Bài 3:

a/ Bài toán phụ: Cho x, y, z > 0

Chứng minh rằng: $\dfrac{x^2}{y+z} \geq \dfrac{4x-y-z}{4}$

$[2x-(y+z)]^2 \geq 0 \Rightarrow 4x^2 - 4x(y+z) + (y+z)^2 \geq 0$

$\Rightarrow 4x^2 \geq 4x(y+z) + (y+z)^2 \Rightarrow \dfrac{x^2}{y+z} \geq \dfrac{4x-y-z}{4}$

Áp dụng bài toán phụ trên ta có:

$\dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{b^2}{c+a} + \dfrac{c^2}{a+b} \geq \dfrac{4a-b-c}{4} + \dfrac{4b-c-a}{4} + \dfrac{4c-a-b}{4}$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{b^2}{c+a} + \dfrac{c^2}{a+b} \geq \dfrac{a+b+c}{2}$

b/ $\dfrac{x-ab}{a+b} + \dfrac{x-bc}{b+c} + \dfrac{x-ca}{c+a} = a+b+c$

$\Leftrightarrow (\dfrac{x-ab}{a+b} - c) + (\dfrac{x-bc}{b+c} - a) + (\dfrac{x-ca}{c+a} - b) = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-ab-ca-bc}{a+b} + \dfrac{x-bc-bc-ca}{b+c} + \dfrac{x-ca-bc-ab}{c+a} = 0$

$\Leftrightarrow (x-ab-ca-bc)(\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a}) = 0$

* $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} = 0$

Ta có: $0(x-ab-ca-bc) = 0$

x tùy ý

* $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} \neq 0$

Ta có: $x - ab - ca - bc = 0$

$x = ab + ca + bc$

Kết luận: $a = -b$ hoặc $b = -c$ hoặc $c = -a$

Phương trình vô nghiệm: $a \neq -b$; $b \neq -c$; $c \neq -a$

$\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} = 0$

Phương trình có nghiệm tùy ý

$\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} \neq 0$

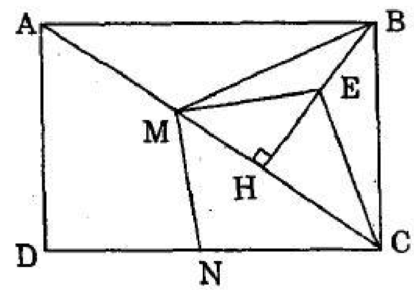
Phương trình có nghiệm $x = ab + ca + bc$

Bài 4:

Gọi E là trung điểm của BH

Ta có ME là đường trung bình của ΔHAB

$\Rightarrow ME \parallel AB$ và $ME = \dfrac{AB}{2}$



Mà $AB \perp BC$, $NC = \dfrac{DC}{2}$,

$AB = DC$, $AB \parallel BC$

Do đó $ME \parallel NC$, $ME = NC$, $ME \perp BC$

Tứ giác NECN có $ME \parallel NC$ và $ME = NC$ nên là hình bình hành.

$\Rightarrow MN \parallel CE$

ΔMBC có ME và BH là hai đường cao cắt nhau tại E.

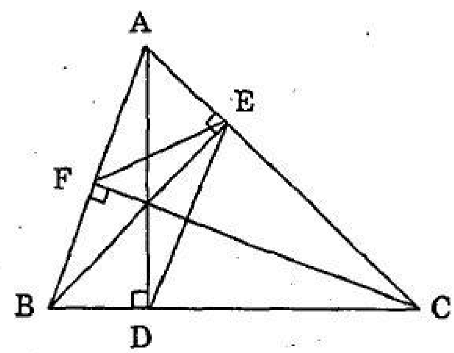
$\Rightarrow$ E là trực tâm $\Delta MBC \Rightarrow CE \perp MB$

$MN \parallel CE$, $CE \perp MB \Rightarrow BM \perp MN$

Bài 5:

a/ Xét ΔABE và ΔACF có $\widehat{BAE}$ (chung) ; $\widehat{AEB} = \widehat{AFC}$ ($= 90^0$)

Do đó $\Delta ABE \backsim \Delta ACF$



$\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AE}{AF} \Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AE}{AB}$

Xét ΔAEF và ΔABC có

$\dfrac{AF}{AC} = \dfrac{AE}{AB}$; $\widehat{EAF}$ (chung)

Do đó $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$

$\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ABC}$

b/ Theo câu a/ ta có $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$

Chứng minh tương tự câu a/ ta có $\widehat{DEC} = \widehat{ABC}$

do đó $\widehat{AEF} = \widehat{DEC}$ ($= \widehat{ABC}$)

Mà $\widehat{AEF} + \widehat{BEF} = 90^0$; $\widehat{DEC} + \widehat{BED} = 90^0$

Suy ra $\widehat{BEF} = \widehat{BED}$

Vậy EB là tia phân giác của góc $\widehat{DEF}$.

BỘ ĐỀ 86

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN 8 TRƯỜNG THCS NGUYỄN GIA THIỀU, QUẬN TÂN BÌNH, TP.HCM – NĂM HỌC 2002 – 2003

Bài 1: Cho biểu thức: $A = \dfrac{(x^2 + y)(\frac{1}{4} + y) + x^2y^2 + \frac{3}{4}(\frac{1}{3} + y)}{x^2y^2 + 1 + (x^2 - y)(1 - y)}$

a/ Tìm tập xác định của A.

b/ Chứng minh rằng giá trị của A không phụ thuộc vào x.

c/ Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị tương ứng của y (nếu có).

Bài 2:

1) Giải phương trình: $\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x-1}{x^2+x+1} - \frac{2(x+3)^2}{x^6-1} = 0$

2) Cho biết: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ và $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$

Chứng minh rằng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Bài 3: Cho tam giác ABC có CM là trung tuyến. Qua điểm D bất kỳ thuộc cạnh AB (D khác A, B) vẽ đường thẳng xy song song với CM; xy cắt các đường thẳng BC và AC lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng nếu DA.DB = DE.DF thì tam giác ADF là tam giác cân và tam giác ABC là tam giác vuông.

Bài 4: Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn và M là một điểm thuộc miền trong của tam giác ABC. Vẽ các đoạn thẳng MH, MK, ML lần lượt vuông góc với BC, AC, AB (với H; K; L là chân các đoạn thẳng vuông góc).

a/ Chứng minh rằng: $AL^2 + BH^2 + CK^2 = BL^2 + CH^2 + AK^2$

b/ Chứng minh rằng: $AL^2 + BH^2 + CK^2 \geq \frac{1}{4}(AB^2 + BC^2 + AC^2)$

c/ Xác định vị trí của M để $AL^2 + BH^2 + CK^2$ nhỏ nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

a/ $x^2y^2 + 1 + (x^2 - y)(1 - y) \neq 0 \quad \Leftrightarrow x^2y^2 + 1 + x^2 - x^2y - y + y^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow x^2y^2 - x^2y + x^2 + y^2 - y + 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow x^2(y^2 - y + 1) + (y^2 - y + 1) \neq 0$

$\Leftrightarrow (y^2 - y + 1) + (x^2 + 1) \neq 0 \quad \Leftrightarrow [(y^2 - y + \frac{}{4}) + \frac{}{4}] + (x^2 + 1) \neq 0$

$\Leftrightarrow [(y - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}] + (x^2 + 1) \neq 0 \quad \Leftrightarrow$ x, y tùy ý

TXĐ của A: $\{(x,y) | x \in R, y \in R\}$

b/ $A = \dfrac{\frac{1}{4}x^2 + x^2y + \frac{1}{4}y + y^2 + x^2y^2 + \frac{1}{4} + \frac{4}{3}y)}{x^2y^2 + 1 + (x^2 - y)(1 - y)}$

$= \dfrac{x^2y + x^2y + \frac{1}{4}x^2 + y^2 + y + \frac{1}{4}}{(y^2 - y + 1)(x^2 + 1)} = \dfrac{x^2(y^2 + y + \frac{1}{4}) + (y^2 + y + \frac{1}{4})}{(y^2 - y + 1)(x^2 + 1)}$

$= \dfrac{(y^2 + y + \frac{1}{4}) + (x^2 + 1)}{(y^2 - y + 1)(x^2 + 1)} = \dfrac{(y^2 + y + \frac{1}{4})}{(y^2 - y + 1)}$

Vậy A không phụ thuộc vào x.

c) $A = \dfrac{(y+\frac{1}{2})^2}{(y^2-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4})} \geq 0$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow y + \dfrac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $0 \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{2}$

Bài 2:

1) ĐKXĐ $x \neq \pm 1$

Quy đồng và khử mẫu, ta có:

$(x+1)(x-1)(x^3+1) - (x-1)(x+1)(x^3-1) - 2(x+3)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2-1)(x^3+1) - (x^2-1)(x^3-1) - 2(x^2+6x+9) = 0$

$\Leftrightarrow x^5 + x^2 - x^3 - 1 - x^5 + x^2 + x^3 - 1 - 2x^2 - 12x - 18 = 0$

$\Leftrightarrow -12x - 20 = 0 \Leftrightarrow -12x = 20 \Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{3}$

$x = -\dfrac{5}{3}$ thỏa mãn ĐKXĐ

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -\dfrac{5}{3}$

b/ $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$, $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} + \dfrac{c}{z} = 0$

Do đó $(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c})^2 = 1$

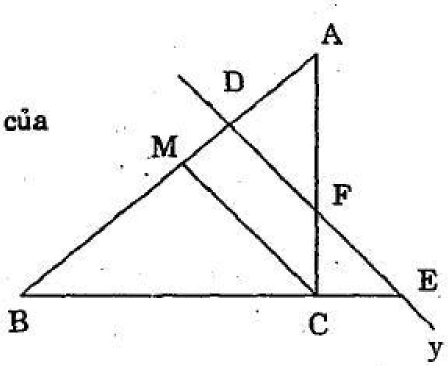
$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} + 2(\dfrac{xy}{ab} + \dfrac{xz}{ac} + \dfrac{yz}{bc}) = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} + \dfrac{2xyz}{abc}(\dfrac{c}{z} + \dfrac{b}{y} + \dfrac{a}{x}) = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} + \dfrac{2xyz}{abc}.0 = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

Bài 3:



ΔAMC có DF // MC (gt) theo hệ quả của định lý Talét, ta có: $\dfrac{DA}{AM} = \dfrac{DF}{MC}$

ΔBDE có MC // DE (gt), theo hệ quả của định lý Talét, ta có:

$\dfrac{DB}{MB} = \dfrac{DE}{MC}$

Do đó $\dfrac{DA.DB}{AM.MB} = \dfrac{DE.DF}{MC^2}$

Mà DA.DB = DE.DF . AM = MB

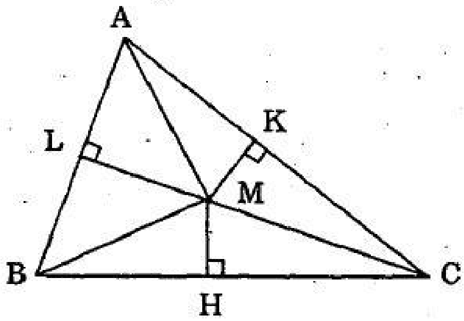
nên AM = MC = MB

$\dfrac{DA}{AM} = \dfrac{DF}{MC}$, AM = MC ⇒ DA = DF

⇒ ΔABC có CM là đường trung tuyến và $CM = \dfrac{AB}{2}$

⇒ ΔABC vuông tại C

Bài 4:



ΔMAL vuông tại L, theo định lý Pytago có:

$AL^2 + ML^2 = MA^2$

$\Rightarrow AL^2 = MA^2 - ML^2$

Tương tự có: $BH^2 = MB^2 - MH^2$

$CK^2 = MC^2 - MK^2$

Do đó $AL^2 + BH^2 + CK^2 = (MA^2 + MB^2 + MC^2) - (ML^2 + MH^2 + MK^2)$

Chứng minh tương tự cũng có $BL^2 + CH^2 + AK^2 = (MA^2 + MB^2 + MC^2) - (ML^2 + MH^2 + MK^2)$

Suy ra $AL^2 + BH^2 + CK^2 = BL^2 + CH^2 + AK^2$

b/ Ta có: $(AL - BL)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (AL + BL)^2 + (AL - BL)^2 \geq (AL + BL)^2$

$\Leftrightarrow 2(AL^2 + BL^2) \geq AB^2$

$\Leftrightarrow 2AL^2 + 2BL^2 \geq AB^2$ (1)

Tương tự có: $2BH^2 + 2CH^2 \geq BC^2$ (2)

$2CK^2 + 2AK^2 \geq AC^2$ (3)

Cộng (1), (2) và (3) vế theo vế, ta có:

$2(AL^2 + BH^2 + CK^2) + 2(BL^2 + CH^2 + AK^2) \geq AB^2 + BC^2 + AC^2$

Mà $AL^2 + BH^2 + CH^2 = BL^2 + CH^2 + AK^2$ (câu a)

Do đó $4(AL^2 + BH^2 + CK^2) \geq AB^2 + BC^2 + AC^2$

$\Rightarrow AL^2 + BH^2 + CK^2 \geq \dfrac{1}{4}(AB^2 + BC^2 + AC^2)$

c/ Theo câu b/ ta có: $AL^2 + BH^2 + CK^2 \geq \dfrac{1}{4}(AB^2 + BC^2 + AC^2)$

Mà $\dfrac{1}{4}(AB^2 + BC^2 + AC^2)$ (không đổi)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} AL = BL \\ BH = CH \\ CK = AK \end{cases}$ ⇔ M là giao điểm các đường trung trực của ΔABC.

Vậy khi M là giao điểm các đường trung trực của tam giác ABC thì $AL^2 + BH^2 + CK^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

BỘ ĐỀ 87

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 8
THÀNH PHỐ PLEIKU – GIA LAI – NĂM HỌC 2002 – 2003

Bài 1: Tìm số có bốn chữ số $\overline{abcd}$, biết rằng nếu đem số ấy nhân với 2 rồi trừ đi 1004 thì kết quả nhận được là số bốn chữ số viết bởi các chữ số như số ban đầu nhưng theo thứ tự ngược lại.

Bài 2:

a/ Phân tích đa thức: $x^4 - 30x^2 + 31x - 30$ thành nhân tử

b/ Giải phương trình: $x^4 - 30x^2 + 31x - 30 = 0$

Bài 3:

Cho $m^2 + n^2 = 1$ và $a^2 + b^2 = 1$

Chứng minh $-1 \le am + bn \le 1$

Bài 4: Cho tam giác ABC có $B = C = 70^0$, đường cao AH. Các điểm E và F theo thứ tự thuộc các đoạn thẳng AH, AC sao cho $\widehat{ABE} = \widehat{CBF} = 30^0$. Gọi M là trung điểm AB.

a/ Chứng minh $\Delta AMF \backsim \Delta BHE$

b/ Chứng minh $AB \times BE = BC \times AE$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: Ta có: $\overline{abcd}.2 - 1004 = \overline{abcd} < 10000$ (1)

$\Rightarrow \overline{abcd} < (10000 + 1004): 2 = 5502 \Rightarrow a \le 5$

Mặt khác, do (1) a chẵn, vậy $a \in \{2, 4\}$

* Nếu a = 4 thì: (1) $\Leftrightarrow \overline{4bcd}.2 = 1004 + \overline{abc4}$ (2)

$\Rightarrow$ d.2 có chữ số tận cùng là 8 $\Rightarrow d \in \{4, 9\}$

– Khi d = 4 thì $1004 + \overline{4bc4} < 6000 < 8000 <$ VT (2) (loại)

– Khi d = 9 thì $\overline{4bc9}.2 < 9000 < 10000 <$ VT (2) (loại)

Vậy a = 2, thì $\overline{2bcd}.2 = 1004 + \overline{dcb2}$ (3)

$\Rightarrow$ d.2 có chữ số tận cùng là 6 $\Rightarrow d \in \{3, 8\}$

– Khi d = 8 thì $\overline{2bc8}.2 < 6000 < 9000 <$ VṬ (3) (loại)

Suy ra d = 3, thì $\overline{2bc3}.2 = 1004 + \overline{3bc2}$

$\Leftrightarrow \overline{10bc}.2 + 2003.2 = 1004 + 3002 + \overline{10bc}$

$\Leftrightarrow 2.\overline{bc} = \overline{cb} \Leftrightarrow 20b + 2c = 10c + b$

$\Leftrightarrow 19b = 8c$

mà b, c là chữ số nên $8c \vdots 19$; (8, 19) = 1 $\Rightarrow c \vdots 19$

$\Rightarrow$ c = 0 (vì c là chữ số) $\Rightarrow$ b = 0

Vậy $\overline{abcd} = 2003$

Ta có: 003.2 – 1004 = 3002 (thử lại đúng)

Vậy 2003 là số cần tìm.

