biến x , ta có:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 x^3 \qquad \qquad - 2xy^2 - y^3 \\
 x \quad x^3 - 2x^2y \qquad \qquad + y^3
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 x^6 \qquad \qquad - 2x^4y^2 - x^3y^3 \\
 + \quad - 2x^5y \qquad \qquad + 4x^3y^3 + 2x^2y^4 \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad x^3y^3 \qquad \qquad - 2xy^5 - y^6
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 x^6 - 2x^5y - 2x^4y^2 + 4x^3y^3 + 2x^2y^4 - 2xy^5 - y^6
 \end{array}
 \end{array}$$

c) Sắp xếp đa thức theo lũy thừa giảm dần đối với biến x, ta có:

$$\begin{array}{r} x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 \\ \quad \quad \quad x \quad \quad \quad x - y \\ \hline x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 \\ + \quad \quad - x^4y - x^3y^2 - x^2y^3 - xy^4 - y^5 \\ \hline x^5 \quad \quad \quad \quad \quad \quad - y^5 \end{array}$$

d) Sắp xếp đa thức theo lũy thừa giảm dần đối với biến x, ta có:

$$\begin{array}{r} x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16 \\ \quad \quad \quad x \quad \quad \quad x + 2 \\ \hline x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 16x \\ + \quad \quad \quad 2x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 32 \\ \hline x^5 \quad \quad \quad \quad \quad \quad + 32 \end{array}$$

● Khai thác bài toán

- Bốn câu a, b, c, d của bài toán trên ta đã quan tâm đến biến chính là x, thử làm câu b khi coi y là biến chính để xem kết quả thế nào.

$$\begin{array}{r} \quad \quad \quad -y^3 - 2xy^2 \quad \quad \quad + x^3 \\ \quad \quad \quad x \quad y^3 \quad \quad \quad - 2x^2y + x^3 \\ \hline -y^6 - 2xy^5 \quad \quad \quad + x^3y^3 \\ + \quad \quad \quad 2x^2y^4 + 4x^3y^3 \quad \quad \quad - 2x^5y \\ \quad \quad \quad \quad \quad - x^3y^3 - 2x^4y^2 \quad \quad \quad + x^6 \\ \hline -y^6 - 2xy^5 + 2x^2y^4 + 4x^3y^3 - 2x^4y^2 - 2x^5y + x^6 \end{array}$$

Kết quả này và kết quả trong cách giải đều có các đơn thức như nhau, nhưng thứ tự của chúng khác nhau. Cụ thể là:

+ Khi chọn biến chính là x thì ở kết quả, các đơn thức có bậc đối với biến x từ 6 xuống 0, còn đối với biến y có bậc từ 0 đến 6.

+ Khi chọn biến chính là y , thì ở kết quả, các đơn thức có bậc đối với biến y từ 6 xuống 0, còn đối với biến x có bậc từ 0 đến 6.

Vậy việc chọn biến nào là biến chính không ảnh hưởng gì tới kết quả của bài toán.

- Trong lời giải các câu trên ta đều sắp xếp đa thức bị nhân và đa thức nhân theo cùng một biến chính. Vấn đề đặt ra là sắp xếp mỗi đa thức theo một lũy thừa của biến chính, có gì xảy ra?

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 x^3 \quad - 2xy^2 \quad - y^3 \\
 x \quad y^3 \quad - 2x^2y \quad \quad \quad + x^3 \\
 \hline
 \end{array} \\
 + \begin{array}{r}
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x^3y^3 \quad \quad - 2xy^5 \quad - y^6 \\
 \quad - 2x^5y \quad \quad \quad + 4x^3y^3 + 2x^2y^4 \\
 x^6 \quad \quad - 2x^4y^2 \quad - x^3y^3 \\
 \hline
 \end{array} \\
 \hline
 x^6 - 2x^5y - 2x^4y^2 + 4x^3y^3 + 2x^2y^4 - 2xy^5 - y^6
 \end{array}$$

Kết quả này với kết quả ở câu b trong lời giải giống hệt nhau.

- Một điều cần hết sức lưu ý khi làm phép nhân hai đa thức là phải viết các đơn thức đồng dạng của các tích riêng theo cùng một cột. Nếu tích riêng nào khuyết bậc trung gian thì để trống một khoảng ứng với bậc khuyết ấy, nhờ vậy việc tính toán sẽ nhanh chóng hơn.

Bài 14. Chứng minh đẳng thức sau đúng với mọi giá trị của a , b , c :

a) $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc;$

b) $(a - b - c)(a^2 - b^2 - c^2 + ab + bc + ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 2a(b^2 + c^2) - abc.$

- **Tim hiểu đề bài**

Đề bài yêu cầu chứng minh rằng, với mọi giá trị của a, b, c hai đẳng thức đã cho là đúng.

- **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Cần biến đổi về trái, thực chất là thực hiện phép nhân hai đa thức, nếu tích tìm được đúng bằng đa thức ở vế phải, thì đẳng thức được chứng minh.

- **Cách giải**

a) Thực hiện phép nhân hai đa thức ở vế trái:

$$\begin{array}{r}
 a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \\
 \times \qquad \qquad a + b + c \\
 \hline
 a^3 + ab^2 + ac^2 - a^2b - abc - a^2c \\
 + \quad - ab^2 \qquad + a^2b - abc \qquad + bc^2 + b^3 - b^2c \\
 \qquad \qquad - ac^2 \qquad - abc + a^2c - bc^2 \qquad + b^2c + c^3 \\
 \hline
 a^3 \qquad \qquad - 3abc \qquad \qquad + b^3 \qquad + c^3
 \end{array}$$

Vế trái là đa thức $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$, đúng bằng vế phải, vậy đẳng thức được chứng minh.

b) Thực hiện phép nhân hai đa thức ở vế trái:

$$\begin{array}{r}
 a^2 - b^2 - c^2 + ab + bc + ca \\
 \times \qquad \qquad a - b - c \\
 \hline
 a^3 + a^2b - ab^2 - ac^2 + abc + ca^2 \\
 + \quad - a^2b - ab^2 \qquad - abc \qquad + b^3 + bc^2 - b^2c \\
 \qquad \qquad - ac^2 - abc - ca^2 \qquad - bc^2 + b^2c + c^3 \\
 \hline
 a^3 \qquad - 2ab^2 - 2ac^2 - abc \qquad + b^3 \qquad + c^3
 \end{array}$$

Có thể viết gọn tích trên như sau:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 2a(b^2 + c^2) - abc.$$

Vế trái bằng vế phải, đẳng thức được chứng minh.

● Khai thác bài toán

Theo trên, để chứng minh một đẳng thức, ta đã biến đổi (tức là thực hiện các phép tính) ở vế trái để được một biểu thức bằng biểu thức ở vế phải.

Trong một số trường hợp, để chứng minh một đẳng thức, ta phải biến đổi cả hai vế sao cho chúng cùng bằng một biểu thức thứ ba, đó cũng là một cách chứng minh đẳng thức.

Chẳng hạn, hãy chứng minh đẳng thức sau:

$$(3a + 2b - 1)(a + 5) - (a - 2) \cdot 2b = (3a + 5)(a + 3) + 2(7b - 10).$$

Ta có thể làm như sau:

- Biến đổi vế trái:

$$\begin{aligned}(3a + 2b - 1)(a + 5) - (a - 2) \cdot 2b &= 3a^2 + 15a + 2ab + 10b - a - 5 - (2ab - 4b) \\ &= 3a^2 + 15a + 2ab + 10b - a - 5 - 2ab + 4b \\ &= 3a^2 + 14a + 14b - 5\end{aligned}$$

- Biến đổi vế phải:

$$\begin{aligned}(3a + 5)(a + 3) + 2(7b - 10) &= 3a^2 + 9a + 5a + 15 + 14b - 20 \\ &= 3a^2 + 14a + 14b - 5\end{aligned}$$

Vế trái và vế phải cùng bằng biểu thức $3a^2 + 14a + 14b - 5$.
Vậy đẳng thức được chứng minh.

Chú ý. Cũng có thể lấy biểu thức ở vế trái trừ đi biểu thức ở vế phải, nếu kết quả bằng 0 thì chúng tỏ đẳng thức đã cho là đúng. Vậy đẳng thức được chứng minh. Bạn đọc hãy tự làm.

Bài 15

a) Cho ba số tự nhiên liên tiếp. Biết rằng tích của số thứ hai và số thứ ba hơn tích của số thứ nhất và số thứ hai là 100. Tìm ba số tự nhiên ấy.

b) Cho bốn số tự nhiên liên tiếp. Biết rằng tích của hai số đầu nhỏ hơn tích của hai số sau là 46. Tìm bốn số tự nhiên ấy.

• Tìm hiểu đề bài

Đề bài câu a cho 3 số tự nhiên liên tiếp, biết tích của số thứ hai và số thứ ba hơn tích của số thứ nhất và số thứ hai là 100, phải tìm 3 số đó.

Câu b lại cho bốn số tự nhiên liên tiếp, biết tích của hai số đầu (tức số thứ nhất và số thứ hai) nhỏ hơn tích của hai số sau (tức là số thứ ba và số thứ tư) là 46. Tìm 4 số đó.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Ta biết rằng, hai số tự nhiên liên tiếp hơn kém nhau 1 đơn vị, do đó nếu gọi số tự nhiên thứ nhất là a ($a \neq 0$) thì số tự nhiên thứ hai, thứ ba, thứ tư lần lượt là $a + 1$, $a + 2$, $a + 3$.

Với câu a, tích của số thứ hai và số thứ ba là $(a + 1)(a + 2)$; tích của số thứ nhất và số thứ hai là $a(a + 1)$. Dựa vào đề bài ta được một đẳng thức đúng. Từ đó tìm ra kết quả bài toán.

Với câu b, tích của hai số đầu là $a(a + 1)$, tích của hai số sau là $(a + 2)(a + 3)$. Cũng dựa vào đề bài ta được một đẳng thức đúng. Từ đó tìm ra kết quả bài toán.

• Cách giải

a) Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là a , $a + 1$, $a + 2$ (với $a \neq 0$) thì tích của số thứ hai và số thứ ba là $(a + 1)(a + 2)$, tích của số thứ nhất và số thứ hai là $a(a + 1)$. Theo đề bài ta có đẳng thức sau:

$$(a + 1)(a + 2) - a(a + 1) = 100$$

Thực hiện phép nhân đa thức ở vế trái, ta có:

$$a^2 + 2a + a + 2 - a^2 - a = 100;$$

$$2a + 2 = 100; 2a = 100 - 2 = 98; a = 98 : 2 = 49.$$

Vậy ba số tự nhiên liên tiếp phải tìm là 49; 50; 51.

b) Gọi bốn số tự nhiên liên tiếp là $a, a + 1, a + 2, a + 3$ (với $a \neq 0$), thì tích của hai số đầu là $a(a + 1)$, tích của hai số sau là $(a + 2)(a + 3)$. Theo đề bài ta có đẳng thức sau:

$$(a + 2)(a + 3) - a(a + 1) = 46$$

Thực hiện phép nhân đa thức ở vế trái, ta có:

$$a^2 + 3a + 2a + 6 - a^2 - a = 46;$$

$$4a + 6 = 46; 4a = 40; a = 10.$$

Vậy bốn số tự nhiên liên tiếp phải tìm là 10; 11; 12; 13.

● Khai thác bài toán

- Làm loại bài toán này, bạn đọc nên thử lại để kiểm tra kết quả theo như đề bài đã ra.

Với câu a, ta có:

$$50. 51 - 49. 50 = 2550 - 2450 = 100$$

Với câu b, ta có:

$$12. 13 - 10. 11 = 156 - 110 = 46$$

Bạn đọc nên có thói quen thử lại kết quả mọi bài toán đã giải để khẳng định và tin tưởng vào bài làm của bản thân.

- Vẫn là đề bài tìm 4 số tự nhiên liên tiếp được cho như sau:

Cho bốn số tự nhiên liên tiếp. Biết rằng tích của số thứ hai và thứ tư hơn tích của số thứ nhất và thứ ba là 9. Tìm 4 số tự nhiên ấy.

Tương tự như cách giải trên, ta có:

$$(n + 1)(n + 3) - n(n + 2) = 9 \text{ hay}$$

$$n^2 + 3n + n + 3 - n^2 - 2n = 9;$$

$$2n + 3 = 9; n = 3.$$

Bốn số tự nhiên liên tiếp phải tìm là 3; 4; 5; 6.

Thử lại: $4 \cdot 6 - 3 \cdot 5 = 24 - 15 = 9$.

HÀNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ

Bài 16. Tìm x biết

a) $3(x + 2)^2 + (2x - 1)^2 - 7(x + 3)(x - 3) = 172$;

b) $(x - 1)(x^2 + x + 1) - x(x - 2)(x + 2) = 14$;

c) $(x - 1)^3 - (x + 3)(x^2 - 3x + 9) + 3(x^2 - 4) = 23$;

d) $(x + 1)^3 - (x + 2)(x^2 - 2x + 4) - 3(x^2 - 1) = 8$.

• Tìm hiểu đề bài

Đề bài đòi hỏi phải tìm được giá trị của x trong các đẳng thức đã cho.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, cần thực hiện các phép tính trong dấu ngoặc trước bằng cách sử dụng các hằng đẳng thức: bình phương của một tổng hai số $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, bình phương của một hiệu hai số $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$, tích của tổng hai số với hiệu hai số ấy $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$. Cần chú ý đến quy tắc bỏ ngoặc đẳng trước có dấu trừ.

Với câu b, sử dụng các hằng đẳng thức: hiệu của hai lập phương $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$, tích của tổng hai số với hiệu hai số ấy $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$. Cần chú ý đến quy tắc bỏ dấu ngoặc đẳng trước có dấu trừ.

Với câu c, sử dụng các hằng đẳng thức: lập phương của một hiệu $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$, tổng hai lập phương $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$. Cũng cần chú ý đến quy tắc bỏ dấu ngoặc đẳng trước có dấu trừ.

Với câu d, sử dụng các hằng đẳng thức: lập phương của một tổng $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$, tổng của hai lập

phương $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$. Cần chú ý đến quy tắc bỏ dấu ngoặc đằng trước có dấu trừ.

● Cách giải

a) $3(x + 2)^2 + (2x - 1)^2 - 7(x + 3)(x - 3) = 172$

$$3(x^2 + 4x + 4) + (4x^2 - 4x + 1) - 7(x^2 - 9) = 172$$

$$3x^2 + 12x + 12 + 4x^2 - 4x + 1 - 7x^2 + 63 = 172$$

hay $8x + 76 = 172$ từ đó $x = 12$.

b) $(x - 1)(x^2 + x + 1) - x(x - 2)(x + 2) = 14$

$$x^3 - 1 - x(x^2 - 4) = 14; \quad x^3 - 1 - (x^3 - 4x) = 14$$

$$x^3 - 1 - x^3 + 4x = 14; \quad \text{hay } 4x - 1 = 14.$$

Từ đó $x = 3\frac{3}{4}$.

c) $(x - 1)^3 - (x + 3)(x^2 - 3x + 9) + 3(x^2 - 4) = 23$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - (x^3 + 27) + (3x^2 - 12) = 23$$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^3 - 27 + 3x^2 - 12 = 23$$

hay $3x - 40 = 23$. Từ đó $x = 21$

d) $(x + 1)^3 - (x + 2)(x^2 - 2x + 4) - 3(x^2 - 1) = 8$

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - (x^3 + 8) - (3x^2 - 3) = 8$$

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 - 8 - 3x^2 + 3 = 8$$

hay $3x - 4 = 8$. Từ đó $x = 4$.

● Khai thác bài toán

- Trong bài 16, ta đã vận dụng cả 7 hằng đẳng thức đã học, đó là:

1) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

2) $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

3) $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$

4) $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

5) $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$

$$6) A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

$$7) A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2).$$

Đối với bạn đọc có trình độ PTCS, đòi hỏi phải thuộc lòng và vận dụng thành thạo 7 hằng đẳng thức trên theo cả hai chiều, từ trái sang phải và từ phải sang trái. Chẳng hạn, cho các biểu thức ở vế trái, yêu cầu viết tiếp vào vế phải:

$$\begin{aligned} \text{a) } (2xy)^3 + (3x^2y^2)^3 &= (2xy + 3x^2y^2)[(2xy)^2 - 2xy \cdot 3x^2y^2 + (3x^2y^2)^2] \\ &= (2xy + 3x^2y^2)(4x^2y^2 - 6x^3y^3 + 9x^4y^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 125x^3y^3 + 225x^2y^3 + 135xy^3 + 27y^3 \\ &= (5xy)^3 + 3 \cdot (5xy)^2 \cdot 3y + 3 \cdot 5xy(3y)^2 + (3y)^3 \\ &= (5xy + 3y)^3. \end{aligned}$$

Trên đây chỉ đưa ra hai ví dụ cụ thể để chứng tỏ một điều rằng: cần phải sử dụng 7 hằng đẳng thức kể trên theo cả "hai chiều" một cách thành thạo.

- Sau khi tìm được giá trị của x , cần thử lại. Chẳng hạn với câu b, ta thử lại như sau:

Với $x = 3\frac{3}{4} = \frac{15}{4}$, ta thay vào vế trái của đẳng thức:

$$\begin{aligned} (x - 1)(x^2 + x + 1) - x(x - 2)(x + 2) \\ &= \left(\frac{15}{4} - 1\right)\left(\frac{15^2}{4^2} + \frac{15}{4} + 1\right) - \frac{15}{4}\left(\frac{15}{4} - 2\right)\left(\frac{15}{4} + 2\right) \\ &= \left(\frac{15^3}{4^3} - 1\right) \cdot \frac{15}{4}\left(\frac{15^2}{4^2} - 4\right) = \frac{15^3}{4^3} - 1 \cdot \frac{15^3}{4^3} + 15 = 14. \end{aligned}$$

Ta được kết quả ở vế phải, chứng tỏ giá trị $x = 3\frac{3}{4}$ là đúng.

Bài 17. Giá trị của các biểu thức sau có phụ thuộc vào biến x không?

$$\text{a) } (x - 1)^3 - (x + 2)(x^2 - 2x + 4) + 3(x + 4)(x - 4) - 3(x - 20);$$

$$\text{b) } 4x(7x^2 - 1) - (3x - 1)(9x^2 + 3x + 1) - x(x - 2)(x + 2);$$

$$\text{c) } (x + 3)^3 - (x - 3)^3.$$

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài đòi hỏi xét xem trong các biểu thức đã cho, biểu thức nào phụ thuộc biến x , biểu thức nào không phụ thuộc biến x .

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, sử dụng các hằng đẳng thức: lập phương của một hiệu $(A - B)^3$, tổng của hai lập phương $A^3 + B^3$, tích của tổng hai số và hiệu của hai số ấy $(A + B)(A - B)$ và sau cùng là nhân đơn thức với đa thức. Chú ý đến dấu đối với phép trừ. Từ đó có kết quả.

Với câu b, thực hiện phép nhân đơn thức với đa thức, sau đó áp dụng các hằng đẳng thức: hiệu của hai lập phương $A^3 - B^3$, tích của hiệu 2 số và tổng của hai số ấy $(A - B)(A + B)$, sau đó là phép nhân đơn thức với đa thức. Cần chú ý đến dấu đối với phép trừ. Từ đó có kết quả.

Với câu c, vận dụng hằng đẳng thức hiệu hai lập phương $A^3 - B^3$. Từ đó có kết quả.

● **Cách giải**

$$\begin{aligned} \text{a) } & (x - 1)^3 - (x + 2)(x^2 - 2x + 4) + 3(x + 4)(x - 4) - 3(x - 20) \\ & = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - (x^3 + 8) + 3(x^2 - 16) - (3x - 60) \\ & = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^3 - 8 + 3x^2 - 48 - 3x + 60 = 3. \end{aligned}$$

Biểu thức có giá trị bằng 3, như vậy biểu thức đã cho không phụ thuộc vào biến x .

$$\begin{aligned} \text{b) } & 4x(7x^2 - 1) - (3x - 1)(9x^2 + 3x + 1) - x(x - 2)(x + 2) \\ & = 28x^3 - 4x - (27x^3 - 1) - x(x^2 - 4) \\ & = 28x^3 - 4x - 27x^3 + 1 - x^3 + 4x = 1 \end{aligned}$$

Biểu thức có giá trị bằng 1, như vậy biểu thức đã cho không phụ thuộc vào biến x .

$$\begin{aligned} \text{c) } & (x + 3)^3 - (x - 3)^3 \\ & = (x + 3 - x + 3)[(x + 3)^2 + (x + 3)(x - 3) + (x - 3)^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 6(x^2 + 6x + 9 + x^2 - 9 + x^2 - 6x + 9) \\
&= 6(3x^2 + 9) = 18x^2 + 54
\end{aligned}$$

Giá trị của biểu thức đã cho phụ thuộc vào biến x .

● Khai thác bài toán

- Câu c bài 16 có thể sử dụng các hằng đẳng thức: lập phương của một tổng, lập phương của một hiệu như sau:

$$\begin{aligned}
&(x + 3)^3 - (x - 3)^3 \\
&= x^3 + 3x^2 \cdot 3 + 3x \cdot 3^2 + 3^3 - (x^3 - 3x^2 \cdot 3 + 3x \cdot 3^2 - 3^3) \\
&= x^3 + 9x^2 + 81x + 27 - (x^3 - 9x^2 + 81x - 27) \\
&= x^3 + 9x^2 + 81x + 27 - x^3 + 9x^2 - 81x + 27 = 18x^2 + 54.
\end{aligned}$$

- Với bài toán loại này có thể thử lại được không?

Hoàn toàn được, bằng cách:

+ Có thể sử dụng các hằng đẳng thức khác mà vẫn có kết quả như đã làm là được.

+ Hoặc làm lại một lần nữa, mà vẫn có kết quả như đã làm là được.

Bài 18. Tìm giá trị của x và y biết rằng:

a) $x^3 + y^3 = 72$, $x^2 - xy + y^2 = 12$ và $x - y = 2$;

b) $x^3 - y^3 = 98$, $x^2 + xy + y^2 = 49$ và $x + y = 8$.

● Tìm hiểu đề bài

Đề bài câu a cho $x^3 + y^3 = 72$, $x^2 - xy + y^2 = 12$ và $x - y = 2$, đòi hỏi tìm giá trị của x và y .

Đề bài câu b cho $x^3 - y^3 = 98$, $x^2 + xy + y^2 = 49$ và $x + y = 8$, đòi hỏi tìm giá trị của x và y .

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, hãy sử dụng hằng đẳng thức $A^3 + B^3$ rồi thay giá trị đã biết của các biểu thức, từ đó tính được giá trị của $A + B$, kết

hợp với hiệu $x - y = 2$ đã cho sẽ có kết quả.

Với câu b, hãy sử dụng hằng đẳng thức $A^3 - B^3$ rồi thay giá trị đã biết của các biểu thức, từ đó tính được giá trị của $A - B$, kết hợp với tổng $x + y = 8$ đã cho sẽ có kết quả.

● **Cách giải**

a) Sử dụng hằng đẳng thức tổng của hai lập phương, ta có:

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2).$$

Thay các giá trị của các biểu thức đã cho, có:

$$72 = (x + y) \cdot 12, \text{ suy ra } x + y = \frac{72}{12} = 6 \quad (1)$$

Biết $x - y = 2$ suy ra $x = y + 2$ (2). Thay (2) vào (1) có:

$$y + 2 + y = 2y + 2 = 6 \Rightarrow 2y = 6 - 2 = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{2} = 2.$$

Do đó $x = y + 2 = 2 + 2 = 4$.

Vậy $x = 4$ và $y = 2$.

b) Sử dụng hằng đẳng thức hiệu của hai lập phương, ta có:

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2).$$

Thay các giá trị của các biểu thức đã cho, có:

$$98 = (x - y) \cdot 49 \text{ suy ra } x - y = \frac{98}{49} = 2 \quad (1).$$

Biết $x + y = 8$ suy ra $y = 8 - x$ (2). Thay (2) vào (1) có:

$$x - y = x - (8 - x) = x - 8 + x = 2x - 8 = 2, \text{ suy ra}$$

$$2x = 8 + 2 = 10, \text{ nên } x = \frac{10}{2} = 5.$$

Do đó $y = 8 - x = 8 - 5 = 3$

Vậy $x = 5$ và $y = 3$.

● **Khai thác bài toán**

- Bạn đọc cần thử lại các giá trị của x và y đã tìm được. Dưới đây trình bày cách thử câu a:

$$x^3 + y^3 = 4^3 + 2^3 = 64 + 8 = 72.$$

$$x^2 - xy + y^2 = 4^2 - 4 \cdot 2 + 2^2 = 16 - 8 + 4 = 20 - 8 = 12.$$

Ta tìm lại được các giá trị 72 và 12 từ $x = 4$ và $y = 2$. Vậy giá trị x, y tìm được là đúng.

- Hãy vận dụng các hằng đẳng thức đã học để làm bài toán sau đây: Cho $x - y = 4, x^2 + y^2 = 36$. Tính $x^3 - y^3$.

Ta có thể làm như sau:

$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$. Thay giá trị của các biểu thức đã biết, có:

$$x^3 - y^3 = 4.(36 + xy) \quad (1).$$

Biết $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = 4^2 = 16$. Thay giá trị của biểu thức $x^2 + y^2 = 36$, có:

$x^2 + y^2 - 2xy = 36 - 2xy = 16$, suy ra $2xy = 36 - 16 = 20$, nên $xy = 10$ (2).

Thay (2) vào (1), có:

$$x^3 - y^3 = 4.(36 + 10) = 4.46 = 184.$$

Bài 19. Rút gọn biểu thức sau:

$$A = (x + y + 3)^3 - (x + y - 3)^3 - 18(x + y)^2.$$

● **Tìm hiểu đề bài**

Biểu thức A là dãy các phép trừ các lũy thừa bậc 3, bậc 2 của các đa thức mà ta phải rút gọn.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Theo định nghĩa lũy thừa thì:

$$(x + y + 3)^3 = (x + y + 3)(x + y + 3)(x + y + 3), \text{ và}$$

$$(x + y - 3)^3 = (x + y - 3)(x + y - 3)(x + y - 3)$$

Hãy làm lần lượt các phép nhân đa thức kể trên để có kết quả của hai lũy thừa bậc 3 đó. Còn số hạng thứ 3 của biểu thức A là tích của 18 với bình phương của tổng x và y .

Hãy tính riêng từng lũy thừa rồi gộp vào để tính A.