Bài 2:

a/ $x^4 - 30x^2 + 31x - 30 = x^4 + x\ 30(x^2 - x + 1)$

$= x(x^3 + 1) - 30(x^2 - x + 1) = x(x + 1) - (x^2 - x + 1) - 30(x^2 - x + 1)$

$= (x^2 - x + 1)(x^2 + x - 30)$

b/ $x^4 - 30x^2 + 31x - 30 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - x + 1)(x^2 + x - 30) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 30 = 0$ (vì $x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$)

$\Leftrightarrow x^2 + 6x - 5x - 30 = 0 \Leftrightarrow (x + 6)(x - 5) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -6 \\ x = 5 \end{array}\right.$ Vậy $S = \{-6, 5\}$

Bài 3:

Ta có: $(m^2 + n^2)(a^2 + b^2) = a^2m^2 + m^2b^2 + n^2a^2 + n^2b^2$

$= a^2m^2 + b^2n^2 + m^2b^2 + n^2a^2 + 2mbna - 2mbna$

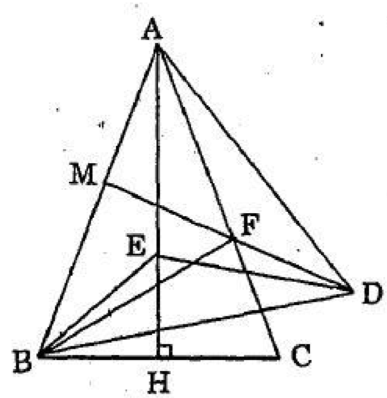
$= (am + bn)^2 + (mb - na)^2$

mà $m^2 + n^2 = a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow 1 = (am + bn)^2 + (mb - na)^2$

$\Rightarrow (am + bn)^2 \le 1$ (vì $(mb - na)^2 \ge 0$)

$\Rightarrow |am + bn| \le 1 \Rightarrow -1 \le am + bn \le 1$ (đpcm)

Bài 4:



a/ $\Delta AMF \backsim \Delta BHE$

Vì $\widehat{CBF} < \widehat{CBA}$ ($30^0 < 70^0$)

$\Rightarrow$ Tia BF nằm giữa hai tia BC, BA

$\Rightarrow \widehat{CBF} + \widehat{ABF} = \widehat{ABC}$

Vậy $\widehat{ABF} = \widehat{ABC} - CBF = 70^0 - 30^0 = 40^0$

Lại có ΔABC cân tại A nên $\hat{A} = 180^0 - 2\hat{B}$

$= 180^0 - 140^0 = 40^0$

Vậy ΔABF cân tại F $\Rightarrow$ đường trung tuyến FM cũng là đường cao hay

$FM \perp AB \Rightarrow \widehat{AMF} = 90^0$

Lý luận tương tự: $\widehat{CBE} = 40^0 = \widehat{BAC}$

Xét ΔAMF ΔBHE có: $\widehat{AMF} = \widehat{BHE} = 90^0$, $\widehat{CBE} = \widehat{BAC} = 40^0$

$\Rightarrow \Delta AMF \backsim \Delta BHE$ (g–g)

b/ AB.BE= BC.AE

Dựng ΔABD đều (ở nửa mặt phẳng bờ AB có chứa C)

Ta có: $AB = AD = BD$ và $\widehat{ABD} = 60^0$, mà $\widehat{ABE} = 30^0$

$\Rightarrow \widehat{EBD} = 30^0 = \widehat{ABE}$

Xét ΔABE và ΔDBE có $AB = BD$ (cách dựng), $\widehat{ABE} = \widehat{DBE} = 30^0$

BE chung $\Rightarrow \Delta ABE = \Delta DBE$ (c–g–c) $\Rightarrow AE = DE$

Vậy ΔADE cân tại E

Vì ΔABC đều nên $\widehat{BAD} = 60^0$, mặt khác $\hat{B} = \hat{C} = 70^0 \Rightarrow \Delta ABC$ cân có đường cao AH cũng là phân giác $\Rightarrow \widehat{BAH} = 20^0$

$\Rightarrow \widehat{HAD} = \widehat{BDA} - \widehat{HAB} = 60^0 - 20^0 = 40^0 = \widehat{EDA}$ (do ΔADE cân)

Xét ΔABF và ΔADE có: AB = AD (cách dựng), $\widehat{BAF} = \widehat{DAE} = 40^0$

$\widehat{ABF} = \widehat{ABE} = 40^0 \Rightarrow \Delta ABF = \Delta ADE$ (g–c–g) $\Rightarrow AF = AE$

Vì $\Delta AMF \backsim \Delta BHE$ (chứng minh trên) nên:

$$\frac{AM}{BH} = \frac{AF}{BE} \Rightarrow \frac{AF}{BE} = \frac{2AM}{2BH} = \frac{AB}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{BE} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AE.BC = AB.BE \text{ (đpcm)}$$

BỘ ĐỀ 88

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 8
HUYỆN YÊN LẠC – TỈNH VĨNH PHÚC – NĂM HỌC 2002 – 2003

Bài 1: Cho $A = \dfrac{a^2 + 4a + 4}{a^3 + 2a^2 - 4a - 8}$

a/ Rút gọn A.

b/ Tìm $a \in \mathbb{Z}$ để A là số nguyên.

Bài 2:

a/ Cho $a + b + c = 1$ và $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 0$. Tính $a^2 + b^2 + c^2$.

b/ Cho ba số a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn

$$\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$$

Chứng minh rằng trong ba số a, b, c phải có một số âm và một số dương.

Bài 3: Giải phương trình

a/ $|x+1| = |x(x+1)|$ b/ $x^2 + \dfrac{1}{x^2} + y^2 + \dfrac{1}{y^2} = 4$

Bài 4: Tổng một số tự nhiên và các chữ số của nó bằng 2359. Tìm số tự nhiên đó.

Bài 5: Cho tam giác vuông ABC vuông ở A và điểm H di chuyển trên BC. Gọi E, F lần lượt là điểm đối xứng qua AB, AC của H.

a/ Chứng minh E, A, F thẳng hàng

b/ Chứng minh BEFE là hình thang. Có thể tìm được vị trí của H để BEFC trở thành hình thang vuông, hình bình hành, hình chữ nhật được không?

c/ Xác định vị trí của H để tam giác EHF có diện tích lớn nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

a/ Ta có: $a^2 + 4a + 4 = (a + 2)^2$

$a^3 + 2a^2 - 4a - 8 = a^2(a + 2) - 4(a + 2) = (a + 2)(a^2 - 4) = (a + 2)^2(a - 2)$

ĐKXĐ: $a \neq \pm 2$

$$A = \frac{a^2 + 4a + 4}{a^3 + 2a^2 - 4a - 8} = \frac{(a+2)^2}{(a+2)^2(a-2)} = \frac{1}{a-2}$$

b/ Với $a \in Z$, $a \neq \pm 2$

Để A là số nguyên thì $1 \vdots (a - 2) \Rightarrow a - 2 \in \{-1, 1\}$

$\Rightarrow a \in \{1, 3\}$

Bài 2:

a/ Ta có: $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{ab + bc + ac}{abc} = 0$ $(abc \neq 0)$

$\Leftrightarrow ab + bc + ac = 0$

Ta lại có: $a + b + c = 1$ nên $(a + b + c)^2 = 1$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = 1$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 1$ (vì $ab + bc + ac = 0$)

b/ *Cách 1:* Đặt $A = b - c$; $B = c - a$; $C = a - b$, ta có:

$A + B + C = 0$ (1)

$aA + bB + cC = 0$ (2)

Đem chia đẳng thức đầu bài $\dfrac{a}{A} + \dfrac{b}{B} + \dfrac{c}{C} = 0$ lần lượt cho $\dfrac{1}{A}$, $\dfrac{1}{B}$ và $\dfrac{1}{C}$ ta nhận được:

$$\frac{a}{A^2} + \frac{b}{AB} + \frac{c}{AC} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{a}{AB} + \frac{b}{B^2} + \frac{c}{AC} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{a}{AC} + \frac{b}{BC} + \frac{c}{C^2} = 0 \quad (5)$$

Sử dụng (1) có: $\dfrac{a}{AB} + \dfrac{a}{AC} = \dfrac{a(C+B)}{ABC} = \dfrac{-aA}{ABC}$ (6)

Lý luận tương tự ta nhận được: $\dfrac{b}{AB} + \dfrac{b}{BC} = \dfrac{-bB}{ABC}$ (7)

$\dfrac{c}{AC} + \dfrac{c}{BC} = \dfrac{-cC}{ABC}$ (8)

Cộng từng vế của (3), (4) và (5) ta được:

$$\frac{a}{A^2} + \frac{b}{B^2} + \frac{c}{C^2} + \left(\frac{a}{AB} + \frac{a}{AC}\right) + \left(\frac{b}{AB} + \frac{b}{BC}\right) + \left(\frac{c}{AC} + \frac{c}{BC}\right) = 0$$

$\Rightarrow \dfrac{a}{A^2} + \dfrac{b}{B^2} + \dfrac{c}{C^2} + \dfrac{-aA}{ABC} + \dfrac{-bB}{ABC} + \dfrac{-cC}{ABC} = 0$ (sử dụng (6), (7), (8))

$$\Rightarrow \frac{a}{A^2}+\frac{b}{B^2}+\frac{c}{C^2}-\frac{aA+bB+cC}{ABC}=0$$

$$\Rightarrow \frac{a}{A^2}+\frac{b}{B^2}+\frac{c}{C^2}=0 \text{ (sử dụng (2))}$$

Từ đẳng thức cuối, hiển nhiên trong ba số a, b, c phải có một số âm và một số dương.

Cách 2:

Ta có: $\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0 \Leftrightarrow \frac{a}{b-c}=-\frac{b}{c-a}-\frac{c}{a-b}$

$$\Rightarrow \frac{a}{b-c}.\frac{1}{b-c}=(-\frac{b}{c-a}-\frac{c}{a-b})\frac{1}{b-c}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{(b-c)^2}=\frac{-ab+b^2-c^2+ca}{(a-b)(b-c)(c-a)} \quad (a)$$

Tương tự cũng có: $\frac{b}{(b-c)^2}=\frac{-bc+c^2-a^2+ab}{(a-b)(b-c)(c-a)}$ (b)

$$\frac{c}{(a-b)^2}=\frac{-cc+a^2-b^2+bc}{(a-b)(b-c)(c-a)} \quad (c)$$

Từ (a), (b) và (c) cho ta: $\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0$

$\Rightarrow$ Trong ba số a, b, c phải có một số âm và một số dương

Bài 3:

$a|x+1|=|x(x+1)| \Leftrightarrow |x||x+1|-|x+1|=0 \Leftrightarrow |x+1|(|x|-1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+1=0\\ |x|-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm 1$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\pm 1$

b/ $x^2+\frac{1}{x^2}+y^2+\frac{1}{y^2}=4$ (TXĐ: $x\neq 0,\ y\neq 0$)

$\Leftrightarrow (x^2+\frac{1}{x^2}-2)+(y^2+\frac{1}{y^2}-2)=0 \Leftrightarrow (x+\frac{1}{x})^2+(y+\frac{1}{y})^2=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x-\frac{1}{x}=0\\ y-\frac{1}{y}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2=1\\ y^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases} \text{hoặc} \begin{cases}x=-1\\ y=1\end{cases} \text{hoặc} \begin{cases}x=1\\ y=-1\end{cases} \text{hoặc} \begin{cases}x=-1\\ y=-1\end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $(x, y) \in \{(1,1);(1;-1);(-1,1);(-1,-1)\}$

Bài 4: Gọi n là số tự nhiên cần tìm. S(n) là tổng các chữ số của tự nhiên.

Ta có: $n + S(n) = 2359$ nên $n < 2359 \Rightarrow$ n là số không quá bốn chữ số, do đó $S(n) \leq 4.9 = 36 \Rightarrow n \geq 2359$.

Vậy $2323 \le n \le 2359$

Suy ra hai chữ số đầu tiên của n là 2 và 3. Gọi a, b là các chữ số hàng chục và hàng trăm đơn vị của n ($0 \le a, b \le 9$)

Ta có: $n = \overline{23ab}$

Vì $n + S(n) = 2359 \Rightarrow \overline{23ab} + (2 + 3 + a + b) = 2359$

$\Rightarrow 2300 + 10a + b + a + b + 5 = 2359 \Rightarrow 11a + 2b = 54$

Vì $0 \le 2b \le 18 \Rightarrow 54 - 18 \le 11a \le 54 \Rightarrow 36 \le 11a \le 54 \Rightarrow a = 4$

Với $a = 4$ thì $2b = 54 - 4.11 = 10 \Rightarrow b = 5$

Vậy $n = 2345$.

Kiểm tra: $2345 + (2 + 3 + 4 + 5) = 2345 + 14 = 2359$

Số tự nhiên cần tìm là 2345.

Bài 5:

a/ E, A, F thẳng hàng.

Do E, H đối xứng qua AB, F và H đối xứng qua AC, nên theo tính chất đối xứng ta có: $\widehat{HAB} = \widehat{BAE} = \dfrac{\widehat{EAH}}{2}$ và $\widehat{HAC} = \widehat{CAF} = \dfrac{\widehat{HAC}}{2}$

suy ra $\widehat{EAH} + \widehat{HAF} = 2(\widehat{BAH} + \widehat{HAC}) = 2\widehat{BAC} = 180^0$

$\Rightarrow$ E, A, F thẳng hàng

b/ BEFC hình thang

Ta có: $\begin{cases} \widehat{EBA} = \widehat{ABH} = \dfrac{\widehat{EBH}}{2} \text{ (tính chất đối xứng)} \\ \widehat{FCA} = \widehat{ACH} = \dfrac{\widehat{FCH}}{2} \text{ (tính chất đối xứng)} \end{cases}$

suy ra: $\widehat{EBH} + \widehat{FCH} = 2(\widehat{ABH} + \widehat{ACH}) = 2.90^0 = 180^0$ (vì ΔABC vuông tại A) mà hai góc ở vị trí trong cùng phía nên EB // CF. Vậy tứ giác BEFC là hình thang.

– BEFC thang vuông $\Leftrightarrow EF \perp EB \Leftrightarrow \widehat{AEB} = \widehat{AHB} = 90^0$ (tính đối xứng)

$\Leftrightarrow AH \perp BC \Leftrightarrow$ H là hình chiếu A trên BC.

– BEFC hình bình hành $\Leftrightarrow EB = FC \Leftrightarrow BH = HC$ (vì $EB = BH$ và $FC = HC$)

$\Leftrightarrow$ H là trung điểm BC.

+ Nếu ΔABC cho trước có $AB \neq AC$ thì không có vị trí nào của H để tứ giác BEFC là hình chữ nhật.

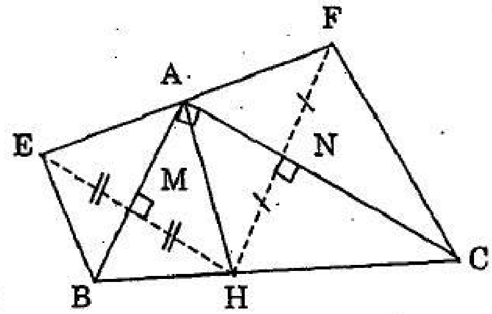
+ Nếu ΔABC vuông cân tại A: BEFC hình chữ nhật $\Leftrightarrow$ H: trung điểm BC.

c/ Định vị trí H để S_{EHF} lớn nhất

Ký hiệu S_{ABC} là S, S_{BHM} là S_1 và S_{CHN} là S_2, ta thấy S_{EHF} lớn nhất $\Leftrightarrow$ S_{AMHN} lớn nhất $\Leftrightarrow S_1 + S_2$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow \dfrac{S_1 + S_2}{S}$ nhỏ nhất

Các tam giác MBH và NHC đồng dạng với ΔABC nên:



$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{BH}{BC}\right)^2 \text{ và } \frac{S_2}{S} = \left(\frac{CH}{BC}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{S_1 + S_2}{S} = \frac{BH^2 + CH^2}{BC^2} \geq \frac{1}{2}$$

(vì $BC^2 = (BH + CH)^2 \leq 2(BH^2 + CH^2)$

$$\Rightarrow \frac{BH^2 + CH^2}{BC^2} \geq \frac{1}{2})$$

Như vậy: $S_1 + S_2 \geq \frac{1}{2}S \Rightarrow S_{EHF} \leq \frac{S}{4}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $BH = CH \Leftrightarrow H$ là trung điểm BC.

BỘ ĐỀ 89

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN LỚP 8 TRƯỜNG THCS THỰC NGHIỆM SƯ PHẠM – TP.HCM – NĂM HỌC 2003 – 2004

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a/ $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ b/ $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 1$

Bài 2: Tìm số tự nhiên n để $n^3 - 3n^2 - 3n - 1$ chia hết cho $n^2 + n + 1$

Bài 3: Giải và biện luận phương trình ẩn số là y

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a + b + y}$$

Bài 4: Cho tam giác ABC và G là một điểm thuộc miền trong của tam giác. Kéo dài AG, BG, CG cắt BC, AC, AB lần lượt tại M, N, P.

Chứng minh rằng: $\frac{GM}{AM} + \frac{GN}{BN} + \frac{GP}{CP} = 1$

Bài 5: Cho tam giác ABC có diện tích là S. Lấy các điểm M, N, P lần lượt trên các cạnh AB, BC, CA sao cho: $\frac{AM}{BM} + \frac{BN}{CN} + \frac{CP}{AP} = \frac{1}{3}$

Tính diện tích tam giác MNP theo S.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

a/ $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b)^3 - 3abc(a + b) + c^3 - 3abc$ (áp dụng $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$) $= (a + b + c)^3 - 3(a + b)c(a + b + c) - 3ab(a + b + c)$

$= (a + b + c)[(a + b + c)^2 - 3ac - 3bc - 3ab]$.

$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac - 3ab - 3bc - 3ac)$

$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ac)$

b/ $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 1 = (x + 1)(x + 4)(x + 2)(x + 3) + 1$
$= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) + 1$
$= [(x^2 + 5x + 5) - 1][(x^2 + 5x + 5) + 1] + 1$
$= (x^2 + 5x + 5) - 1 + 1 = (x^2 + 5x + 5)^2$

Bài 2: Với $n \in N$, ta có:
$n^3 - 3n^2 - 3n - 1 = n^3 + n^2 + n - 4n^2 - 4n - 4 + 3$
$= n(n^2 + n + 1) - 4(n^2 + n\ 1) + 3$
$= (n^2 + n + 1)(n - 4) + 3$
Vậy $n^3 - 3n^2 - 3n - 1$ chia hết cho $n^2 + n + 1$ khi $(n^2 + n + 1)(n - 4) + 3$ chia hết cho $n^2 + n + 1$.
Suy ra $(n^2 + n + 1) | 3$.
Do $n \in N$ nên $n^2 + n + 1 \geq 1$. Vậy

$$\left[\begin{array}{l} n^2 + n + 1 = 1 \\ n^2 + n + 1 = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n(n+1) = 0 \\ n^2 + n + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 0 (\text{vì } n + 1 > 0) \\ (n + 2)(n - 1) = 0 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow n = 0$ hay $n = 1$ (vì $n + 2 > 0$)
Vậy $n = 0$ hay $n = 1$ là các giá trị cần tìm.

Bài 3: Điều kiện để phương trình có nghĩa: $a \neq 0, b \neq 0$
TXĐ: $y \neq 0$ và $y \neq -(a + b)$
Phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{1}{a+b+y} - \frac{1}{y} = \frac{a+b}{ab} \Leftrightarrow \frac{a+b}{-y(a+b+c)} = \frac{a+b}{ab} \quad (1)$$

+ Nếu $a + b = 0$ thì (1) vô số nghiệm; y bất kỳ $\neq 0$
+ Nếu $a + b \neq 0$ thì: $-y(a + b + c) = ab$

$$\Leftrightarrow y^2 + ay + by + ab = 0 \Leftrightarrow (y + a)(y + b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -a \\ y = -b \end{array}\right.$$

Để $-a \in$ TXĐ ta phải có:

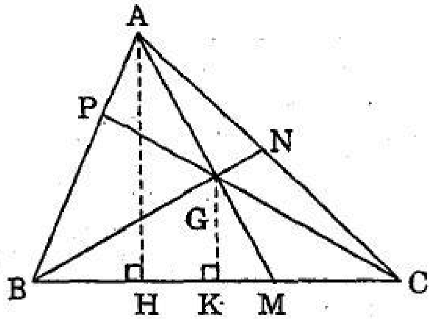
$$\begin{cases} -a \neq 0 \\ -a \neq -b - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \text{ các điều kiện này đã có.}$$

Để $-b \in$ TXĐ, tương tự ta phải có $a \neq 0, b \neq 0$.
Kết luận:
– Nếu $a \neq 0, b \neq 0, a + b \neq 0$ thì phương trình có vô số nghiệm y bất kỳ khác 0.
– Nếu $a \neq 0, b \neq 0, a + b \neq 0$ thì phương trình có nghiệm $-a$ và $-b$.