● Cách giải

$$\begin{aligned}(x + y + 3)^3 &= (x + y + 3)(x + y + 3)(x + y + 3) \\ &= (x + y + 3)(x^2 + xy + 3x + xy + y^2 + 3y + 3x + 3y + 9) \\ &= (x + y + 3)(x^2 + y^2 + 2xy + 6x + 6y + 9) \\ &= x^3 + xy^2 + 2x^2y + 6x^2 + 6xy + 9x + y^3 + 2xy^2 + x^2y + \\ &\quad + 6xy + 6y^2 + 9y + 3x^2 + 6xy + 18x + 3y^2 + 18y + 27 \\ &= x^3 + y^3 + 3xy^2 + 3x^2y + 9x^2 + 18xy + 27x + 9y^2 + 27y + 27\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x + y - 3)^3 &= (x + y - 3)(x + y - 3)(x + y - 3) \\ &= (x + y - 3)(x^2 + xy - 3x + xy + y^2 - 3y - 3x - 3y + 9) \\ &= (x + y - 3)(x^2 + y^2 + 2xy - 6x - 6y + 9) \\ &= x^3 + xy^2 + 2x^2y - 6x^2 - 6xy + 9x + y^3 + 2xy^2 + x^2y - \\ &\quad - 6xy - 6y^2 + 9y - 3x^2 - 6xy + 18x - 3y^2 + 18y - 27 \\ &= x^3 + y^3 + 3xy^2 + 3x^2y - 9x^2 - 18xy + 27x - 9y^2 + 27y - 27.\end{aligned}$$

$$18(x + y)^2 = 18(x^2 + 2xy + y^2) = 18x^2 + 36xy + 18y^2.$$

Vậy có:

$$\begin{aligned}A &= (x^3 + y^3 + 3xy^2 + 3x^2y + 9x^2 + 18xy + 27x + 9y^2 \\ &\quad + 27y + 27) - (x^3 + y^3 + 3xy^2 + 3x^2y - 9x^2 - 18xy + 27x \\ &\quad - 9y^2 + 27y - 27) - (18x^2 + 36xy + 18y^2). \\ &= x^3 + y^3 + 3xy^2 + 3x^2y + 9x^2 + 18xy + 27x + 9y^2 \\ &\quad + 27y + 27 - x^3 - y^3 - 3xy^2 - 3x^2y + 9x^2 + 18xy - 27x + \\ &\quad 9y^2 - 27y + 27 - 18x^2 - 36xy - 18y^2 = 54.\end{aligned}$$

● Khai thác bài toán

a) Cách giải bài toán như đã trình bày tuy đúng nhưng còn dài, có thể có cách giải ngắn hơn và áp dụng được hằng đẳng thức đã học, nếu đặt $x + y$ có mặt trong cả 3 số hạng của đa thức A bằng Z, ta có:

$$A = (Z + 3)^3 - (Z - 3)^3 - 18Z^2$$

Áp dụng lập phương của một tổng, một hiệu, có:

$$\begin{aligned}A &= Z^3 + 9Z^2 + 27Z + 27 - (Z^3 - 9Z^2 + 27Z - 27) - 18Z^2 \\ &= Z^3 + 9Z^2 + 27Z + 27 - Z^3 + 9Z^2 - 27Z + 27 - 18Z^2 = 54.\end{aligned}$$

b) Cách giải bài toán trên được rút gọn hơn, nếu biết:

$$\begin{aligned}(x + y + 3)(x + y + 3) &= (x + y + 3)^2 \\ &= [(x + y) + 3]^2 = (x + y)^2 + 2(x + y).3 + 3^2 \\ &= x^2 + 2xy + y^2 + 6x + 6y + 3^2 \\ &= x^2 + y^2 + 3^2 + 2xy + 2x.3 + 2y.3 \quad (1)\end{aligned}$$

Như vậy, bình phương của một tổng gồm 3 số hạng bằng tổng các bình phương của mỗi số hạng đó cộng với hai lần tích số thứ nhất với số thứ hai, cộng với hai lần tích số thứ nhất với số thứ ba, cộng với hai lần tích số thứ hai với số thứ ba.

$$\text{Do đó: } (x + y + 3)^3 =$$

$$(x + y + 3)(x^2 + y^2 + 3^2 + 2xy + 2x.3 + 2y.3)$$

$$\text{và } (x + y - 3)^3 =$$

$$(x + y - 3)[x^2 + y^2 + 3^2 + 2xy + 2x(-3) + 2y(-3)].$$

Bạn đọc hãy làm tiếp bài toán theo hướng giải này.

c) Cũng có thể áp dụng hằng đẳng thức hiệu của hai lập phương đối với 2 số hạng đầu của A, có:

$$\begin{aligned}(x + y + 3)^3 - (x + y - 3)^3 &= \\ &= (x + y + 3 - x - y + 3)[(x + y + 3)^2 + \\ &\quad (x + y + 3)(x + y - 3) + (x + y - 3)^2] \\ &= 6[(x + y + 3)^2 + (x + y + 3)(x + y - 3) + (x + y - 3)^2].\end{aligned}$$

Ta có:

$$(x + y + 3)^2 = x^2 + y^2 + 9 + 2xy + 6x + 6y$$

$$(x + y - 3)^2 = x^2 + y^2 + 9 + 2xy - 6x - 6y.$$

Đối với tích $(x + y + 3)(x + y - 3)$ có thể làm như sau:

$$(x + y + 3)(x + y - 3) = [(x + y) + 3][(x + y) - 3]$$

$$= (x + y)^2 - 3^2 = x^2 + 2xy + y^2 - 9.$$

Như vậy, ta có:

$$A = 6[x^2 + y^2 + 9 + 2xy + 6x + 6y + x^2 + y^2 + 9 + 2xy$$

$$- 6x - 6y + x^2 + 2xy + y^2 - 9] - 18(x^2 + 2xy + y^2)$$

$$= 6(3x^2 + 3y^2 + 6xy + 9) - 18(x^2 + 2xy + y^2)$$

$$= 18x^2 + 18y^2 + 36xy + 54 - 18x^2 - 36xy - 18y^2 = 54.$$

Bài toán này đã giới thiệu 4 cách giải, có lẽ cách giải a ở phần khai thác bài toán là lời giải hay nhất. Bạn đọc nên suy nghĩ và tìm lời giải hay cho mỗi bài toán mình làm.

Bài 20. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử (thừa số):

- a) $x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 8x$; b) $x^3 + x^2 - 4x - 4$;
 c) $x^4 + x^3 + x^2 - 1$; d) $x^4 - x^2 + 2x - 1$;
 đ) $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1$; e) $x^3 - y^3 - 3x + 3y$;
 h) $x^3 - 4x^2 + 4x - 1$; i) $(x^2 + y^2 + xy)^2 - x^2y^2 - y^2z^2 - x^2z^2$;
 k) $4x^4 - 64$; l) $x^5 + 27x^2$;
 m) $x^4 - 8x$; n) $x^8 - 1$.

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài đòi hỏi phải phân tích mỗi đa thức đã cho thành nhân tử tức là biến mỗi tổng đã cho thành một tích gồm hai hay nhiều thừa số.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Ta đã biết ba phương pháp phân tích một đa thức thành nhân tử là: đặt nhân tử chung, dùng hằng đẳng thức, nhóm các hạng tử. Thông thường phải phối hợp cả ba phương pháp một cách linh hoạt để phân tích một đa thức thành nhân tử.

Trong ba phương pháp kể trên thì thường thường ưu tiên số một là dùng cách đặt nhân tử chung, rồi đến dùng hằng đẳng thức

và sau đó là nhóm các hạng tử. Lưu ý rằng, ở mỗi bài cụ thể cần vận dụng ba phương pháp một cách thích hợp.

● Cách giải

$$\begin{aligned} \text{a) } x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 8x &= x(x^3 - 4x^2 - 8x + 8) = \\ &= x[(x^3 + 8) - (4x^2 + 8x)] = x[(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - 4x(x + 2)] \\ &= x(x + 2)(x^2 - 2x + 4 - 4x) = x(x + 2)(x^2 - 6x + 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x^3 + x^2 - 4x - 4 &= (x^3 + x^2) - (4x + 4) = \\ &= x^2(x + 1) - 4(x + 1) = (x + 1)(x^2 - 4) = \\ &= (x + 1)(x + 2)(x - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } x^4 + x^3 + x^2 - 1 &= (x^4 + x^3) + (x^2 - 1) = \\ &= x^3(x + 1) + (x + 1)(x - 1) = (x + 1)(x^3 + x - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } x^4 - x^2 + 2x - 1 &= x^4 - (x^2 - 2x + 1) = (x^2)^2 - (x - 1)^2 = \\ &= (x^2 + x - 1)(x^2 - x + 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 &= (x^2 + 2xy + y^2) - (2x + 2y) + 1 = \\ &= (x + y)^2 - 2(x + y) + 1 = (x + y - 1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } x^3 - y^3 - 3x + 3y &= (x^3 - y^3) - (3x - 3y) \\ &= (x - y)(x^2 + xy + y^2) - 3(x - y) \\ &= (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } x^3 - 4x^2 + 4x - 1 &= (x^3 - 1) - (4x^2 - 4x) \\ &= (x - 1)(x^2 + x + 1) - 4x(x - 1) \\ &= (x - 1)(x^2 + x + 1 - 4x) = (x - 1)(x^2 - 3x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i) } (x^2 + y^2 + xy)^2 - x^2y^2 - z^2y^2 - z^2x^2 \\ &= [(x^2 + y^2 + xy)^2 - (xy)^2] - z^2(x^2 + y^2) \\ &= (x^2 + y^2 + xy + xy)(x^2 + y^2 + xy - xy) - z^2(x^2 + y^2) \\ &= (x^2 + y^2 + 2xy)(x^2 + y^2) - z^2(x^2 + y^2) \\ &= (x^2 + y^2)[(x + y)^2 - z^2] = (x^2 + y^2)(x + y + z)(x + y - z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{k) } 4x^4 - 64 &= 4(x^4 - 16) = 4[(x^2)^2 - 4^2] \\ &= 4(x^2 + 4)(x^2 - 4) = 4(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{l) } x^5 + 27x^2 &= x^2(x^3 + 27) = x^2(x^3 + 3^3) \\ &= x^2(x + 3)(x^2 - 3x + 9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{m) } x^4 - 8x &= x(x^3 - 8) = x(x^3 - 2^3) \\ &= x(x - 2)(x^2 + 2x + 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{n) } x^8 - 1 &= (x^4)^2 - 1 = (x^4 + 1)[(x^2)^2 - 1] \\ &= (x^4 + 1)(x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x^4 + 1)(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1). \end{aligned}$$

● Khai thác bài toán

- Một bài toán phân tích đa thức thành nhân tử có thể có những cách làm khác nhau, chẳng hạn:

$$\begin{aligned} \text{Câu a) } x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 8x &= (x^4 + 8x) - (4x^3 + 8x^2) = \\ &= x(x^3 + 8) - 4x^2(x + 2) \\ &= x(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - 4x^2(x + 2) \\ &= (x + 2)[x(x^2 - 2x + 4) - 4x^2] \\ &= x(x + 2)(x^2 - 2x + 4 - 4x) \\ &= x(x + 2)(x^2 - 6x + 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Câu c) } x^4 + x^3 + x^2 - 1 &= (x^4 - 1) + (x^3 + x^2) = \\ &= [(x^2)^2 - 1] + x^2(x + 1) = (x^2 + 1)(x^2 - 1) + x^2(x + 1) \\ &= (x^2 + 1)(x - 1)(x + 1) + x^2(x + 1) \\ &= (x + 1)(x^3 - x^2 + x - 1 + x^2) = (x + 1)(x^3 + x - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Câu k) } 4x^4 - 64 &= (2x^2)^2 - 8^2 = (2x^2 + 8)(2x^2 - 8) \\ &= 2(x^2 + 4)2(x^2 - 4) = 4(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2). \end{aligned}$$

Nêu ra nhận xét này, mong rằng khi làm loại toán này, bạn đọc hãy tìm các cách giải khác nhau và khi làm bài, hãy chọn cách làm ngắn gọn nhất.

- Một chú ý khác cần lưu ý là 7 hàng đẳng thức đã học đều là

lũy thừa bậc 2 hoặc bậc 3, không có bậc 4, bậc 5, bậc 8 v.v... Để có thể áp dụng được các hằng đẳng thức đã học, cần phải hạ bậc bằng cách:

a) Đặt nhân tử chung, chẳng hạn câu l:

$$x^5 + 27x^2 = x^2(x^3 + 27) = x^2(x^3 + 3^3)$$

b) Dùng lũy thừa của một lũy thừa, chẳng hạn câu k:

$$4x^4 - 64 = (2x^2)^2 - 8^2 \text{ hoặc}$$

$$4x^4 - 64 = 4(x^4 - 16) = 4[(x^2)^2 - 4^2].$$

Câu n: $x^8 - 1 = (x^4)^2 - 1.$

Bài 21. Phân tích các đa thức thành nhân tử (bằng vài phương pháp khác):

a) $x^2 - 2x - 3;$

b) $x^2 - 4x + 3;$

c) $x^2 - 10x + 24;$

d) $x^2 - 2x - 8;$

đ) $2x^2 + 7x + 3;$

e) $x^2 - 4xy + 3y^2;$

i) $x^4 + x^2 + 1;$

k) $x^4y^4 + 4.$

● **Tim hiểu đề bài**

Đề bài cho các đa thức, đòi hỏi phân tích các đa thức đó thành nhân tử. Ngoài ba phương pháp đã biết, còn phải vận dụng thêm vài phương pháp khác như:

- Tách một hạng tử thành hai hay nhiều hạng tử. Chẳng hạn:

$$x^2 + 5x + 4 = x^2 + x + 4x + 4$$

$$= (x^2 + x) + (4x + 4) = x(x + 1) + 4(x + 1) = (x + 1)(x + 4).$$

- Thêm rồi bớt cùng một hạng tử. Chẳng hạn:

$$x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2$$

$$= [(x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 2 + 2^2] - (2x)^2$$

$$= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x).$$

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Căn cứ vào từng bài, hãy làm thử rồi chọn cách tách một hạng tử thành hai hay nhiều hạng tử hoặc chọn cách thêm rồi bớt cùng một hạng tử.

Trong quá trình giải mỗi bài cũng vẫn phải vận dụng linh hoạt ba phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử đã biết.

● **Cách giải**

$$\begin{aligned} \text{a) } x^2 - 2x - 3 &= x^2 - 2x - 2 - 1 = (x^2 - 1) - (2x + 2) \\ &= (x - 1)(x + 1) - 2(x + 1) = (x + 1)(x - 1 - 2) \\ &= (x + 1)(x - 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x^2 - 4x + 3 &= x^2 - 4x + 4 - 1 = (x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2) - 1 \\ &= (x - 2)^2 - 1 = (x - 2 + 1)(x - 2 - 1) \\ &= (x - 1)(x - 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } x^2 - 10x + 24 &= x^2 - 4x - 6x + 24 = (x^2 - 4x) - (6x - 24) \\ &= x(x - 4) - 6(x - 4) = (x - 4)(x - 6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } x^2 - 2x - 8 &= x^2 + 2x - 4x - 8 = (x^2 + 2x) - (4x + 8) \\ &= x(x + 2) - 4(x + 2) = (x + 2)(x - 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } 2x^2 + 7x + 3 &= 2x^2 + 6x + x + 3 = (2x^2 + 6x) + (x + 3) \\ &= 2x(x + 3) + (x + 3) = (x + 3)(2x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } x^2 - 4xy + 3y^2 &= x^2 - xy - 3xy + 3y^2 = (x^2 - xy) - (3xy - 3y^2) \\ &= x(x - y) - 3y(x - y) = (x - y)(x - 3y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i) } x^4 + x^2 + 1 &= x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 \\ &= (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{k) } x^4y^4 + 4 &= x^4y^4 + 4x^2y^2 + 4 - 4x^2y^2 \\ &= (x^4y^4 + 4x^2y^2 + 4) - 4x^2y^2 = (x^2y^2 + 2)^2 - (2xy)^2 \\ &= (x^2y^2 + 2 + 2xy)(x^2y^2 + 2 - 2xy). \end{aligned}$$

● Khai thác bài toán

Nếu chịu khó suy nghĩ và tìm tòi, các câu trong bài 21 có thể có những cách giải khác nhau. Chẳng hạn:

- Với câu a) ngoài cách giải trên có thể giải theo ba cách sau:

* Cách 2. Thêm 1 và bớt 1

$$\begin{aligned}x^2 - 2x - 3 &= x^2 - 2x + 1 - 1 - 3 = x^2 - 2x + 1 - 4 = \\&= (x^2 - 2x + 1) - 4 = (x - 1)^2 - 2^2 = \\&= (x - 1 + 2)(x - 1 - 2) = (x + 1)(x - 3)\end{aligned}$$

* Cách 3. Thêm 6 và bớt 6

$$\begin{aligned}x^2 - 2x - 3 &= x^2 - 2x - 3 + 6 - 6 = x^2 - 9 - 2x + 6 = \\&= (x^2 - 9) - (2x - 6) = (x - 3)(x + 3) - 2(x - 3) \\&= (x - 3)(x + 3 - 2) = (x - 3)(x + 1)\end{aligned}$$

* Cách 4. Thêm x và bớt x

$$\begin{aligned}x^2 - 2x - 3 &= x^2 - 2x - 3 + x - x = x^2 + x - 3x - 3 = \\&= (x^2 + x) - (3x + 3) = x(x + 1) - 3(x + 1) \\&= (x + 1)(x - 3).\end{aligned}$$

- Với câu b) ngoài cách giải trên có thể giải theo ba cách sau:

* Cách 2. Thêm 1 và bớt 1

$$\begin{aligned}x^2 - 4x + 3 &= x^2 - 4x + 3 + 1 - 1 = x^2 - 1 - 4x + 4 = \\&= (x^2 - 1) - (4x - 4) = (x - 1)(x + 1) - 4(x - 1) \\&= (x - 1)(x + 1 - 4) = (x - 1)(x - 3).\end{aligned}$$

* Cách 3. Thêm 9 và bớt 9

$$\begin{aligned}x^2 - 4x + 3 &= x^2 - 4x + 3 + 9 - 9 = x^2 - 9 - 4x + 12 = \\&= (x^2 - 9) - (4x - 12) = (x - 3)(x + 3) - 4(x - 3) = \\&= (x - 3)(x + 3 - 4) = (x - 3)(x - 1)\end{aligned}$$

* Cách 4: Tách $-4x$ thành $-x$ và $-3x$

$$\begin{aligned}x^2 - 4x + 3 &= x^2 - x - 3x + 3 = (x^2 - x) - (3x - 3) = \\&= x(x - 1) - 3(x - 1) = (x - 1)(x - 3).\end{aligned}$$

Nhận thấy: Thêm và bớt cùng một hạng tử hoặc tách một hạng tử thành hai hay nhiều hạng tử nhằm làm xuất hiện hằng đẳng thức hoặc giúp cho nhóm hạng tử thuận lợi hơn trong quá trình phân tích đa thức thành nhân tử.

Bạn đọc có thể tìm thêm các cách giải khác ở bài toán này.

Bài 22

a) Rút gọn biểu thức A rồi tính giá trị của biểu thức với $x = -\frac{2}{3}$:

$$A = 3\left(\frac{2x}{3} - 1\right) + (15x^2 - 10x) : (-5x) - (3x - 1).$$

b) Rút gọn biểu thức B rồi tính giá trị của biểu thức với $x = -1$, $y = -2001$:

$$B = \frac{4x^2 - 4}{xy - y + x - 1}.$$

• Tìm hiểu đề bài

Biểu thức A là một dãy tính cộng trừ nhân chia các đơn, đa thức, phải rút gọn rồi tính giá trị.

Biểu thức B là phép chia đa thức cho đa thức, cần biến đổi, rút gọn rồi tính giá trị.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, cần thực hiện phép tính nhân chia trước, cộng trừ sau để rút gọn biểu thức đã cho, sau đó tính giá trị.

Với câu b, cần phân tích đa thức ở tử và mẫu thành nhân tử rồi rút gọn, sau đó tính giá trị.

• Cách giải

a) Rút gọn:

$$A = 3\left(\frac{2x}{3} - 1\right) + (15x^2 - 10x) : (-5x) - (3x - 1)$$

$$\begin{aligned}
 &= 2x - 3 + (-3x + 2) - (3x - 1) \\
 &= 2x - 3 - 3x + 2 - 3x + 1 = -4x.
 \end{aligned}$$

Tính giá trị

$$A = -4x = -4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

b) Rút gọn

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{4x^2 - 4}{xy - y + x - 1} \\
 &= \frac{4(x^2 - 1)}{(xy - y) + (x - 1)} = \frac{4(x + 1)(x - 1)}{y(x - 1) + (x - 1)} \\
 &= \frac{4(x + 1)(x - 1)}{(x - 1)(y + 1)} = \frac{4(x + 1)}{y + 1}
 \end{aligned}$$

(với điều kiện $x - 1 \neq 0$ hay $x \neq 1$)

Vì $x = -1$ nên $x - 1 = -1 - 1 = -2 \neq 0$.

Tính giá trị

$$B = \frac{4(x + 1)}{y + 1} = \frac{4(-1 + 1)}{-2001 + 1} = \frac{4 \cdot 0}{-2000} = \frac{0}{-2000} = 0.$$

● Khai thác bài toán

- Đối với phép chia, cần lưu ý:

a) Khi số bị chia là số 0 và số chia khác 0, phép chia bao giờ cũng thực hiện được và kết quả của phép tính luôn bằng 0:

$$\frac{0}{a} = 0 \text{ (với } a \neq 0\text{)}$$

b) Khi số bị chia là số khác 0 và số chia là 0, thì không bao giờ có phép chia này, hay đây là phép tính không có nghĩa

$$\frac{a}{0} : \text{ không có nghĩa (với } a \neq 0\text{)}$$

Ở trường hợp b, không ít bạn đọc vẫn cho đây là một phép tính và ghi kết quả bằng a hoặc bằng 0 (!)

- Với câu a, ta đã:

a) thực hiện phép nhân đơn thức với đa thức $3 \cdot \left(\frac{2x}{3} - 1\right)$

b) thực hiện phép chia đa thức cho đơn thức

$$(15x^2 - 10x) : (-5x)$$

c) thực hiện phép cộng, trừ.

Như vậy, với một dãy tính gồm dấu ngoặc rồi cộng trừ nhân chia thì phải làm phép tính trong dấu ngoặc trước, rồi làm tính nhân, chia, sau đó làm cộng trừ từ trái sang phải.

- Với câu b, để thực hiện được việc rút gọn, phải phân tích tử và mẫu thành nhân tử rồi rút gọn các nhân tử chung. Nhân tử được rút gọn phải đảm bảo là khác 0.

CHIA ĐA THỨC

Bài 23. Sắp xếp các đa thức sau theo lũy thừa giảm dần và theo một biến chính rồi làm phép chia:

a) $(5x^3 + 6x - 3x^4 - 10) : (5 - 3x);$

b) $(x^4 + 2x - 2x^3 - 1) : (x^2 + 1 - 2x);$

c) $(13x^4y^2 - 7x^5y + 2x^3y^3 - 5x^6 - xy^5) : (y^2 - 2xy - x^2);$

d) $(20x^3y^2 - 20xy^4 - 6x^5 + 7x^4y - 13x^2y^3) : (2x^2y - 3x^3 + 5xy^2);$

e) $(3x^4 + 9x - 8x^3 - 7 - 10x^2) : (1 - 2x + 3x^2).$

• Tìm hiểu đề bài

Đề bài đòi hỏi phải sắp xếp đa thức bị chia, đa thức chia theo lũy thừa giảm dần của một biến chính rồi làm phép chia.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Chia hai đa thức đã sắp xếp theo lũy thừa giảm dần của một biến chính thực hiện tương tự như chia hai số tự nhiên. Cụ thể là:

- Chia hạng tử cao nhất của đa thức bị chia cho hạng tử cao nhất của đa thức chia, ta được hạng tử cao nhất của thương.

- Chia hạng tử cao nhất của dư thứ nhất cho hạng tử cao nhất

của đa thức chia, ta được hạng tử thứ hai của thương.

- Quá trình trên được tiếp tục đến khi ta được dư cuối cùng bằng 0 (phép chia hết) hoặc dư cuối cùng khác 0 có bậc thấp hơn bậc của đa thức chia (phép chia có dư).

● Cách giải

a) Sắp xếp đa thức theo lũy thừa giảm dần đối với biến x:

$$5x^3 + 6x - 3x^4 - 10 = -3x^4 + 5x^3 + 6x - 10$$

$$5 - 3x = -3x + 5$$

$$\begin{array}{r} -3x^4 + 5x^3 \quad +6x - 10 \\ -3x^4 + 5x^3 \quad \cdot \\ \hline 6x - 10 \\ - 6x + 10 \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} -3x + 5 \\ \hline x^3 - 2 \end{array} \right.$$

b) Sắp xếp đa thức theo lũy thừa giảm dần đối với biến x:

$$x^4 + 2x - 2x^3 - 1 = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$$

$$x^2 + 1 - 2x = x^2 - 2x + 1$$

$$\begin{array}{r} x^4 - 2x^3 + 2x - 1 \\ -x^4 + 2x^3 \quad + x^2 \\ \hline -x^2 + 2x - 1 \\ -x^2 + 2x - 1 \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} x^2 - 2x + 1 \\ \hline x^2 - 1 \end{array} \right.$$

c) Sắp xếp đa thức theo lũy thừa giảm dần đối với biến x:

$$13x^4y^2 - 7x^5y + 2x^3y^3 - 5x^6 - xy^5 =$$

$$-5x^6 - 7x^5y + 13x^4y^2 + 2x^3y^3 - xy^5$$

$$y^2 - 2xy - x^2 = -x^2 - 2xy + y^2$$

$$\begin{array}{r} -5x^6 - 7x^5y + 13x^4y^2 + 2x^3y^3 - xy^5 \\ -5x^6 - 10x^5y + 5x^4y^2 \\ \hline -x^2 - 2xy + y^2 \\ \hline 5x^4 - 3x^3y - 2x^2y^2 - xy^3 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} -x^2 - 2xy + y^2 \\ \hline 5x^4 - 3x^3y - 2x^2y^2 - xy^3 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r}
3x^5y + 8x^4y^2 + 2x^3y^3 - xy^5 \\
3x^5y + 6x^4y^2 - 3x^3y^3 \\
\hline
2x^4y^2 + 5x^3y^3 - xy^5 \\
2x^4y^2 + 4x^3y^3 - 2x^2y^4 \\
\hline
x^3y^3 + 2x^2y^4 - xy^5 \\
x^3y^3 + 2x^2y^4 - xy^5 \\
\hline
0
\end{array}$$

d) Sắp xếp đa thức theo lũy thừa giảm dần đối với biến x:

$$\begin{array}{r}
20x^3y^2 - 20xy^4 - 6x^5 + 7x^4y - 13x^2y^3 = \\
-6x^5 + 7x^4y + 20x^3y^2 - 13x^2y^3 - 20xy^4 \\
2x^2y - 3x^3 + 5xy^2 = -3x^3 + 2x^2y + 5xy^2 \\
-6x^5 + 7x^4y + 20x^3y^2 - 13x^2y^3 - 20xy^4 \quad \left| \begin{array}{l} -3x^3 + 2x^2y + 5xy^2 \\ \hline 2x^2 - xy - 4y^2 \end{array} \right. \\
-6x^5 + 4x^4y + 10x^3y^2 \\
\hline
3x^4y + 10x^3y^2 - 13x^2y^3 - 20xy^4 \\
3x^4y - 2x^3y^2 - 5x^2y^3 \\
\hline
12x^3y^2 - 8x^2y^3 - 20xy^4 \\
12x^3y^2 - 8x^2y^3 - 20xy^4 \\
\hline
0
\end{array}$$

e) Sắp xếp đa thức theo lũy thừa giảm dần đối với biến x:

$$\begin{array}{r}
3x^4 + 9x - 8x^3 - 7 - 10x^2 = 3x^4 - 8x^3 - 10x^2 + 9x - 7 \\
1 - 2x + 3x^2 = 3x^2 - 2x + 1 \\
3x^4 - 8x^3 - 10x^2 + 9x - 7 \quad \left| \begin{array}{l} 3x^2 - 2x + 1 \\ \hline x^2 - 2x - 5 \end{array} \right. \\
3x^4 - 2x^3 + x^2 \\
\hline
-6x^3 - 11x^2 + 9x - 7 \\
-6x^3 + 4x^2 - 2x \\
\hline
-15x^2 + 11x - 7 \\
-15x^2 + 10x - 5 \\
\hline
x - 2
\end{array}$$

Đây là phép chia có dư.

Bài 24

a) Tìm các giá trị nguyên của n để giá trị của biểu thức $2n^2 - n + 2$ chia hết cho giá trị của biểu thức $2n + 1$.

b) Tìm giá trị của a và b để đa thức $x^3 + ax + b$ chia hết cho $(x - 1)^2$.

• Tìm hiểu đề bài

Với câu a, đề bài đòi hỏi phải tìm các giá trị nguyên của n để giá trị của biểu thức $2n^2 - n + 2$ chia hết cho giá trị của biểu thức $2n + 1$.

Với câu b, phải tìm giá trị của a và b để đa thức $x^3 + ax + b$ chia hết cho $(x - 1)^2$.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, trước hết hãy tìm số dư của phép chia đa thức $2n^2 - n + 2$ cho đa thức $2n + 1$. Để tìm các giá trị nguyên của n thì số dư của phép chia này phải là bội của $2n + 1$ tức $2n + 1$ là ước của số dư. Từ đó, bằng lập luận sẽ suy ra n .

Với câu b, trước hết hãy làm phép chia đa thức $x^3 + ax + b$ cho đa thức $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$ để có hạng tử thứ nhất ở thương. Sau đó cần biến đổi đa thức dư cho gọn hơn, rồi tiếp tục làm phép chia để có hạng tử thứ hai ở thương. Để có phép chia hết thì tích của hạng tử thứ hai với số chia phải bằng đa thức dư sau lần chia thứ nhất. Từ đó suy ra giá trị của a, b .

• Cách giải

a) Ta làm phép chia

$$\begin{array}{r} 2n^2 - n + 2 \\ - 2n^2 + n \\ \hline -2n + 2 \\ - 2n - 1 \\ \hline 3 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} 2n + 1 \\ \hline n - 1 \end{array} \right.$$

Nhận thấy đa thức $2n^2 - n + 2$ không chia hết cho đa thức $2n + 1$, nhưng có thể tìm được các giá trị nguyên của n để giá trị của $2n^2 - n + 2$ chia hết cho giá trị của $2n + 1$. Muốn vậy thì $2n + 1$ phải là ước của 3.

Các ước của 3 là $\pm 1; \pm 3$. Do đó, với:

$$2n + 1 = 1 \text{ thì } n = 0$$

$$2n + 1 = -1 \text{ thì } n = -1$$

$$2n + 1 = 3 \text{ thì } n = 1$$

$$2n + 1 = -3 \text{ thì } n = -2.$$

Vậy với $n \in \{-2; -1; 0; 1\}$ thì giá trị của đa thức $2n^2 - n + 2$ chia hết cho giá trị của đa thức $2n + 1$.

b) Ta làm phép chia

$$\begin{array}{r} x^3 + ax + b \\ - x^3 + x - 2x^2 \\ \hline 2x^2 + ax - x + b \text{ hay} \\ 2x^2 + (a - 1)x + b \\ - 2x^2 - 4x + 2 \\ \hline \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - 2x + 1 \\ \hline x + 2 \end{array} \right.$$

Để có phép chia hết thì $2x^2 + (a - 1)x + b$ trừ đi đa thức $2x^2 - 4x + 2$ phải bằng 0, tức là:

$$2x^2 + (a - 1)x + b = 2x^2 - 4x + 2$$

Từ đó suy ra:

$$a - 1 = -4 \Rightarrow a = -3$$

và $b = 2$

Vậy, với $a = -3$ và $b = 2$ thì $(x^3 + ax + b) : (x^2 - 2x + 1)$.

● Khai thác bài toán

- Dễ dàng thử lại để kiểm tra kết quả câu b, bằng cách thay

$a = -3$ và $b = 2$ vào đa thức dư $2x^2 + (a - 1)x + b$ được đa thức $2x^2 - 4x + 2$. Rõ ràng $2x^2 - 4x + 2 - (2x^2 - 4x + 2) = 0$. Ta có phép chia hết.

- Bạn đọc hãy tự thử kết quả tìm được trong câu a.

B. CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

ĐỀ BÀI

Bài 25. Sắp xếp đa thức theo biến chính rồi làm tính nhân:

a) $(-xy^2 + x^2y + x^3 - y^3)(2x + y)$;

b) $(x^3 - 4xy^2 + 3x^2y - 5y^3)(3x - 7y)$.

Bài 26. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2 - 10x + 21$;

b) $3x^2 - 7x + 2$;

c) $324x^4 + 1$;

d) $x^3 + y^3 + z^3 - x(y - z)^2 - y(z - x)^2 - z(x - y)^2 - 4xyz$.

Bài 27. Rút gọn biểu thức:

a) $[(x^3 - y^3) + 2(x^2 - y^2) - 2(x - y)^2] : (x - y)$;

b) $\frac{125 \cdot 5^5 \cdot 64 - 25^3 \cdot 10 \cdot 4}{5^7 \cdot 8}$;

c*) $\frac{x^4 + y^4 + (x + y)^4}{x^2 + y^2 + (x + y)^2}$ biết $x^2 + y^2 + xy = 7$.

Bài 28

a) Rút gọn rồi tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A = 3x^2 - (-20x^3 + 15x^2 - 5x) : (-5x) - 3(x - 1).$$

b) Rút gọn rồi tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$B = 8x^2 + 6x - (x^3 - x^2 - x + 1) : (x - 1) - 3x(x + 2).$$

Bài 29. Sắp xếp các đa thức theo một biến chính rồi làm phép chia:

$$a) 24x^4y^2 + 9x^3y^3 - 12x^6 - 10x^5y + 3x^2y^4 - 2xy^5 :$$

$$: (6x^4 - 3x^2y^2 - 2xy^3 - 4x^3y);$$

$$b) 10x^4y - 9x^3y^2 - 8x^5 + 6x^2y^3 + 9xy^4 : (2x^2 + 3y^2 - xy).$$

Bài 30

a*) Tính giá trị của biểu thức

$$(x^3 + y^3) - (x^2 + y^2) + 4xy \text{ biết } x + y = 2.$$

b*) Cho $ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2) = ab$, trong đó x và y là các số khác 0 nhưng có tổng bằng 1. Chứng minh rằng $a = b$.

HƯỚNG DẪN - CÁCH GIẢI

Bài 25. ● **Hướng dẫn.** Chú ý viết các đơn thức đồng dạng dưới cùng một cột khi làm tính.

● **Cách giải**

a) Sắp xếp đa thức theo lũy thừa giảm dần của biến x :

$$-xy^2 + x^2y + x^3 - y^3 = x^3 + x^2y - xy^2 - y^3$$

$$\begin{array}{r} x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 \\ \times \quad 2x + y \\ \hline 2x^4 + 2x^3y - 2x^2y^2 - 2xy^3 \\ + \quad \quad x^3y + x^2y^2 - xy^3 - y^4 \\ \hline 2x^4 + 3x^3y - x^2y^2 - 3xy^3 - y^4 \end{array}$$

b) Sắp xếp đa thức theo lũy thừa giảm dần của biến x :

$$x^3 - 4xy^2 + 3x^2y - 5y^3 = x^3 + 3x^2y - 4xy^2 - 5y^3$$

$$\begin{array}{r}
x^3 + 3x^2y - 4xy^2 - 5y^3 \\
x \quad \quad \quad 3x - 7y \\
\hline
3x^4 + 9x^3y - 12x^2y^2 - 15xy^3 \\
+ \quad \quad \quad - 7x^3y - 21x^2y^2 + 28xy^3 + 35y^4 \\
\hline
3x^4 + 2x^3y - 33x^2y^2 + 13xy^3 + 35y^4
\end{array}$$

Bài 26. ● **Hướng dẫn.** Vận dụng các điều hướng dẫn ở bài 20 và bài 21.

● **Cách giải**

a) $x^2 - 10x + 21 = x^2 - 3x - 7x + 21 = (x^2 - 3x) - (7x - 21) =$
 $= x(x - 3) - 7(x - 3) = (x - 3)(x - 7)$

b) $3x^2 - 7x + 2 = 3x^2 - 6x - x + 2 = (3x^2 - 6x) - (x - 2) =$
 $= 3x(x - 2) - (x - 2) = (x - 2)(3x - 1)$

c) $324x^4 + 1 = 324x^4 + 36x^2 + 1 - 36x^2$
 $= [(18x^2)^2 + 2 \cdot 18x^2 \cdot 1 + 1] - (6x)^2$
 $= (18x^2 + 1)^2 - (6x)^2$
 $= (18x^2 + 6x + 1)(18x^2 - 6x + 1).$

d) $x^3 + y^3 + z^3 - x(y - z)^2 - y(z - x)^2 - z(x - y)^2 - 4xyz$
 $= [x^3 - x(y - z)^2] + [y^3 - y(z - x)^2] + [z^3 - z(x - y)^2 - 4xyz]$
 $= x[x^2 - (y - z)^2] + y[y^2 - (z - x)^2] + z[z^2 - (x^2 - 2xy + y^2) - 4xy]$
 $= x[x^2 - (y - z)^2] + y[y^2 - (z - x)^2] + z[z^2 - x^2 + 2xy - y^2 - 4xy]$
 $= x[x^2 - (y - z)^2] + y[y^2 - (z - x)^2] + z[z^2 - (x + y)^2]$
 $= x(x + y - z)(x - y + z) + y(y + z - x)(y - z + x) +$
 $\quad \quad \quad + z(z + x + y)(z - x - y)$
 $= (x + y - z)[x(x - y + z) + y(y + z - x) - z(x + y + z)]$
 $= (x + y - z)(x^2 - xy + xz + y^2 + yz - xy - xz - yz - z^2)$

$$\begin{aligned}
&= (x + y - z)(x^2 - 2xy + y^2 - z^2) \\
&= (x + y - z)[(x - y)^2 - z^2] \\
&= (x + y - z)(x - y + z)(x - y - z).
\end{aligned}$$

Bài 27. • Hướng dẫn. Với câu a, hãy thực hiện phép chia đa thức cho đa thức, sau đó làm phép cộng, trừ. Chú ý đến hằng đẳng thức.

Với câu b, hãy viết các số đã cho thành lũy thừa của 2 và 5.

Với câu c, hãy biến đổi tử và mẫu theo điều kiện đã cho là $x^2 + y^2 + xy = 7$. Đặc biệt lưu ý đến lũy thừa của một đa thức, chẳng hạn như: $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$.

• Cách giải

$$\begin{aligned}
\text{a)} & [(x^3 - y^3) + 2(x^2 - y^2) - 2(x - y)^2] : (x - y) \\
&= [(x - y)(x^2 + xy + y^2) + 2(x - y)(x + y) - 2(x - y)^2] : (x - y) \\
&= (x^2 + xy + y^2) + 2(x + y) - 2(x - y) \\
&= x^2 + xy + y^2 + 2x + 2y - 2x + 2y \\
&= x^2 + xy + y^2 + 4y.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b)} & \frac{125 \cdot 5^5 \cdot 64 - 25^3 \cdot 10 \cdot 4}{5^7 \cdot 8} = \frac{5^3 \cdot 5^5 \cdot 2^6 - 5^6 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2^2}{5^7 \cdot 2^3} \\
&= \frac{5^8 \cdot 2^6 - 5^7 \cdot 2^3}{5^7 \cdot 2^3} = \frac{5^8 \cdot 2^6}{5^7 \cdot 2^3} - \frac{5^7 \cdot 2^3}{5^7 \cdot 2^3} = 5 \cdot 2^3 - 1 \\
&= 40 - 1 = 39
\end{aligned}$$

c*) Biến đổi mẫu và tính toán theo điều kiện bài toán

$$\begin{aligned}
&x^2 + y^2 + xy = 7 \quad (1) \\
&x^2 + y^2 + (x + y)^2 = x^2 + y^2 + x^2 + 2xy + y^2 \\
&= 2(x^2 + y^2 + xy) = 2 \cdot 7 = 14
\end{aligned}$$

Biến đổi tử và tính toán:

$$\begin{aligned}x^4 + y^4 + (x + y)^4 &= x^4 + y^4 + [(x + y)^2]^2 \\&= x^4 + y^4 + (x^2 + 2xy + y^2)^2 = \\&= x^4 + y^4 + x^4 + 4x^2y^2 + y^4 + 4x^3y + 2x^2y^2 + 4xy^3 \\&= 2(x^4 + y^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3) \quad (2)\end{aligned}$$

Bình phương hai vế của (1) có:

$$\begin{aligned}x^4 + y^4 + x^2y^2 + 2x^2y^2 + 2x^3y + 2xy^3 &= 49 \\ \text{hay } x^4 + y^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 &= 49 \quad (3)\end{aligned}$$

Từ (2) và (3) có:

$$x^4 + y^4 + (x + y)^4 = 2 \cdot 49 = 98$$

$$\text{Vậy } \frac{x^4 + y^4 + (x + y)^4}{x^2 + y^2 + (x + y)^2} = \frac{98}{14} = 7.$$

Bài 28. • Hướng dẫn

Với câu a, hãy thực hiện phép nhân, phép chia trước, rồi rút gọn biểu thức. Căn cứ vào biểu thức đã được rút gọn để suy luận tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A.

Với câu b, làm tương tự như câu a để có biểu thức gọn, từ đó suy luận tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức B.

• Cách giải

$$\begin{aligned}A &= 3x^2 - (-20x^3 + 15x^2 - 5x) : (-5x) - 3(x - 1) \\&= 3x^2 - (4x^2 - 3x + 1) - (3x - 3) \\&= 3x^2 - 4x^2 + 3x - 1 - 3x + 3 \\&= -x^2 + 2.\end{aligned}$$

Biết rằng bình phương của bất kì số nào cũng không âm, do đó $x^2 \geq 0$, suy ra $-x^2 \leq 0$.

Thêm vào hai vế của bất đẳng thức số 2, ta có:

$$-x^2 + 2 \leq 2.$$

Biểu thức $-x^2 + 2$ luôn luôn nhỏ hơn hay bằng 2 nên $-x^2 + 2$ hay biểu thức A đã cho có giá trị lớn nhất bằng 2 khi $x = 0$.

Vậy biểu thức A có giá trị lớn nhất bằng 2 khi $x = 0$.

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= 8x^2 + 6x - (x^3 - x^2 - x + 1) : (x - 1) - 3x(x + 2) \\ &= 8x^2 + 6x - (x^2 - 1) - (3x^2 + 6x) \\ &= 8x^2 + 6x - x^2 + 1 - 3x^2 - 6x \\ &= 4x^2 + 1 \end{aligned}$$

Biết rằng $x^2 \geq 0$, nên $4x^2 + 1 \geq 1$.

Biểu thức $4x^2 + 1$ luôn luôn lớn hơn hay bằng 1 nên $4x^2 + 1$ hay biểu thức B đã cho có giá trị nhỏ nhất bằng 1 khi $x = 0$.

Vậy biểu thức B có giá trị nhỏ nhất bằng 1 khi $x = 0$.

Bài 29. • Hướng dẫn. Sau khi đã sắp xếp các đa thức theo lũy thừa giảm dần của biến x , hãy lấy hạng tử bậc cao nhất của đa thức bị chia chia cho hạng tử bậc cao nhất của đa thức chia, rồi làm tiếp theo hướng dẫn bài 23.

a)

$$\begin{array}{r|l} -12x^6 - 10x^5y + 24x^4y^2 + 9x^3y^3 + 3x^2y^4 - 2xy^5 & 6x^4 - 4x^3y - 3x^2y^2 - 2xy^3 \\ -12x^6 + 8x^5y + 6x^4y^2 + 4x^3y^3 & \hline \end{array}$$

$$-18x^5y + 18x^4y^2 + 5x^3y^3 + 3x^2y^4 - 2xy^5$$

$$-18x^5y + 12x^4y^2 + 9x^3y^3 + 6x^2y^4$$

$$6x^4y^2 - 4x^3y^3 - 3x^2y^4 - 2xy^5$$

$$6x^4y^2 - 4x^3y^3 - 3x^2y^4 - 2xy^5$$

0

$$\begin{array}{r}
\text{b)} \\
-8x^5 + 10x^4y - 9x^3y^2 + 6x^2y^3 + 9xy^4 \\
-8x^5 + 4x^4y - 12x^3y^2 \\
\hline
6x^4y + 3x^3y^2 + 6x^2y^3 + 9xy^4 \\
6x^4y - 3x^3y^2 + 9x^2y^3 \\
\hline
6x^3y^2 - 3x^2y^3 + 9xy^4 \\
6x^3y^2 - 3x^2y^3 + 9xy^4 \\
\hline
0
\end{array}
\left| \begin{array}{l}
2x^2 - xy + 3y^2 \\
\hline
-4x^3 + 3x^2y + 3xy^2
\end{array} \right.$$

Bài 30. ● Hướng dẫn

Với câu a, hãy áp dụng hằng đẳng thức dạng tổng hai lập phương, lưu ý sử dụng $x + y = 2$ sẽ có được kết quả bài toán.

Với câu b, từ $x + y = 1$ suy ra $x^2 + 2xy + y^2 = 1$ hay $x^2 + y^2 = 1 - 2xy$. Hãy vận dụng kết quả này vào biểu thức đã cho, rồi biến đổi sẽ có được kết quả bài toán.

● Cách giải

$$\begin{aligned}
\text{a)} & (x^3 + y^3) - (x^2 + y^2) + 4xy \\
& = (x + y)(x^2 - xy + y^2) - (x^2 + y^2) + 4xy
\end{aligned}$$

Biết $x + y = 2$, nên có:

$$\begin{aligned}
& = 2(x^2 - xy + y^2) - x^2 - y^2 + 4xy \\
& = 2x^2 - 2xy + 2y^2 - x^2 - y^2 + 4xy \\
& = x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2.
\end{aligned}$$

Vậy $(x + y)^2 = 2^2 = 4$.

b) Từ $x + y = 1$ suy ra $x^2 + y^2 + 2xy = 1$ do đó $x^2 + y^2 = 1 - 2xy$. Từ đó có:

$$\begin{aligned}
& ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2) = ab \\
& ab(1 - 2xy) + xy(a^2 + b^2) = ab; \\
& ab(1 - 2xy) + xy(a^2 + b^2) - ab = 0;
\end{aligned}$$

$$ab - 2abxy + xy(a^2 + b^2) - ab = 0;$$

$$-2abxy + xy(a^2 + b^2) = 0;$$

$$xy(a^2 + b^2 - 2ab) = 0;$$

$$xy(a - b)^2 = 0. \text{ Do } x \neq 0; y \neq 0 \text{ nên } a - b = 0 \text{ hay } a = b.$$

Đó là điều phải chứng minh.

III. PHÂN THỨC ĐẠI SỐ VÀ CÁC PHÉP TÍNH

A. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

PHÂN THỨC. TẬP XÁC ĐỊNH

Bài 1. Tìm tập xác định của các phân thức:

$$\text{a) } A = \frac{x + 5}{x^2 - x - 2};$$

$$\text{b) } B = \frac{5x + 2}{x^2 - x};$$

$$\text{c) } C = \frac{4x}{x - 2y};$$

$$\text{d) } D = \frac{x + y}{xy - 2x - y + 2}.$$

• Tìm hiểu đề bài

Tìm tập xác định (TXĐ) của phân thức là tìm các giá trị của biến sao cho giá trị tương ứng của mẫu thức khác 0.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Nói chung, để tìm tập xác định của một phân thức, trước hết cho mẫu bằng 0 rồi giải phương trình để tìm ra các giá trị của biến làm cho mẫu bằng 0; sau đó để phân thức có nghĩa thì mẫu phải khác không, muốn vậy thì giá trị của biến phải khác giá trị vừa tìm được ở trên. Chẳng hạn:

$$M = 2x - 2; M = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy $M \neq 0$ khi $x \neq 1$.

Để giải phương trình mà mẫu của phân thức là vế trái còn vế phải là 0 thường phải phân tích mẫu thành nhân tử.

● Cách giải

$$\text{a) } x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x) - (2x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x + 1) - 2(x + 1) = 0; (x + 1)(x - 2) = 0$$

khi $x = -1$; $x = 2$.

Ta thấy $x^2 - x - 2 \neq 0$ khi $x \neq -1$; $x \neq 2$.

Phân thức $A = \frac{x + 5}{x^2 - x - 2}$ có tập xác định là:

$$\text{TXD} = \{x | x \in \mathbf{Q}, x \neq -1; x \neq 2\}$$

hoặc TXD: $x \neq -1$; $x \neq 2$.

$$\text{b) } x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \text{ khi } x = 0; x = 1$$

Ta thấy $x^2 - x \neq 0$ khi $x \neq 0$; $x \neq 1$.

Phân thức $B = \frac{5x + 2}{x^2 - x}$ có tập xác định là

$$\text{TXD} = \{x | x \in \mathbf{Q}, x \neq 0; x \neq 1\}$$

hoặc TXD: $x \neq 0$; $x \neq 1$.

$$\text{c) } x - 2y = 0 \text{ khi } x = 2y$$

Ta thấy $x - 2y \neq 0$ khi $x \neq 2y$.

Phân thức $C = \frac{4x}{x - 2y}$ có tập xác định là:

$$\text{TXD: } \{(x, y) | x \in \mathbf{Q}, y \in \mathbf{Q}, x \neq 2y\}$$

hoặc TXD: $x \neq 2y$.

$$\text{d) } xy - 2x - y + 2 = 0 \Leftrightarrow (xy - 2x) - (y - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(y - 2) - (y - 2) = 0; (y - 2)(x - 1) = 0$$

khi $y = 2$; $x = 1$.

Phân thức $D = \frac{x + y}{xy - 2x - y + 2}$ có tập xác định

$$\text{TXĐ: } \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}, x \neq 1; y \neq 2\}$$

hoặc TXĐ: $x \neq 1; y \neq 2$.

• Khai thác bài toán

- Trong cách ghi tập xác định của một phân thức ở cách giải trên đã trình bày hai cách:

a) Cách viết trực tiếp (viết tập xác định dưới dạng tập hợp, chẳng hạn với câu d), đã viết:

$$\text{TXĐ} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}, x \neq 1; y \neq 2\}$$

hoặc TXĐ = $\{(x, y) \mid x \neq 1; y \neq 2\}$ (gọn hơn nhưng phải hiểu rằng $x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}$).

b) Cách viết gián tiếp

$$\text{TXĐ: } x \neq 1; y \neq 2$$

Trong hai cách viết này, ta chọn cách viết nào cũng được. Cần chú ý rằng, cũng có những phân thức có mẫu luôn khác 0, chẳng hạn:

a) Phân thức $\frac{-2x^2}{x^2 + 1}$ có $x^2 + 1 \neq 0$ với mọi giá trị của $x \in \mathbb{Q}$.

Vậy phân thức có TXĐ: mọi $x \in \mathbb{Q}$.

b) Phân thức $\frac{x(x + 3)}{x^2 - 2x + 2}$ có $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 \neq 0$

với mọi giá trị của $x \in \mathbb{Q}$.

Vậy phân thức có TXĐ: mọi $x \in \mathbb{Q}$.

- Sở dĩ có loại toán "tìm tập xác định của một phân thức" vì đối với mọi phân thức mà ta xem xét, trước hết phải thỏa mãn định nghĩa: "Một phân thức đại số là một biểu thức có dạng $\frac{A}{B}$, trong đó A, B là những đơn hoặc đa thức và $B \neq 0$ ".

Do vậy, trước khi thực hiện các biến đổi về phân thức phải tìm

tập xác định của nó. Cần đặc biệt lưu ý điều này khi xem xét các phân thức.

Bài 2. Với giá trị nào của biến thì phân thức sau có giá trị bằng 0?

a) $\frac{(x+2)(x-3)}{2x-5}$;

b) $\frac{x^2-6x+9}{x^2+1}$;

c) $\frac{xy-x-y+1}{x^2+y^2+4}$;

d) $\frac{-15xyz}{x^2+y^2+z^2+8}$.

• **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài cho các phân thức, đòi hỏi xét xem với giá trị nào của biến thì các phân thức bằng 0.

• **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Biết rằng, $\frac{0}{a} = 0$ khi $a \neq 0$. Như vậy, phân thức $\frac{A}{B} = 0$ khi

nào? Rõ ràng là nếu $A = 0$ và $B \neq 0$ thì $\frac{A}{B} = 0$.

Do vậy, để có $\frac{A}{B} = 0$ thì trước hết phải tìm tập xác định của phân thức, sau đó giải phương trình $A = 0$, nếu các giá trị của biến tìm được đều thuộc tập xác định của phân thức, thì đó là các giá trị của biến làm cho phân thức bằng 0.