Bài 4:
Cách 1: Kẻ AH và GK cùng vuông góc với BC $\Rightarrow$ AH // GK
Áp dụng hệ quả Talét, ta có:

$$\frac{GM}{AM} = \frac{GK}{AH} = \frac{\frac{1}{2}BC.GK}{\frac{1}{2}BC.AH} = \frac{S_{GAB}}{S_{ABC}}$$

Lý luận tương tự ta cũng nhận được:



$$\frac{GN}{BN} = \frac{S_{GAB}}{S_{ABC}} \text{ và } \frac{GP}{CP} = \frac{S_{GAB}}{S_{ABC}}$$

Suy ra: $\frac{GN}{AM} + \frac{GN}{BN} + \frac{GP}{CP}$

$$= \frac{S_{BGC} + S_{AGC} + S_{ABG}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1 \text{ (đpcm)}$$

Cách 2: Ta có:

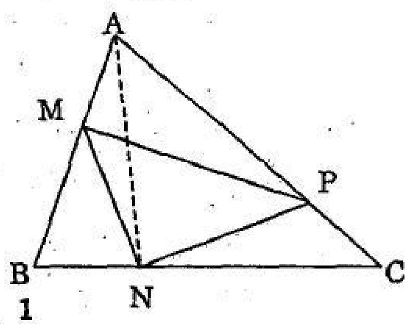
$$\frac{GM}{AM} = \frac{S_{BGM}}{S_{ABM}} = \frac{S_{CGM}}{S_{AMC}} = \frac{S_{BGM} + S_{CGM}}{S_{ABM} + S_{AMC}} = \frac{S_{BGC}}{S_{ABC}}$$

Lý luận tương tự ta được:

$$\frac{GN}{BN} = \frac{S_{AGC}}{S_{ABM}} \text{ và } \frac{GP}{CP} = \frac{S_{GAB}}{S_{ABC}}$$

Suy ra: $\frac{GM}{AM} + \frac{GN}{BN} + \frac{GP}{CP} = \frac{S_{BGC} + S_{AGC} + S_{ABG}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$

Bài 5:



Ta có: $\frac{S_{BMN}}{S_{ABN}} = \frac{BM}{AB}$ và $\frac{S_{ABN}}{S} = \frac{BN}{BC}$

mà $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{BM}{AB} = \frac{3}{4}$

$\frac{BN}{CN} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{BN}{BC} = \frac{1}{4}$

Suy ra: $\frac{S_{BMN}}{S_{ABN}} \times \frac{S_{ABN}}{S} = \frac{BM}{AB} \times \frac{BN}{BC} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{S_{ABN}}{S} = \frac{3}{16}$ hay $S_{BMN} = \frac{3}{16}S$

Lý luận tương tự ta cũng nhận được: $S_{BMN} = S_{CNP} = \frac{3}{16}S$

Vậy $S_{MNP} = S - (S_{BMN} + S_{AMP} + S_{CNP}) = S - \frac{9}{16}S = \frac{7}{16}S$

BỘ ĐỀ 90

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN TÂN PHÚ TP.HCM – NĂM HỌC 2003 – 2004

Bài 1:

1) Phân tích các đa thức thành nhân tử:

a/ $x^4 + 2x^3 - 4x - 4$ b/ $x(x + 2y)^3 - y(2x + y)^3$

2) Giải phương trình sau:

$$\frac{x+1-a}{x-a}+\frac{x+1-b}{b-x}-\frac{a}{(x-a)(x-b)}=0,$$ với a, b là hằng số.

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = 2x^2 - 2x + 9 - 2xy + y^2$

Bài 2:

Cho hình thang ABCD có AB là đáy nhỏ. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Đường thẳng qua O và song song với CD lần lượt cắt AD và BC tại E và F.

1) Chứng minh: $S_{AOD} = S_{BOC}$

2) Chứng minh rằng: $\frac{OC}{AC} = \frac{OD}{BD}$

3) Chứng minh: OE = OF

4) Cho $S_{AOB} = a^2$, $S_{COD} = b^2$. Tính diện tích hình thang ABCD theo a, b.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) a/ $x^4 + 2x^3 - 4x - 4 = x^4 - 4 + 2x^3 - 4x$

$= (x^2 + 2)(x^2 - 2) + 2x(x^2 - 2) = (x^2 - 2)(x^2 + 2 + 2x)$

$= (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x^2 + 2x + 2)$

b/ $x(x + 2y)^3 - y(2x + y)^3 =$

$= x(x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3) - y(8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3)$

$= x^4 + 6x^3y + 12x^2y^2 + 8xy^3 - 8x^3y - 12x^2y^2 - 6xy^3 - y^4$

$= x^4 - 2x^3y + 2xy^3 - y^4 = (x^4 - 2x^3y + x^2y^2) - (x^2y^2 - 2xy^3 + y^4)$

$= (x^2 - xy)^2 - (xy - y^2)^2 = (x^2 - xy + xy - y^2)(x^2 - xy - xy + y^2)$

$= (x^2 - y^2)(x - y)^2 = (x + y)(x - y)^3$

2) $$\frac{x+1-a}{x-a}+\frac{x+1-b}{b-x}-\frac{a}{(x-a)(x-b)}=0$$

$$\frac{x-a}{x-a}+\frac{1}{x-a}+\frac{x-b}{b-x}+\frac{1}{b-x}-\frac{a}{(x-a)(x-b)}=0$$

$$1+\frac{1}{x-a}-1+\frac{1}{b-x}-\frac{a}{(x-a)(x-b)}=0$$

$$\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}-\frac{a}{(x-a)(x-b)}=0$$

Điều kiện $x \neq a$, $x \neq b$

Quy đồng và khử mẫu, ta có:

$x - b - x + a - a = 0$

$0x = -b$

- $b = 0$ ta có $0x = 0$; x tùy ý
- $b \neq 0$ ta có $0x = -b$; $x \in \phi$

Vậy nếu $b \neq 0$, phương trình vô nghiệm;

Nếu $b = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi x khác a và b.

3) $A = 2x^2 - 2x + 9 - 2xy + y^2$

$A = (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2x + 1) + 8$

$A = (x - y)^2 + (x - 1)^2 + 8$

$A \geq 8$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $x - y = 0$ và $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = y = 1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 8.

Bài 2:

1) $S_{ADC} = S_{BDC}$ (hai tam giác ADC có chung đáy DC, đường cao vẽ từ A, B đến DC bằng nhau)

$\Rightarrow S_{ADC} - S_{ODC} = S_{BDC} - S_{ODC} \Rightarrow S_{AOD} = S_{BOC}$

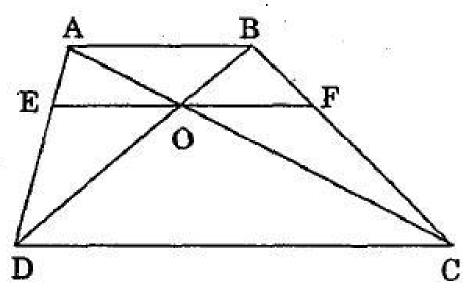
2) Xét ΔODC có AB // DC (gt), theo hệ quả của định lí Talét, ta có: $\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB}$

$$\Rightarrow \frac{OC}{OA + OC} = \frac{OD}{OB + OD} \Rightarrow \frac{OC}{AC} = \frac{OD}{BD}$$

3) ΔADC có OE // DC, theo hệ quả của định lí Talét, ta có: $\frac{OA}{AC} = \frac{OB}{BD}$

Do đó: $\frac{OE}{DC} = \frac{OF}{DC} \Rightarrow OE = OF$

4) $\frac{S_{BOC}}{S_{AOD}} = \frac{OB}{OD}$ (hai tam giác AOB, AOD có chung đường cao vẽ từ A đến BD)



Tượng tự: $\frac{S_{BOC}}{S_{COD}} = \frac{OB}{OD}$

Mà $S_{AOB} = a^2$, $S_{COD} = b^2$, $S_{AOD} = S_{BOC}$

Do đó: $\frac{a^2}{S_{AOD}} = \frac{S_{AOD}}{b^2}$

$\Rightarrow S^2_{AOD} = (ab)^2 \Rightarrow S_{AOD} = |ab|$

nên $S_{BOC} = |ab|$.

Ta có: $S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{COD} + S_{AOD} + S_{BOC} = a^2 + b^2 + |ab| + |ab| = (|a| + |b|)^2$

BỘ ĐỀ 91

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 8 TRƯỜNG THCS NGÔ SĨ LIÊN QUẬN TÂN BÌNH, TP.HCM NĂM HỌC 2003 – 2004

Bài 1: Giải phương trình:

a/ $|x| - |2x + 3| = x - 1$

b/ $\frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$

Bài 2: Rút gọn biểu thức sau rồi tìm giá trị của x để biểu thức rút gọn dương.

$$\frac{x^2-4x+4}{x^3-2x^2-(4x-8)}$$

Bài 3: Tìm giá trị của a để phương trình: $\frac{a(x+1)}{2x-1} = a + 1$ có nghiệm dương.

Bài 4: Cho $a > 0$, $b > 0$ và $a + b = 1$. Chứng minh: $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$

Bài 5: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Trên HB và HC lần lượt lấy M và N sao cho $\widehat{AMC} = \widehat{AMB} = 90^0$.

a/ Chứng minh $\Delta ABD \backsim \Delta ACE$

b/ Chứng minh ΔAMN cân.

Bài 6: Từ điểm D trên cạnh huyền BC của tam giác ABC vuông vẽ $DE \perp AB$, $DF \perp AC$.

a/ Chứng minh: $BE^2 + ED^2 + DC^2 = BD^2 + DF^2 + FC^2$

b/ Chứng minh: $DB.DC = AE.BE + AF.CF$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

a/ Xét $x < -\frac{3}{2}$

Phương trình trở thành $-x + 2x + 3 = x - 1 \Leftrightarrow 0x = -4 \Leftrightarrow x = \phi$

Xét $-\frac{3}{2} \leq x \leq 0$

Phương trình trở thành $-x - 3x - 3 = x - 1$

$\Leftrightarrow -4x = 2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

$x = -\frac{1}{2}$ thỏa mãn điều kiện $-\frac{3}{2} \leq x \leq 0$. Xét $x > 0$

Phương trình trở thành $x - 2x - 3 = x - 1 \Leftrightarrow -2x = 2 \Leftrightarrow x = -1$

$x = -1$ không thỏa mãn điều kiện $x > 0$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -\frac{1}{2}$

b/ $\frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} + \frac{1}{x^2+13x+42} = \frac{1}{18}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2+4x+5x+20} + \frac{1}{x^2+5x+6x+30} + \frac{1}{x^2+6x+7x+42} = \frac{1}{18}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x(x+4x)+5(x+4)} + \frac{1}{x(x+5)+6(x+5)} + \frac{1}{x(x+6)+7(x+6)} = \frac{1}{18}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18}$

ĐKXĐ: $x \neq -4, x \neq -5, x \neq -6, x \neq -7$

Do đó, ta có:

$$\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18} \Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$\Leftrightarrow 18(x + 7) - 18(x + 4) = (x + 4)(x + 7)$

$\Leftrightarrow 18x + 126 - 18x - 72 = x^2 + 7x + 4x + 28$

$\Leftrightarrow x^2 + 11x - 26 = 0 \qquad \Leftrightarrow x^2 - 2x + 13x - 26 = 0$

$\Leftrightarrow x(x - 2) + 13(x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 13) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ x+13=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-13 \end{array}\right.$$

$x = 2, x = -13$ đều thỏa mãn ĐKXĐ.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 2$ và $x = -13$

Bài 2:

$x^3 - 2x^2 - (4x - 8) = x^2(x - 2) - 4(x - 2)$

$= (x - 2)(x^2 - 4) = (x - 2)(x - 2)(x + 2) = (x - 2)^2(x + 2)$

Do vậy ĐKXĐ: $x \neq 2$ và $x \neq -2$.

Ta có: $\dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 2x^2 - (4x - 8)} = \dfrac{(x-2)^2}{(x-2)^2(x+2)} = \dfrac{1}{x+2}$

$\dfrac{1}{x+2} > 0 \Leftrightarrow x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$

Bài 3: ĐKXĐ: $x \neq \dfrac{1}{2}$

Ta có: $\dfrac{a(x+1)}{2x-1} = a + 1$

$\Leftrightarrow a(x + 1) = (a + 1)(2x - 1) \Leftrightarrow ax + a = 2ax - a + 2x - 1$

$\Leftrightarrow ax - 2ax - 2x = -a - 1 - a \Leftrightarrow (a + 2)x = 2a + 1$

Phương trình có nghiệm dương.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2 \neq 0 \\ x = \dfrac{2a+1}{a+2} > 0 \\ x \neq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -2 \\ \left[\begin{array}{l} 2a+1 > 0 \text{ và } a+2 > 0 \\ 2a+1 < 0 \text{ và } a+2 < 0 \end{array}\right. \\ \dfrac{2a+1}{a+2} \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

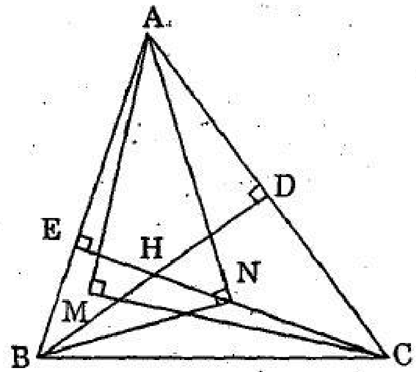
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -2 \\ \left[\begin{array}{l} 2a > -1 \text{ và } a > -2 \\ 2a < -1 \text{ và } a < -2 \end{array}\right. \\ 2(2a+1) \neq a+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -2 \\ \left[\begin{array}{l} a > -\dfrac{1}{2} \text{ và } a > -2 \\ a < -\dfrac{1}{2} \text{ và } a < -2 \end{array}\right. \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > \dfrac{1}{2} \text{ và } a \neq 0 \\ a < -2 \end{array}\right.$$

Bài 4: Từ a + b =1, ta có: b = 1 – a

Do đó $a^2 + b^2 = a^2 + (1 - a)^2 = a^2 + 1 - 2a + a^2$

$= 2a^2 - 2a + 1 = 2(a^2 - a + \frac{1}{4}) + \frac{1}{2} = 2(a - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$

Bài 5:



a/ Xét ΔABD và ΔACE có $\widehat{BAD}$ chung

$\widehat{ADB} = \widehat{AEC}$ $(= 90^0)$

Do đó $\Delta ABD \backsim \Delta ACE$

$\Delta ABD \backsim \Delta ACE$

$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$ (1)

$\Rightarrow AE.AB = AD.AC$

ΔANB vuông tại N, NE là đường cao

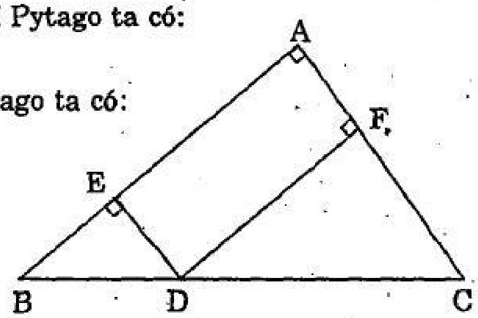
$\Rightarrow AN^2 = AE.AB$ (2)

Tương tự $AM^2 = AD.AC$ (3)

Từ (1), (2) và (3) có $AN^2 = AM^2$

$\Rightarrow AN = AM \Rightarrow \Delta AMN$ cân tại A

Bài 6: ΔEBD vuông tại E (gt), theo định lí Pytago ta có:



$BE^2 + ED^2 = BD^2$

ΔFDC vuông tại F (gt), theo định lí Pytago ta có:

$DF^2 + FC^2 = DC^2$

Do đó $BE^2 + ED^2 + DC^2 = BD^2 + DF^2 + FC^2$ $(= BD^2 + DC^2)$

b/ $DE \perp AB$ (gt), $AC \perp AB$ (gt)

$\Rightarrow DE \parallel AC$

ΔABC có $DE \parallel AC$, theo định lí Talét ta có:

$\frac{AE}{AB} = \frac{DC}{BC}$ và $\frac{BE}{AB} = \frac{BD}{BC}$

$\Rightarrow \frac{AE}{AB}.\frac{BE}{AB} = \frac{DC}{BC}.\frac{BD}{BC} \Rightarrow \frac{AE.BE}{AB^2} = \frac{BD.DC}{BC^2}$

Chứng minh tương tự cũng có $\frac{AF.CF}{AC^2} = \frac{BD.DC}{BC^2}$

Do đó $\frac{AE.BE}{AB^2} = \frac{AF.CF}{AC^2} = \frac{BD.DC}{BC^2}$

$\Rightarrow \frac{AE.BE + AF.CF}{AB^2 + AC^2} = \frac{BD.DC}{BC^2}$ (1)

Mà ΔABC vuông tại A nên $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $AE.BE + AF.CF = BD.DC$

BỘ ĐỀ 92

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI GIẢI THƯỞNG LÊ QUÝ ĐÔN QUẬN TÂN BÌNH, TP.HCM NĂM HỌC 2003 – 2004

Bài 1: Phân tích các đa thức thành các nhân tử:

1) $x^4 + 2005x^2 + 2004x + 2005$ 2) $a^3 + b^3 - c^3 + 3abc$

Bài 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của M biết:

$$M = \frac{x^2 - 2x + 2004}{x^2} \text{ với } x \neq 0$$

Bài 3:

1) Giải phương trình: $\frac{x+2}{x^2+2x+4} - \frac{x-2}{x^2-2x+4} = \frac{16(x^2+x)}{x^6-8^2}$

2) Giải bất phương trình: $\frac{x+5}{1997} + \frac{x+7}{1997} \geq \frac{x+9}{1995} + \frac{x+11}{1993}$

Bài 4: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn (AB < AC). Gọi BD là đường phân giác trong của tam giác ABC, dựng đường trung trực của đoạn thẳng BD cắt đường thẳng AC tại M.

1) Chứng minh: hai tam giác MAB và MBC đồng dạng.

2) Cho AD = 4cm và DC = 6cm. Tính độ dài đoạn thẳng MD.

Bài 5: Cho tam giác nhọn ABC có ba đường cao AD, BM, CN. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC.