• **Cách giải**

a) TXĐ = $\{x \mid x \in \mathbf{Q}, x \neq \frac{5}{2}\}$

Tử $(x+2)(x-3)$ bằng 0 khi $x = -2$ hoặc $x = 3$. Các giá trị này của biến đều thuộc tập xác định của phân thức đã cho.

Vậy phân thức $\frac{(x+2)(x-3)}{2x-5}$ bằng 0 khi $x = -2$ hoặc $x = 3$.

b) TXĐ: mọi $x \in \mathbf{Q}$

Tử $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$ bằng 0 khi $x = 3$. Giá trị này của biến thuộc tập xác định của phân thức đã cho.

Vậy phân thức $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 1}$ bằng 0 khi $x = 3$.

c) TXĐ: mọi $x, y \in \mathbb{Q}$

Từ $xy - x - y + 1 = x(y - 1) - (y - 1) = (x - 1)(y - 1)$ bằng 0 khi $x = 1; y = 1$. Các giá trị này của biến thuộc tập xác định của phân thức đã cho.

Vậy phân thức $\frac{xy - x - y + 1}{x^2 + y^2 + 4}$ bằng 0 khi $x = 1, y$ bất kì, hoặc x bất kì, $y = 1$.

d) TXĐ: mọi $x, y, z \in \mathbb{Q}$

Từ $-15xyz$ bằng 0 khi $x = 0$ hoặc $y = 0$ hoặc $z = 0$. Các giá trị này thuộc tập xác định của phân thức đã cho.

Vậy phân thức $\frac{-15xyz}{x^2 + y^2 + z^2 + 8}$ bằng 0 khi ít nhất một trong các biến x, y, z bằng 0.

● Khai thác bài toán

- Do việc tìm giá trị của biến để mẫu khác 0 nhiều khi không dễ dàng, vì thế để xét xem với giá trị nào của biến thì phân thức bằng 0, trong nhiều trường hợp ta có thể làm như sau:

- Tìm các giá trị của biến để tử bằng 0
- Trong các giá trị tìm được đó của biến, sẽ chọn (bằng cách thử) các giá trị làm cho mẫu khác 0.

Ví dụ:

1) Tìm các giá trị của biến để phân thức $\frac{x-3}{x^2-2x-7}$ có giá trị bằng 0.

Ta thấy, tử bằng 0 khi $x = 3$. Với $x = 3$ thì mẫu khác 0 (vì $3^2 - 2 \cdot 3 - 7 = 9 - 6 - 7 = -4 \neq 0$)

Vậy với $x = 3$ thì phân thức $\frac{x-3}{x^2-2x-7}$ có giá trị bằng 0.

2) Tìm các giá trị của biến để phân thức $\frac{x^2-4x+3}{x^3-2x-4}$ có giá trị bằng 0.

Ta thấy tử $x^2 - 4x + 3 = x^2 - x - 3x + 3 = (x^2 - x) - (3x - 3) = x(x - 1) - 3(x - 1) = (x - 1)(x - 3)$ bằng 0 khi $x = 1$ hoặc $x = 3$.

Với $x = 1$ hoặc $x = 3$ thì mẫu khác 0 (vì $1^3 - 2 \cdot 1 - 4 = -5 \neq 0$ hoặc $3^3 - 2 \cdot 3 - 4 = 17 \neq 0$).

Vậy với $x = 1$ hoặc $x = 3$ thì phân thức $\frac{x^2-4x+3}{x^3-2x-4}$ có giá trị bằng 0.

- Cũng có thể trình bày lời giải bài 2 theo cách khác, chẳng hạn với câu a :

Phân thức có giá trị bằng 0 khi tử bằng 0 và mẫu khác 0, tức là có:

$$\begin{cases} (x + 2)(x - 3) = 0 \\ 2x - 5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \text{ hoặc } x = 3 \\ x \neq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Vậy với $x = -2$ hoặc $x = 3$ thì phân thức $\frac{(x+2)(x-3)}{2x-5} = 0$

Bài 3. Tính giá trị các phân thức sau:

a) $A = \frac{5xy - 7y^2 + 2}{2y^3 + 3x^2y - y + 5}$, với $x = -\frac{2}{5}$, $y = 0$;

b) $B = \frac{2x^2 - 8x + 5}{x^2 - 3}$, với $x = 0,25$;

c) $C = \frac{5|x| - 1}{x - 2}$, với $|x| = \frac{1}{2}$.

● **Tim hiểu đề bài**

Đề bài cho các phân thức hai biến hoặc một biến và giá trị của các biến, đòi hỏi tính giá trị của phân thức.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, khi $y = 0$, biểu thức không phụ thuộc giá trị của x .

Với câu b, thay $x = 0,25 = \frac{1}{4}$ vào biểu thức rồi thực hiện các phép tính.

Với câu c, khi $|x| = \frac{1}{2}$ phải xét hai trường hợp $x = \frac{1}{2}$ và

$$x = -\frac{1}{2} \text{ vì } |x| = \frac{1}{2} = \left|-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{2}\right|.$$

• Cách giải

a) Với $y = 0$ phân thức A có giá trị bằng $\frac{2}{5}$ (không phụ thuộc vào giá trị của x).

b) Với $x = 0,25 = \frac{1}{4}$, ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 8 \cdot \frac{1}{4} + 5}{\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 3} = \frac{2 \cdot \frac{1}{16} - 2 + 5}{\frac{1}{16} - 3} = \frac{\frac{1}{8} + 3}{-2\frac{15}{16}} \\ &= \frac{25}{8} : \left(-\frac{47}{16}\right) = -\frac{25}{8} \cdot \frac{16}{47} = -\frac{50}{47} = -1\frac{3}{47}. \end{aligned}$$

c) Cần phải xét hai trường hợp:

- Với $x = \frac{1}{2}$ có:

$$C = \frac{5 \cdot \frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} - 2} = \frac{\frac{5}{2} - 1}{-1\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -1$$

- Với $x = -\frac{1}{2}$ có:

$$C = \frac{5 \cdot \frac{1}{2} - 1}{-\frac{1}{2} - 2} = \frac{\frac{5}{2} - 1}{-2\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{5} = -\frac{3}{5}$$

● Khai thác bài toán

Tính giá trị một phân thức là bài toán mà ta đã làm quen từ lâu. Thật vậy, với phân thức $\frac{2x^2-8x+5}{x^2-3}$ có thể viết thành

$$(2x^2 - 8x + 5) : (x^2 - 3)$$

Thay giá trị $x = 0,25 = \frac{1}{4}$, ta có dãy tính sau:

$$[2 \cdot (\frac{1}{4})^2 - 8 \cdot \frac{1}{4} + 5] : [(\frac{1}{4})^2 - 3] = (2 \cdot \frac{1}{16} - 2 + 5) : (\frac{1}{16} - 3)$$

$$= (\frac{1}{8} + 3) : (-2\frac{15}{16}) = \frac{25}{8} : (-\frac{47}{16}) = -\frac{25}{8} \cdot \frac{16}{47} = -\frac{50}{47} = -1\frac{3}{47}$$

Như vậy, bài toán này không có gì xa lạ, điều cần lưu ý là phải làm thật đúng các phép tính và phải thực hiện theo thứ tự các phép tính đối với một dãy tính.

TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA PHÂN THỨC

Bài 4. Các phân thức sau có bằng nhau không? Vì sao?

a) $A = \frac{-x}{x-2}$ và $B = \frac{x}{2-x}$;

b) $A = \frac{-x}{x-4}$ và $B = \frac{-x(x-4)}{(x-4)^2}$;

c) $A = \frac{-x}{(x-5)^2}$ và $B = \frac{x}{(5-x)^2}$;

d) $A = \frac{x(x-2)}{x-2}$ và $B = x$.

● Tìm hiểu đề bài

Đề bài cho các cặp phân thức A và B, đòi hỏi xét xem cặp nào bằng nhau, cặp nào không bằng nhau, vì sao?

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Cần dựa vào tính chất cơ bản của phân thức có dạng tổng quát là:

$$\frac{A}{B} = \frac{A.C}{B.C} ; \frac{A}{B} = \frac{A:C}{B:C} \text{ với } B \neq 0, C \neq 0, \text{ và dựa vào quy tắc}$$

đối dấu của một phân thức theo dạng tổng quát là: $\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}$ để xét xem cặp phân thức nào bằng nhau, cặp nào không bằng nhau.

● **Cách giải**

a) Hai phân thức A và B bằng nhau vì nếu biến đổi dấu tử và mẫu của phân thức A thì được phân thức B:

$$\frac{-(-x)}{-(x-2)} = \frac{x}{2-x}$$

b) Hai phân thức A và B bằng nhau vì nếu nhân tử và mẫu của phân thức A với $x - 4$ ta được phân thức B:

$$\frac{-x(x-4)}{(x-4)(x-4)} = \frac{-x(x-4)}{(x-4)^2}$$

c) Hai phân thức A và B có mẫu bằng nhau nhưng tử của chúng đối nhau nên chúng không bằng nhau.

d) Hai phân thức A và B bằng nhau vì nếu chia tử và mẫu của phân thức A cho $x - 2$ (với $x \neq 2$) ta được phân thức B:

$$\frac{x(x-2) : (x-2)}{(x-2) : (x-2)} = x \text{ (với } x \neq 2).$$

● **Khai thác bài toán**

- Quy tắc đổi dấu của một phân thức được suy ra từ việc áp dụng tính chất cơ bản của phân thức là nhân tử và mẫu với -1 :

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot (-1)}{B \cdot (-1)} = \frac{-A}{-B}$$

- Ở câu c dùng vôi kết luận hai phân thức A và B bằng nhau do áp dụng quy tắc đổi dấu phân thức.

Khi đổi dấu cơ số của lũy thừa bậc chẵn thì lũy thừa không đổi, chẳng hạn $(7 - 5)^2 = (5 - 7)^2$ vì cùng bằng 4. Các biểu thức $(x - 5)^2$ và $(5 - x)^2$ là bằng nhau chứ không phải đối nhau.

Bài 5. Giải thích rằng các đẳng thức sau là đúng:

$$\text{a) } \frac{-x - 2}{x - 1} = \frac{x^3 + 8}{(1 - x)(x^2 - 2x + 4)} ;$$

$$\text{b) } \frac{3 - x}{x - 4} = \frac{x^3 - 27}{(4 - x)(x^2 + 3x + 9)} .$$

• **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài yêu cầu giải thích rằng các đẳng thức đã cho là đúng, nghĩa là có thể biến đổi được vế trái thành vế phải hay ngược lại.

• **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, trước hết ta đổi dấu phân thức ở vế trái đẳng thức, sau đó vận dụng hằng đẳng thức $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$ để chọn được đa thức để nhân với tử và mẫu của phân thức đã được đổi dấu. Lưu ý lập luận đa thức trên khác 0.

- Với câu b, làm tương tự như câu a và dùng hằng đẳng thức $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$.

• **Cách giải**

a) Theo quy tắc đổi dấu một phân thức, ta có:

$$\frac{-x - 2}{x - 1} = \frac{-(-x - 2)}{-(x - 1)} = \frac{x + 2}{1 - x} \quad (1)$$

Biết rằng $x^2 - 2x + 4 = x^2 - 2x + 1 + 3 = (x - 1)^2 + 3 \neq 0$ với mọi x nên áp dụng tính chất cơ bản của phân thức ta được:

$$\frac{x + 2}{1 - x} = \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{(1 - x)(x^2 - 2x + 4)} = \frac{x^3 + 8}{(1 - x)(x^2 - 2x + 4)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{-x - 2}{x - 1} = \frac{x^3 + 8}{(1 - x)(x^2 - 2x + 4)}$$

b) Theo quy tắc đổi dấu một phân thức, ta có:

$$\frac{3 - x}{x - 4} = \frac{-(3 - x)}{-(x - 4)} = \frac{x - 3}{4 - x} \quad (1)$$

Biết rằng $x^2 + 3x + 9 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + (\frac{3}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2 + 9 = (x + \frac{3}{2})^2 + 6\frac{3}{4} \neq 0$ với mọi x , nên áp dụng tính chất cơ bản của phân thức ta được:

$$\frac{x - 3}{4 - x} = \frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}{(4 - x)(x^2 + 3x + 9)} = \frac{x^3 - 27}{(4 - x)(x^2 + 3x + 9)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{3 - x}{x - 4} = \frac{x^3 - 27}{(4 - x)(x^2 + 3x + 9)}$$

● Khai thác bài toán

Trong cách giải, ta chỉ trình bày cách biến đổi phân thức ở vế trái bằng phân thức ở vế phải. Ở phần này, ta biến đổi ngược lại.

$$a) \frac{x^3 + 8}{(1 - x)(x^2 - 2x + 4)} = \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{(1 - x)(x^2 - 2x + 4)} = \frac{x + 2}{1 - x} \quad (1)$$

vì đã thực hiện chia tử và mẫu cho phân thức $x^2 - 2x + 4 = x^2 - 2x + 1 + 3 = (x - 1)^2 + 3 \neq 0$.

Theo quy tắc đổi dấu một phân thức, ta có:

$$\frac{x + 2}{1 - x} = \frac{-(x + 2)}{-(1 - x)} = \frac{-x - 2}{x - 1} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{-x - 2}{x - 1} = \frac{x^3 + 8}{(1 - x)(x^2 - 2x + 4)}$$

$$\text{b) } \frac{x^3 - 27}{(4 - x)(x^2 + 3x + 9)} = \frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}{(4 - x)(x^2 + 3x + 9)} = \frac{x - 3}{4 - x} \quad (1),$$

vì đã thực hiện chia tử và mẫu cho đa thức

$$x^2 + 3x + 9 = x^2 + 2x \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 6 \cdot \frac{3}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 6 \cdot \frac{3}{4} \neq 0.$$

Theo quy tắc đổi dấu một phân thức, ta có:

$$\frac{x - 3}{4 - x} = \frac{-(x - 3)}{-(4 - x)} = \frac{3 - x}{x - 4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{3 - x}{x - 4} = \frac{x^3 - 27}{(4 - x)(x^2 + 3x + 9)}$$

Bài 6. Rút gọn các phân thức sau:

$$\text{a) } \frac{-3x + 3y}{x - y} \quad ; \quad \text{b) } \frac{x^2 + 3x - y^2 - 3y}{x^2 - y^2} \quad ;$$

$$\text{c) } \frac{25 - 10x + x^2}{xy - 5y} \quad ; \quad \text{d) } \frac{2xy - x^2 + z^2 - y^2}{x^2 + z^2 - y^2 + 2xz}$$

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài cho các phân thức, đòi hỏi phải rút gọn các phân thức đó tức là chia tử và mẫu cho cùng một đơn thức hoặc đa thức khác không nào đó.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Dựa vào tính chất cơ bản của phân thức mà ta có thể chia cả tử và mẫu cho cùng một đa thức khác 0. Muốn vậy trước hết phải

phân tích tử và mẫu thành nhân tử, sau đó chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung.

• Cách giải

$$a) \frac{-3x + 3y}{x - y} = \frac{-3(x - y)}{x - y} = -3 \text{ (với } x \neq y)$$

$$b) \frac{x^2 + 3x - y^2 - 3y}{x^2 - y^2} = \frac{(x^2 - y^2) + (3x - 3y)}{x^2 - y^2} =$$

$$= \frac{(x - y)(x + y) + 3(x - y)}{(x - y)(x + y)} = \frac{(x - y)(x + y + 3)}{(x - y)(x + y)} = \frac{x + y + 3}{x + y}$$

(với $x \neq y$)

$$c) \frac{25 - 10x + x^2}{xy - 5y} = \frac{x^2 - 10x + 25}{y(x - 5)} = \frac{(x - 5)^2}{y(x - 5)} = \frac{x - 5}{y}$$

(với $x \neq 5; y \neq 0$)

$$d) \frac{2xy - x^2 + z^2 - y^2}{x^2 + z^2 - y^2 + 2xz} = \frac{z^2 - (x^2 - 2xy + y^2)}{(x^2 + 2xz + z^2) - y^2} =$$

$$= \frac{z^2 - (x - y)^2}{(x + z)^2 - y^2} = \frac{(z + x - y)(z - x + y)}{(x + z + y)(x + z - y)} = \frac{z - x + y}{x + z + y}$$

• Khai thác bài toán

- Ở câu a nếu đặt 3 làm nhân tử chung ở tử thì để rút gọn phân thức, ta cần:

+ đổi dấu cả tử và mẫu:

$$\frac{-3x + 3y}{x - y} = \frac{3(y - x)}{x - y} = \frac{-3(y - x)}{y - x} = -3$$

+ hoặc đổi dấu hai nhân tử ở tử:

$$\frac{-3x + 3y}{x - y} = \frac{3(y - x)}{x - y} = \frac{-3(x - y)}{x - y} = -3.$$

- Cũng có thể phải rút gọn một phân thức mà ở tử có dấu giá trị tuyệt đối. Chẳng hạn:

$$\text{Rút gọn phân thức } \frac{3|x - 4|}{3x^2 - 3x - 36}$$

$$\text{Ta có } \frac{3|x - 4|}{3x^2 - 3x - 36} = \frac{3|x - 4|}{3(x^2 - x - 12)} = \frac{|x - 4|}{x^2 - x - 12} \text{ và mẫu}$$

$$x^2 - x - 12 = x^2 - 9 - x - 3 = (x - 3)(x + 3) - (x + 3) = (x + 3)(x - 4)$$

a) Nếu $x > 4$ tức là $x - 4 > 0$ thì $|x - 4| = x - 4$. Do đó:

$$\frac{|x - 4|}{x^2 - x - 12} = \frac{x - 4}{(x + 3)(x - 4)} = \frac{1}{x + 3}$$

b) Nếu $x < 4$ tức là $x - 4 < 0$ thì $|x - 4| = -(x - 4)$. Do đó:

$$\frac{|x - 4|}{x^2 - x - 12} = \frac{-(x - 4)}{(x + 3)(x - 4)} = -\frac{1}{x + 3}$$

Bài 7. Chứng minh các đẳng thức sau:

$$\text{a) } \frac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^2 + 14a - 8} = \frac{a + 1}{a - 2};$$

$$\text{b) } \frac{a^4 + a^3 + a + 1}{a^4 - a^3 + 2a^2 - a + 1} = \frac{(a + 1)^2}{a^2 + 1}$$

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài yêu cầu phải chứng minh các đẳng thức trên, muốn vậy phải biến đổi phân thức ở vế trái sao cho bằng phân thức ở vế phải.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, trước hết phải phân tích tử và mẫu thành nhân tử,

sau đó áp dụng tính chất cơ bản của phân thức.

Với câu b, làm tương tự câu a.

● Cách giải

a) Biến đổi vế trái:

$$\begin{aligned} \frac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^2 + 14a - 8} &= \frac{(a^3 - a) - (4a^2 - 4)}{(a^3 - 8) - (7a^2 - 14a)} = \\ &= \frac{a(a^2 - 1) - 4(a^2 - 1)}{(a - 2)(a^2 + 2a + 4) - 7a(a - 2)} = \frac{(a - 1)(a + 1)(a - 4)}{(a - 2)(a^2 - 5a + 4)} \\ &= \frac{(a - 1)(a + 1)(a - 4)}{(a - 2)[(a^2 - a) - (4a - 4)]} = \frac{(a - 1)(a + 1)(a - 4)}{(a - 2)(a - 1)(a - 4)} = \\ &= \frac{a + 1}{a - 2}. \end{aligned}$$

Vế phải bằng vế trái, đẳng thức được chứng minh.

b) Biến đổi vế trái:

$$\begin{aligned} \frac{a^4 + a^3 + a + 1}{a^4 - a^3 + 2a^2 - a + 1} &= \frac{(a^4 + a^3) + (a + 1)}{(a^4 - a^3 + a^2) + (a^2 - a + 1)} = \\ &= \frac{a^3(a + 1) + (a + 1)}{a^2(a^2 - a + 1) + (a^2 - a + 1)} = \frac{(a + 1)(a^3 + 1)}{(a^2 - a + 1)(a^2 + 1)} \\ &= \frac{(a + 1)(a + 1)(a^2 - a + 1)}{(a^2 - a + 1)(a^2 + 1)} = \frac{(a + 1)^2}{a^2 + 1}. \end{aligned}$$

Vế phải bằng vế trái, đẳng thức được chứng minh.

● Khai thác bài toán

- Trong quá trình biến đổi vế trái, ta đã coi phân thức ở vế trái luôn có mẫu khác 0 và ngầm hiểu rằng:

+ Câu a có TXĐ: $a \neq 1$; $a \neq 2$; $a \neq 4$.

+ Câu b có TXĐ: với mọi a vì

$a^2 + 1$ luôn khác 0 và

$$\begin{aligned} a^2 - a + 1 &= a^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \\ &= \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \text{ cũng luôn khác } 0. \end{aligned}$$

- Vấn đề đặt ra là: có thể biến đổi sao cho vế phải bằng vế trái được không? Hoàn toàn được.

Thường là viết lại chẳng hạn với câu b, từ

$$\frac{(a+1)^2}{a^2+1} = \dots = \frac{a^4 + a^3 + a + 1}{a^4 - a^3 + 2a^2 - a + 1},$$

tức là viết theo thứ tự ngược lại với cách giải bài này. Nhưng không ai lại làm như vậy, vì phải làm từ trái sang phải rồi viết lại từ phải sang trái.

Bài 8. Tính giá trị của các phân thức sau:

a) $A = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^3 - x}$ với $x = -2,75$;

b) $B = \frac{x^3 - y^3 - 3xy(x - y)}{x^2 + y^2 - 2xy}$ với $x = -6,75$; $y = -3,25$.

• **Tim hiểu đề bài**

Đề bài cho phân thức và giá trị của biến, đòi hỏi phải tính giá trị của phân thức bằng cách ngắn gọn, hợp lí nhất.

• **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, trước hết cần phân tích tử và mẫu thành nhân tử, rồi rút gọn, sau cùng là tính giá trị của phân thức theo giá trị của biến đã cho.

Với câu b, làm tương tự câu a.

● Cách giải

a) Rút gọn

$$A = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^3 - x} = \frac{x^3 - x^2 - x^2 + x}{x(x^2 - 1)} = \frac{x^2(x - 1) - x(x - 1)}{x(x^2 - 1)}$$

$$= \frac{(x - 1)(x^2 - x)}{x(x - 1)(x + 1)} = \frac{(x - 1)x(x - 1)}{x(x - 1)(x + 1)} = \frac{x - 1}{x + 1}$$

Tính giá trị :

$$A = \frac{x - 1}{x + 1} = \frac{-2,75 - 1}{-2,75 + 1} = \frac{-3,75}{-1,75} = \frac{375}{175} = \frac{15}{7} = 2\frac{1}{7}$$

b) Rút gọn

$$B = \frac{x^3 - y^3 - 3xy(x - y)}{x^2 + y^2 - 2xy} = \frac{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}{x^2 - 2xy + y^2} = \frac{(x - y)^3}{(x - y)^2} =$$

$$= x - y.$$

Tính giá trị:

$$B = x - y = -6,75 - (-3,25) = -6,75 + 3,25 = -3,5.$$

● Khai thác bài toán

Ở loại bài toán này, đã cho giá trị của biến để tính giá trị của phân thức, nên mẫu của phân thức đã cho là khác không nên không cần tìm TXĐ của phân thức nữa.

Xét thêm bài toán rút gọn, chẳng hạn:

a) Rút gọn phân thức $A = \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 8x + 15}$

Ta có thể làm như sau:

$$A = \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 8x + 15} = \frac{(x - 3)^2}{x^2 - 3x - 5x + 15} =$$

$$= \frac{(x - 3)^2}{x(x - 3) - 5(x - 3)} = \frac{(x - 3)^2}{(x - 3)(x - 5)}$$

$$\text{TXD: } x \neq 3; x \neq 5$$

$$\text{Vậy } A = \frac{x - 3}{x - 5}$$

$$\text{b) Rút gọn phân thức } B = \frac{|x| - 3}{x^2 - 9}$$

Trước hết, tìm TXD: $x \neq \pm 3$

$$\text{Nếu } x \geq 0 \text{ thì } |x| - 3 = x - 3, \text{ do đó } B = \frac{x - 3}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{1}{x + 3}$$

$$\begin{aligned} \text{Nếu } x < 0 \text{ thì } |x| - 3 &= -(x + 3), \text{ do đó } B = \frac{-(x + 3)}{(x - 3)(x + 3)} = \\ &= \frac{-1}{x - 3} = \frac{1}{3 - x} \end{aligned}$$

Như vậy, bài toán tính giá trị phân thức tuy cũng phải rút gọn nhưng không cần xét TXD, còn với bài toán rút gọn phân thức thường phải tìm TXD của phân thức, điều kiện cần có của biến.

Bài 9. Giải các phương trình:

$$\text{a) } 2ax + 1 = 4a^2 + x \quad (a \neq \frac{1}{2});$$

$$\text{b) } ax - b^2 + 2ab = a^2 + bx \quad (a \neq b).$$

● **Tìm hiểu đề bài**

Các phương trình đã cho có ẩn là x , còn a và b là các chữ. Giải các phương trình này chính là tìm giá trị của x phụ thuộc vào a và b .

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, dựa vào mối quan hệ giữa phép cộng và phép trừ để đưa x từ vế phải sang vế trái, đưa 1 từ vế trái sang vế phải. Sau đó biến đa thức thành tích rồi tìm x .

Với câu b, làm tương tự câu a.

● Cách giải

a) $2ax + 1 = 4a^2 + x$

$$2ax - x = 4a^2 - 1$$

$$(2a - 1)x = (2a - 1)(2a + 1).$$

Vì $a \neq \frac{1}{2}$ nên $2a - 1 \neq 0$, do đó có:

$$x = \frac{(2a - 1)(2a + 1)}{2a - 1} = 2a + 1.$$

b) $ax - b^2 + 2ab = a^2 + bx$

$$ax - bx = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)x = (a - b)^2$$

Vì $a \neq b$ nên $a - b \neq 0$, do đó có:

$$x = \frac{(a - b)^2}{a - b} = a - b.$$

● Khai thác bài toán

- Sau này khi học về phương trình, việc đưa x từ vế phải sang vế trái, cũng như đưa 1 từ vế trái sang vế phải ở câu a, được gọi là chuyển vế số hạng từ vế này sang vế kia nhưng phải đổi dấu số hạng đó. Ở đây do chưa học nên dựa vào mối quan hệ giữa hai phép tính cộng và trừ như đã nói ở phần hướng dẫn cách tìm lời giải.

- Nên thử lại nghiệm x đã tìm được khi làm toán giải phương trình. Dưới đây, trình bày cách thử lại với câu a:

$$2ax + 1 = 2a.(2a + 1) + 1 = 4a^2 + 2a + 1$$

$$4a^2 + x = 4a^2 + 2a + 1$$

Hai vế cùng bằng $4a^2 + 2a + 1$, chứng tỏ rằng $x = 2a + 1$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Bài 10. Quy đồng mẫu các phân thức:

$$a) \frac{3x}{9y^2z^2}, \frac{-3y}{15xz}, \frac{14z}{63x^2y^5};$$

$$b) \frac{30}{4x^3 - x}, \frac{8}{x - 2x^2}, \frac{12}{2x^2 + x};$$

$$c) \frac{x}{x^3 - 27}, \frac{2x}{x^2 - 6x + 9}, \frac{1}{x^2 + 3x + 9}.$$

● **Tim hiểu đề bài**

Đề bài cho các phân thức không cùng mẫu, đòi hỏi phải quy đồng mẫu các phân thức đó.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Để quy đồng mẫu ta phải:

- Tìm mẫu chung
- Nhân tử và mẫu của mỗi phân thức với nhân tử phụ của nó (nhân tử phụ là thương của mẫu chung với từng mẫu).

● **Cách giải**

$$a) \text{BCNN}(9; 15; 63) = 315$$

$$\text{Mẫu chung: } 315x^2y^5z^2$$

$$\text{Nhân tử phụ của 3 mẫu: } 35x^2y^3, 21xy^5z, 5z^2.$$

$$\text{Ta có: } \frac{3x}{9y^2z^2} = \frac{3x \cdot 35x^2y^3}{9y^2z^2 \cdot 35x^2y^3} = \frac{105x^3y^3}{315x^2y^5z^2}$$

$$\frac{-3y}{15xz} = \frac{-3y \cdot 21xy^5z}{15xz \cdot 21xy^5z} = \frac{-63xy^6z}{315x^2y^5z^2}$$

$$\frac{14z}{63x^2y^5} = \frac{14z \cdot 5z^2}{63x^2y^5 \cdot 5z^2} = \frac{70z^3}{315x^2y^5z^2}.$$

b) Phân tích các mẫu thành nhân tử:

$$4x^3 - x = x(4x^2 - 1) = x(2x + 1)(2x - 1)$$

$$2x^2 - x = x(2x - 1)$$

$$2x^2 + x = x(2x + 1)$$

Mẫu chung: $x(2x + 1)(2x - 1)$

Nhân tử phụ của 3 mẫu: 1; $2x + 1$; $2x - 1$

Ta có:

$$\frac{30}{4x^3 - x} = \frac{30}{x(2x + 1)(2x - 1)}$$

$$\frac{8}{x - 2x^2} = \frac{-8}{2x^2 - x} = \frac{-8}{x(2x - 1)} = \frac{-8(2x + 1)}{x(2x - 1)(2x + 1)}$$

$$\frac{12}{2x^2 + x} = \frac{12}{x(2x + 1)} = \frac{12(2x - 1)}{x(2x + 1)(2x - 1)}$$

c) Phân tích các mẫu thành nhân tử:

$$x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$$

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

Mẫu chung: $(x - 3)^2(x^2 + 3x + 9)$

Nhân tử phụ của ba mẫu: $x - 3$; $x^2 + 3x + 9$; $(x - 3)^2$

Ta có:

$$\frac{x}{x^3 - 27} = \frac{x}{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)} = \frac{x(x - 3)}{(x - 3)^2(x^2 + 3x + 9)}$$

$$\frac{2x}{x^2 - 6x + 9} = \frac{2x}{(x - 3)^2} = \frac{2x(x^2 + 3x + 9)}{(x - 3)^2(x^2 + 3x + 9)}$$

$$\frac{1}{x^2 + 3x + 9} = \frac{(x - 3)^2}{(x - 3)^2(x^2 + 3x + 9)}$$

● Khai thác bài toán

Trong việc quy đồng mẫu các phân thức, cần lưu ý đến việc đổi dấu phân thức, chẳng hạn:

- Trong câu b của bài toán trên ta thấy:

Mẫu của phân thức thứ nhất là $x(2x + 1)(2x - 1)$

Mẫu của phân thức thứ ba là $x(2x + 1)$

Do đó phải đổi dấu phân thức thứ hai thành $\frac{-8}{2x^2-x}$, để có mẫu là $x(2x - 1)$.

Từ đó có mẫu chung là $x(2x + 1)(2x - 1)$

- Bạn đọc hãy làm tương tự đối với ví dụ sau:

Quy đồng mẫu các phân thức: $\frac{x-1}{2x+2}$, $\frac{x+1}{2x-2}$, $\frac{1}{1-x^2}$.

BỐN PHÉP TÍNH VỀ PHÂN THỨC

Bài 11. Cộng các phân thức sau:

a) $\frac{1}{y^3 - x^2y} + \frac{1}{x^3 - xy^2}$;

b) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-3x+2} + \frac{1}{x^2-5x+6}$;

c) $\frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{2}{(2-x)(3-x)} + \frac{3}{(1-x)(x-3)}$.

● Tìm hiểu đề bài

Đề bài cho các phân thức không cùng mẫu, yêu cầu phải làm tính cộng các phân thức, muốn vậy phải quy đồng các mẫu rồi làm phép cộng giống như cộng các phân thức có cùng mẫu.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, trước hết phải phân tích mẫu thành nhân tử, rồi tìm mẫu chung; sau đó tìm nhân tử phụ của mỗi phân thức, nhân tử và mẫu của phân thức với nhân tử phụ tương ứng rồi làm tính cộng.

Với câu b, làm tương tự câu a.

Với câu c, các mẫu đã cho ở dạng một tích cần lựa chọn tích của 3 nhân tử nào đó làm mẫu chung và đổi dấu các phân thức có thừa số ở mẫu phải đổi dấu.

• Cách giải

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{1}{y^3 - x^2y} + \frac{1}{x^3 - xy^2} = \frac{1}{y(y^2 - x^2)} + \frac{1}{x(x^2 - y^2)} = \\ & = \frac{-1}{y(x^2 - y^2)} + \frac{1}{x(x^2 - y^2)} = \frac{-x + y}{xy(x^2 - y^2)} = \frac{-(x - y)}{xy(x - y)(x + y)} \\ & = \frac{-1}{xy(x + y)} \end{aligned}$$

TXĐ: $x \neq 0; y \neq 0; x \neq \pm y$

$$\text{b)} \quad \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$$

Trước hết, phân tích mẫu thành nhân tử:

$$x^2 - 3x + 2 = x^2 - x - 2x + 2 = x(x - 1) - 2(x - 1) = (x - 1)(x - 2)$$

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2x - 3x + 6 = x(x - 2) - 3(x - 2) = (x - 2)(x - 3)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)(x - 2)} + \frac{1}{(x - 2)(x - 3)} \\ & = \frac{(x - 2)(x - 3) + (x - 3) + (x - 1)}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^2 - 2x - 3x + 6 + x - 3 + x - 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x-1)(x-2)(x-3)} \\
&= \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3}
\end{aligned}$$

TXĐ: $x \neq 1$; $x \neq 2$; $x \neq 3$.

$$\begin{aligned}
\text{c) } &\frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{2}{(2-x)(3-x)} + \frac{3}{(1-x)(x-3)} \\
&= \frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{2}{(x-2)(x-3)} + \frac{-3}{(x-1)(x-3)} \\
&= \frac{(x-3) + 2(x-1) - 3(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} \\
&= \frac{x-3 + 2x-2 - 3x+6}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}
\end{aligned}$$

● Khai thác bài toán

Sau khi cộng các phân thức, ở câu a được phân thức $\frac{-(x-y)}{xy(x-y)(x+y)}$, ở câu b được phân thức $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$, cần lưu ý rút gọn phân thức theo TXĐ của mỗi phân thức đó và ta có kết quả $\frac{-1}{xy(x+y)}$ và $\frac{1}{x-3}$.

Hãy theo dõi thêm ví dụ sau: cộng các phân thức

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} + \frac{2}{2-x} \\
&= \frac{x^2}{(x+2)(x-2)} + \frac{1}{x+2} - \frac{2}{x-2} \\
&= \frac{x^2 + (x-2) - 2(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2 + x - 2 - 2x - 4}{(x+2)(x-2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^2 - 4 - x - 2}{(x + 2)(x - 2)} = \frac{(x^2 - 4) - (x + 2)}{(x + 2)(x - 2)} = \frac{(x + 2)(x - 2) - (x + 2)}{(x + 2)(x - 2)} \\
&= \frac{(x + 2)(x - 2 - 1)}{(x + 2)(x - 2)} = \frac{x - 3}{x - 2}.
\end{aligned}$$

TXĐ: $x \neq \pm 2$.

Bài 12. Trừ các phân thức sau:

a) $\frac{x^2 - 1}{3x^2 - 6x + 3} - \frac{x + 3}{3x + 3}$;

b) $\frac{1}{2x - 2y} - \frac{1}{2x + 2y} + \frac{1}{y^2 - x^2}$;

c) $\frac{3}{(x - 1)(x - 2)} - \frac{2}{(x - 2)(x - 3)} - \frac{1}{(x - 3)(x - 1)}$.

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài cho các phân thức không cùng mẫu, để trừ các phân thức phải quy đồng mẫu.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a và b, cần phân tích mẫu thành nhân tử để quy đồng mẫu và làm phép trừ.

Với câu c mẫu là tích của ba nhân tử mà ta cần xác định từ các mẫu đã cho.

● **Cách giải**

a) $\frac{x^2 - 1}{3x^2 - 6x + 3} - \frac{x + 3}{3x + 3} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{3(x^2 - 2x + 1)} - \frac{x + 3}{3(x + 1)}$
 $= \frac{(x - 1)(x + 1)}{3(x - 1)^2} - \frac{x + 3}{3(x + 1)}$ TXĐ: $x \neq \pm 1$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x+1}{3(x-1)} - \frac{x+3}{3(x+1)} = \frac{(x+1)^2 - (x+3)(x-1)}{3(x-1)(x+1)} = \\
&= \frac{x^2 + 2x + 1 - (x^2 - x + 3x - 3)}{3(x-1)(x+1)} = \\
&= \frac{x^2 + 2x + 1 - x^2 + x - 3x + 3}{3(x^2 - 1)} = \frac{4}{3(x^2 - 1)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b)} \quad &\frac{1}{2x-2y} - \frac{1}{2x+2y} + \frac{1}{y^2-x^2} \\
&= \frac{1}{2(x-y)} - \frac{1}{2(x+y)} - \frac{1}{x^2-y^2} \\
&= \frac{(x+y) - (x-y) - 2}{2(x-y)(x+y)} = \frac{x+y-x+y-2}{2(x^2-y^2)} = \frac{2(y-1)}{2(x^2-y^2)} \\
&= \frac{y-1}{x^2-y^2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c)} \quad &\frac{3}{(x-1)(x-2)} - \frac{2}{(x-2)(x-3)} - \frac{1}{(x-3)(x-1)} \\
&= \frac{3(x-3) - 2(x-1) - (x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} \\
&= \frac{3x-9-2x+2-x+2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{-5}{(x-1)(x-2)(x-3)}.
\end{aligned}$$

● Khai thác bài toán

Cần lưu ý rút gọn phân thức trước khi thực hiện phép tính chẳng hạn ở câu a bài toán trên, ta có $\frac{(x-1)(x+1)}{3(x-1)^2} = \frac{x+1}{3(x-1)}$. Nhờ rút gọn phân thức này nên mẫu chung chỉ là $3(x-1)(x+1)$, nếu không rút gọn thì mẫu chung sẽ là $3(x-1)^2(x+1)$, khi đó tính toán sẽ phức tạp hơn có khi còn gây ra nhầm lẫn.

Ta làm thêm bài sau đây, để thấy nhờ rút gọn phân thức và

nhóm các phân thức mà không phải quy đồng các mẫu. Ví dụ phải thực hiện phép tính sau:

$$\begin{aligned} & \frac{x^3}{x-1} - \frac{x^2}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \\ &= \left(\frac{x^3}{x-1} - \frac{1}{x-1} \right) - \left(\frac{x^2}{x+1} - \frac{1}{x+1} \right) \\ &= \frac{x^3-1}{x-1} - \frac{x^2-1}{x+1} \quad \text{TXĐ: } x \neq \pm 1 \\ &= \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} - \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} \\ &= x^2+x+1 - (x-1) = x^2+2. \end{aligned}$$

Bài 13

a) Chứng minh đẳng thức:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

b) Áp dụng kết quả trên để tính tổng:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{x^2+3x+2} + \frac{1}{x^2+5x+6} + \frac{1}{x+3}; \\ B &= \frac{2}{x(x+2)} + \frac{2}{(x+2)(x+4)} + \frac{2}{(x+4)(x+6)} + \frac{1}{x+6}. \end{aligned}$$

• Tìm hiểu đề bài

Đề bài yêu cầu chứng minh đẳng thức đã cho, sau đó áp dụng kết quả để tính tổng các phân thức A và B đã cho.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, ta biến đổi vế phải, chính là làm phép trừ hai phân thức không cùng mẫu, để có kết quả bằng vế trái.

Với câu b, vận dụng kết quả câu a, giúp cho việc làm phép cộng các phân thức không cùng mẫu đã cho một cách nhanh chóng.

• Cách giải

a) Biến đổi vế phải

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$$

Vế trái bằng vế phải, đẳng thức được chứng minh.

b) - Ta thấy mẫu của biểu thức A là các đa thức, để áp dụng được kết quả câu a, cần phân tích các mẫu thành nhân tử:

$$x^2 + x = x(x+1)$$

$$x^2 + 3x + 2 = x^2 + x + 2x + 2 = x(x+1) + 2(x+1) = (x+1)(x+2)$$

$$x^2 + 5x + 6 = x^2 + 2x + 3x + 6 = x(x+2) + 3(x+2) = (x+2)(x+3)$$

Do đó có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{x+3} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

- Ta nhận thấy:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} = \frac{x+2-x}{x(x+2)} = \frac{2}{x(x+2)}$$

$$\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} = \frac{x+4-x-2}{(x+2)(x+4)} = \frac{2}{(x+2)(x+4)}$$

$$\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} = \frac{x+6-x-4}{(x+4)(x+6)} = \frac{2}{(x+4)(x+6)}$$

Do đó có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{2}{x(x+2)} + \frac{2}{(x+2)(x+4)} + \frac{2}{(x+4)(x+6)} + \frac{1}{x+6} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Bài 14

a) Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức

$$A = \frac{2x+1}{4x-2} + \frac{1-2x}{4x+2} - \frac{2}{1-4x^2} \quad \text{với } x = \frac{1}{4},$$

$$\text{với } x = -\frac{1}{2}.$$

b) Biết rằng $2x - y = 7$, hãy tính giá trị của biểu thức

$$B = \frac{5x-y}{3x+7} - \frac{3y-2x}{2y-7}.$$

• Tìm hiểu đề bài

Đề bài câu a cho biểu thức A gồm cộng, trừ các phân thức không cùng mẫu. Phải quy đồng mẫu, làm các phép tính rồi tính giá trị theo biến x đã cho.

Câu b cho biểu thức B gồm hiệu của 2 phân thức, phải tính giá trị của B biết $2x - y = 7$.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, trước hết phải tìm mẫu chung của các phân thức, sau đó rút gọn các phân thức, chú ý tìm TXĐ của các phân thức, cuối cùng là tính giá trị của A theo các biến đã cho.

Với câu b hãy thay $7 = 2x - y$ vào các mẫu của 2 phân thức đã cho, từ đó có kết quả bài toán.

• Cách giải

$$\begin{aligned}
 \text{a) } A &= \frac{2x+1}{4x-2} + \frac{1-2x}{4x+2} - \frac{2}{1-4x^2} \\
 &= \frac{2x+1}{2(2x-1)} + \frac{1-2x}{2(2x+1)} + \frac{2}{(2x-1)(2x+1)} \\
 &= \frac{(2x+1)^2 - (2x-1)^2 + 4}{2(2x-1)(2x+1)} \\
 &= \frac{(2x+1+2x-1)(2x+1-2x+1) + 4}{2(2x-1)(2x+1)} \\
 &= \frac{8x+4}{2(2x-1)(2x+1)} = \frac{4(2x+1)}{2(2x-1)(2x+1)}, \quad \text{TXD: } x \neq \pm \frac{1}{2} \\
 &= \frac{2}{2x-1}
 \end{aligned}$$

Với $x = \frac{1}{4}$ thì $A = \frac{2}{2 \cdot \frac{1}{4} - 1} = \frac{2}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{2}{-\frac{1}{2}} = -4$

Với $x = -\frac{1}{2} \notin \text{TXD}$, nên không có giá trị của A.

b) Thay $7 = 2x - y$ vào mẫu của 2 phân thức có:

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{5x-y}{3x+(2x-y)} - \frac{3y-2x}{2y-(2x-y)} \\
 &= \frac{5x-y}{5x-y} - \frac{3y-2x}{3y-2x}, \quad \text{TXD: } x \neq \frac{1}{5}y, x \neq \frac{3}{2}y \\
 &= 1 - 1 = 0.
 \end{aligned}$$

• Khai thác bài toán

- Trong câu a bài toán trên đã áp dụng quy tắc đổi dấu:

$$\begin{aligned}
 -\frac{-A}{B} &= \frac{A}{B} \\
 -\frac{A}{-B} &= \frac{A}{B}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cụ thể là } + \frac{1 - 2x}{4x + 2} &= - \frac{-(1 - 2x)}{4x + 2} = - \frac{2x - 1}{4x + 2} \\ &- \frac{2}{1 - 4x^2} = - \left(- \frac{2}{-(1 - 4x^2)} \right) = \frac{2}{4x^2 - 1} \end{aligned}$$

Lưu ý là việc đổi dấu một phân thức giúp cho việc tìm mẫu chung của các phân thức thêm nhanh chóng.

- Ở câu b, ta có thể giải bài toán theo một cách khác là thay $2x - y = 7$ vào các tử bằng cách viết lại các tử để xuất hiện đa thức $2x - y$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } B &= \frac{5x - y}{3x + 7} - \frac{3y - 2x}{2y - 7} \\ &= \frac{3x + (2x - y)}{3x + 7} - \frac{2y - (2x - y)}{2y - 7} \\ &= \frac{3x + 7}{3x + 7} - \frac{2y - 7}{2y - 7} = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Bài 15

a) Thực hiện phép tính rồi tìm các giá trị của biến để biểu thức

$$A = (x^2 - y^2) \cdot \frac{x^2 + y^2}{y^4 - x^2 y^2} \text{ có giá trị âm.}$$

b) Thực hiện phép tính rồi tìm các giá trị của biến để biểu thức

$$B = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 - 1} \cdot \frac{2x^2 + 2x + 2}{x - 1} \text{ có giá trị dương.}$$

• Tìm hiểu đề bài

Đề bài câu a là phép nhân một đa thức với một phân thức. Sau khi nhân, tìm các giá trị của biến để $A < 0$.

Câu b là phép nhân một phân thức với một phân thức. Sau khi nhân, tìm các giá trị của biến để $B > 0$.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, cần áp dụng quy tắc $A \cdot \frac{C}{D} = \frac{A.C}{D}$, rồi phân tích mẫu thành nhân tử, rút gọn phân thức thỏa mãn TXD của nó.

Với câu b, cần áp dụng quy tắc $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A.C}{B.D}$, rồi phân tích tử và mẫu thành nhân tử, rút gọn phân thức thỏa mãn TXD của nó.

● **Cách giải**

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= (x^2 - y^2) \cdot \frac{x^2 + y^2}{y^4 - x^2 y^2} = \frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{y^2(y^2 - x^2)} \\ &= - \frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{y^2(x^2 - y^2)} = - \frac{x^2 + y^2}{y^2} \end{aligned}$$

TXD: $y \neq 0$; $x \neq \pm y$.

Ta thấy, do $y \neq 0$ nên $y^2 > 0$; do $x^2 + y^2 > 0$ nên suy ra

$$- \frac{x^2 + y^2}{y^2} < 0.$$

Vậy biểu thức A đã cho có giá trị âm với mọi giá trị của biến thuộc tập xác định, tức là $y \neq 0$; $x \neq \pm y$.

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 - 1} \cdot \frac{2x^2 + 2x + 2}{x - 1} \\ &= \frac{(x + 1)^2}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} \cdot \frac{2(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \frac{2(x + 1)^2}{(x - 1)^2} \end{aligned}$$

$$(\text{Vì } x^2 + x + 1 = x^2 + 2x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \neq 0)$$

TXD: $x \neq 1$

Ta thấy, do $x \neq 1$ nên $(x - 1)^2 > 0$, và với $x \neq -1$ thì $(x + 1)^2 > 0$

$$\text{nên } 2(x + 1)^2 > 0, \text{ suy ra } \frac{2(x + 1)^2}{(x - 1)^2} > 0$$

Vậy biểu thức B đã cho có giá trị dương với mọi giá trị của biến thuộc tập xác định, tức là $x \neq \pm 1$.

● **Khai thác bài toán**

Nhận xét thêm về các biến:

- Với câu a, điều kiện để biểu thức A đã cho có giá trị âm là $y \neq 0, x \neq \pm y$. Nhưng điều kiện để biểu thức rút gọn $-\frac{x^2 + y^2}{y^2}$ có giá trị âm chỉ là $y \neq 0$.

- Với câu b, điều kiện để biểu thức B đã cho có giá trị không âm (tức là lớn hơn hoặc bằng 0) là $x \neq 1$. Nhưng để biểu thức rút gọn $\frac{2(x+1)^2}{(x-1)^2}$ có giá trị dương là $x \neq -1$.

Bài 16. Chứng minh các đẳng thức sau:

$$a) \frac{a + b + c}{(a + b)^2 - c(a + b)} \cdot \frac{2a + 2b}{a^2 + 2ab + b^2 - c^2} = \frac{2}{(a + b - c)^2}$$

$$b) \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 6} \cdot \frac{x^2 + x - 12}{x^2 + 3x - 4} = \frac{y^2 - 2y - 15}{y^2 - 3y - 10} \cdot \frac{y^2 - 4}{y^2 + y - 6}$$

● **Tim hiểu đề bài**

Đề bài yêu cầu chứng minh đẳng thức, có thể biến đổi vế này sao cho bằng vế kia, hoặc biến đổi cả hai vế để cùng bằng một số nào đó. Ở câu b vế trái chứa biến x còn vế phải lại chứa biến y .

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, hãy biến đổi vế trái để được một biểu thức bằng vế phải.

Với câu b, hãy biến đổi cả hai vế (vì hai vế có biến khác nhau) để chúng cùng bằng một số nào đó.

● Cách giải

a) Biến đổi vế trái:

$$\begin{aligned} & \frac{a + b + c}{(a + b)^2 - c(a + b)} \cdot \frac{2a + 2b}{a^2 + 2ab + b^2 - c^2} \\ &= \frac{a + b + c}{(a + b)(a + b - c)} \cdot \frac{2(a + b)}{(a + b)^2 - c^2} \\ &= \frac{(a + b + c) \cdot 2(a + b)}{(a + b)(a + b - c)(a + b + c)(a + b - c)} = \frac{2}{(a + b - c)^2} \end{aligned}$$

Vế trái bằng vế phải, đẳng thức được chứng minh.

b) Biến đổi vế trái:

$$\begin{aligned} & \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 6} \cdot \frac{x^2 + x - 12}{x^2 + 3x - 4} \\ &= \frac{(x^2 - 1) + (x - 1)}{(x^2 - 4) - (x + 2)} \cdot \frac{(x^2 - 9) + (x - 3)}{(x^2 - x) + (4x - 4)} \\ &= \frac{(x - 1)(x + 2)}{(x + 2)(x - 3)} \cdot \frac{(x - 3)(x + 4)}{(x - 1)(x + 4)} = 1. \end{aligned}$$

Biến đổi vế phải:

$$\begin{aligned} & \frac{y^2 - 2y - 15}{y^2 - 3y - 10} \cdot \frac{y^2 - 4}{y^2 + y - 6} \\ &= \frac{y^2 - 5y + 3y - 15}{y^2 - 5y + 2y - 10} \cdot \frac{y^2 - 2^2}{y^2 - 4 + y - 2} \\ &= \frac{y(y - 5) + 3(y - 5)}{y(y - 5) + 2(y - 5)} \cdot \frac{(y + 2)(y - 2)}{(y^2 - 4) + (y - 2)} \\ &= \frac{(y - 5)(y + 3)}{(y - 5)(y + 2)} \cdot \frac{(y + 2)(y - 2)}{(y - 2)(y + 3)} = 1. \end{aligned}$$

Vế trái bằng vế phải vì cùng bằng 1, đẳng thức được chứng minh.

• Khai thác bài toán

- Bài toán câu b, có thể ra cách khác như sau:

Chứng minh rằng các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến:

$$a) A = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 6} \cdot \frac{x^2 + x - 12}{x^2 + 3x - 4};$$

$$b) B = \frac{y^2 - 2y - 15}{y^2 - 3y - 10} \cdot \frac{y^2 - 4}{y^2 + y - 6}.$$

Hãy nêu nhận xét về hai biểu thức A và B.

- Cũng ở câu b này, có thể nêu ra nhận xét về phân tích đa thức thành nhân tử, chẳng hạn:

Với $y^2 - 2y - 15$, không thể đặt nhân tử chung, nhóm số hạng hoặc dùng hằng đẳng thức, mà phải thêm bớt hạng tử. Thêm và bớt thế nào? Hãy để ý đến 15 có các ước là 3 và 5, từ đó có $y^2 - 2y - 15 = y^2 - 5y + 3y - 15$.

Với $y^2 - 3y - 10$ cũng vậy, để ý đến 10 có các ước là 2 và 5, từ đó có $y^2 - 3y - 10 = y^2 - 5y + 2y - 10$.

Với $y^2 + y - 6$ có thể:

a) Thêm $2y$, bớt $2y$, có:

$$y^2 - 2y + 3y - 6 = y(y - 2) + 3(y - 2) = (y - 2)(y + 3)$$

b) Tách hạng tử 6, có:

$$y^2 - 4 + y - 2 = (y - 2)(y + 2) + (y - 2) = (y - 2)(y + 3).$$

Bài 17. Thực hiện các phép tính sau:

$$a) \frac{5x + 5y}{3x - 3y} : \frac{10x}{x^2 - y^2}; \quad b) \frac{x - 2}{x + 2} : \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + 2x + 4};$$

$$c) \frac{x - y}{x} : \frac{x^2 - 2xy + y^2}{xy}; \quad d) \frac{1 - x^4}{x + 1} : (x^2 - 1).$$

● **Tim hiểu đề bài**

Đề bài yêu cầu thực hiện phép chia phân thức cho phân thức.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Cần áp dụng quy tắc sau:

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} \quad (\text{với } \frac{C}{D} \neq 0)$$

$$\frac{A}{B} : C = \frac{A}{B \cdot C} \quad (\text{với } C \neq 0).$$

Để có thể thực hiện các quy tắc trên cần biến đổi tử và mẫu thành nhân tử. Chú ý khi rút gọn cần lưu ý đến biến phải thuộc TXĐ.