Chứng minh rằng: $\frac{HD}{AD} + \frac{HM}{BM} + \frac{HN}{CN} = \frac{DB}{DC} \cdot \frac{MC}{MA} \cdot \frac{NA}{NB}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $x^4 + 2005x^2 + 2004x + 2005$
$= x^4 + x^3 + x^2 - x^3 + x^2 - x + 2005x^2 + 2004x + 2005$
$= x^2(x^2 + x + 1) - x(x^2 + x + 1) + 2005(x^2 + x + 1)$
$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2005)$

2) $a^3 + b^3 - c^3 + 3abc = (a + b)^3 - 3ab(a + b) - c^3 + 3abc$
$= (a + b)^3 - c^3 - 3ab(a + b) + 3abc$
$= [(a + b) - c][(a + b)^2 + (a + b)c + c^2] - 3ab(a + b - c)$
$= (a + b - c)(a^2 + 2ab + b^2 + ac + bc + c^2 - 3ab)$
$= (a + b - c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab + ac + bc)$

Bài 2:

$$M = \frac{x^2 - 2x + 2004}{x^2} = \frac{2004x^2 - 2.2004x + 2004^2}{2004x^2}$$

$$= \frac{2003x^2 + x^2 - 2.2004x + 2004^2}{2004x^2} = \frac{2003}{2004} + \frac{(x-2004)^2}{2004x^2} \geq \frac{2003}{2004}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x - 2004 = 0 \Leftrightarrow x = 2004$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $\dfrac{2003}{2004}$

Bài 3:

1) $x^2 + 2x + 4 = (x + 1)^2 + 3 > 0$

$x^2 - 2x + 4 = (x - 1)^2 + 3 > 0$

$x^6 - 8^2 \neq 0 \Leftrightarrow x^6 \neq 8^2 \Leftrightarrow x \neq \pm 2$

ĐKXĐ: $x \neq \pm 2$

Quy đồng và khử mẫu, ta được:

$(x + 2)(x - 2)(x^3 + 2^3) - (x - 2)(x + 2)(x^3 - 2^3) = 16(x^2 + x)$

$(x^2 - 4)(x^3 + 8 - x^3 + 8) = 16(x^2 + x)$

$(x^2 - 4) . 16 = 16(x^2 + x)$

$x^2 - 4 = x^2 + x$

$x = -4 \in$ ĐKXĐ

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = -4$

2) $\dfrac{x+5}{1999} + \dfrac{x+7}{1997} \geq \dfrac{x+9}{1995} + \dfrac{x+11}{1993}$

$\dfrac{x+5}{1999} + \dfrac{x+7}{1997} - \dfrac{x+9}{1995} - \dfrac{x+11}{1993} \geq 0$

$(\dfrac{x+5}{1999} + 1) + (\dfrac{x+7}{1997} + 1) - (\dfrac{x+9}{1995} + 1) - (\dfrac{x+11}{1993} + 1) \geq 0$

$\dfrac{x+2004}{1999} + \dfrac{x+2004}{1997} - \dfrac{x+2004}{1995} - \dfrac{x+2004}{1993} \geq 0$

$(x + 2004)(\dfrac{1}{1999} + \dfrac{1}{1997} - \dfrac{1}{1995} - \dfrac{1}{1993}) \geq 0$

Mà $\dfrac{1}{1999} < \dfrac{1}{1997}$; $\dfrac{1}{1995} < \dfrac{1}{1993}$ nên

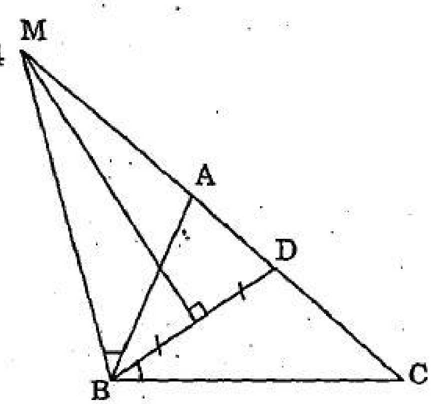
$\dfrac{1}{1999} + \dfrac{1}{1997} - \dfrac{1}{1995} - \dfrac{1}{1993} < 0$

Do đó, ta có $x + 2004 \leq 0$

$x \leq -2004$

Nghiệm của bất phương trình là $x \leq -2004$

Bài 4:



1) MB = MD (M thuộc đường trung trực của đoạn thẳng BD)

$\Rightarrow \Delta MBD$ cân tại M

$\Rightarrow \widehat{MBD} = \widehat{MDB}$, MB = MD

Mà $\widehat{MBD} = \widehat{MBA} + \widehat{ABD}$

$\widehat{MDB} = \widehat{DCB} + \widehat{DBC}$

($\widehat{MDB}$ là góc ngoài của ΔDBC)

$\widehat{ABD} = \widehat{DBC}$ (BD là đường phân giác của ΔABC)

Do đó $\widehat{MBA} = \widehat{DCB}$

Xét ΔMAB và ΔMBC có

$\widehat{AMB}$ (chung), $\widehat{MBA} = \widehat{DCB}$

Do đó $\Delta MAB \backsim \Delta MBC$

2) $\Delta MAB \backsim \Delta MBC$

$\Rightarrow \dfrac{MB}{MC} = \dfrac{AB}{BC}$

ΔABC có BD là đường phân giác

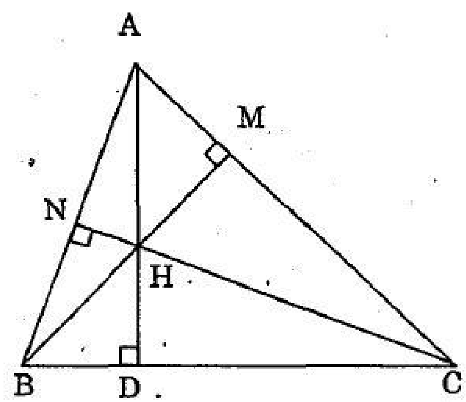
nên $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DA}{DC} \Rightarrow \dfrac{DA}{DC} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

Do vậy $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{MD}{2} = \dfrac{MC}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{MD}{2} = \dfrac{MC - MD}{3 - 2} = \dfrac{DC}{1} = 6$

$\Rightarrow MD = 6 \,.\, 2 = 12$ (cm)

Bài 5:



$\dfrac{HD}{AD} + \dfrac{HM}{BM} + \dfrac{HN}{CN} =$

$= \dfrac{\frac{HD.BC}{2}}{\frac{AD.BC}{2}} + \dfrac{\frac{HM.AC}{2}}{\frac{BM.AC}{2}} + \dfrac{\frac{HN.AB}{2}}{\frac{CN.AB}{2}}$

$= \dfrac{S_{MBC}}{S_{ABC}} + \dfrac{S_{MAC}}{S_{ABC}} + \dfrac{S_{MAB}}{S_{ABC}}$

$= \dfrac{S_{MBC} + S_{MAC} + S_{MAB}}{S_{ABC}} = \dfrac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$

Mặt khác

Xét Δ DHB và Δ MHA có

$\widehat{BHD} = \widehat{MHA}$ (đối đỉnh), $\widehat{DHB} = \widehat{HMA}$ ($= 90^0$)

Do đó $\Delta DHB \backsim \Delta MHA \Rightarrow \dfrac{DB}{MA} + \dfrac{HB}{HA}$

Chứng minh tương tự cũng có:

$\dfrac{MC}{NB} + \dfrac{HC}{HB}, \dfrac{NA}{DC} + \dfrac{HA}{HC}$

Do đó $\dfrac{DB}{MA} \cdot \dfrac{MC}{NB} \cdot \dfrac{NA}{DC} = \dfrac{HB}{HA} \cdot \dfrac{HC}{HB} \cdot \dfrac{HA}{HC} \Rightarrow \dfrac{DB}{DC} \cdot \dfrac{MC}{MA} \cdot \dfrac{NA}{NB} = 1$

Vậy $\dfrac{HD}{AD} + \dfrac{HM}{BM} + \dfrac{HN}{CN} = \dfrac{DB}{DC} \cdot \dfrac{MC}{MA} \cdot \dfrac{NA}{NB}$ (= 1)

BỘ ĐỀ 93

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN 8
QUẬN 1, TP.HCM NĂM HỌC 2003 – 2004

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1) $(2x-1)^2-(4x-2)-3$ 2) $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$

3) $x(x+1)(x+2)(x+3)-8$

Bài 2:

1) Cho $a+b=1$ và $ab\neq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b^3-1}+\frac{b}{a^3-1}=\frac{2(ab-2)}{a^2b^2+3}$$

2) Tam giác ABC có BC = a, AC = b, AB = c là độ dài ba cạnh của tam giác thỏa hệ thức:

$$\frac{ab}{b+c}+\frac{bc}{c+a}+\frac{ca}{a+b}=\frac{ca}{b+c}+\frac{ab}{c+a}+\frac{bc}{a+b}$$

Chứng minh tam giác ABC là tam giác cân.

Bài 3:

1) Giải phương trình sau: $\dfrac{x-1}{x+2}+\dfrac{x+1}{x-2}=\dfrac{2(x^2+2)}{x^2-4}$

2) Tính giá trị của biểu thức:

$E=\left|x^2+y^2+5+2x-4y\right|-\left|-(x+y-1)^2\right|+2xy$ với $x=2^{2003}$ và $y=16^{501}$

Bài 4: Giải bài toán bằng cách lập phương trình.

Trong ba cái bình có đựng nước. Nếu ta rót $\frac{1}{3}$ lượng nước từ bình thứ nhất sang bình thứ hai, rồi rót $\frac{1}{4}$ lượng nước hiện có ở bình thứ hai sang bình thứ ba và cuối cùng $\frac{1}{10}$ lượng nước ở bình thứ ba sang bình thứ nhất thì trong mỗi bình có 9 lít nước. Hỏi lúc đầu mỗi bình chứa bao nhiêu lít nước?

Bài 5: Cho tam giác nhọn ABC với ba đường cao AD, BE, CF. Gọi điểm H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\frac{HD}{AD}+\frac{HE}{BE}+\frac{HE}{CF}=\frac{DB}{DC}\cdot\frac{EC}{EA}\cdot\frac{FA}{FB}$$

Bài 6: Cho tam giác ABC. gọi M, N, Q theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, AC, BC. Điểm P thuộc miền trong của tam giác ABC. Ba điểm A', B', C' theo thứ tự là điểm đối xứng của điểm P qua các điểm Q, N, M. Tìm điều kiện của tam giác ABC và vị trí điểm P để lục giác AB'CA'BC' là lục giác đều.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $(2x-1)^2-(4x-2)-3=(2x-1)^2-2(2x-1)+1-4$

$=[(2x-1)-1]^2=(2x-1)^2-2^2=(2x-2+2)(2x-2-2)$

$=2x(2x-4)=4x(x-2)$

2) Áp dụng hằng đẳng thức $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$

$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=(a-b)^3-[(a-b)+(c-a)]^3+(c-a)^3$

$=2(a-b)(b-c)(c-a)$

3) $x(x+1)(x+2)(x+3)-8=(x^2+3x)(x^2+3x+2)-8$

$=[(x^2+3x+1)-1][(x^2+3x+1)+1]-8$

$=(x^2+3x+1)^2-9=(x^2+3x+1+3)(x^2+3x+1-3)$

$=(x^2+3x-2)(x^2+3x+4)$

Bài 2:

1) Với $a+b=1$ và $ab\neq 0$, ta có:

$$\frac{a}{b^3-1}+\frac{b}{a^3-1}=\frac{a(a^3-1)+b(b^3-1)}{(a^3-1)(b^3-1)}=\frac{(a^4+b^4)-(a+b)}{a^3b^3-(a^3+b^3)+1}$$

$$=\frac{(a^2+b^2)^2-2a^2b^2-1}{a^3b^3-(a+b)^3+3ab(a+b)+1}=\frac{[(a+b)^2-2ab]^2-2a^2b^2-1}{a^3b^3+3ab}$$

$$=\frac{1+4a^2b^2-2a^2b^2-1}{ab(a^2b^2+3)}\ (\text{vì } a+b=1)$$

$$=\frac{2a^2b^2-4ab}{ab(a^2b^2+3)}=\frac{2ab(ab-2)}{ab(a^2b^2+3)}=\frac{2(ab-2)}{a^2b^2+3}\ (ab\neq 0)$$

2) Với a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác, ta có:

$$\frac{ab}{b+c}+\frac{bc}{c+a}+\frac{ca}{a+b}=\frac{ca}{b+c}+\frac{ab}{c+a}+\frac{bc}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow ab\left(\frac{1}{b+c}-\frac{1}{a+c}\right)+bc\left(\frac{1}{a+c}-\frac{1}{a+b}\right)+ac\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{b+c}\right)=0$$

$$\frac{ab(a-c)}{(b+c)(a+c)}\Leftrightarrow+\frac{bc(b-c)}{(a+c)(a+b)}+\frac{ac(c-a)}{(a+b)(b+c)}=0$$

$\Leftrightarrow ab(a-b)(a+b)+bc(b-c)(b+c)+ac(c-a)(a+c)=0$

$\Leftrightarrow ab(a-b)(a+b)-bc(b+c)[(c-a)+(a-b)]+ac(c-a)(a+c)=0$

$\Leftrightarrow ab(a-b)(a+b)-bc(b+c)(c-a)-bc(b+c)(a-b)+ac(c-a)(a+c)=0$

$\Leftrightarrow b(a-b)(a^2+ab-bc-c^2)+c(c-a)(a^2+ac-b^2-bc)=0$

$\Leftrightarrow b(a-b)[(a-c)(a+c)+b(a-c)]+c(c-a)[(a-b)(a+b)+c(a-b)]=0$

$\Leftrightarrow b(a-b)(a-c)(a+b+c)\ -c(a-c)(a-b)(a+b+c)=0$

$\Leftrightarrow (a+b+c)(a-b)(a-c)(b-c)=0$

$\Leftrightarrow a-b=0$ hoặc $a-c=0$; $b-c=0$ (vì $a+b+c>0$)

$\Leftrightarrow a=$ hoặc $a=c$; $b=c\Leftrightarrow \Delta ABC$ cân

Bài 3:

1) TXĐ: $x \neq \pm 2$

Phương trình đã cho trở thành:

$(x - 1)(x - 2) + (x + 1)(x + 2) = 2x^2 + 4$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 + x^2 + 3x + 2 = 2x^2 + 4$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 4 = 2x^2 + 4 \Leftrightarrow 0x = 0$ $x \in Q$ (x tùy ý)

Vậy phương trình có vô số nghiệm $x \neq \pm 2$

2) $E = \left|x^2 + y^2 + 5 + 2x - 4y\right| - \left|-(x + y - 1)^2\right| + 2xy$

$= \left|(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4)\right| - \left|(x + y - 1)^2\right| + 2xy$

$= x^2 + y^2 + 5 + 2x - 4y - x^2 - y^2 - 1 - 2xy + 2x + 2y + 2xy$

$= 4x - 2y - 4 = 2(2x - y) + 4$

Với $x = 2^{2003}$ và $y = 16^{501} = (2^4)^{501} = 2^{2004}$ thì

$E = 2(2.2^{2003} - 2^{2004}) + 4 = 2.0 + 4 = 4$

Bài 4: Gọi x (l) là lượng nước ở bình thứ ba trước khi rót sang bình thứ nhất ($x > 0$)

Sau khi rót $\frac{1}{10}x$ (l) đi sang bình thứ nhất thì lượng nước còn lại $\frac{9}{10}x$ (l)

Sau khi rót mỗi bình còn lại 9 lít, nên ta có phương trình:

$$\frac{9}{10}x = 9 \Leftrightarrow x = 10$$

Vậy lượng nước của bình thứ ba trước khi rót sang bình thứ nhất 10l là:

Lượng nước của bình ba rót sang bình thứ nhất 1l

Suy ra: Lượng nước của bình thứ nhất ban đầu là:

$$(9 - 1) : (1 - \frac{1}{3}) = 12\ (l)$$

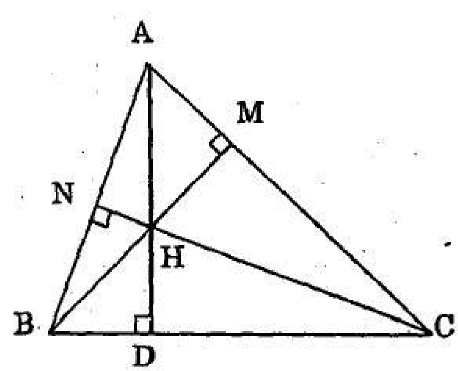
Lượng nước của bình thứ hai ban đầu có là:

$$9 : (1 - \frac{1}{4}) - 12.\frac{1}{3} = 8\ (l)$$

Lượng nước của bình thứ ba ban đầu có là:

$$9.3 - (12 + 8) = 7\ (l)$$

Bài 5:



Do ΔABC nhọn nên trực tâm H ở miền trong của ΔABC.

$$\frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}BC.HD}{\frac{1}{2}BC.AD} = \frac{HD}{AD}$$

Tương tự, ta cũng có:

$$\frac{HE}{BE} = \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} \text{ và } \frac{HF}{BF} = \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}}$$

Suy ra: $\dfrac{HD}{AD}+\dfrac{HE}{BE}+\dfrac{HF}{BF}=\dfrac{S_{HBC}+S_{HAC}+S_{HAB}}{S_{ABC}}=\dfrac{S_{ABC}}{S_{ABC}}=1$ (1)

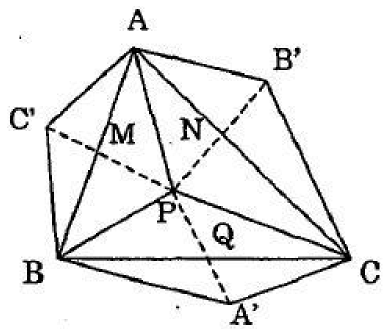
Ta có: $\dfrac{S_{AHB}}{S_{AHC}}=\dfrac{\frac{1}{2}AH.BD}{\frac{1}{2}AH.DC}=\dfrac{BD}{DC}$

Tương tự, ta có: $\dfrac{EC}{EA}=\dfrac{S_{BHC}}{S_{AHB}}$ và $\dfrac{FA}{FB}=\dfrac{S_{HAC}}{S_{BHC}}$

Suy ra: $\dfrac{BD}{DC}.\dfrac{EC}{EA}.\dfrac{FA}{FB}=\dfrac{S_{AHB}}{S_{AHC}}.\dfrac{S_{BHC}}{S_{AHB}}.\dfrac{S_{AHC}}{S_{BHC}}=1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$\dfrac{HD}{AD}+\dfrac{HE}{BE}+\dfrac{HE}{CF}=\dfrac{DB}{DC}.\dfrac{EC}{EA}.\dfrac{FA}{FB}$ (đpcm)



Bài 6:

Lục giác AB'CA'BC' là lục giác đều

$\Rightarrow \begin{cases}\widehat{B'}=\widehat{A'}=\widehat{C'}=120^0\\ AB'=BC'=CA'=AB'=BC'=CA'\end{cases}$

$\Rightarrow \Delta AB'C=\Delta CA'B=\Delta BC'A$ (c–g–c)

$\Rightarrow AC=CB=AB\Rightarrow \Delta ABC$ đều.

$\begin{cases}\text{Ba điểm M, N, Q theo thứ tự là trung điểm AB, AC, BC (gt)}\\ \text{A, B, C là điểm đối xứng điểm P qua các điểm Q, N, M}\end{cases}$

$\Rightarrow$ Các tứ giác PCA'B, PCB'A, PAC'B là hình bình hành.

Vậy PA = PB = PC $\Rightarrow$ điểm P là giao điểm của đường trung trực ba cạnh của ΔABC.

Ngược lại, nếu có ΔABC là tam giác đều và P là giao điểm ba đường trung trực của ba cạnh tam giác thì ta dễ dàng chứng minh được AB'CA'BC' là lục giác đều.

B. MỘT SỐ VẤN ĐỀ NÂNG CAO TOÁN 8

I. MẸO NHỎ GIÚP GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp tách một hạng tử thành nhiều hạng tử và phương pháp thêm bớt cùng một hạng tử là vấn đề tương đối khó với học sinh lớp 8. Việc tìm kiếm "mẹo" để giúp giải một số bài toán dạng này rất cần thiết.

Qua bài viết này xin được giúp các em học sinh lớp 8 một chút "mẹo" nhỏ, để giải một số bài toán phân tích đa thức thành nhân tử.