● **Cách giải**

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{5x + 5y}{3x - 3y} : \frac{10x}{x^2 - y^2} &= \frac{5(x + y)}{3(x - y)} : \frac{10x}{(x + y)(x - y)} \\ &= \frac{5(x + y)}{3(x - y)} \cdot \frac{(x + y)(x - y)}{10x} = \frac{(x + y)^2}{6x}. \end{aligned}$$

TXĐ: $x \neq \pm y$; $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{x - 2}{x + 2} : \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + 2x + 4} &= \frac{x - 2}{x + 2} : \frac{(x - 2)^2}{(x + 2)^2} \\ &= \frac{x - 2}{x + 2} \cdot \frac{(x + 2)^2}{(x - 2)^2} = \frac{x + 2}{x - 2}. \end{aligned}$$

TXĐ: $x \neq \pm 2$.

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{x - y}{x} : \frac{x^2 - 2xy + y^2}{xy} &= \frac{x - y}{x} : \frac{(x - y)^2}{xy} \\ &= \frac{x - y}{x} \cdot \frac{xy}{(x - y)^2} = \frac{y}{x - y}. \end{aligned}$$

TXĐ: $x \neq 0$; $y \neq 0$; $x \neq y$.

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{1-x^4}{x+1} : (x^2-1) &= \frac{-(x^4-1)}{x+1} : (x^2-1) = \\ &= \frac{-(x^2-1)(x^2+1)}{x+1} : (x^2-1) = -\frac{x^2+1}{x+1} \end{aligned}$$

TXD: $x \neq \pm 1$.

● Khai thác bài toán

Vấn đề đặt ra là làm thế nào mà biết kết quả tìm được là đúng?

Câu trả lời là: hãy thử lại.

Ta thử lại với câu a chẳng hạn:

$$\frac{10x}{x^2-y^2} \cdot \frac{(x+y)^2}{6x} = \frac{10x(x+y)(x+y)}{6x(x+y)(x-y)} = \frac{5(x+y)}{3(x-y)} = \frac{5x+5y}{3x-3y}$$

Qua thử lại, ta tìm được phân thức bị chia $\frac{5x+5y}{3x-3y}$.

Bài 18. Chứng minh các đẳng thức:

$$\text{a) } \left[\frac{1}{a-1} - \frac{2a}{(a^2+1)(a-1)} \right] : \frac{a^2+a+1}{a^2+1} = \frac{a-1}{a^2+a+1} \text{ với } a \neq 1;$$

$$\text{b) } \left(\frac{1-x^3}{1-x} - x \right) : \frac{1+x}{1-x-x^2+x^3} = (1-x)^2(1+x^2)$$

với $x \neq \pm 1$.

● Tìm hiểu đề bài

Đề bài đòi hỏi hãy biến đổi vế trái bằng vế phải, ngầm hiểu vế phải là đáp số của biểu thức ở vế trái.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Cần phải thực hiện các phép tính ở vế trái theo thứ tự: làm tính trong ngoặc, trong móc vuông trước, ở đó phép tính nhân và chia làm trước rồi mới làm phép tính cộng trừ.

• Cách giải

a) Biến đổi vế trái:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{a-1} - \frac{2a}{(a^2+1)(a-1)} \right] : \frac{a^2+a+1}{a^2+1} \\ &= \left[\frac{a^2+1}{(a^2+1)(a-1)} - \frac{2a}{(a^2+1)(a-1)} \right] : \frac{a^2+a+1}{a^2+1} \\ &= \frac{a^2-2a+1}{(a^2+1)(a-1)} : \frac{a^2+a+1}{a^2+1} \\ &= \frac{(a-1)^2}{(a^2+1)(a-1)} \cdot \frac{a^2+1}{a^2+a+1} = \frac{a-1}{a^2+a+1} \end{aligned}$$

Vế trái bằng vế phải, đẳng thức được chứng minh.

b) Biến đổi vế trái:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1-x^3}{1-x} - x \right) : \frac{1+x}{1-x-x^2+x^3} \\ &= \left[\frac{(1-x)(1+x+x^2)}{1-x} - x \right] : \frac{1+x}{(1+x^3)-x(1+x)} \\ &= (1+x+x^2-x) : \frac{1+x}{(1+x)(1-x+x^2)-x(1+x)} \\ &= (1+x^2) : \frac{1+x}{(1+x)(1-x+x^2-x)} \\ &= (1+x^2) : \frac{1}{(1-x)^2} = (1+x^2) \cdot (1-x)^2 \end{aligned}$$

• Khai thác bài toán

Biết rằng, nếu có $A = B$ thì có $A - B = 0$. Do đó để chứng minh hai đẳng thức đã cho có thể chứng minh hai đẳng thức sau:

$$\text{a) } \left[\frac{1}{a-1} - \frac{2a}{(a^2+1)(a-1)} \right] : \frac{a^2+a+1}{a^2+1} - \frac{a-1}{a^2+a+1} = 0;$$

$$\text{b) } \left(\frac{1-x^3}{1-x} - x \right) : \frac{1+x}{1-x-x^2+x^3} - (1-x)^2(1+x^2) = 0.$$

Coi đây như 2 bài tập, bạn đọc hãy tự làm.

B. CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

ĐỀ BÀI

Bài 19. Cho phân thức $A = \frac{3x^2 + 3x - 18}{x^2 + 4x + 3}$.

a) Tìm tập xác định của phân thức;

b) Tìm giá trị của x để phân thức bằng 0.

Bài 20. Viết các biểu thức sau dưới dạng những phân thức có cùng tử:

a) $\frac{x+y}{y}$ và $\frac{x-y}{x}$;

b) $\frac{x^3+y^3}{(x^2+y^2-xy)y}$ và $\frac{x+y}{x}$.

Bài 21. Tìm giá trị nguyên của x để phân thức sau có giá trị là một số nguyên. Tìm giá trị nguyên đó của phân thức.

a) $A = \frac{5x+19}{x+2}$;

b) $B = \frac{2x^3 - 9x^2 + 10x + 4}{2x-1}$.

Bài 22. Rút gọn các phân thức sau:

a) $\frac{x^6-1}{(x-1)(2x^2+4x+2)}$;

b) $\frac{x^3-4x^2-x+4}{x^3-7x^2+14x-8}$.

Bài 23. Giải các phương trình sau:

a)
$$\frac{9x + 7}{2} - \left(x - \frac{x - 2}{7}\right) = 36;$$

b)
$$\frac{x - 1}{4} - \frac{1}{8} \left(\frac{x - 5}{4} - \frac{14 - 2x}{5}\right) = \frac{x - 9}{2} - \frac{7}{8}.$$

Bài 24. Rút gọn rồi tính giá trị biểu thức:

$$\frac{(x - y)^2 + xy}{(x + y)^2 - xy} \cdot \left[1 : \frac{x^5 + y^5 + x^3y^2 + x^2y^3}{(x^3 - y^3)(x^3 + y^3 + x^2y + xy^2)}\right]$$

với $x = 1, y = -3,25$.

Bài 25. Cho biểu thức:

$$A = \left(\frac{x + 1}{x - 1} - \frac{x - 1}{x + 1}\right) : \frac{2x}{5x - 5}.$$

- Rút gọn A;
- Tính giá trị của biểu thức A với $x = -3,5$;
- Với giá trị nào của x để $A = 4$?

HƯỚNG DẪN - CÁCH GIẢI

Bài 19. ● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, hãy giải phương trình $x^2 + 4x + 3 = 0$ để tìm giá trị của biến, sau đó để phân thức có nghĩa thì $x^2 + 4x + 3$ phải khác 0, từ đó có TXĐ.

Với câu b, để tìm các giá trị của x sao cho phân thức bằng 0 cần giải phương trình $3x^2 + 3x - 18 = 0$.

● Cách giải

a)
$$\begin{aligned}x^2 + 4x + 3 &= x^2 + x + 3x + 3 = (x^2 + x) + (3x + 3) \\ &= x(x + 1) + 3(x + 1) = (x + 1)(x + 3) = 0 \text{ khi} \\ x &= -1 \text{ hoặc } x = -3\end{aligned}$$

Vậy TXĐ: $x \neq -1; x \neq -3$.

$$\begin{aligned} \text{b) } 3x^2 + 3x - 18 &= 3(x^2 + x - 6) = 3(x^2 - 4 + x - 2) \\ &= 3[(x^2 - 4) + (x - 2)] = 3(x - 2)(x + 3) = 0 \end{aligned}$$

khí $x = 2$ hoặc $x = -3$.

$$\text{Vì } x = -3 \notin \text{TXĐ nên chỉ có } x = 2 \text{ thì } \frac{3x^2 + 3x - 18}{x^2 + 4x + 3} = 0.$$

Bài 20. • Hướng dẫn cách tìm lời giải

Vận dụng tính chất cơ bản của phân thức để biến phân thức đã cho thành phân thức mới có tử phù hợp.

• Cách giải

$$\text{a) } \frac{x + y}{y} = \frac{(x + y)(x - y)}{y(x - y)} = \frac{x^2 - y^2}{y(x - y)}$$

$$\text{và } \frac{x - y}{x} = \frac{(x - y)(x + y)}{x(x + y)} = \frac{x^2 - y^2}{x(x + y)}$$

Ta được hai phân thức cùng tử.

$$\text{b) } \frac{x^3 + y^3}{(x^2 + y^2 - xy)y} = \frac{(x + y)(x^2 - xy + y^2)}{(x^2 + y^2 - xy)y} = \frac{x + y}{y}$$

Như vậy $\frac{x + y}{y}$ và $\frac{x + y}{x}$ là hai phân thức có cùng tử.

Bài 21. • Hướng dẫn cách tìm lời giải

Thực hiện phép chia tử cho mẫu để tách được phần nguyên của phân thức. Muốn phân thức có giá trị nguyên thì phân thức đi sau phần nguyên phải là số nguyên. Từ đó lập bảng tìm các giá trị x nguyên và giá trị nguyên của phân thức.

• Cách giải

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{5x + 19}{x + 2} = \frac{5(x + 2) + 9}{x + 2} = \frac{5(x + 2)}{x + 2} + \frac{9}{x + 2} \\ &= 5 + \frac{9}{x + 2} \end{aligned}$$

Do x là số nguyên nên A là số nguyên nếu $x + 2$ là ước của 9. Ước của 9 là $\pm 1, \pm 3, \pm 9$. Do đó:

$x + 2$	-1	1	-3	3	-9	9
x	-3	-1	-5	1	-11	7
A	-4	14	2	8	4	6

b) Thực hiện phép chia $2x^3 - 9x^2 + 10x + 4$ cho $2x - 1$ được thương là $x^2 - 4x + 3$ và dư 7.

$$\text{Từ đó có } B = x^2 - 4x + 3 + \frac{7}{2x - 1}.$$

Do x là số nguyên nên B là số nguyên nếu $2x - 1$ là ước của 7. Ước của 7 là $\pm 1; \pm 7$. Do đó:

$2x - 1$	-1	1	-7	7
x	0	1	-3	4
B	-4	7	23	4

Bài 22. • Hướng dẫn cách tìm lời giải

Xem hướng dẫn bài 6 mục "Phân thức đại số và các phép tính".

• Cách giải

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{x^6 - 1}{(x - 1)(2x^2 + 4x + 2)} &= \frac{(x^2)^3 - 1}{(x - 1)2(x^2 + 2x + 1)} \\ &= \frac{(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)}{2(x - 1)(x + 1)^2} = \frac{(x - 1)(x + 1)(x^4 + x^2 + 1)}{2(x - 1)(x + 1)^2} \\ &= \frac{x^4 + x^2 + 1}{2(x + 1)} \end{aligned}$$

TXĐ: $x \neq \pm 1$.

$$\begin{aligned}
\text{b) } \frac{x^3 - 4x^2 - x + 4}{x^3 - 7x^2 + 14x - 8} &= \frac{(x^3 - 4x^2) - (x - 4)}{(x^3 - 8) - (7x^2 - 14x)} \\
&= \frac{x^2(x - 4) - (x - 4)}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4) - 7x(x - 2)} = \frac{(x - 4)(x^2 - 1)}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4 - 7x)} \\
&= \frac{(x - 4)(x - 1)(x + 1)}{(x - 2)(x^2 - 5x + 4)} = \frac{(x - 4)(x - 1)(x + 1)}{(x - 2)(x^2 - x - 4x + 4)} \\
&= \frac{(x - 4)(x - 1)(x + 1)}{(x - 2)[x(x - 1) - 4(x - 1)]} = \frac{(x - 4)(x - 1)(x + 1)}{(x - 2)(x - 1)(x - 4)} = \\
&= \frac{x + 1}{x - 2}
\end{aligned}$$

TXD: $x \neq 1$; $x \neq 2$; $x \neq 4$.

Bài 23. ● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Trước hết hãy thực hiện phép tính trong dấu ngoặc, sau đó quy đồng mẫu rồi khử mẫu. Chuyển vế rồi thực hiện các phép tính để tìm nghiệm.

● Cách giải

$$\text{a) } \frac{9x + 7}{2} - \left(x - \frac{x - 2}{7}\right) = 36$$

$$\frac{9x + 7}{2} - \frac{7x - x + 2}{7} = 36$$

$$\frac{9x + 7}{2} - \frac{6x + 2}{7} = 36$$

$$7(9x + 7) - 2(6x + 2) = 36 \cdot 14$$

$$63x + 49 - 12x - 4 = 504$$

$$63x - 12x = 504 - 49 + 4$$

$$\text{hay } 51x = 459; \quad x = 9$$

$$b) \frac{x-1}{4} - \frac{1}{8} \left(\frac{x-5}{4} - \frac{14-2x}{5} \right) = \frac{x-9}{2} - \frac{7}{8}$$

$$\frac{x-1}{4} - \frac{1}{8} \cdot \frac{5x-25-56+8x}{20} = \frac{x-9}{2} - \frac{7}{8}$$

$$\frac{x-1}{4} - \frac{13x-81}{160} = \frac{x-9}{2} - \frac{7}{8}$$

$$40x - 40 - 13x + 81 = 80x - 720 - 140;$$

$$40x - 13x - 80x = -720 - 140 - 81 + 40;$$

$$53x = 901; \quad x = \frac{901}{53} = 17.$$

Bài 24. • Hướng dẫn cách tìm lời giải

Có thể đặt A là biểu thức bị nhân và đặt B là biểu thức nhân (trong móc vuông). Nên thực hiện riêng từng biểu thức A, B rồi ghép lại để có kết quả rút gọn của bài toán.

• Cách giải

$$A = \frac{(x-y)^2 + xy}{(x+y)^2 - xy} = \frac{x^2 - 2xy + y^2 + xy}{x^2 + 2xy + y^2 - xy} = \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2}$$

$$\begin{aligned} B &= 1 : \frac{x^5 + y^5 + x^3y^2 + x^2y^3}{(x^3 - y^3)(x^3 + y^3 + x^2y + xy^2)} \\ &= 1 : \frac{(x^5 + x^3y^2) + (x^2y^3 + y^5)}{(x^3 - y^3)[(x^3 + x^2y) + (xy^2 + y^3)]} \\ &= 1 : \frac{x^3(x^2 + y^2) + y^3(x^2 + y^2)}{(x^3 - y^3)[x^2(x+y) + y^2(x+y)]} \\ &= 1 : \frac{(x^2 + y^2)(x^3 + y^3)}{(x^3 - y^3)(x+y)(x^2 + y^2)} \\ &= 1 : \frac{(x^2 + y^2)(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{(x-y)(x^2 + xy + y^2)(x+y)(x^2 + y^2)} \end{aligned}$$

$$= 1 : \frac{x^2 - xy + y^2}{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}$$

$$= \frac{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}{x^2 - xy + y^2}$$

$$\text{Vậy } A \cdot B = \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2} \cdot \frac{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}{x^2 - xy + y^2} = x - y.$$

Tính giá trị:

$$x - y = 1 - (-3,25) = 1 + 3,25 = 4,25.$$

Bài 25. ● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Để rút gọn cần thực hiện phép tính trong dấu ngoặc trước, sau đó làm phép chia. Chú ý đến TXĐ.

Để tìm x cần phải giải phương trình mà vế trái là biểu thức đã được rút gọn và vế phải bằng 4. Giá trị tìm được phải thuộc TXĐ.

● Cách giải

a) Rút gọn A

$$A = \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} \right) : \frac{2x}{5x-5}$$

$$= \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{(x-1)(x+1)} : \frac{2x}{5(x-1)}$$

$$= \frac{(x+1+x-1)(x+1-x+1)}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{5(x-1)}{2x}$$

$$= \frac{4x}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{5(x-1)}{2x} = \frac{10}{x+1}$$

TXĐ: $x \neq 0$; $x \neq \pm 1$.

b) Tính giá trị của A

$$A = \frac{10}{x+1} = \frac{10}{-3,5+1} = \frac{10}{-2,5} = -4.$$

c) Tìm giá trị của x để $A = 4$.

$$\frac{10}{x+1} = 4 \Leftrightarrow 4x + 4 = 10 \Leftrightarrow 4x = 6 \Leftrightarrow x = 1,5.$$

$$x = 1,5 \in \text{TXD}.$$

IV. HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

A. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN

Bài 1. Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận.

a) Điền số thích hợp vào các ô trống trong bảng sau:

x	0,5	1		3	
y	-1		-4		-8

b) y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ nào? viết công thức.

c) x tỉ lệ thuận với y theo hệ số tỉ lệ nào? viết công thức.

● Tìm hiểu đề bài

Đề bài câu a cho một số giá trị của x và y ở trong bảng, biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận, phải điền tiếp các số vào các ô trống trong bảng.

Câu b cho y tỉ lệ thuận với x , phải tìm hệ số tỉ lệ a theo các giá trị có trên bảng, sau đó viết công thức về mối tương quan giữa y và x .

Câu c, tương tự như câu b với x tỉ lệ thuận với y .

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, biết rằng x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận với nhau

tức là chúng liên hệ với nhau theo công thức $y = ax$ (1) trong đó a là hệ số tỉ lệ. Từ (1) suy ra $a = \frac{y}{x}$ (2). Căn cứ vào hai giá trị của x , y ở cột thứ nhất suy ra $a = \frac{-1}{0,5} = -2$. Từ đó tính được giá trị của y ở cột 3 và cột 5 theo công thức (1). Muốn tìm giá trị của x ở cột 4 và cột 6 cần biến đổi công thức (1), ta có $x = \frac{y}{a}$ (3).

Với câu b, biết y tỉ lệ thuận với x tức là có $y = ax$, hãy căn cứ vào một cặp giá trị bất kì của x , y có trong bảng để tìm hệ số tỉ lệ a , từ đó viết được công thức.

Với câu c, làm tương tự câu b.

• Cách giải

a) Biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận tức là chúng liên hệ với nhau theo công thức $y = ax$ (1).

Từ (1) suy ra $a = \frac{y}{x}$ (2). Thay x , y bởi cặp giá trị ở cột 1 trong bảng, ta có $a = \frac{-1}{0,5} = -2$. Do đó:

$$\text{Giá trị của } y \text{ ở cột 3 là } y_3 = a \cdot x = -2 \cdot 1 = -2$$

$$\text{Giá trị của } y \text{ ở cột 5 là } y_5 = a \cdot x = -2 \cdot 3 = -6.$$

Từ (1) suy ra $x = \frac{y}{a}$ (3). Thay giá trị của y ở cột 4, cột 6 lần lượt vào (3) với $a = -2$, có:

$$\text{Giá trị của } x \text{ ở cột 4 là: } x_4 = \frac{y_4}{a} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$\text{Giá trị của } x \text{ ở cột 6 là: } x_6 = \frac{y_6}{a} = \frac{-8}{-2} = 4.$$

Vậy bảng đã cho được điền đầy đủ như sau:

x	0,5	1	2	3	4
y	-1	-2	-4	-6	-8

b) Biết y tỉ lệ thuận với x tức là chúng liên hệ với nhau theo công thức $y = ax$. Thay bất kì cặp giá trị nào của x, y trong bảng trên ta sẽ có hệ số tỉ lệ a :

$$-6 = a \cdot 3 \Rightarrow a = -6 : 3 = -2.$$

Ta có công thức $y = -2x$.

c) Biết x tỉ lệ thuận với y tức là chúng liên hệ với nhau theo công thức $x = ay$. Thay bất kì cặp giá trị nào của x, y trong bảng trên ta sẽ có hệ số tỉ lệ a :

$$2 = a \cdot (-4) \Rightarrow a = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

Ta có công thức $x = -\frac{1}{2}y$.

● Khai thác bài toán

Không nên cho rằng: nếu hai đại lượng tỉ lệ thuận với nhau thì khi giá trị của đại lượng này tăng làm cho giá trị tương ứng của đại lượng kia cũng tăng.

Chẳng hạn, với trường hợp hệ số tỉ lệ là số âm như ở bài toán trên, khi giá trị của x tăng từ 1 đến 4, thì giá trị của y lại giảm từ -2 xuống -8.

Nhận thấy rằng, khi hệ số tỉ lệ là số âm, có thể dùng giá trị tuyệt đối để phát biểu về hai đại lượng tỉ lệ thuận như sau: nếu hai đại lượng tỉ lệ thuận với nhau thì khi giá trị tuyệt đối của đại lượng này tăng (hoặc giảm) làm cho giá trị tuyệt đối tương ứng của đại lượng kia cũng tăng (hoặc giảm). Chẳng hạn, với bài toán trên, rõ ràng khi giá trị tuyệt đối của x tăng từ 1 đến 4, thì giá trị tuyệt đối tương ứng của y cũng tăng từ $|-2|$ đến $|-8|$.

Bài 2

a) Một công nhân làm được 20 dụng cụ trong 30 phút. Hỏi trong 75 phút người đó làm được bao nhiêu dụng cụ?

b) Cứ 100 kg thóc có 64 kg gạo. Hỏi 15 thúng thóc cho bao nhiêu kilôgam gạo biết rằng mỗi thúng thóc có 20 kg thóc?

• Tìm hiểu đề bài

Đề bài câu a cho: 30 phút thì làm được 20 dụng cụ, hỏi trong 75 phút làm được bao nhiêu dụng cụ. Thời gian và số dụng cụ là hai đại lượng tỉ lệ thuận.

Câu b cho: cứ 100 kg thóc có 64 kg gạo. Hỏi trong 20 kg . 15 = 300 kg thóc có bao nhiêu kg gạo. Số kilôgam thóc và số kg gạo là hai đại lượng tỉ lệ thuận.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, đại lượng thứ nhất là số phút (x) có hai giá trị $x_1 = 30$ phút, $x_2 = 75$ phút; đại lượng thứ hai là số dụng cụ (y), mới có giá trị $y_1 = 20$ dụng cụ, cần phải tìm giá trị y_2 .

Biết hai đại lượng x, y tỉ lệ thuận với nhau, nên theo tính chất của hai đại lượng tỉ lệ thuận có $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$. Từ đó suy ra được y_2 .

Với câu b, suy luận tương tự như câu a.

• Cách giải

a) Ta có thể lập bảng tóm tắt đề bài như sau:

Thời gian (x)	Số dụng cụ (y)
30 phút (x_1)	20 dụng cụ (y_1)
75 phút (x_2)	y_2

Biết rằng, thời gian làm việc và số dụng cụ làm được là hai đại lượng tỉ lệ thuận, nên theo tính chất của đại lượng tỉ lệ thuận có:

$$\frac{30}{75} = \frac{20}{y_2}$$

Từ đó $y_2 = \frac{20 \cdot 75}{30} = 50$. Như vậy trong 75 phút người công nhân làm được 50 dụng cụ.

b) Ta có thể lập bảng tóm tắt đề bài như sau:

Số kilôgam thóc (x)	Số kilôgam gạo (y)
100 kg (x_1)	64 kg (y_1)
300 kg (x_2)	y_2
(20 · 15 = 300)	.

Biết rằng, số kilôgam thóc đem xay xát và số kilôgam gạo thu được là hai đại lượng tỉ lệ thuận, nên theo tính chất của đại lượng tỉ lệ thuận có:

$$\frac{100}{300} = \frac{64}{y_2}$$

Từ đó $y_2 = \frac{64 \cdot 300}{100} = 192$. Như vậy, trong 300 kg thóc có 192 kg gạo.

• Khai thác bài toán

Trong bảng tóm tắt câu a chẳng hạn, có hai giá trị của đại lượng x và hai giá trị của đại lượng y:

$$x_1 = 30 \text{ phút} \quad y_1 = 20 \text{ dụng cụ}$$

$$x_2 = 75 \text{ phút} \quad y_2 = ?$$

Tính chất của đại lượng tỉ lệ thuận được vận dụng là:

$$\frac{30}{75} = \frac{20}{y_2} \text{ hay tổng quát } \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

Vận dụng tính chất của đại lượng tỉ lệ thuận để giải mọi bài toán thuộc loại kể trên, chẳng hạn:

Dùng 8 máy thì tiêu thụ hết 70 lít xăng. Hỏi dùng 12 máy cùng

loại thì số xăng tiêu thụ là bao nhiêu?

$$\begin{array}{l} \text{Ta có:} \\ x_1 = 8 \text{ máy} \quad y_1 = 70 \text{ lít xăng} \\ x_2 = 12 \text{ máy} \quad y_2 = ? \end{array}$$

Theo tính chất của đại lượng tỉ lệ thuận có:

$$\frac{8}{12} = \frac{70}{y_2} \Rightarrow y_2 = \frac{70 \cdot 12}{8} = 105 \text{ (lít)}.$$

Bài 3. Ba người thợ cùng làm việc với nhau và đã nhận được số tiền công là 950 000 đ. Số tiền công nhận được của mỗi người tỉ lệ thuận với số ngày công đã làm. Biết tỉ số tiền công của người thứ nhất và người thứ hai là 4:3, tỉ số tiền công của người thứ hai và người thứ ba là 6:5. Tính số tiền công của mỗi người.

● **Tim hiểu đề bài**

Ba người thợ đã nhận được 950 000 đ tiền công. Số tiền công mỗi người được nhận tỉ lệ thuận với số ngày công, nghĩa là làm nhiều công sẽ được lĩnh nhiều tiền hơn. Mặt khác còn cho biết tỉ số tiền công giữa người thứ nhất và người thứ hai, giữa người thứ hai và người thứ ba. Phải tính số tiền công của mỗi người.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Gọi số tiền công của người thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là a , b , c đồng thời ta có $a + b + c = 950\,000$ đ.

$$\text{Mặt khác, ta có } \frac{a}{b} = \frac{4}{3} \text{ và } \frac{b}{c} = \frac{6}{5} \text{ hay } \frac{a}{4} = \frac{b}{3} \text{ (1) và } \frac{b}{6} = \frac{c}{5} \text{ (2).}$$

Phải tìm cách biến dãy (1), dãy (2) thành một dãy các tỉ số bằng nhau, rồi áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau để tìm các kết quả của bài toán.

● **Cách giải**

Gọi số tiền công được nhận của người thứ nhất, thứ hai, thứ ba theo thứ tự là a , b , c đồng thời ta có $a + b + c = 950\,000$ đ.

Theo đầu bài, ta có $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$ và $\frac{b}{c} = \frac{6}{5}$ suy ra $\frac{a}{4} = \frac{b}{3}$ (1) và $\frac{b}{6} = \frac{c}{5}$ (2).

Biết rằng, nếu nhân hai vế của một đẳng thức với cùng một số khác không thì được một đẳng thức tương đương với nó, do đó:

$$\text{Từ } \frac{a}{4} = \frac{b}{3} \Rightarrow \frac{a \cdot 1}{4 \cdot 2} = \frac{b \cdot 1}{3 \cdot 2} \text{ hay } \frac{a}{8} = \frac{b}{6} \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) và (3) suy ra } \frac{a}{8} = \frac{b}{6} = \frac{c}{5}.$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{8} = \frac{b}{6} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{8+6+5} = \frac{950000}{19} = 50\,000$$

$$\text{Do đó có: } \frac{a}{8} = 50000 \Rightarrow a = 50000 \cdot 8 = 400\,000 \text{ (đ)}$$

$$\frac{b}{6} = 50000 \Rightarrow b = 50000 \cdot 6 = 300\,000 \text{ (đ)}$$

$$\frac{c}{5} = 50000 \Rightarrow c = 50000 \cdot 5 = 250\,000 \text{ (đ)}$$

Vậy số tiền công của người thứ nhất, thứ hai và thứ ba lần lượt là 400 000 đ; 300 000 đ và 250 000 đ.

● Khai thác bài toán

Ở bài toán trên, ta đã biến đổi dãy tỉ số (1) (hoặc tỉ lệ thức 1) và dãy tỉ số (2) thành một dãy các tỉ số bằng nhau là $\frac{a}{8} = \frac{b}{6} = \frac{c}{5}$.

Vấn đề đặt ra là nếu có $\frac{a}{b} = \frac{5}{12}$ (3) và $\frac{b}{c} = \frac{8}{9}$ (4) thì có thể biến dãy (3) và dãy (4) về một dãy các tỉ số mới bằng nhau được không?

Được, ta làm như sau: Trước hết tìm BCNN(12; 8) = 24; $24 : 12 = 2$; $24 : 8 = 3$. Sau đó, nhân hai vế của dãy (3) với $\frac{1}{2}$ và nhân hai

vế của dãy (4) với $\frac{1}{3}$, ta có:

$$\frac{a}{10} = \frac{b}{24}, \quad \frac{b}{24} = \frac{c}{27}$$

Từ đó suy ra dãy các tỉ số bằng nhau là:

$$\frac{a}{10} = \frac{b}{24} = \frac{c}{27}$$

Bạn đọc có thể tự làm bài toán sau: Ba người thợ cùng làm việc với nhau và đã nhận được số tiền công là 1 220 000 đ. Số tiền công nhận được của mỗi người tỉ lệ thuận với số ngày công đã làm. Biết tỉ số tiền công của người thứ nhất và người thứ hai là 5 : 12, tỉ số tiền công của người thứ hai và người thứ ba là 8 : 9. Tính số tiền công của mỗi người.

Đáp số: 200 000 đ; 480 000 đ; 540 000 đ.

Bài 4. Chia số 828 thành ba phần:

a) Tỉ lệ thuận với 3; 4 và 5;

b) Tỉ lệ thuận với $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$ và $\frac{3}{4}$.

● **Tìm hiểu đề bài**

Phải chia số 828 thành ba phần, chẳng hạn a, b, c, tỉ lệ thuận với 3; 4 và 5 tức là $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$ (câu a).

Phải chia số 828 thành ba phần, chẳng hạn a, b, c, tỉ lệ thuận với $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$ và $\frac{3}{4}$ tức là $\frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{2}{3}} = \frac{c}{\frac{3}{4}}$.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Hãy dựa vào tính chất của dãy tỉ số bằng nhau để tìm kết quả bài toán.

• Cách giải

a) Gọi ba phần phải tìm lần lượt là a , b , c ; biết ba phần này tỉ lệ thuận với 3; 4 và 5 nên có:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$$

Do $a + b + c = 828$ và theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{3+4+5} = \frac{828}{12} = 69.$$

Từ đó có:

$$\frac{a}{3} = 69 \Rightarrow a = 69.3 = 207$$

$$\frac{b}{4} = 69 \Rightarrow b = 69.4 = 276.$$

$$\frac{c}{5} = 69 \Rightarrow c = 69.5 = 345.$$

Vậy ba phần phải tìm lần lượt là 207; 276 và 345.

b) Gọi ba phần phải tìm lần lượt là a , b , c ; biết ba phần này tỉ lệ với $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$ và $\frac{3}{4}$ hay với $\frac{6}{12}$; $\frac{8}{12}$ và $\frac{9}{12}$, nên có:

$$\frac{a}{\frac{6}{12}} = \frac{b}{\frac{8}{12}} = \frac{c}{\frac{9}{12}}$$

Do $a + b + c = 828$ và theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{\frac{6}{12}} = \frac{b}{\frac{8}{12}} = \frac{c}{\frac{9}{12}} = \frac{a+b+c}{\frac{6+8+9}{12}} = \frac{828}{\frac{23}{12}} = 36.12$$

Từ đó có:

$$\frac{a}{6} = 36.12 \Rightarrow a = 36.12 \cdot \frac{6}{12} = 216$$

$$\frac{b}{8} = 36.12 \Rightarrow b = 36.12 \cdot \frac{8}{12} = 288$$

$$\frac{c}{9} = 36.12 \Rightarrow c = 36.12 \cdot \frac{9}{12} = 324.$$

Vậy ba phần phải tìm lần lượt là 216; 288 và 324.

● Khai thác bài toán

- Chia số 828 thành ba phần tỉ lệ thuận với $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$ và $\frac{3}{4}$ như đã trình bày ở trên, ta cần quy đồng mẫu của các phân số đã cho. Khi các phân số đã được quy đồng mẫu thì vấn đề cần quan tâm là các tử, do vậy có thể coi bài toán trên như sau: chia số 828 thành ba phần tỉ lệ thuận với 6, 8 và 9.

Ta sẽ giải bài toán này như sau:

Gọi ba phần phải tìm lần lượt là a, b, c, biết ba phần này tỉ lệ với $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$ và $\frac{3}{4}$ hay với $\frac{6}{12}$; $\frac{8}{12}$ và $\frac{9}{12}$ hoặc với 6; 8 và 9 nên ta có:

$$\frac{a}{6} = \frac{b}{8} = \frac{c}{9}$$

Do $a + b + c = 828$ và theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{6} = \frac{b}{8} = \frac{c}{9} = \frac{a + b + c}{6 + 8 + 9} = \frac{828}{23} = 36.$$

Từ đó có:

$$\frac{a}{6} = 36 \Rightarrow a = 36.6 = 216$$

$$\frac{b}{8} = 36 \Rightarrow b = 36.8 = 288$$

$$\frac{c}{9} = 36 \Rightarrow c = 36.9 = 324.$$

Nhận xét: Khi chia một số thành các phần tỉ lệ thuận với các phân số, ta quy đồng mẫu các phân số, sau đó đưa bài toán về dạng chia một số thành các phần tỉ lệ với các số nguyên (chính là tử của các phân số đã quy đồng).

- Với bài toán sau đây: chia số 129 thành bốn phần tỉ lệ thuận với 0,5; 0,75; 0,8; và 0,1 thì có thể giải như thế nào ?

Ta có thể giải bằng hai cách như sau:

+ Giữ nguyên các số thập phân đã cho, rồi lập dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{a}{0,5} = \frac{b}{0,75} = \frac{c}{0,8} = \frac{d}{0,1}$$

+ Đổi các số thập phân ra phân số:

$$0,5 = \frac{1}{2}; 0,75 = \frac{3}{4}; 0,8 = \frac{4}{5}; 0,1 = \frac{1}{10}, \text{ sau đó quy đồng mẫu,}$$

được các phân số: $\frac{10}{20}; \frac{15}{20}, \frac{16}{20}$ và $\frac{2}{20}$, rồi lập dãy các tỉ số bằng nhau:

$$\frac{a}{10} = \frac{b}{15} = \frac{c}{16} = \frac{d}{2}$$

Hai cách làm trên (theo số thập phân hay theo số nguyên) sẽ cho cùng một kết quả, bạn đọc hãy tự làm tiếp bài toán này.

ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH

Bài 5

a) Với kí hiệu x (cm) và y (cm) là độ dài cạnh đáy và độ dài đường cao tương ứng của một hình tam giác có diện tích bằng

60 cm^2 , hãy xét xem giữa x và y có mối liên hệ như thế nào? Lập bảng các giá trị của y ứng với các giá trị sau của x : 10; 20; 30; 40; 50; 60.

b) Biết độ dài ba cạnh của tam giác tỉ lệ thuận với 2; 3; 4. Hỏi độ dài ba đường cao tương ứng của tam giác tỉ lệ thuận với ba số nào?

• **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài câu a cho một hình tam giác có diện tích $S = 60 \text{ cm}^2$. Độ dài cạnh đáy và độ dài đường cao tương ứng của hình tam giác đó lần lượt là $x \text{ cm}$, $y \text{ cm}$, cần xác định mối liên hệ giữa x và y . Mặt khác đã cho một số giá trị của x , phải lập bảng để tìm các giá trị tương ứng của y .

Câu b cho ba cạnh của tam giác tỉ lệ thuận với 2; 3; 4, tìm xem độ dài ba đường cao tương ứng của tam giác tỉ lệ thuận với ba số nào?

• **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, áp dụng công thức tính diện tích S của một tam giác có độ dài cạnh đáy là $x \text{ cm}$ và độ dài đường cao tương ứng là $y \text{ cm}$:

$$S = \frac{1}{2} xy \text{ (cm}^2\text{)}$$

Biết $S = 60 \text{ cm}^2$ suy ra $xy = 120 \text{ (cm}^2\text{)}$. Từ đây xác định được mối quan hệ giữa x và y . Lập bảng với các giá trị đã cho của x để tính các giá trị tương ứng của y .

Với câu b, khi tam giác đã cho có độ dài ba cạnh là a , b , c và độ dài các đường cao tương ứng với mỗi cạnh đó là h_a , h_b , h_c , và S là diện tích của tam giác, ta có:

$$h_a : h_b : h_c = \frac{2S}{a} : \frac{2S}{b} : \frac{2S}{c} = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$

Từ đó suy ra kết quả bài toán.

● Cách giải

a) Với tam giác có diện tích $S = 60 \text{ cm}^2$, độ dài cạnh đáy và độ dài đường cao tương ứng lần lượt là $x \text{ cm}$, $y \text{ cm}$, thì công thức tính diện tích tam giác là : $S = \frac{1}{2} xy = 60 \text{ (cm}^2\text{)}$ suy ra $2 S = xy = 120 \text{ (cm}^2\text{)}$

Mối liên hệ giữa x và y được cho bởi công thức $xy = 120$ là liên hệ tỉ lệ nghịch của hai đại lượng x và y .

Dựa vào công thức $xy = 120$ và các giá trị của x đã cho, ta có thể lập nên bảng sau:

x	10	20	30	40	50	60
y	12	6	4	3	2,4	2

b) Gọi độ dài ba cạnh của tam giác là a, b, c , theo đầu bài ta có:

$$a : b : c = 2 : 3 : 4 \text{ hay } \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$$

Gọi các đường cao tương ứng với ba cạnh a, b, c là h_a, h_b, h_c , diện tích tam giác là S , ta có:

$$\begin{aligned} h_a : h_b : h_c &= \frac{2S}{a} : \frac{2S}{b} : \frac{2S}{c} = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} \\ &= \frac{12}{2} : \frac{12}{3} : \frac{12}{4} = 6 : 4 : 3. \end{aligned}$$

● Khai thác bài toán

- Không nên nghĩ rằng, nếu độ dài ba cạnh của tam giác tỉ lệ thuận với $2:3:4$ thì các đường cao tương ứng tỉ lệ thuận với $4:3:2$.

Thực ra thì các đường cao tương ứng tỉ lệ nghịch với $2:3:4$ tức là tỉ lệ thuận với $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$. Biến đổi tỉ số giữa ba phân số trên

thành tỉ số giữa ba số nguyên bằng cách nhân mỗi số với 12 (BCNN của 2; 3; 4) ta được 6:4:3.

- Ở bảng đã lập trong cách giải có thể rút ra những nhận xét gì ?

Ta có 2 nhận xét sau:

1) Tích một giá trị của đại lượng này (x) với giá trị tương ứng của đại lượng kia (y) là một hằng số.

Chẳng hạn: $10 \cdot 12 = \dots = 50 \cdot 2,4 = \dots = 120$

Tổng quát: $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = \dots = a$ (với a là hằng số khác 0)

2) Tỉ số hai giá trị bất kì của đại lượng này (y) bằng tỉ số nghịch đảo của hai giá trị tương ứng của đại lượng kia (x).

Chẳng hạn:

$$\frac{12}{6} = \frac{20}{10}; \quad \frac{4}{3} = \frac{40}{30}, \dots$$

Tổng quát: $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_2}{x_1}; \quad \frac{y_1}{y_3} = \frac{x_3}{x_1}; \dots$

Chú ý: Hai nhận xét kể trên chính là hai tính chất thường được áp dụng trong các bài toán về tỉ lệ nghịch.

Bài 6. Cho ba đại lượng p, q, r . Hãy tìm mối tương quan giữa p với r biết rằng:

- p và q tỉ lệ nghịch, p và r tỉ lệ nghịch;
- p và q tỉ lệ nghịch, q và r tỉ lệ thuận;
- p và q tỉ lệ thuận, q và r tỉ lệ nghịch.

● **Tim hiểu đề bài**

Đề bài cho

a) p và q tỉ lệ nghịch, q và r tỉ lệ nghịch, tìm mối tương quan giữa p và r .

b) p và q tỉ lệ nghịch, q và r tỉ lệ thuận, tìm mối tương quan giữa p và r.

c) p và q tỉ lệ thuận, q và r tỉ lệ nghịch, tìm mối tương quan giữa p và r.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Cần dựa vào công thức về mối liên hệ giữa hai đại lượng tỉ lệ thuận, tỉ lệ nghịch.

Với câu a thì:

- Khi p và q tỉ lệ nghịch ta có $p = \frac{a}{q}$ (1)

- Khi q và r tỉ lệ nghịch ta có $q = \frac{b}{r}$ (2)

Từ đó suy ra được mối quan hệ giữa p và r bằng cách thay (2) vào (1)

Với câu b, c làm tương tự câu a.

● **Cách giải**

a) p và q tỉ lệ nghịch nên $p = \frac{a}{q}$ (1).

q và r tỉ lệ nghịch nên $q = \frac{b}{r}$ (2).

Thay (2) vào (1) có: $p = \frac{a}{\frac{b}{r}} = a \cdot \frac{r}{b} = \frac{a}{b} \cdot r$.

Vậy p và r tỉ lệ thuận.

b) p và q tỉ lệ nghịch nên $p = \frac{a}{q}$ (1)

q và r tỉ lệ thuận nên $q = br$ (3)

Thay (3) vào (1) có:

$$p = \frac{a}{br} = \frac{\frac{a}{b}}{r}$$

Vậy p và r tỉ lệ nghịch.

c) p và q tỉ lệ thuận nên $p = aq$ (4)

q và r tỉ lệ nghịch nên $q = \frac{b}{r}$ (2)

Thay (2) vào (4) có:

$$p = a \cdot \frac{b}{r} = \frac{ab}{r}$$

Vậy p và r tỉ lệ nghịch.

● Khai thác bài toán

Hãy xét xem với 3 đại lượng p, q, r đã được xác lập các mối tương quan trong bài toán còn có thể xảy ra mối tương quan nào nữa không ?

Ta thấy còn mối tương quan sau: nếu p và q tỉ lệ thuận, q và r tỉ lệ thuận thì mối tương quan q và r thế nào ? Vì p và q tỉ lệ thuận nên $p = aq$ (4), q và r tỉ lệ thuận nên $q = br$ (3). Thay (3) vào (4) ta có:

$$p = a.br = ab.r$$

Vậy p và r tỉ lệ thuận.

Bài 7. Ba đội máy cày gồm 13 máy làm việc trên ba cánh đồng có diện tích bằng nhau. Đội một hoàn thành công việc trong 4 ngày, đội hai trong 6 ngày, đội ba trong 8 ngày. Hỏi mỗi đội có mấy máy cày biết rằng năng suất của các máy như nhau ?

● Tìm hiểu đề bài

Đề bài cho biết, có ba cánh đồng có diện tích bằng nhau, với 13 máy cày phân chia cho 3 đội, trong đó đội một, đội hai và đội ba đã hoàn thành công việc lần lượt trong 4; 6; 8 ngày. Hỏi mỗi đội

có mấy máy cày, biết rằng năng suất của các máy như nhau ?

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Biết rằng diện tích ở ba cánh đồng bằng nhau, năng suất của các máy như nhau, nên nếu gọi số máy của đội một, đội hai, đội ba lần lượt là x, y, z , ta có: $4x = 6y = 8z$ (vì số máy tỉ lệ nghịch với ngày hoàn thành).

Từ đó suy ra được dãy các tỉ số bằng nhau, áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau sẽ suy ra kết quả bài toán.

• Cách giải

Gọi số máy cày của ba đội lần lượt là x, y, z (với x, y, z là các số nguyên dương), ta có $x + y + z = 13$.

Vì số máy cày tỉ lệ nghịch với số ngày hoàn thành công việc nên ta có:

$$4x = 6y = 8z, \text{ suy ra}$$

$$\frac{x}{\frac{1}{4}} = \frac{y}{\frac{1}{6}} = \frac{z}{\frac{1}{8}}$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{x}{\frac{1}{4}} = \frac{y}{\frac{1}{6}} = \frac{z}{\frac{1}{8}} &= \frac{x+y+z}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}} = \\ &= \frac{x+y+z}{\frac{6}{24} + \frac{4}{24} + \frac{3}{24}} = \frac{13}{\frac{13}{24}} = 24. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } x = 24 \cdot \frac{1}{4} = 6; y = 24 \cdot \frac{1}{6} = 4; z = 24 \cdot \frac{1}{8} = 3.$$

Số máy của đội một, đội hai, đội ba theo thứ tự là 6; 4; 3 máy.

• Khai thác bài toán

Có thể thay tỉ số giữa phân số $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}$ bằng tỉ số giữa ba số

nguyên bằng cách nhân mỗi số với 24 (BCNN của 4; 6; 8).

Khi đó:

$$x:y:z = \frac{1}{4} : \frac{1}{6} : \frac{1}{8} = \frac{6}{24} : \frac{4}{24} : \frac{3}{24} = 6:4:3.$$

$$\text{Ta có: } \frac{x}{6} : \frac{y}{4} : \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{6+4+3} = \frac{13}{13} = 1.$$

$$\text{Do đó: } x = 1.6 = 6$$

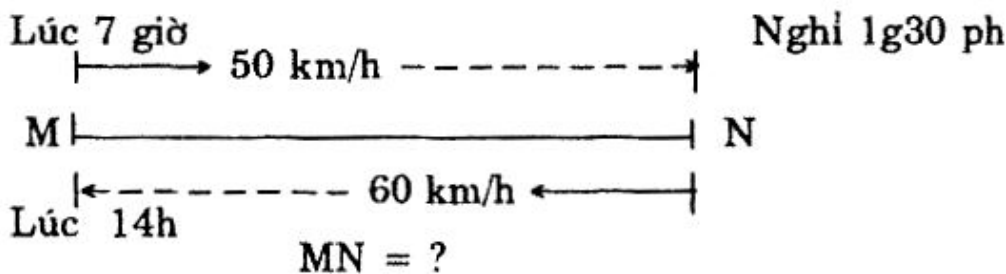
$$y = 1.4 = 4$$

$$z = 1.3 = 3.$$

Bài 8. Một ô tô đi từ M đến N, xe khởi hành lúc 7 giờ sáng với vận tốc 50 km/h. Đến N xe nghỉ lại 1 giờ 30 phút rồi trở về M với vận tốc 60 km/h. Ô tô về đến M lúc 14 giờ. Tính độ dài quãng đường MN.

• **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài toán đã cho được minh họa trên hình vẽ sau:



• **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Biết thời gian khởi hành từ M của xe ô tô, biết thời gian nghỉ tại N và biết thời gian về đến M, do đó biết được thời gian xe lăn bánh trên quãng đường MN không đổi cả đi lẫn về.

Trên quãng đường không đổi MN thì thời gian đi t_1 , thời gian về

t_2 tỉ lệ nghịch với vận tốc đi v_1 và về v_2 , tức là có $\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{60}{50}$

(theo tính chất của hai đại lượng tỉ lệ nghịch).

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau và các dữ kiện đã cho, có kết quả bài toán.

● **Cách giải**

Thời gian ô tô đi trên quãng đường MN và NM là:

$$14 - 7 - 1,5 = 5,5 \text{ (giờ)}$$

Gọi thời gian và vận tốc xe ô tô đi từ M đến N là t_1 và v_1 , thời gian và vận tốc xe ô tô đi từ N về M là t_2 và v_2 ; như vậy thời gian t và vận tốc v là hai đại lượng tỉ lệ nghịch, nên theo tính chất của đại lượng tỉ lệ nghịch, ta có:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{60}{50} = \frac{6}{5} \text{ hay } \frac{t_1}{6} = \frac{t_2}{5}$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{t_1}{6} = \frac{t_2}{5} = \frac{t_1 + t_2}{6 + 5} = \frac{5,5}{11} = 0,5.$$

Suy ra $t_1 = 0,5 \cdot 6 = 3$ (giờ)

Vậy quãng đường MN dài: $50 \cdot 3 = 150$ (km).

● **Khai thác bài toán**

Cần lưu ý rằng, đối với toán chuyển động đều loại có khoảng cách giữa hai địa điểm là một số không đổi, chỉ cần quan tâm đến hai đại lượng tỉ lệ nghịch với nhau là v và t mà thôi.

Bài toán trên được thay đổi một số chi tiết và đề bài như sau: "Một ô tô đi từ M đến N, xe khởi hành lúc 7 giờ sáng với vận tốc 50 km/h. Đến N xe nghỉ lại 30 phút rồi trở về M với vận tốc 60 km/h. Trên đường về xe đã dừng lại 1 giờ 30 phút để sửa xe nên đã về đến M lúc 14g30 phút. Tính quãng đường MN". Không giải tỉ mỉ bài này, hãy cho biết kết quả bài toán.

Ta thấy, thời gian xe lăn bánh khi đi và lúc về vẫn là 5,5 giờ ($= 14,5 - (0,5 + 1,5 + 7)$), vì hai đại lượng v , t không thay đổi.

đáp số bài toán này giống bài toán trước.

Bài 9. Hai xe ô tô cùng khởi hành từ M đến N. Vận tốc xe I là 54 km/h, vận tốc xe II là 36 km/h. Thời gian xe I đi quãng đường MN ít hơn xe II là 30 phút. Tính thời gian mỗi xe đã đi quãng đường MN và chiều dài quãng đường MN.

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài toán đã cho được minh họa trên hình vẽ sau:

Xe I \rightarrow 54 km/h = v_1 ----- \rightarrow t_1

M-----N

Xe II \rightarrow 36 km/h = v_2 ----- \rightarrow t_2 ; $t_2 - t_1 = 0,5$ (giờ)

MN = ?

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Biết hai xe ô tô khởi hành cùng một lúc từ M và đi với vận tốc $v_1 = 54$ km/h và $v_2 = 36$ km/h, nhưng hai xe đến N không cùng một lúc, tức là xe đi với vận tốc lớn hết t_1 giờ còn xe đi với vận tốc bé hơn hết t_2 giờ ($t_1 < t_2$). Do quãng đường MN không đổi nên $v_1 t_1 = v_2 t_2 = s$, s là độ dài quãng đường MN.

Từ đó nhận thấy hai đại lượng v và t tỉ lệ nghịch với nhau, nên

$$\text{từ } v_1 t_1 = v_2 t_2 \text{ suy ra } \frac{t_1}{t_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{36}{54} = \frac{2}{3} \text{ hay } \frac{t_2}{3} = \frac{t_1}{2}.$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau và các dữ kiện đã cho sẽ có kết quả bài toán.

● **Cách giải**

Gọi thời gian và vận tốc của xe I đi trên quãng đường MN là t_1 và v_1 , của xe II đi trên quãng đường MN là t_2 và v_2 , trong đó $t_1 < t_2$, ta có:

$$v_1 t_1 = v_2 t_2 = s \text{ (s : độ dài quãng đường MN)}$$

Đẳng thức trên chứng tỏ hai đại lượng vận tốc v và thời gian t

tỉ lệ nghịch với nhau, nên theo tính chất của đại lượng tỉ lệ nghịch, ta có:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{36}{54} = \frac{2}{3} \text{ hay } \frac{t_2}{3} = \frac{t_1}{2}$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, có:

$$\frac{t_2}{3} = \frac{t_1}{2} = \frac{t_2 - t_1}{3 - 2} = \frac{0,5}{1} = 0,5 \text{ (vì } 30 \text{ phút} = 0,5 \text{ giờ)}$$

Do đó: $t_1 = 0,5 \cdot 2 = 1$ (giờ)

$$t_2 = 0,5 \cdot 3 = 1,5 \text{ (giờ)}$$

Quãng đường MN dài là:

$$54 \cdot 1 = 54 \text{ (km).}$$

● Khai thác bài toán

Nếu cho biết xe I và xe II đến N cùng một lúc thì cần thay đổi điều kiện nào của đề bài để kết quả bài toán vẫn không thay đổi?