Dạng 1: Phân tích đa thức $ax^2 + bx + c$ thành nhân tử

1) Cơ sở tìm kiếm

$ax^2 + bx + c = (mx + n)(px + q) = mpx^2 + (mq + np)x + nq$

Nhận ra rằng $ac = (mp)(nq) = (mq)(np)$ và $b = mq + np$ giúp ta đến với "mẹo". Tìm cặp số u, v sao cho $a.c = u.v$ và $b = u + v$, rồi tách bx thành $ux + vx$, tiếp tục vận dụng phương pháp nhóm nhiều hạng tử.

2) Mẹo nhớ

Tìm hai số u, v thỏa mãn $u.v = a.c$ và $u + v = b$. Tách bx thành $ux + vx$, tiếp tục vận dụng phương pháp nhóm nhiều hạng tử.

3) Các ví dụ

Ví dụ 1: Phân tích đa thức thành nhân tử: $15x^2 - 11x - 12$

• *Tìm kiếm lời giải*

$a.c = 15(-12) = -20.9$ và $b = -11 = -20 + 9$

Tách $-11x$ thành $-20x + 9x$

• *Lời giải*

$15x^2 - 11x - 12 = 15x^2 - 20x + 9x - 12$

$= 5x(3x - 4) + 3(3x - 4) = (3x - 4)(5x + 3)$

Ví dụ 2: Phân tích đa thức thành nhân tử $14x^2 + 33x - 5$

• *Tìm kiếm lời giải*

$a.c = 14(-5) = -2.35$ và $b = 33 = -2 + 35$

Tách 33x thành $-2x + 35x$

• *Lời giải*

$14x^2 + 33x - 5 = 14x^2 - 2x + 35x - 5$

$= 2x(7 - 1) + 5(7x - 1) = (7x - 1)(2x + 5)$

Dạng 2: Phân tích đa thức $x^{3m+2} + x^{3n+1} + 1$ thành nhân tử

1) Cơ sở tìm kiếm

$x^{3k+r} = x^r(x^{3k} - 1) + x^r$, với $r = 0, 1, 2$

Ta có: $x^{3k} - 1 = [(x^3)^k - 1^k] \vdots (x^3 - 1)$; $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

Do vậy khi phân tích đa thức $x^{3m+2} + x^{3n+1} + 1$ thành nhân tử có một nhân tử là $x^2 + x + 1$

2) Mẹo nhớ

Đa thứ $x^a + x^b + 1$ nếu có a chia cho 3 dư 2, b chia cho 3 dư 1. Thêm bớt cùng hạng tử để biến đổi đa thức $x^a + x^b + 1$ đó về tích có chứa nhân tử $x^2 + x + 1$

3) Các ví dụ

Ví dụ 1: Phân tích đa thức thành nhân tử $x^5 + x^4 + 1$

• *Tìm kiếm lời giải*

5 chia cho 3 dư 2, 4 chia cho 3 dư 1. Đa thức $x^5 + x^4 + 1$ khi viết dưới dạng tích có một nhân tử là $x^2 + x + 1$.

• *Lời giải*

$x^5 + x^4 + 1 = x^5 + x^4 + x^3 - x^3 - x^2 - x + x^2 + x + 1$

$= x^3(x^2 + x + 1) - x(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1)$

Ví dụ 2: **Phân tích đa thức sau thành nhân tử $x^{10} + x^5 + 1$**

• *Tìm kiếm lời giải*

10 chia cho 3 dư 1, 5 chia cho 3 dư 2. Đa thứ $x^{10} + x^5 + 1$ khi viết dưới dạng tích có một nhân tử là $x^2 + x + 1$.

• *Lời giải*

$$x^{10} + x^5 + 1 = x^{10} + x^9 + x^8 - x^9 - x^8 - x^7 + x^7 + x^6 + x^5 - x^6 - x^5 - x^4 + x^5 + x^4 + x^3 - x^3 - x^2 - x + x^2 + x + 1$$

$$= x^8(x^2 + x + 1) - x^7(x^2 + x + 1) + x^5(x^2 + x + 1) - x^4(x^2 + x + 1) + x^3(x^2 + x + 1) - x(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1)$$

Một số bài toán tự luyện

Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

1) $12x^2 + 7x - 12$	2) $8x^2 + 6x - 35$	3) $21x^2 - 5x - 6$
4) $10x^2 + 11x + 3$	5) $-6x^2 + 7x + 3$	6) $x^{10} + x^2 + 1$
7) $x^5 + x + 1$	8) $x^7 + x^5 + 1$	9) $x^{11} + x^4 + 1$
10) $x^8 + x + 1$		

II. TỪ BÀI TOÁN QUEN THUỘC ĐẾN NHỮNG BÀI TOÁN THI CHỌN HỌC SINH GIỎI

Từ bài toán quen thuộc với những ý tưởng sáng tạo nhiều khi dẫn chúng ta đến với những bài toán thi chọn học sinh giỏi.

Xin được cùng bạn đọc đi từ bài toán rất quen thuộc sau.

Bài toán A: Chứng minh rằng $m^2 - mn + n^2 \geq 0$ với mọi m, n

HƯỚNG DẪN GIẢI

$$m^2 - mn + n^2 = (m^2 - mn + \frac{n^2}{4}) + \frac{3}{4}n^2 = (m - \frac{n}{2})^2 + \frac{3}{4}n^2 \geq 0$$

Nhận ra rằng nếu cho $m = x - 1$; $n = 1 - y$ thì:

$(x - 1)^2 - (x - 1)(1 - y) + (1 - y)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - x + xy + 1 - y + 1 - 2y + y^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + xy - 3x - 3y + 3 \geq 0$

Ta đã đến với bài toán.

Bài toán 1: Chứng tỏ rằng: $x^2 + y^2 + xy - 3x - 3y + 3 \geq 0$

(Đề thi chọn đội tuyển toán 9, Trường THCS Nguyễn Gia Thiều, Quận Tân Bình, TPHCM 2000 – 2001)

Và nếu cho $m = x - 2$, $n = 1 - y$ thì:

$(x - 2)^2 - (x - 2)(1 - y) + (1 - y)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - x + xy + 2 - 2y + 1 - 2y + y^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + xy - 5x - 4y + 7 \geq 0$

Cho bài toán

Bài toán 2: Chứng minh rằng: $x^2 + y^2 + xy - 5x - 4y + 7 \geq 0$

(Đề kiểm tra đội tuyển toán 9, Trường THCS Hai Bà Trưng và Trường THCS Lê Quý Đôn, Quận 3, TPHCM 2000 – 2001)

Tiếp tục cho m = a; n = –b thì ta có:

$a^2 - a(-b) + (-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + ab + b^2 \geq 0$

Mà (a – b)2 ≥ 0 với mọi a; b.

Do đó: $(a^2 + ab + b^2)(a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow [(a^2 + ab + b^2)(a - b)](a - b) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a^3 - b^3)(a - b) \geq 0 \quad \Leftrightarrow a^4 - a^3b - ab^3 + b^4 \geq 0$

$\Leftrightarrow a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$

Ta đến với bài toán

Bài toán 3: Chứng minh $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$ với mọi a, b

(Đề thi tuyển sinh lớp 10 Trường THCS chuyên Lê Hồng Phong, TPHCM 1998 – 1999)

Từ bài toán 3 cho $a = x^2$, $b = y^2$ và x, y khác 0 giúp ta đến:

$(x^2)^4 + (y^2)^4 \geq (x^2)^3y^2 + x^2(y^2)^3$

$$\Leftrightarrow \frac{x^8}{x^2y^2} + \frac{y^8}{x^2y^2} \geq \frac{x^6y^2}{x^2y^2} + \frac{x^2y^2}{x^2y^2} \Leftrightarrow \frac{x^6}{y^2} + \frac{y^6}{x^2} \geq x^4 + y^4$$

Cho ta bài toán

Bài toán 4: Chứng tỏ rằng với x, y khác 0, bất đẳng thức sau đúng:

$$x^4 + y^4 \leq \frac{x^6}{y^2} + \frac{y^6}{x^2}$$

(Đề thi tuyển vào lớp 10 chuyên toán trường THCS chuyên Lê Hồng Phong, TPHCM 1998 – 1999)

$(x^2)^4 + (y^2)^4 \geq (x^2)^3 y^2 + x^2(y^2)^3 \Leftrightarrow x^8 + y^8 \geq x^6y^2 + x^2y^6$

$$\Leftrightarrow \frac{x^8}{x^4y^4} + \frac{y^8}{x^4y^4} \geq \frac{x^6y^2}{x^4y^4} + \frac{x^2y^6}{x^4y^4} \Leftrightarrow \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} \geq \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} \geq 0$$

và nếu x > 0, y > 0 ta có: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{(x-y)^2}{xy} + 2 \geq 2$

Do đó, ta có: $\frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \frac{x^2}{y^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ giúp ta đến bài toán

Bài toán 5: Tìm các cặp số dương (x, y) để: $\frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

(Đề thi vô địch toán Cộng hòa dân chủ Đức, 1973)

Ở bài toán A cho m = x, n = y và x, y khác 0

Ta có: $x^2 - xy + y^2 \geq 0$, $\dfrac{(x-y)^2}{x^2y^2} \geq 0$

Do đó: $(x^2 - xy + y^2).\dfrac{(x-y)^2}{x^2y^2} \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - xy + y^2}{xy}.\frac{x^2 - 2xy + y^2}{xy} \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} - 1 + \frac{y}{x}\right).\left(\frac{x}{y} - 2 + \frac{y}{x}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{y^2} - 2.\frac{x}{y} + 1 - \frac{x}{y} + 2 - \frac{y}{x} + 1 - 2.\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4 - 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \geq 0$$

Bài toán 6: Cho x, y là hai số thực khác 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 4 \geq 0$$

(Đề thi vô địch toán Cộng hòa Secbi, 1977)

Đề thi chọn lọc học sinh giỏi toán 9 toàn quốc 1994 – 1995

Đề thi chọn học sinh giỏi toán 9, Quận 1 và Quận Tân Bình, TP.HCM 1999 – 2000)

Các bạn đã tìm được thêm các bài toán thi học sinh giỏi từ bài toán A này chưa ?

Bài toán B: Chứng minh rằng $(a + b)^3 - a^3 - b^3 = 3ab(a + b)$

Lời giải vắn tắt:

$(a + b)^3 - a^3 - b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - a^3 - b^3$

$= 3a^2b + 3ab^2 = 3ab(a + b)$

Nhận ra rằng nếu cho a = x – 3 , b = 2x + 1 thì a + b = 3x – 2,

$(3x - 2)^2 - (x - 3)^3 - (2x + 1)^3 = 3(x - 3)(2x + 1)(3x - 2)$

ta đến với bài toán mới.

Bài toán 1: Giải phương trình sau: $(3x - 2)^2 - (x - 3)^3 = (2x + 1)^3$

Và nếu cho a = x – 2, b = y + 2 thì a + b = x + y , ta đến với bài toán.

Bài toán 2: Giải phương trình nghiệm nguyên sau:

$(x + y)^3 = (x - 2)^3 + (y + 2)^3 + 6$

tiếp tục cho a = x – y , b = y – z thì a + b = x – z,

$(x - z)^3 - (x - y)^3 - (y - z)^3 = 3(x - y)(y - z)(x - z)$, ta đến với bài toán

Bài toán 3: Phân tích thành nhân tử: $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (x - z)^3$

(Đề thi học sinh giỏi toán cấp II, miền Bắc 1962)

Và nếu cho a = x, b = y + z ta sẽ có:

$(x + y + z)^3 - x^3 - (y + z)^3 = 3x(y + z)(x + y + z)$ (1) và thêm nữa

$(y + z)^3 - y^3 - z^3 = 3yz(y + z)$ (2)

Cộng (1) và (2) vế theo vế sẽ đến:

$(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 = 3(x + y)(y + z)(z + x)$

Bài toán 4: Phân tích đa thức thành nhân tử:

$(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$

(Đề thi học sinh giỏi toán Blantsia, 1952)

Bài toán 5: Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$(x + y + z)^3 - (x + y - z)^3 - (x - y + z)^3 - (x + y + z)^3$

Tiếp tục cho $a = x^2 - z^2$, $b = y^3 + z^2$ ta lại có bài toán

Bài toán 6: Phân tích đa thức thành nhân tử:

$(x^2 + y^2)^3 - (x^2 + z^2)^3 - (y^2 + z^2)^3$

(Đề thi học sinh giỏi toán Blantsia, 1957)

Còn nếu cho $a + b = -c$ ta có $(-c)^3 - a^3 - b^3 = 3ab(-c)$

hay $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Cho ta lời giải các bài toán sau:

Bài toán 7: Cho a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 0$

Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Bài toán 8: Cho a, b, c khác 0 thỏa mãn $a + b + c = 0$

Tính giá trị của biểu thức $\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab}$

Từ bài toán B tiếp tục cho $a + b = -(c + d)$ ta được

$-(c + d)^3 - a^3 - b^3 = -3ab(c + d) \Leftrightarrow a^3 + b^3 + (c + d)^3 = 3ab(c + d)$

Mặt khác: $-(c + d)^3 + c^3 + d^3 = -3cd(c + d)$

Do đó ta có: $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(c + d)(ab - cd)$

Bài toán 9: Cho $a + b + c + d = 0$

Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(c + d)(ab - cd)$

(Đề thi chọn học sinh giỏi học bổng Marie Curie Trường THCS Nguyễn Du TP. Hồ Chí Minh 1998 – 1999)

Và nếu cho $a = x^2$, $b = y^2$ ta nhận được

$(x^2 + y^2)^3 - (x^2)^3 - (y^2)^3 = 3x^2y^2(x^2 + y^2)$

nếu có x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$ ta có $x^6 + y^6 = 1 - 3x^2y^2$,

và vì $0 \le x^2y^2 \le \frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2 = \frac{1}{4}$ ta có bài toán hay và khó sau:

Bài toán 10: Cho x, y là hai số thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x^6 + y^6$.

Bài toán B chắc chắn còn nhiều điều hấp dẫn nữa nếu ta tiếp tục suy nghĩ, tìm tòi.

III. TRAO ĐỔI VỀ VIỆC DẠY VÀ HỌC MỘT DẠNG TOÁN

Trong tạp chí Trung học phổ thông (Vụ phổ thông) số 28(7 – 1999) có bài viết "Dùng chữ số tận cùng và phương pháp chứng minh phản chứng" để giải bài toán "Không tồn tại các số nguyên thỏa mãn các đẳng thức nào đó". Các bài toán có thể phát biểu rằng:

Chứng minh rằng, không tồn tại các số nguyên a, b, c, d thỏa mãn các đẳng thức sau:

a/ abcd − a = số lẻ (1) ;
abcd − b = số lẻ (2) ;
abcd − c = số lẻ (3) ;
abcd − d = số lẻ (4) .

b/ abcd + a = số lẻ ;
abcd + b = số lẻ ;
abcd + c = số lẻ ;
abcd + d = số lẻ .

Các lời giải của bài toán dạng này trên bài viết hơi dài dòng và phức tạp mà thực ra có lời giải gọn hơn như sau:

Từ (1) $\Rightarrow$ a (bcd − 1) = số lẻ $\Rightarrow$ a là số lẻ.

Tương tự (2), (3), (4) ta có b, c, d là các số lẻ.

Do vậy vế phải của các đẳng thức (1), (2), (3), (4) là số lẻ còn vế trái là số chẵn. Vô lí!

Vậy ta có điều cần chứng minh.

Bài toán b) lời giải hoàn toàn tương tự.

Hơn nữa lời giải này vẫn đúng khi vế trái của các đẳng thức (1), (2), (3), (4) được thay đổi thành abcd − a ; abcd + 5b ; abcd + 7 c; abcd − 9 d mà lời giải cũ bị hạn chế. Đồng thời, lời giải trên giúp ta đến với bài toán tổng quát cho dạng toán này như sau:

Bài toán:

Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên a_1; a_2 ; ...; a_{n-1}; a_n thỏa mãn các đẳng thức sau

$a_1 . a_2 ... a_n + (-1)^{m_1} . a_1.t_1$ = số lẻ ;

$a_1 . a_2 ... a_n + (-1)^{m_2} . a_2.t_2$ = số lẻ ;

....

$a_1 . a_2 ... a_n + (-1)^{m_{n-1}} . a_{n-1}.t_{n-1}$ = số lẻ ;

$a_1 . a_2 ... a_n + (-1)^{m_n} . a_n.t_n$ = số lẻ ;

(trong đó $m_i \in N$, t_n là số lẻ và $i = \overline{1,n}$)

Qua bài viết này tôi mong muốn cùng bạn đọc trao đổi để cùng tìm ra giải pháp tốt cho việc dạy và học dạng toán này có hiệu quả cao, rất mong nhận được ý kiến từ bạn đọc.

IV. VỀ MỘT BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC

Chúng tôi xin được cùng bạn trao đổi về một bài toán bất đẳng thức có điều kiện sau:

Bài toán: Cho a, b, c $\in$ [0; 2] thỏa mãn a + b + c = 3.

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 \le 5$

Xin đề xuất ba cách giải.

Cách 1: a, b, c $\in [0;2] \Rightarrow \begin{cases} a, b, c \ge 0 \\ 2-a,\ 2-b,\ 2-c \ge 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} abc \ge 0 \\ (2-a)(2-b)(2-c) \ge 0 \end{cases} \Rightarrow abc + (2-a)(2-b)(2-c) \ge 0$$

$\Rightarrow 8 - 4(a + b + c) + 2(ab + bc + ca) \ge 0 \Rightarrow -2(ab + bc + ca) \le -4$

Do đó: $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 9 - 2(ab + bc + ca) \le 5$

Cách 2: Vai trò a, b, c như nhau, không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c \ge 0$

Ta có: $3a \ge a + b + c = 3 \Rightarrow a \ge 1$

$1 \le a \le 2 \Rightarrow a + b + c = 3 \Rightarrow (a-1)(a-2) \le 0$

$\Rightarrow a^2 - 3a + 2 \le 0$

Do đó: $a^2 + b^2 + c^2 \le a^2 + b^2 + c^2 + 2bc = a^2 + (b + c)^2$

$= a^2 + (3-a)^2 = 2a^2 - 6ab + 9 = 2(a^2 - 3a + 2) + 5 \le 5$

Cách 3: Đặt $a = x + 1$, $b = y + 1$, $c = z + 1$

$a, b, c \in [0, 2] \Rightarrow x, y, z \in [-1, 1]$

$a + b + c = 3 \Rightarrow x + y + z = 0$

$x + y + z = 0$

trong đó ba số x, y, z có hai số cùng dấu không mất tính tổng quát, giả sử x và y.

Ta có $xy \ge 0$, $z \in [-1, 1] \Rightarrow z^2 \le 1$

Do đó: $a^2 + b^2 + c^2 = (x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2$

$= x^2 + y^2 + z^2 + 2(x + y + z) + 3 = (x + y)^2 + z^2 + 3$

$= (-z)^2 + z^2 + 3 = 2x^2 + 3 = 2z^2 + 3 \le 5$

Từ ba lời giải trên giúp ta giải được bài toán tổng quát sau:

Cho $a, b, c \in [\alpha, \beta]$ thỏa mãn $a + b + c = \gamma$ trong đó $2\alpha + \beta \le \gamma \le 2\beta + \alpha$

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 \le \alpha^2 + \beta^2 + (\gamma - \alpha - \beta)^2$

Các bạn còn tìm thêm điều gì thú vị từ bài toán này chăng?