Ta thấy, nếu hai xe khởi hành cùng một lúc thì thời gian xe I đi quãng đường MN ít hơn xe II là 30 phút = 0,5 giờ. Bây giờ muốn cho hai xe đến N cùng một lúc thì phải cho xe II khởi hành trước xe I là 0,5 giờ.

Bài 10. Chia số 630 thành ba phần tỉ lệ nghịch với 3; 5 và 6.

● Tìm hiểu đề bài

Phải chia số 630 thành ba phần tỉ lệ nghịch với các số 3; 5 và 6.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Biết rằng, muốn chia một số thành các phần tỉ lệ nghịch với x , y , z , ta chỉ việc chia số đó thành các phần tỉ lệ thuận với $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ và $\frac{1}{z}$.

Hãy vận dụng gợi ý trên để giải bài toán này.

● Cách giải

Gọi ba phần phải tìm lần lượt là a , b , c (với a , b , c là các số

nguyên dương). Cần chia 630 thành ba phần tỉ lệ nghịch a với 3; 5 và 6, ta sẽ chia 630 thành ba phần tỉ lệ thuận với $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ và $\frac{1}{6}$; tức

là có: $\frac{a}{\frac{1}{3}} = \frac{b}{\frac{1}{5}} = \frac{c}{\frac{1}{6}}$. Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{\frac{1}{3}} = \frac{b}{\frac{1}{5}} = \frac{c}{\frac{1}{6}} = \frac{a+b+c}{\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}} = \frac{630}{\frac{10}{30} + \frac{6}{30} + \frac{5}{30}} = \frac{630}{\frac{21}{30}} = 900.$$

Suy ra $a = 900 \cdot \frac{1}{3} = 300$; $b = 900 \cdot \frac{1}{5} = 180$; $c = 900 \cdot \frac{1}{6} = 150$.

Vậy ba số cần tìm tỉ lệ nghịch với 3; 5 và 6 là 300; 180 và 150.

HÀM SỐ

Bài 11. Cho hai hàm số:

$$g(x) = 2 \text{ và } f(x) = \begin{cases} x & \text{với } x > 0 \\ -x & \text{với } x < 0. \end{cases}$$

- Vẽ đồ thị của hai hàm số đó trên cùng một hệ trục tọa độ;
- Quy tắc f nói trên có thể diễn đạt bởi công thức nào nữa?
- Căn cứ vào đồ thị tìm các giá trị của x sao cho $|x| < 2$.

• Tìm hiểu đề bài

Cho hai hàm số $g(x)$ và $f(x)$ cần phải vẽ đồ thị của hai hàm số đã cho trên cùng một hệ trục tọa độ hay trên một mặt phẳng tọa độ.

Hàm số $f(x)$ đã cho còn có thể viết cách nào nữa để gọn hơn.

Sau khi đã vẽ được đồ thị hai hàm số trên, từ đó tìm các giá trị của x thỏa mãn bất đẳng thức: $|x| < 2$.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

- Để vẽ được đồ thị hai hàm số đã cho, đối với mỗi hàm số cần

phải lập bảng giá trị của x và giá trị tương ứng của y . Mỗi cặp số (x, y) ở bảng giá trị cho ta một điểm trên mặt phẳng tọa độ. Nối các điểm có tọa độ là (x, y) ta được đồ thị của hàm số.

b) Cần vận dụng định nghĩa về giá trị tuyệt đối của một số hay một biểu thức để có câu trả lời hợp lí.

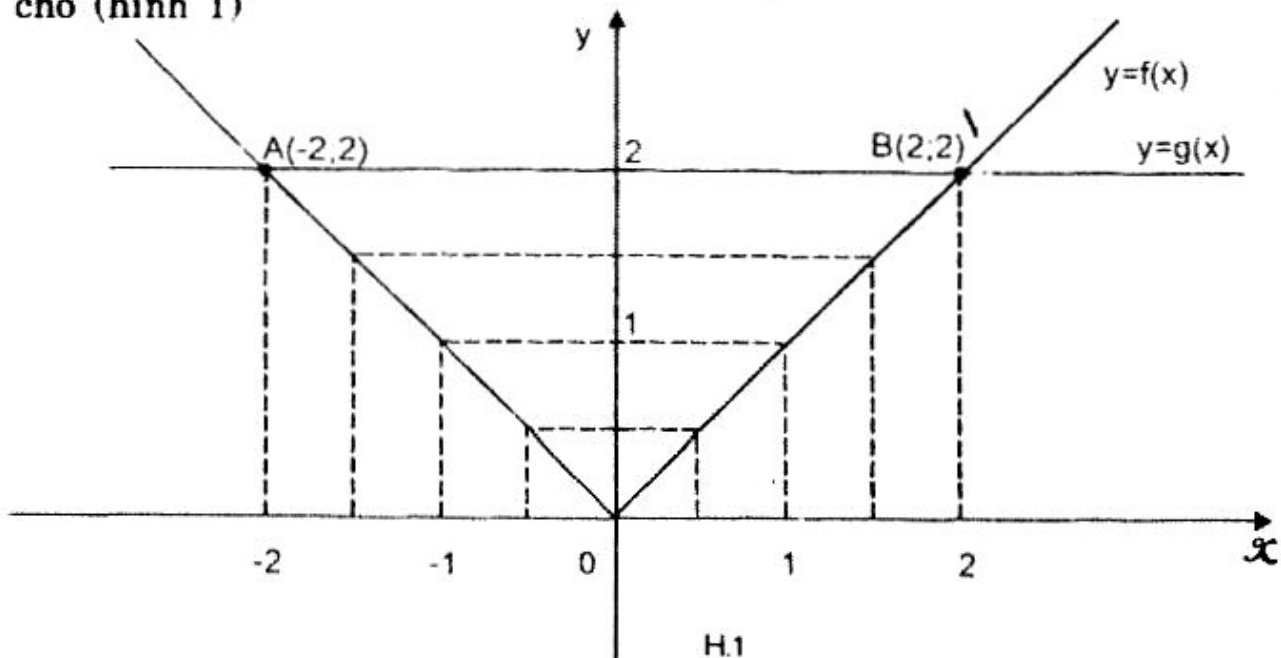
c) Bất đẳng thức $|x| < 2$ chính là bất đẳng thức $-2 < x < 2$.

● **Cách giải**

a) Trước hết cần lập bảng giá trị của x và giá trị tương ứng của y đối với hai hàm số đã cho như sau:

x	-2	-1,5	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1,5	2
$f(x)$	2	1,5	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1,5	2
$g(x)$	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Sau đó, trên mặt phẳng tọa độ xác định các điểm bởi các cặp số (x, y) đã được xác lập ở bảng trên, sẽ vẽ được đồ thị hai hàm số đã cho (hình 1)



b) Theo định nghĩa giá trị tuyệt đối của một số hay một biểu thức, quy tắc f còn được biểu diễn bởi $f(x) = |x|$.

c) Các giá trị x phải tìm là hoành độ của các điểm thuộc đồ thị của hàm số $y = |x|$ nằm phía dưới đường thẳng $y = 2$, đó là

$$-2 < x < 2.$$

● Khai thác bài toán

- Hãy tìm giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ đã cho.

Ta thấy hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại hai điểm A và B mà tọa độ là:

$$A(-2;2) \text{ và } B(2;2).$$

- Nếu hàm số $y = g(x)$ được cho bởi công thức $g(x) = -2$, hãy tìm giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = f(x) = |x|$ và $y = g(x) = -2$.

Ta thấy, với $g(x) = -2$, đồ thị của nó nằm phía dưới trục hoành Ox, cách Ox một đoạn bằng 2 đơn vị, như vậy hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$ trong trường hợp này không cắt nhau tức là không có giao điểm của đồ thị hai hàm số đã cho.

- Nếu hàm số $y = g(x)$ được cho bởi công thức $g(x) = 0$, hãy tìm giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = f(x) = |x|$ và $y = g(x) = 0$.

Ta thấy, với $g(x) = 0$, đồ thị của nó chính là trục hoành Ox, giao điểm của hai đồ thị là điểm gốc tọa độ $O(0;0)$.

Tóm lại, đồ thị của hai hàm số đã cho có thể có 2 giao điểm, 1 giao điểm hoặc không có giao điểm nào cả.

Bài 12. Cho bảng giá trị sau:

x	-2	-1	1	2	3	4	6
y				-6			

a) Điền các số vào các ô trống trong bảng để y tỉ lệ thuận với x .
Viết hàm số $f(x)$ cho liên hệ giữa y và x .

b) Điền các số vào các ô trống trong bảng để y tỉ lệ nghịch với x .
Viết hàm số $g(x)$ cho liên hệ giữa y và x .

c) Vẽ đồ thị của hai hàm số trên cùng một hệ trục tọa độ.

● **Tìm hiểu đề bài**

Cho bảng giá trị, hãy điền vào ô trống để có y tỉ lệ thuận với x , viết hàm số $f(x)$ cho liên hệ giữa y và x (câu a); y tỉ lệ nghịch với x , viết hàm số $g(x)$ cho liên hệ giữa y và x (câu b); sau đó vẽ đồ thị của cả hai hàm số kể trên (câu c).

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

a) Biết y tỉ lệ thuận với x tức là có $y = ax$. Thay giá trị $x = 2$; $y = -6$, suy ra giá trị của a , từ đó tính được các số để điền vào các ô trống trong bảng giá trị đã cho.

b) Biết y tỉ lệ nghịch với x tức là có $y = \frac{a}{x}$ hay $xy = a$. Thay giá trị $x = 2$; $y = -6$, suy ra giá trị của a , từ đó tính được các số để điền vào các ô trống trong bảng giá trị đã cho.

c) Dựa vào bảng giá trị trên để xác định các điểm thuộc từng hàm số, nối các điểm có cùng tính chất, sẽ được đồ thị của hàm số.

● **Cách giải**

a) Biết y tỉ lệ thuận với x tức là có $y = ax$. Thay giá trị $x = 2$; $y = -6$, ta có $-6 = 2a$ suy ra $a = -6:2 = -3$. Lấy -3 nhân với các giá trị của x đã cho trong bảng, có giá trị của y tương ứng. Ta có bảng sau:

x	-2	-1	1	2	3	4	6
y	6	3	-3	-6	-9	-12	-18

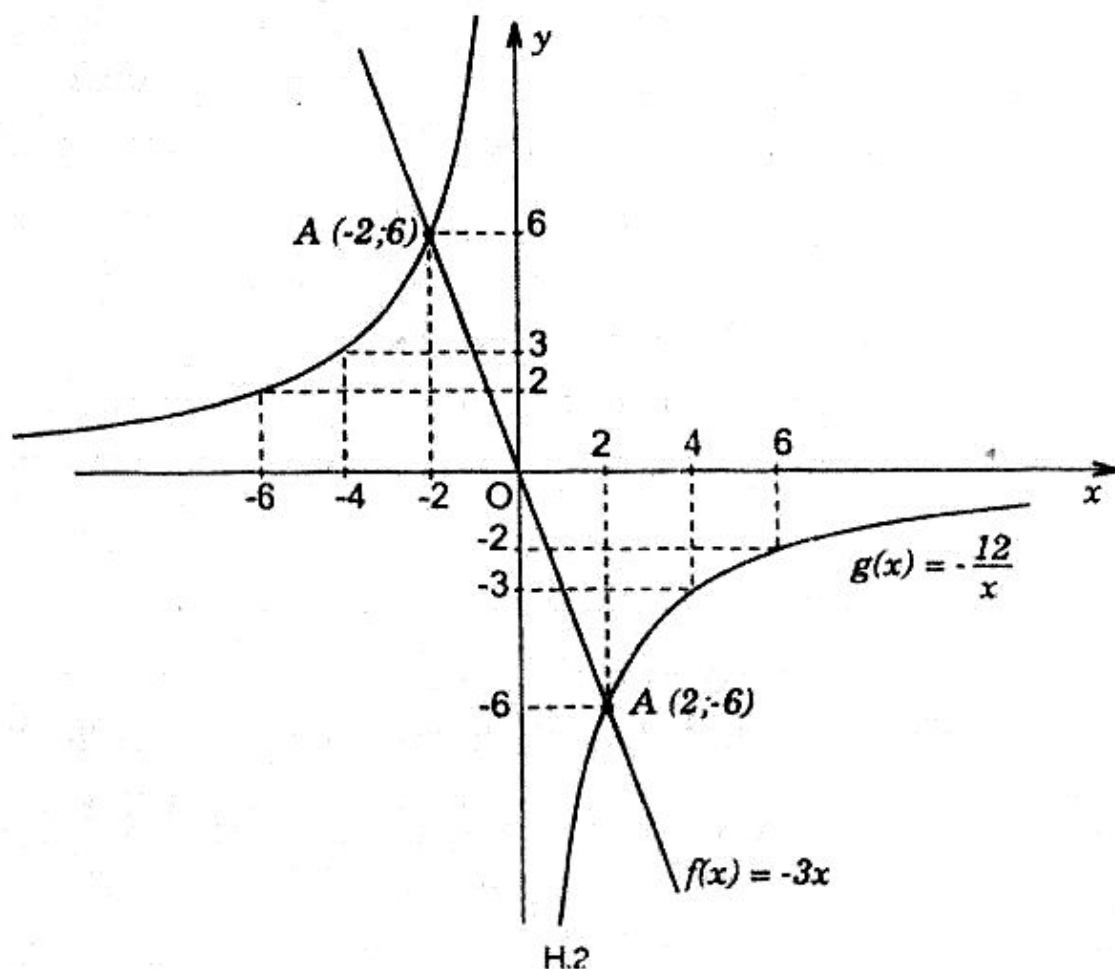
Hàm số $f(x)$ cho liên hệ giữa y và x kể trên là $y = f(x) = -3x$.

b) Biết y tỉ lệ nghịch với x tức là có $y = \frac{a}{x}$ hay $xy = a$. Thay giá trị $x = 2; y = -6$, ta có $-6 \cdot 2 = -12 = a$. Lấy $a = -12$ chia cho các giá trị của x đã cho trong bảng, có giá trị của y tương ứng. Ta có bảng sau:

x	-2	-1	1	2	3	4	6
y	6	12	-12	-6	-4	-3	-2

Hàm số $g(x)$ cho liên hệ giữa y và x kể trên là $y = -\frac{12}{x}$.

c) Căn cứ vào hai bảng giá trị trên, ta vẽ được đồ thị của hai hàm số $y = -3x$ và $y = g(x) = -\frac{12}{x}$ như sau (hình 2)



● Khai thác bài toán

Có thể tìm giao điểm của đồ thị hai hàm số bằng cách nào ?

Có thể tìm được giao điểm của hai đồ thị bằng cách:

a) Căn cứ vào hai bảng giá trị ta có A(2;-6) và B(-6;2)

b) Căn cứ vào hai đồ thị đã vẽ có A(2;-6) và B(-6;2).

c) Cũng có thể tìm giao điểm của hai đồ thị bằng cách giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = -3x \\ y = \frac{12}{x} \end{cases} \Leftrightarrow 3x = \frac{12}{x} \Leftrightarrow 3x^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Từ $x = 2 \Rightarrow y = -6$; $x = -2 \Rightarrow y = 6$.

Bài 13

a) Vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ đồ thị các hàm số $y = \frac{2}{x}$, $y = 2x$ và tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị trên.

b) Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{1}{|x|}$.

• Tìm hiểu đề bài

a) Hàm số $y = \frac{2}{x}$ là một tương quan tỉ lệ nghịch, còn hàm số $y = 2x$ là một tương quan tỉ lệ thuận, phải vẽ đồ thị hai hàm số này trên cùng một hệ trục tọa độ, sau đó tìm giao điểm của hai đồ thị.

b) Vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{|x|}$ với chú ý là phải xét $x > 0$ và $x < 0$ để loại bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Để vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{2}{x}$ cần lập bảng giá trị của y ứng với các giá trị của x , sau đó sẽ căn cứ vào từng cặp giá trị (x, y) để xác định các điểm thuộc đồ thị.

Còn đồ thị hàm số $y = 2x$ luôn đi qua gốc tọa độ nên chỉ xét một điểm nữa là đủ.

Hai đồ thị trên cắt nhau, cho ta tọa độ của giao điểm đó.

b) Đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{|x|}$ nằm phía trên trục hoành, lưu ý xét với $x < 0$ và $x > 0$, sau đó lập bảng giá trị của x, y với chú ý là $y > 0$.

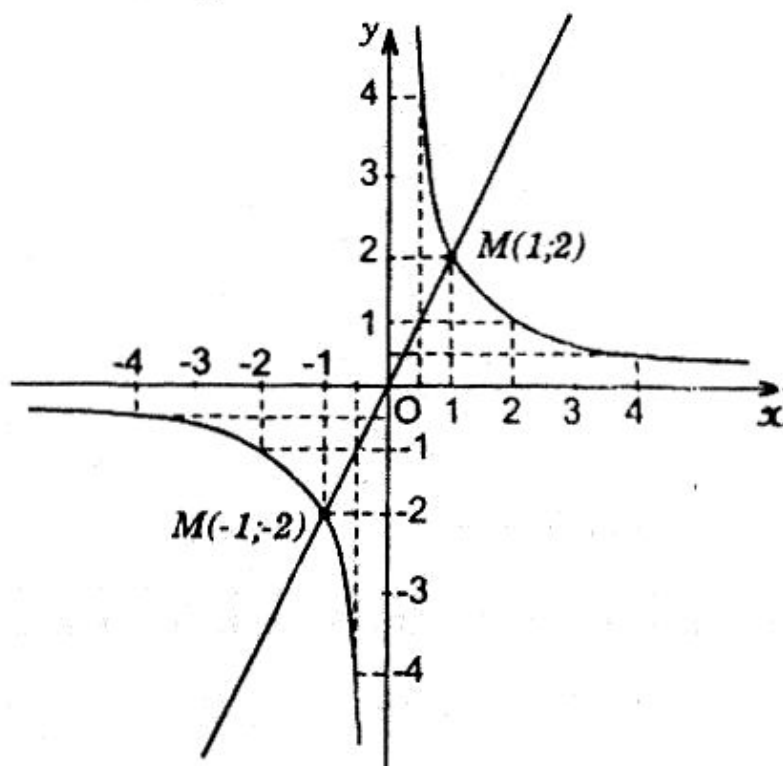
● Cách giải

a) Lập bảng giá trị của hàm số $y = \frac{2}{x}$.

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4		4	2	1	$\frac{1}{2}$

Đồ thị hàm số $y = 2x$ đi qua điểm $O(0;0)$ và $M(1;2)$.

Đồ thị hàm số $y = \frac{2}{x}$ và $y = 2x$ được vẽ như sau (hình 3):



H.3

Đồ thị hai hàm số đã cho cắt nhau tại $M(1;2)$ và $N(-1;-2)$.

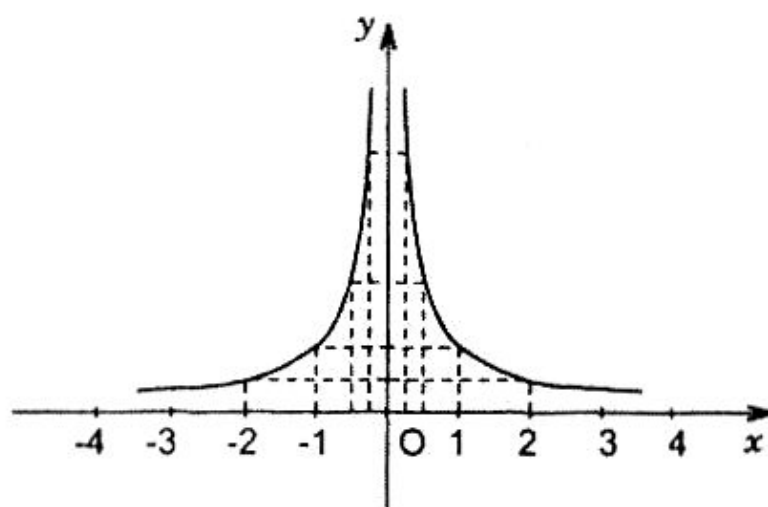
b) Ta có

$$y = \frac{1}{|x|} = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{với } x < 0 \\ \frac{1}{x} & \text{với } x > 0. \end{cases}$$

Lập bảng giá trị:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2
y	$\frac{1}{2}$	1	2	4		4	2	1	$\frac{1}{2}$

Đồ thị như ở hình 4.



H4

B. CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

ĐỀ BÀI

Bài 14. Viết công thức cho sự tương ứng giữa:

- Chu vi C của đường tròn và bán kính R của nó;
- Diện tích S của hình tròn và bán kính R của nó;
- Chu vi C của hình vuông và cạnh a của nó;

d) Diện tích S của hình vuông và cạnh a của nó;

e) Đáy d của tam giác và đường cao tương ứng h của nó biết diện tích tam giác là 152 cm^2 .

Bài 15. Cho $X = \{-2; -1; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1; 2\}$ và hàm số $y = f(x) = -x^2 + 3$.

a) Lập bảng giá trị của x và giá trị tương ứng của y .

b) Tính $f(-4)$, $f(2\frac{1}{2})$.

Bài 16. Cho các hàm số $y = -x$ và $y = -\frac{1}{x}$.

a) Vẽ đồ thị của hai hàm số ấy trên một hệ trục tọa độ.

b) Viết tọa độ giao điểm của hai đồ thị theo kết quả câu a.

c) Kiểm tra lại kết quả câu b bằng tính toán.

HƯỚNG DẪN - CÁCH GIẢI

Bài 14. ● Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Chu vi C của đường tròn và bán kính R là một tương quan tỉ lệ thuận.

b) Diện tích S của đường tròn và bán kính R là một tương quan tỉ lệ thuận.

c) Chu vi hình vuông C và cạnh hình vuông a là một tương quan tỉ lệ thuận.

d) Diện tích hình vuông S và cạnh hình vuông a cũng là một tương quan tỉ lệ thuận.

c) Một tam giác có diện tích là 152 cm^2 thì cạnh đáy d và đường cao tương ứng h là một tương quan tỉ lệ nghịch.

● Cách giải

a) $C = 2\pi R$;

b) $S = \pi R^2$;

c) $C = 4a$;

d) $S = a^2$.

$$e) d = \frac{2.152}{h} \text{ hay } d = \frac{304}{h}.$$

Bài 15. • Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Thay các giá trị của $x \in X$ vào hàm số $y = f(x) = -x^2 + 3$ để tính các giá trị của y .

b) Làm tương tự câu a.

• Cách giải

a) Ta có: $f(-2) = -(-2)^2 + 3 = -4 + 3 = -1$

$$f(-1) = -(-1)^2 + 3 = -1 + 3 = 2$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3 = -\frac{1}{4} + 3 = 2\frac{3}{4}$$

$$f(0) = -(0)^2 + 3 = 3$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 = -\frac{1}{4} + 3 = 2\frac{3}{4}$$

$$f(1) = -(1)^2 + 3 = -1 + 3 = 2$$

$$f(2) = -(2)^2 + 3 = -4 + 3 = -1.$$

Do đó có bảng các giá trị của x với các giá trị tương ứng của y :

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y	-1	2	$2\frac{3}{4}$	3	$2\frac{3}{4}$	2	-1

b) Ta có $f(-4) = -(-4)^2 + 3 = -16 + 3 = -13$

$$f\left(2\frac{1}{2}\right) = -\left(2\frac{1}{2}\right)^2 + 3 = -\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3$$

$$= -\frac{25}{4} + 3 = -6\frac{1}{4} + 3 = -3\frac{1}{4}.$$

Bài 16. • Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Hàm số $y = -x$ là một tương quan tỉ lệ thuận, có đồ thị là một đường thẳng đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$, nên chỉ cần xác định

một điểm bất kì thứ hai, thì vẽ được đường thẳng $y = -x$.

Hàm số $y = -\frac{1}{x}$ là một tương quan tỉ lệ nghịch có đồ thị gồm 2 nhánh đường cong nằm trong góc vuông II và IV, cần lập bảng các giá trị của x và các giá trị tương ứng của y .

b) Từ giao điểm hai đồ thị của các hàm số $y = -x$ và $y = -\frac{1}{x}$, hạ các đường vuông góc Ox , Oy ta có tọa độ các giao điểm.

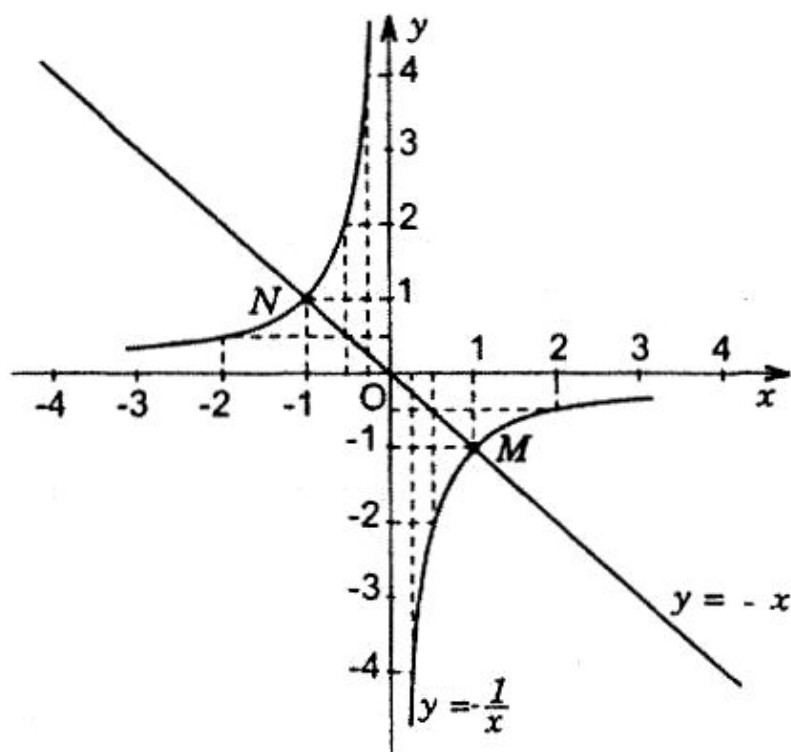
c) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y = -x \\ y = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

● Cách giải

a) Khi $x = 1$ thì $y = -x = -1$. Như vậy đồ thị hàm số $y = -x$ đi qua điểm $O(0;0)$ và điểm $M(1;-1)$.

Lập bảng giá trị của hàm số $y = -\frac{1}{x}$.

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2
y	$\frac{1}{2}$	1	2	4		-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$



H5