V. MỘT THỦ THUẬT ĐỔI BIẾN ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC CÓ ĐIỀU KIỆN

Trên tạp chí Toán học và tuổi trẻ số 295 (1 – 2002), thầy giáo Hoàng Văn Đắc (Trường THCS Tân Việt, Bình Giang, Hải Dương) đã trình bày một số bài toán đổi biến để chứng minh bất đẳng thức có điều kiện. Bài viết này xin nêu một số thủ thuật biến đổi giúp giải được một số bài toán bất đẳng thức có điều kiện và đôi khi khá độc đáo.

Trong một số bài toán bất đẳng thức nếu có xuất hiện $a_1 + a_2 + ... + a_n \le m$,

Có thể đổi biến $x_1 = a_1 - \frac{m}{n}$, $x_2 = a_2 - \frac{m}{n}$, ... , $x_n = a_n - \frac{m}{n}$

Do vậy $a_1 + a_2 + ... + a_n \underset{\ge}{\le} m \Leftrightarrow x_1 + x_2 + ... + x_n \underset{\ge}{\le} 0$

Bất đẳng thức cần chứng minh viết dưới dạng biến mới, từ đó dễ dàng tìm được lời giải. Chẳng hạn:

Bài toán 1: Cho a, b, c thỏa mãn $a + b \geq c \geq 0$.

Chứng minh rằng $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}c^2$.

Lời giải: Đặt $x = a - \frac{c}{2}$, $y = b - \frac{c}{2}$.

Vì $a + b \geq 0$ nên $x + y = a + b - c \geq 0$.

Ta có: $a^2 + b^2 = (x + \frac{c}{2})^2 + (y + \frac{c}{2})^2 = x^2 + cx + \frac{1}{4}c^2 + y^2 + cy + \frac{1}{4}c^2$

$$= x^2 + y^2 + c(x + y) + \frac{1}{2}c^2 \geq \frac{1}{2}c^2$$

Vì $x^2 \geq 0$; $y^2 \geq 0$; $c(x + y) \geq 0$

Bài toán 2: Cho a, b thỏa mãn $a^3 + b^3 \leq 2$. Chứng minh rằng $a + b \leq 2$.

Lời giải: Đặt $x = a - 1$, $y = b - 1$

Ta có: $a^3 + b^3 = (x + 1)^3 + (y + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + y^3 + 3y^2 + 3y + 1$

$= (x^3 + y^3) + 3(x + y) + 3(x^2 + y^2) + 2$

$= (x + y)(x^2 - xy + y^2 + 3) + 3(x^2 + y^2) + 2$

mà $x^2 - xy + y^2 + 3 = 3(x - \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2 + 3 > 0$

$3(x^2 + y^2) \geq 0$, $a^3 + b^3 \geq 2$

Do đó: $x + y \leq 0$.

Vậy $a + b = x + 1 + y + 1 = (x + y) + 2 \leq 2$.

Bài toán 3: Cho a, b, $c \in [0,2]$ thỏa mãn $a + b + c = 3$.

Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$

Lời Giải: Đặt $x = a - 1$, $y = b - 1$, $z = c - 1$.

$a + b + c = 3$ (gt)

Do đó $x + y + z = 0$

Suy ra hai trong ba số x, y, z cùng dấu.

Không mất tính tổng quát, giả sử x và y.

Ta có: $xy \geq 0$

Mà $c \in [0,2]$ nên $z \in [-1,1] \Rightarrow z^2 \leq 1$

Vậy $a^2 + b^2 + c^2 = (x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2$

$= x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 + z^2 + 2z + 1 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(x + y + z) + 3$

$= x^2 + y^2 + z^2 + 3 \leq 2xy + x^2 + y^2 + z^2 + 3 = (x + y)^2 + z^2 + 3 = (-z)^2 + 3 \leq 5$

VI. VỀ ỨNG DỤNG CỦA MỘT BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC ĐẠI SỐ TRONG MỘT SỐ BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC

Bài toán bất đẳng thức đại số rất quen thuộc sau:

Bài toán: Chứng minh rằng nếu a, b, c > 0 thì:

$$(a + b + c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \geq 9 \ (*)$$

Lời giải vắn tắt:

$$(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})-9=1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1-9$$

$$=(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2)+(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-2)+(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}-2)$$

$$=\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(b-c)^2}{bc}+\frac{(c-a)^2}{ac}\geq 0$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow a-b=b-c=c-a=0 \Leftrightarrow a=b=c$.

Bài toán (*) giúp giải quyết và sáng tạo khá nhiều bài toán khác về cực trị hình học. Xin được trao đổi cùng bạn đọc một số ví dụ.

Bài toán 1: Cho tam giác đều ABC, M là điểm nằm trong tam giác. Gọi khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA, AB lần lượt là x, y, z. Xác định vị trí của điểm M để:

1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

2) $\frac{1}{x+1998}+\frac{1}{y+1998}+\frac{1}{z+1998}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

3) $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

4) $\frac{1}{x^2+2yz}+\frac{1}{y^2+2xz}+\frac{1}{z^2+2xy}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

HƯỚNG DẪN

Gọi a, h là cạnh, đường cao của tam giác ABC, h không đổi.

$S_{ABC}=S_{MBC}+S_{MAC}+S_{MAB} \Leftrightarrow ah=ax+ay+az \Leftrightarrow h=x+y+z$

1) $(x+y+z)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})\geq 9$ (từ (*)) $\Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{9}{h}$

2) $(x+1998+y+1998+z+1998)(\frac{1}{x+1998}+\frac{1}{y+1998}+\frac{1}{z+1998})\geq 9$ (từ (*))

3) $(x+y+z+z+x)(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x})\geq 9$ (từ (*))

$\Leftrightarrow \frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\geq\frac{9}{2h}$

4) $(x^2+2yz+y^2+2xz+z^2+2xy)\frac{1}{x^2+2yz}+\frac{1}{y^2+2xz}+\frac{1}{z^2+2xy}\geq 9$ (từ (*))

$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2+2yz}+\frac{1}{y^2+2xz}+\frac{1}{z^2+2xy}\geq\frac{9}{h^2}$

Bài toán 2: Cho a, b, c là số đo ba cạnh của một tam giác. Xác định hình dạng của tam giác để:

1) $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

2) $\dfrac{a+999}{b+c+1998}+\dfrac{b+999}{c+a+1998}+\dfrac{c+999}{a+b+1998}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

3) $\dfrac{a}{-a+b+c}+\dfrac{b}{a-b+c}+\dfrac{c}{a+b-c}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

4) $\dfrac{b+c}{-a+b+c}+\dfrac{a+c}{a-b+c}+\dfrac{a+b}{a+b-c}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

HƯỚNG DẪN

1) $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}=(\dfrac{a}{b+c}+1)+(\dfrac{b}{c+a}+1)+(\dfrac{c}{a+b}+1)-3$

$=(a+b+c)(\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{a+b})-3$

$=\dfrac{1}{2}[(b+c)+(c+a)+(a+b)](\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{a+b})-3\geq\dfrac{1}{2}.9-3$ (từ (*))

2) Tương tự 1)

3) $\dfrac{a}{-a+b+c}+\dfrac{b}{a-b+c}+\dfrac{c}{a+b-c}$

$=(\dfrac{a}{-a+b+c}+\dfrac{1}{2})+(\dfrac{b}{a-b+c}+\dfrac{1}{2})+(\dfrac{c}{a+b-c}+\dfrac{1}{2})-\dfrac{3}{2}$

$=\dfrac{1}{2}(a+b+c)(\dfrac{a}{-a+b+c}+\dfrac{b}{a-b+c}+\dfrac{c}{a+b-c})-\dfrac{3}{2}$

$=\dfrac{1}{2}[(-a+b+c)+(a-b+c)+(a+b-c)]$

$(\dfrac{1}{-a+b+c}+\dfrac{1}{a-b+c}+\dfrac{1}{a+b-c})-\dfrac{3}{2}\geq\dfrac{1}{2}.9-\dfrac{3}{2}=3$ (từ (*))

4) $\dfrac{b+c}{-a+b+c}+\dfrac{a+c}{a-b+c}+\dfrac{a+b}{a+b-c}=(\dfrac{b+c}{-a+b+c}-\dfrac{1}{2})$

$+(\dfrac{a+c}{a-b+c}-\dfrac{1}{2})+(\dfrac{a+b}{a+b-c}-\dfrac{1}{2})+\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$

$(\dfrac{1}{-a+b+c}+\dfrac{1}{a-b+c}+\dfrac{1}{a+b-c})+\dfrac{3}{2}\geq\dfrac{1}{2}.9+\dfrac{3}{2}=6$

Bài toán 3: Cho tam giác ABC có góc đều nhọn. Gọi H là trực tâm của tam giác ; A_1, B_1, C_1 là chân ba đường cao kẻ từ A, B, C.

Tìm giá trị nhỏ nhất của:

1) $\dfrac{AA_1}{HA_1}+\dfrac{BB_1}{HB_1}+\dfrac{CC_1}{HC_1}$ 2) $\dfrac{HA_1}{HA}+\dfrac{HB_1}{HB}+\dfrac{HC_1}{HC}$

HƯỚNG DẪN

Gọi S, S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích các tam giác ABC, HBC, HAC, HAB. Ta có:

1) $\dfrac{HA_1}{AA_1} = \dfrac{S_1}{S}, \dfrac{HB_1}{BB_1} = \dfrac{S_2}{S}, \dfrac{HC_1}{CC_1} = \dfrac{S_3}{S}, \dfrac{HA_1}{AA_1 - HA_1} = \dfrac{S_1}{S_1 + S_2}$.

Do đó: $\dfrac{AA_1}{HA} + \dfrac{BB_1}{HB} + \dfrac{CC_1}{HC} \geq 9$

2) $\dfrac{HA_1}{AA_1} = \dfrac{S_1}{S} \Rightarrow \dfrac{HA_1}{AA_1 - HA_1} = \dfrac{S_1}{S_1 + S_2}$.

Do đó: $\dfrac{HA_1}{HA} + \dfrac{HB_1}{HB} + \dfrac{HC_1}{HC} \geq \dfrac{3}{2}$

Bài toán 4: Trong số các tam giác có khoảng cách từ giao điểm đến các đường phân giác trong tam giác đến các cạnh bằng nhau, hãy tìm tam giác có tổng độ dài ba đường cao đạt giá trị nhỏ nhất.

HƯỚNG DẪN

Gọi h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao tương ứng với các cạnh a, b, c của tam giác ABC, r là khoảng cách từ giao điểm các đường phân giác trong tam giác đến các cạnh tam giác.

Tương tự bài 3 phần 1) ta có: $\dfrac{r}{h_a} + \dfrac{r}{h_b} + \dfrac{r}{h_c} = 1$

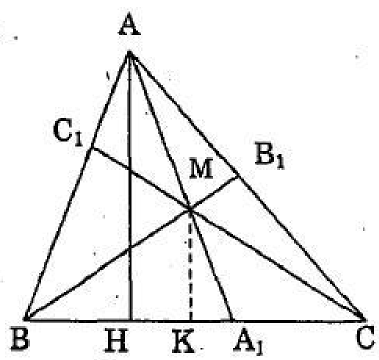
Áp dụng (*) ta có: $h_a + h_b + h_c = (h_a + h_b + h_c)(\dfrac{r}{h_a} + \dfrac{r}{h_b} + \dfrac{r}{h_c}) \geq 9r$

Bài toán 5: Cho tam giác ABC và M là điểm thuộc miền trong của tam giác. AM, BM, CM lần lượt cắt các cạnh tại A_1,B_1,C_1. Xác định vị trí của điểm M để:

1) $\dfrac{AA_1}{MA_1} + \dfrac{BB_1}{MB_1} + \dfrac{CC_1}{MC_1}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

2) $\dfrac{MA_1}{MA} + \dfrac{MB_1}{MB} + \dfrac{MC_1}{MC}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

HƯỚNG DẪN



Gọi S, S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích các tam giác ABC, MBC, MAC, MAB.

Vẽ $AH \perp BC$, $MK \perp BC$ $(H,K \in BC)$

Suy ra: $\dfrac{MA_1}{AA_1} = \dfrac{MK}{AH} = \dfrac{S_1}{S}$

Giải tương tự bài 3.

Bài toán 6: Cho tam giác ABC, AA_1,BB_1, CC_1 là các phân giác. Gọi a_1, b_1, c_1 lần lượt là các khoảng cách từ A_1 đến AB, B_1 đến BC, C_1 đến CA. Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là ba đường cao của tam giác kẻ từ A, B, C.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $\dfrac{a_1}{h_a} + \dfrac{b_1}{h_b} + \dfrac{c_1}{h_c}$.

Hướng dẫn:

Vẽ $AH \perp BC$, $A_1K \perp AB$.

Ta có: $A_1K . AB = AH. BA_1$, $\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{AB}{AC}$.

Từ đó chứng minh rằng: $\frac{a_1}{h_a} = \frac{b}{b+c}$

Tương tự $\frac{b_1}{h_b} = \frac{b}{c+a}$; $\frac{c_1}{h_c} = \frac{c}{a+b}$ ($a = BC$, $b = AC$, $c = AB$)

Áp dụng (*) ta có: $\frac{a_1}{h_a} + \frac{b_1}{h_b} + \frac{c_1}{h_c} < \frac{3}{2}$

Xoay quanh bài toán (*) còn nhiều điều hấp dẫn nữa nếu ta tiếp tục suy nghĩ, tìm tòi.

VII. MỘT PHONG CÁCH HỌC TOÁN

Khai thác bài toán trong sách giáo khoa nhiều khi đem đến cho chúng ta những điều lý thú và sâu sắc. Tôi tin rằng đây là một phong cách học toán tốt, góp phần tìm kiếm cái mới trong toán học.

Xin được cùng bạn đọc trao đổi về bài toán sau.

Bài toán A:

Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là các trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA.

Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình bình hành. (Bài 6, trang 24 SGK Hình học 8, NXB Giáo dục 2000).

HƯỚNG DẪN

MN là đường trung bình của tam giác ABC

$\Rightarrow MN \parallel AC$ và $MN = \frac{1}{2}AC$

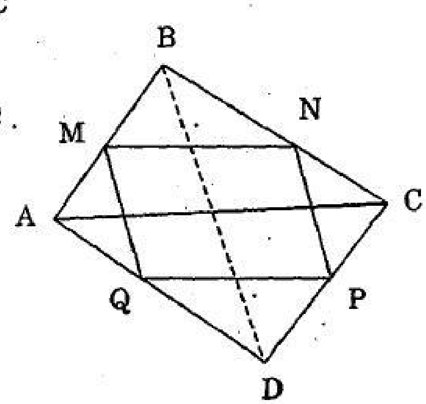
QP là đường trung bình của tam giác ADC.

$\Rightarrow QP \parallel AC$ và $QP = \frac{1}{2}AC$

Do đó: $MN \parallel QP$ và $MN = QP$.

$\Rightarrow$ Tứ giác MNPQ là hình bình hành.

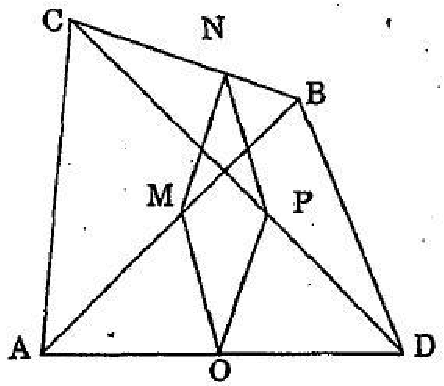
Câu hỏi được đặt ra: Liệu tứ giác ABCD không lồi thì tứ giác MNPQ có là hình bình hành không?



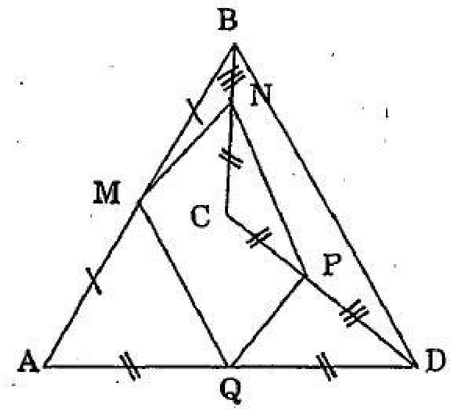
Hình 1

Dễ thấy hoàn toàn tương tự trên ta chứng minh được tứ giác MNPQ là hình bình hành. Ta có hai bài toán mới.

Bài toán 1: Cho tứ giác ABCD. Gọi M, P lần lượt là trung điểm của hai đường chéo AB,DC. N, Q lần lượt là trung điểm các cạnh BC, DA. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình bình hành.



Hình 2



Hình 3

Bài toán 2: Cho tam giác ABD, C là điểm nằm trong tam giác ABD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình bình hành.

Từ bài toán A nhận ra rằng nếu trên các cạnh BC có điểm E , trên cạnh AD có điểm F ($E \neq N$, $F \neq Q$) mà tứ giác MEPF là hình bình hành thì cũng có tứ giác ENFQ là hình bình hành, do vậy giúp ta giải được bài toán hay và khó sau.

Bài toán 3: Cho tứ giác ABCD có M, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, E và F lần lượt là các điểm thuộc các cạnh BC và DA sao cho ($EB \neq EC$, $FA \neq FD$) tứ giác MEPF là hình bình hành.

Chứng minh rằng BC // AD. Bài toán A giúp ta giải được bài toán sau:

Bài toán 4: Cho ngũ giác ABCDE, gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, DE, AE. H là trung điểm của NQ, K là trung điểm của MP. Chứng minh rằng KH // DC.

Và nếu I, J lần lượt là trung điểm các đường chéo AC, BD, bài toán A và bài toán 1 giúp ta đến với bài toán Giecgôn:

Bài toán 5: Chứng minh rằng đoạn thẳng nối trung điểm hai đường chéo và các đoạn thẳng nối trung điểm các cạnh đối của tứ giác lồi gặp nhau tại một điểm.

Hơn nữa, ta cũng nhận ra rằng, ở bài toán A còn có:

$AC \perp BD \Leftrightarrow MN \perp MQ \Leftrightarrow$ MNPQ là hình chữ nhật .

$AC = BD \Leftrightarrow MN = MQ \Leftrightarrow$ MNPQ là hình thoi.

Giúp ta đến với bài toán 6.

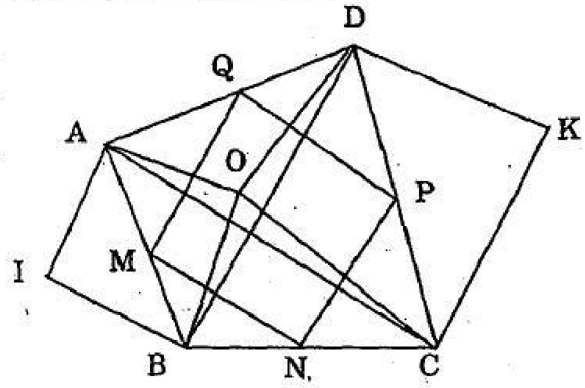
Bài toán 6: Gọi M,N,P,Q là các trung điểm các cạnh của tứ giác ABCD. Hai đường chéo AC và BD phải thỏa mãn những điều kiện nào để M, N, P, Q là bốn đỉnh của:

a/ Hình chữ nhật? b/ Hình thoi? c/ Hình vuông?

Câu c bài toán 6 giúp ta có lời giải bài toán hay và khó sau:

Bài toán 7: Cho tam giác OBC. Về phía ngoài tam giác, dựng các hình vuông OBIA, OCKD. Gọi M, P lần lượt là tâm của các hình vuông OBIA, OCKD. Và N, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, AD. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình vuông.

Vẽ hình bài toán 7, nhận ra rằng M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA của tứ giác ABCD.



Do vậy "chìa khóa vàng" của bài toán là chứng minh AC = BD, AC $\perp$ BD.

Điều này có được từ $\Delta OAC = \Delta OBD$ (c–g–c)

Và như vậy từ hình 2 cũng cho ta bài toán mới.

Bài toán 8: Cho tứ giác ABCD, gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, AC, CD, BD. Tứ giác ABCD phải thỏa mãn những điều kiện nào để M, N, P, Q là đỉnh của:

a/ Hình chữ nhật? b/ Hình thoi? c/ Hình vuông?

Tương tự từ hình 3 cũng đến với ta bài toán 9.

Bài toán 9: Cho tam giác ABC, C là điểm nằm trong tam giác ABD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA.

Các điểm A, B, C, D phải thỏa mãn những điều kiện nào để M, N, P, Q là bốn đỉnh của:

a/ Hình chữ nhật? b/ Hình thoi? c/ Hình vuông?

Và như vậy từ các bài toán: A, 1, 2, 6, 8, 9 có được bài toán tổng quát sau chăng?

Bài toán: Cho 4 điểm A, B, C, D trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA.

Các điểm A, B, C, D phải thỏa mãn những điều kiện nào để M, N, P, Q là bốn đỉnh của:

a/ Hình chữ nhật? b/ Hình thoi? c/ Hình vuông?

Lại nhận ra rằng $S_{MNP} = \frac{1}{4}S_{MNPQ}$, $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Do vậy $S_{MNP} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$, đến với bài toán hay và khó sau:

Bài Toán 10: Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD. Chứng minh rằng $S_{MNP} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$.

Bài toán A chắc chắn còn nhiều điều hấp dẫn và thú vị, nếu ta tiếp tục suy nghĩ và tìm tòi.

VIII. KHAI THÁC MỘT BÀI TOÁN QUEN THUỘC

Chúng ta bắt đầu từ bài toán sau:

Bài toán *

Cho hình bình hành ABCD (AB $\neq$ BC). Các đường phân giác các góc lần lượt cắt nhau tại E, F, G, H. Chứng minh tứ giác EFGH là hình chữ nhật.

Lời giải vắn tắt

$\hat{A}_1 = \frac{1}{2}\hat{A}$, $\hat{B}_1 = \frac{1}{2}B$, $\hat{A} + \hat{B} = 180^0$ (AB // BC)

Tam giác EAB có: $AEB + \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{AEB} = 180^0 - (\hat{A}_1 + \hat{B}_1) = 90^0$

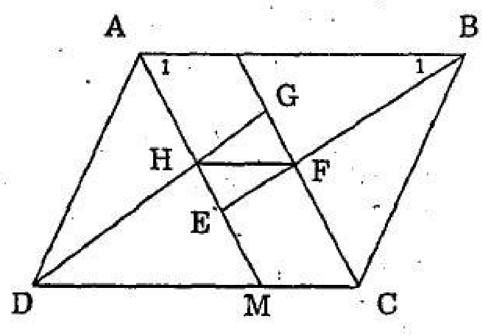
Tương tự: $\widehat{BFC} = 90^0$, $\widehat{DGC} = 90^0$

Từ đó, ta có tứ giác EFGH có $\hat{G} = \hat{F} = \hat{E} = 90^0$ nên là hình chữ nhật.

Chú ý: AB = BC thì E , F, G, H trùng nhau

Nhận ra rằng: $\widehat{AEB} = 180^0 - \frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D})$ cho ta bài toán.

Bài toán 1: Cho tứ giác ABCD. Các đường phân giác các góc của tứ giác ABCD lần lượt cắt nhau tại E, F, G, H. Chứng minh rằng tứ giác EFGH có các cặp góc đối bù nhau.



Ta thấy BF là tia phân giác góc $\widehat{ABC}$, BF $\perp$ GC.

Do vậy nếu gọi N là giao điểm của CF với AB, ta có tam giác BNC cân tại B, suy ra F là trung điểm NC.

Tương tự M là giao điểm của AH với DC ta có H là trung điểm AM. Cho ta một kết quả đẹp HF // AB và như vậy GE // AD.

Do vậy nếu $\hat{A} = \hat{B} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \Rightarrow$ ABFH là hình thang cân, cho ta bài toán mới.

Bài toán 2: Cho hình chữ nhật ABCD (AB > BC). Các phân giác trong của góc A, D cắt nhau tại H, các phân giác trong của góc B, C cắt nhau tại F. Chứng minh tứ giác ABFH là hình thang cân.

Tiếp tục khai thác, ta nhận ra rằng tứ giác ANFH là hình bình hành, tam giác BNC cân tại B. Từ đây cho ta bài toán mới.

Bài toán 3: Cho hình bình hành ABCD (AB ≠ BC). Các đường phân giác các góc lần lượt cắt nhau tại E, F, G, H. Chứng minh rằng EG = FH = |AB – BC|

Kết quả này cho ta sáng tạo các bài toán hay và khó sau:

Bài toán 4: Cho đoạn thẳng AB cố định, C là điểm chuyển động trên đường tròn (C, m) (m cho trước), A, B, C không thẳng hàng. Vẽ hình bình hành ABCD. Các đường phân giác các góc lần lượt cắt nhau tại E, F, G, H. Chứng minh rằng:

1) Độ dài đoạn thẳng FH không đổi khi C di động.

2) Đường thẳng FH có phương cố định.

Bài toán 5: Cho hình thang vuông ABC'D' ($B = C = 90^0$), C là điểm di động trên cạnh D'C'. Vẽ hình bình hành ABCD. Các đường phân giác các góc của tứ giác ABCD lần lượt cắt nhau tại E, F, G, H. Cho biết AB < BC'. Xác định vị trí điểm C để độ dài đoạn thẳng EG nhỏ nhất, lớn nhất. Và hơn nữa vì AB // HF, BC // GE nên nếu AB ⊥ BC thì HF ⊥ GE. Khai thác điều này cho ta các bài toán mới nữa.

Bài toán 6: Cho hình chữ nhật ABCD (AB ≠ BC). Các đường phân giác các góc lần lượt cắt nhau tại E, F, G, H. Chứng minh tứ giác EFGH là hình vuông.

Bài toán 7: Cho hình chữ nhật ABCD (AB ≠ BC). Các đường phân giác các góc lần lượt cắt nhau tại E, F, G, H . Cho biết $P_{ABCD} = 22$ cm, $S_{EFGH} = 4{,}5$ cm^2. Tính S_{ABCD}. Suy nghĩ giúp ta đến với bài toán hay sau.

Bài toán 8: Cho hình thang ABCD (AB // CD) có các cạnh AB = a, BC = b, CB = c, DA = d. Các phân giác của các góc A và D cắt nhau tại H, các phân giác của các góc B và C cắt nhau tại F. Tính độ dài đoạn thẳng HF theo a, b, c, d.

Bài toán * Có còn gì nữa chăng nếu ta tiếp tục khai thác?

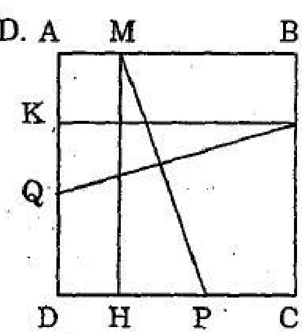
IX. VỀ MỘT BÀI TOÁN HÌNH VUÔNG

Bài toán: Cho hình vuông ABCD và các điểm M, N, P, Q lần lượt trên các cạnh (hoặc trên các đường thẳng chứa cạnh) AB, BC, CD, DA sao cho MP = NQ. Chứng minh rằng MP ⊥ NQ.

Lời giải

Vẽ MH ⊥ DC (H ∈ DC), NK ⊥ AD (K ∈ AD)

Tứ giác AMHD là hình chữ nhật, suy ra MH = AD.



Tương tự tứ giác ABNK là hình chữ nhật, suy ra: NK = AB .

ΔHMP = ΔKNQ (cạnh huyền – cạnh góc vuông) ⇒ $\widehat{HMP} = \widehat{KNQ}$.

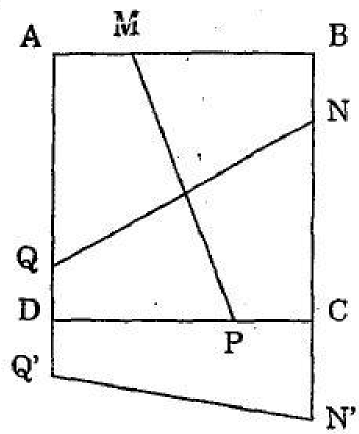
Từ đó suy ra: MP ⊥ NQ.

Bạn có ý kiến gì chăng? Tôi đã nhận ra rằng: Gọi Q' là điểm đối xứng của Q qua DC, N' là điểm đối xứng của N qua DC (hình vẽ) (Vị trí M, N , P, Q như hình ở lời giải)

Nhận ra rằng: $M \in AB$, $N' \in BC$ $P \in DC$, $Q' \in AD$, $MP \in N'Q'$ (= NQ)

Nhưng MP không vuông góc với N'Q'.

Đầu đề bài toán và lời giải có "vấn đề". Vì vậy tôi xin đề xuất cách khắc phục như sau



Bài toán: Cho hình vuông ABCD và điểm M, N, P, Q lần lượt trên các cạnh (và trên các đường thẳng chứa cạnh) AB, BC, CD, DA sao cho MP = NQ. Chứng minh rằng $MP \perp NQ$ hoặc $MP \perp N'Q'$.

Biết rằng Q' là điểm đối xứng của Q qua đường thẳng d, N' là điểm đối xứng của N qua đường thẳng d và d là đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng DC.

Có ai đồng ý với ý kiến này của tôi không?

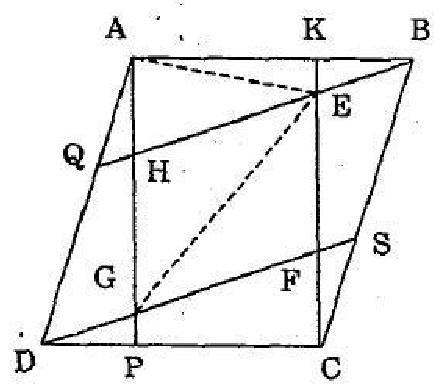
X. MỘT CHÚT SUY NGHĨ VỀ MỘT BÀI TOÁN DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

Qua bài viết này, tôi xin trao đổi cùng bạn đọc một chút suy nghĩ về một bài toán diện tích đa giác.

Bài toán *

Cho hình bình hành ABCD. Vẽ bốn đường thẳng lần lượt nối các đỉnh A, B, C, D với các trung điểm P, Q, R, S của các cạnh CD, AD, AB, BC. Chứng minh rằng tứ giác tạo bởi các đường thẳng này có diện tích bằng $\frac{1}{2}$ diện tích hình hình hành ABCD.

Hướng dẫn giải



Chứng minh:

HE = EB , EF = FC , FG = GD, GH = HA.

Ta có $S_{ABH} = 2S_{AHE} = 2S_{HEG}$

Tương tự: $S_{DFC} = 2S_{EGF}$

Do đó: $S_{ABH} + S_{DFC} = 2S_{EFGH}$

Tương tự: $S_{ADG} + S_{BCE} = 2S_{EFGH}$

Suy ra: $S_{ABCD} = 5S_{EFGH}$

Do đó: $S_{EFGH} = \frac{1}{5}S_{ABCD}$

Ta nhận thấy rằng tứ giác EFGH cũng là hình bình hành. Bài toán trên có thể sửa lại thành:

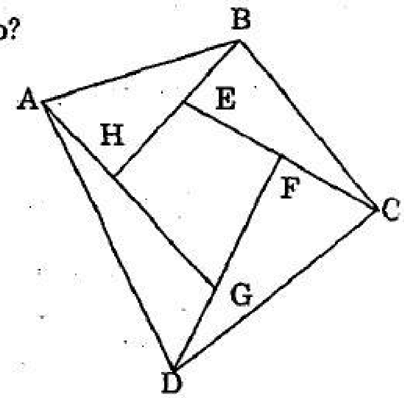
Bài 1: Cho hình bình hành EFGH. Trên các tia đối của các tia FE, GF, HG, EH lần lượt lấy các điểm C, D, A, B sao cho E, F, G , H lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng HB, EC, FD, GA. Chứng minh rằng diện tích tứ giác EFGH bằng $\frac{1}{5}$ diện tích tứ giác ABCD.

Lời giải của bài toán (*) là lời giải của bài toán 1 và cũng thấy rằng lời giải không cần đến tứ giác ABCD là hình bình hành, tứ giác EFGH là hình bình hành. Như vậy ta có bài toán tổng quát hơn.

Bài 2: Cho tứ giác EFGH. Trên các tia đối của các tia FE, GF, HG, EH lần lượt lấy các điểm C, D, A, B sao cho E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng HB, EC, FD, GA. Chứng minh rằng diện tích tứ giác EFGH bằng $\frac{1}{5}$ diện tích tứ giác ABCD.

Và ... từ bài toán 2 ta cũng nhận ra rằng: $\frac{EB}{HE} = \frac{FC}{EF} = \frac{GD}{FD} = \frac{HA}{GH} = 1$

thì $\frac{S_{ABCD}}{S_{EFGH}} = 5$



Thay "1" bởi "m" thì "5" được thay bởi số nào?

Ta đi tìm câu trả lời:

Nếu $\frac{EB}{HE} = \frac{FC}{EF} = \frac{GD}{FD} = \frac{HA}{GH} = m$

($m > 0$, m cho trước)

thì $EB = mHE$, $FC = mEF$ = $GD = mFD$, $HA = mGH$.

Do đó: $S_{ABH} = (m + 1)S_{AHE} = (m + 1)(mS_{HEG})$
$= m(m + 1)S_{HEG}$

Tương tự: $S_{DFC} = m(m + 1)S_{EGF}$

Do đó: $S_{ABH} + S_{DFC} = m(m + 1)S_{EFGH}$

Tương tự: $S_{ADG} + S_{BCE} = m(m + 1)S_{EFGH}$

Suy ra: $S_{ABCD} = [2(m + 1) + 1]S_{EFGH}$

Như vậy "5" được thay bởi "$2m(m + 1) + 1$"

Như vậy, chúng ta đã tìm được và giải được bài toán tổng quát hơn:

Bài 3: Cho tứ giác EFGH. Trên các tia đối của các tia FE, GF, HG, EH lần lượt lấy các điểm C, D, A, B sao cho $\frac{EB}{HE} = \frac{FC}{EF} = \frac{GD}{FD} = \frac{HA}{GH} = m$ (m, m cho trước)

Tính tỷ số S_{EFGH} theo m.

Đặt $2m(m + 1) = p > 1$, ta có thể để ra bài toán sau.

Bài 4: Cho tứ giác EFGH. Trên các tia đối của các tia FE, GH, HG, EH lần lượt hãy xác định các điểm C, D, A, B sao cho thỏa mãn hai điều kiện sau:

1) $\frac{EB}{HE} = \frac{FC}{EF} = \frac{GD}{FD} = \frac{HA}{GH} = m$

2) $\dfrac{S_{ABCD}}{S_{EFGH}} = p$ (p cho trước, $p > 1$).

Ta có: $2m(m + 1) = p \Leftrightarrow 2m^2 + 2m + 1 - p = 0$

Phương trình bậc hai ẩn m trên có một nghiệm dương, tức là luôn tìm được giá trị $m > 0$.

Ví dụ: Cho $p = 61$, phương trình $2m(m + 1) + 1 = 61$ cho nghiệm $m = 5 > 0$, và các điểm C, D, A, B được xác định bởi $\dfrac{EB}{HE} = \dfrac{FC}{EF} = \dfrac{GD}{FD} = \dfrac{HA}{GH} = 5$

XI. SÁNG TẠO TỪ MỘT BÀI TOÁN QUEN THUỘC

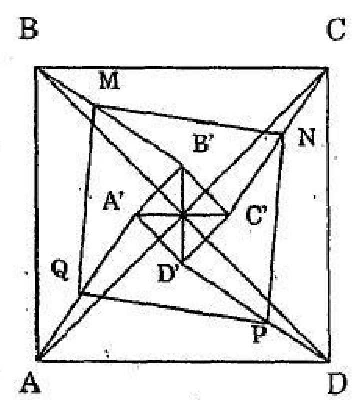
Trong việc học toán có những điều thật đơn giản, thật quen thuộc nhưng nếu chúng ta tiếp tục suy nghĩ thì chắc chắn sẽ đem đến cho chúng ta nhiều điều không đơn giản.

Xin được cùng bạn đọc đi từ một bài toán rất quen thuộc sau:

Bài toán: Cho hình vuông ABCD. Đặt một hình vuông A'B'C'D' bên trong hình vuông ABCD sao cho tâm hai hình vuông đó trùng nhau. Chứng minh rằng trung điểm của AA', BB', CC', DD' là đỉnh của một hình vuông khác.

Xin được nêu ba cách giải trong số các cách giải.

Cách 1:



$\Delta BOB' = \Delta AOA'$ (c–g–c)

$\Rightarrow BB' = AA'$

Tương tự ta lại có: $AA' = BB' = CC' = DD'$.

Suy ra $OM = ON = OP = OQ$.

BB'DD' là hình bình hành do đó

$BB' \parallel DD'$

Suy ra BMDP là hình bình hành, O là trung điểm của MP.

Tương tự O là trung điểm của QN.

Vậy MNPQ là hình chữ nhật.

$\Delta CON = \Delta DOP$ (c–g–c) $\Rightarrow \widehat{CON} = \widehat{DON} \Rightarrow \widehat{NOP} = 90^0$.

Do đó MNPQ là hình vuông.

Cách 2:

Thực hiện phép quay, tâm O góc quay 90^0, cùng chiều kim đồng hồ thì các đoạn thẳng AA', BB', CC', DD' sẽ lần lượt trùng nhau.

Từ đó: $OM = ON = OP = OQ$.

Và $\widehat{MON} = \widehat{NOP} = \widehat{POQ} = \widehat{QOM} = 90^0$

Vậy MNPQ là hình vuông.

Cách 3: Nối B'C, C'D, D'A, B'A. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng đó (đề nghị các bạn tự vẽ hình).

$\Delta MHQ = \Delta NFP$ (c.g.c) $\Rightarrow MQ = NP$
$\Delta MEN = \Delta NFP$ (c.g.c) $\Rightarrow MN = NP$
$\Delta MHQ = \Delta PGQ$ (c.g.c) $\Rightarrow MQ = PQ$
Suy ra $MN = NP = PQ = MQ$.
MNPQ là hình thoi.
Mặt khác $\widehat{HME} = \widehat{ABC}$ (góc có cạnh tương ứng song song).
$\widehat{ABC} = 90^0$ (giả thiết)
Suy ra $\widehat{HME} = 90^0$ và $\widehat{QMN} = 90^0$
Vậy MNPQ là hình vuông.
Dễ thấy rằng nếu cho: $\frac{AA'}{AQ} = \frac{BB'}{BM} = \frac{CC'}{CN} = \frac{DD'}{DP} = m\ (m > 0)$.
Và áp dụng định lí Talet, ta có bài toán sau đây, bài toán tổng quát hơn bài toán (*).

Bài toán 1: Cho hình vuông ABCD. Đặt một hình vuông A'B'C'D' bên trong hình vuông ABCD sao cho hai tâm hình vuông đó trùng nhau. Gọi M, N, P, Q là các điểm sao cho $\frac{BB'}{BM} = \frac{CC''}{CN} = \frac{DD''}{DP} = \frac{AA'}{AQ} = m\ (m > 0)$
Chứng minh rằng MNPQ là hình vuông.
Với m = 2 , ta có bài toán (*) .
Mặt khác, khai thác cách giải 2 giúp ta tìm đến bài toán tổng quát sang hướng khác như sau:

Bài toán 2: Cho đa giác đều $A_1A_2..A_n$, đặt trên đa giác này một đa giác đều $A'_1A'_2..A'_n$ sao cho tâm hai đa giác đều đó trùng nhau. Gọi $A''_1, A''_2,...,A''_n$ là các điểm nằm trên các đoạn thẳng $A_1A'_1$, $A_2A'_2,...,A_nA'_n$ sao cho $\frac{A_1A'_1}{A_1A''_1} = \frac{A_2A'_2}{A_2A''_2} = \frac{A_nA'_n}{A_nA''_n} = m\ (m > 0)$.
Chứng minh rằng $A''_1 A''_2 ... A''_n$ là đa giác đều .
Với m = 2 , n = 4 đó là bài toán (*).
Chắc rằng với cách giải 1, 2 nếu "đứng ở vị trí này hoặc nọ" ta còn có tìm thêm các bài toán mới nữa.
Nhưng với cách giải 3 có tìm được điều gì lý thú không? Với cách giải 3, khi chứng minh MNPQ là hình bình hành ta không cần đến tâm O chung mà các cách giải 1, 2 phải sử dụng. Ta tìm được bài toán sau:

Bài toán 3: Cho hình bình hành ABCD. Đặt một hình bình hành A'B'C'D' sao cho các đỉnh A', B', C', D' nằm trong hình bình hành ABCD. Chứng minh rằng trung điểm của AA', BB', CC', DD' là các đỉnh của một hình bình hành.
Cũng khai thác như trên từ bài toán 3 ta lại xuất hiện bài toán 4 sau:

Bài toán 4: Cho hình bình hành ABCD. Đặt một hình bình hành A'B'C'D' sao cho các đỉnh A', B', C', D' nằm trong hình bình hành ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm nằm trên các đoạn thẳng AA', BB', CC', DD' sao cho:

$$\frac{AA'}{AM} = \frac{BB'}{BN} = \frac{CC'}{CP} = \frac{DD'}{DQ} \text{ m (m > 0).}$$

Chứng minh rằng MNPQ là hình bình hành?

Với m = 2 là bài toán 4 .

Và ... liệu ta có hai bài toán sau không?

Bài toán 5: Trên mặt phẳng cho hai hình bình hành ABCD và A'B'C'D'. Gọi M, N, P, Q là các điểm nằm trên các đoạn thẳng AA', BB', CC', DD' sao cho:

$$\frac{AA'}{AM} = \frac{BB'}{BN} = \frac{CC'}{CP} = \frac{DD'}{DQ} \text{ m (m > 0).}$$

Chứng minh rằng MNPQ là hình bình hành.

Bài toán 6: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau. Trên (P) cho hình bình hành ABCD, trên (Q) cho hình bình hành A'B'C'D'. Gọi M, N, P, Q là các điểm nằm trên các đoạn thẳng AA', BB', CC', DD' sao cho:

$$\frac{AA'}{AM} = \frac{BB'}{BN} = \frac{CC'}{CP} = \frac{DD'}{DQ} \text{ m (m > 0).}$$

Chứng minh rằng MNPQ là hình bình hành .

Từ bài toán (*) có lẽ còn nhiều bài toán mới độc đáo và thú vị nữa!

Mời các bạn tiếp tục!

XII. ĐI TÌM BÀI TOÁN TỔNG QUÁT TỪ BÀI TOÁN ĐƠN GIẢN BÀI TOÁN QUEN THUỘC

Trong học toán và dạy toán từ một bài toán đơn giản – bài toán quen thuộc đi đến bài toán tổng quát một công cụ toán học rất thường dùng là *phép đồng dạng*. Trong Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 2 (200/ 1994), thầy giáo Nguyễn Khánh Nguyên với bài viết "Thử nhìn bằng con mắt đồng dạng" đã nêu ba bài toán rất quen thuộc để đi đến bài toán tổng quát. Trong bài viết này, tôi muốn trao đổi cùng bạn đọc năm bài toán quen thuộc khác nữa mà nhờ *phép đồng dạng* chúng ta có bài toán hay, bài toán tổng quát.

Bài toán 1: Cho hình vuông ABCD. Gọi M là điểm tùy ý trên cạnh AB. Phân giác của góc CDM cắt BC tại P.

Chứng minh rằng DM = AM + CP.

(Đề thi chọn đội tuyển học sinh giỏi Quận Phú Nhuận, TP.HCM – năm 2001 – 2002).

Hướng dẫn giải

Trên tia đối của tia CB lấy điểm Q sao cho CQ = AM .

$\Delta AMD = \Delta CQD$ (c–g–c)

Suy ra DM = DQ, $\widehat{ADM} = \widehat{QDC}$.

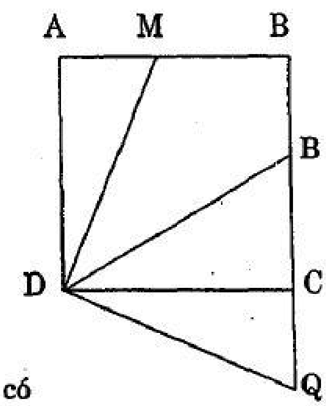
Mà $\widehat{ADP} = \widehat{QPD}$ (AD // BC)

Do đó $\widehat{QDP} = \widehat{QPD}$

Suy ra DQ = PQ.

Mà PQ = CQ + CP.

Vậy DM = AM + CP (đpcm)



Ta cũng nhận ra rằng: $\Delta AMD \backsim \Delta CQD$.

Do đó $\dfrac{DM}{DQ} = \dfrac{AM}{CQ} = \dfrac{AD}{DC} = m$ (m > 0) ... Giúp ta có bài toán 1 *, bài toán tổng quát của bài toán 1.

Bài Toán 1*: Cho hình chữ nhật ABCD có AD = m . DC (m >0). M là điểm trên cạnh AB. Phân giác của góc CDM cắt BC tại P. Chứng minh rằng DM = AM + mCP.

Với m = 1 đó là bài toán 1 và nhớ rằng ở bài toán 1* điểm Q nằm trên tia đối của tia CB và m.CQ = AM.

Và chúng ta cùng tiếp tục nữa!

Bài toán 2: Cho góc vuông xOy trên cạnh Ox lấy điểm A cố định ($A \neq 0$), B là điểm di động trên Oy. Tìm quỹ tích điểm C sao cho tam giác ABC đều.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 Trường THCS chuyên Lê Hồng Phong, TP.HCM 1989 – 1990).

HƯỚNG DẪN GIẢI

Dựng điểm D trong góc $\widehat{xOy}$ sao cho

$\widehat{OAD} = 60^0$, AD = OA.

Ta có D là điểm cố định.

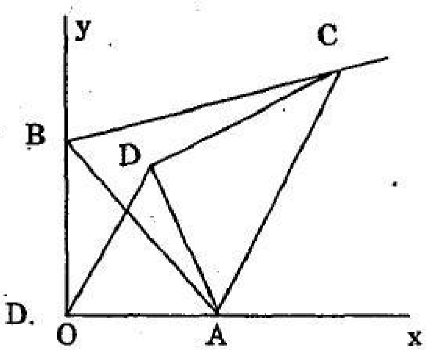
$\Delta OAB = \Delta DAC$ (c–g–c)

$\Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{ADC}$

$\widehat{ADC} = 90^0$

C thuộc đường thẳng vuông góc với AD tại D.

Như vậy ta có $\Delta OAB \backsim \Delta DAC$.



Cho ta $\widehat{AOB} = \widehat{ADC}$, $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{OA}{AD} = \dfrac{OB}{DC} = m$ (m > 0)...

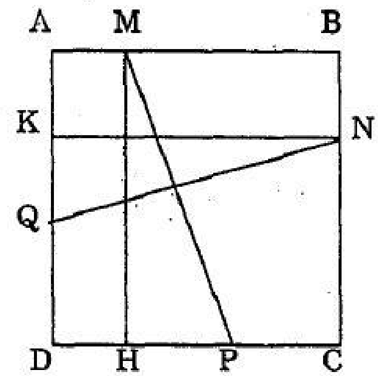
Từ đó, cho ta bài toán 2* , bài toán tổng quát của bài toán 2.

Bài toán 2*: Cho góc $\widehat{xOy}$ ($\widehat{xOy} \neq 180^0$), trên cạnh Ox lấy điểm A cố định ($A \neq$ O) B là điểm chuyển động trên cạnh Oy . Tìm quỹ tích điểm C sao cho tam giác $\widehat{ABC}$ có: BAC = α, AB = mAC (m > 0; α < 180⁰).

Với $\widehat{xOy} = 90^0$, $\widehat{BAC} = 60^0$, m = 1 đó là bài toán 2.

Chúng ta lại tiếp tục với bài toán 3.

Bài toán 3: Cho hình vuông ABCD, lấy các điểm M, N, P, Q lần lượt trên các cạnh (hoặc trên các đường thẳng chứa cạnh) AB, BC, CD, DA sao cho $MP \perp NQ$. Chứng minh rằng MP = NQ.



Hướng dẫn giải

Vẽ MH // AD (H ∈ DC), MK // AB (K ∈ AD)

$\Delta HMP = \Delta KNQ$ (c–g–c)

$\Rightarrow MP = NQ$.

Chúng ta cũng có: $\Delta HMP \backsim \Delta KNQ$

Do vậy: $\dfrac{MP}{NQ} = \dfrac{MH}{NQ} = \dfrac{BC}{AB} = m\ (m > 0)$.

Giúp ta đến với bài toán 3* , bài toán tổng quát của bài toán 3.

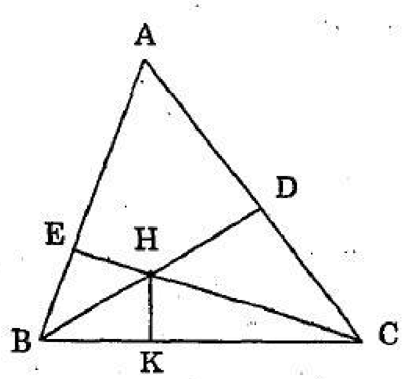
Bài toán 3*: Cho hình chữ nhật ABCD có BC = mAB (m > 0), các điểm M, N, P, Q lần lượt trên các cạnh (hoặc trên các đường thẳng chứa cạnh) AB, BC, CD, DA sao cho $MP \perp NQ$. Chứng minh rằng MP = mNQ.

Tin chắc rằng nếu tiếp tục tìm tòi suy nghĩ chúng ta còn có nhiều và rất nhiều bài toán quen thuộc mà bằng con đường *"Phép đồng dạng"*, đi đến bài toán hay, bài toán tổng quát.

XIII. LỜI GIẢI "THẬT BẤT NGỜ" CỦA MỘT BÀI TOÁN THI CHỌN HỌC SINH GIỎI

Ngày 16–3–2002 Trường THCS Lê Quý Đôn, quận 3, Tp Hồ Chí Minh tổ chức kỳ thi chọn học sinh giỏi giải thưởng Lê Quý Đôn. Trong đề thi toán khối lớp 8, có bài toán sau: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, BD và CE là hai đường cao cắt nhau tại H. Chứng minh rằng HD. HB = HE . HC và BH . BD + CH . CE = BC^2

HƯỚNG DẪN GIẢI



$\Delta HBE \backsim \Delta HCD$ (g–g)

$\Rightarrow \dfrac{HB}{HC} = \dfrac{HE}{HD} \Rightarrow HD \cdot HB = HE \cdot HC.$

Vẽ đường cao HK của tam giác HBC .

$\Delta BHK \backsim \Delta BCD$ (g–g) $\Rightarrow \dfrac{BH}{BC} = \dfrac{BK}{BD}$

$\Rightarrow BH \cdot BD = BC \cdot BK$

$\Delta CHK \backsim \Delta CBE \Rightarrow \dfrac{CH}{BC} = \dfrac{KC}{CE}$

$\Rightarrow CH \cdot CE = BC \cdot BK$

Do đó: $BH \cdot BD + CH \cdot CE = BC \cdot BK + BC \cdot KC = BC(BK + KC) = BC^2$

Lời giải trên là đáp án và cũng là lời giải truyền thống.

Nhưng ...! Thật độc đáo là có một học sinh đã tìm được lời giải mà không cần đến việc vẽ thêm đường phụ HK. Xin nêu để bạn đọc cùng tham khảo.

$\Delta HBE \backsim \Delta HCD$ (g–g) $\Rightarrow \dfrac{HB}{HC} = \dfrac{HE}{HD} \Rightarrow HD \cdot HB = HE \cdot HC.$

Ta có: $BH \cdot BD + CH \cdot CE = BH(BH + HD) + CH(CH + HE)$

$= BH^2 + BH \cdot HD + CH^2 + CH \cdot HE = BH^2 + 2.BH \cdot HD + CH^2$

$= BH^2 + 2.BH \cdot HD + HD^2 + DC^2 = (BH + HD)^2 + DC^2 = DB^2 + DC^2 = BC^2$

(Vì $HD \cdot HB = HE \cdot HC$, tam giác DHC vuông tại D

nên $CH^2 = HD^2 + DC^2$, ΔDBC vuông tại D nên $DB^2 + DC^2 = BC^2$)

XIV. LỜI GIẢI HAY CỦA MỘT BÀI TOÁN LỚP 8

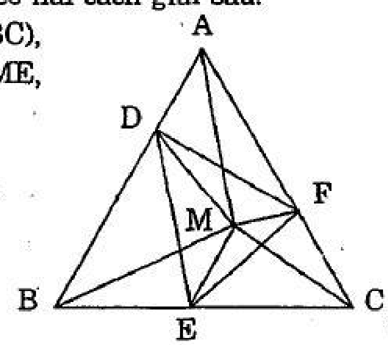
Bài toán: Cho một điểm M nằm bên trong tam giác đều ABC. Chứng minh rằng trong ba đoạn thẳng MA, MB, MC đoạn lớn nhất nhỏ hơn tổng hai đoạn kia.

Trong các sách báo về toán mà tôi đã được đọc, có hai cách giải sau:

Cách 1: Vẽ MD // AC ($D \in AB$), ME // AB ($E \in BC$), MF // BC ($F \in AC$). Các tứ giác AFMD, BDME, MFCE là các hình thang cân.

Do đó MA = DF, MB = DE, MC = MF

Các đoạn thẳng MA, MB, MC là độ dài các cạnh của tam giác DEF.



Cách 2: Dựng tam giác đều BMI (C, I nằm trên cùng nửa mặt phẳng bờ BM không chứa A).

Ta có: $\widehat{ABC} = \widehat{MBI} = 60^0 \Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{CBI}$

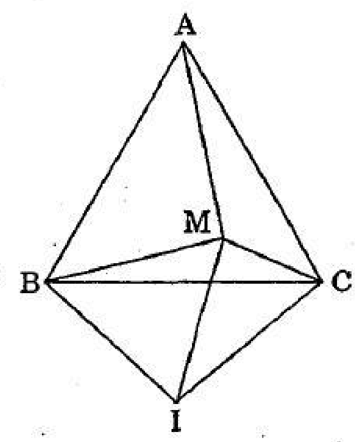
$\Delta ABM = \Delta CBI$ (c–g–c)

Do đó: AM = CI .

Tam giác MIC có MA = CI, MB = MI, MC = MC.

Bài toán chính là nội dung của định lý Pompiu, hai cách giải thật hay và đều cần phải vẽ thêm đường phụ.

Nhưng ...! Còn một lời giải khác nữa và rất hay, rất độc đáo vì không phải vẽ thêm đường phụ.



Cách 3: Không mất tính tổng quát, giả sử MA là đoạn thẳng có độ dài lớn nhất trong các đoạn thẳng MA, MB, MC.

M nằm trong tam giác đều ABC

$\Rightarrow \widehat{MAB} < 60^0$, $\widehat{MBA} < 60^0$

Xét tam giác MAB có $\widehat{AMB} > 60^0$

Tam giác MAB có $\widehat{MBA} < \widehat{AMB}$

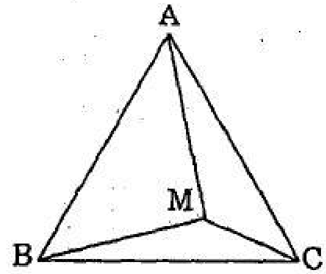
$\Rightarrow$ MA < AB

Tam giác MBC có BC < MB + MC

AB = BC (tam giác ABC đều)

Do đó MA < MB + MC

Các bạn có ý kiến gì nữa chăng ?



XV. VỀ MỘT BÀI TOÁN THI VÔ ĐỊCH TÂY BAN NHA

Trong kỳ thi vô địch toán Tây Ban Nha năm 1990 có bài toán sau:

Bài toán 1: Cho tam giác ABC. Gọi AM và AD lần lượt là các đường trung tuyến và phân giác trong của góc A. Đường thẳng đối xứng với AM qua phân giác AD cắt BC tại N.

Chứng minh rằng: $\dfrac{BN}{CN} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$

Bài "Định lý hàm số sin, định lý hàm số cosin và ứng dụng". (Trần Nam Dũng – Toán học và tuổi trẻ số 5 (251/1998) đã đề xuất lời giải bằng cách áp dụng định lý hàm số sin mà phải với kiến thức toán THPT mới lĩnh hội được). Bài toán còn có thể giải bằng cách khác cho học sinh lớp 8 như sau.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Từ giả thiết suy ra $\widehat{BAM} = \widehat{CAN}$, $\widehat{BAN} = \widehat{CAM}$.

Vẽ NK $\perp$ AC , MH $\perp$ AB. (K $\in$ AC , H $\in$ AB)

$\Delta HAM \backsim \Delta KAN$

(vì $\widehat{HAM} = \widehat{KAN}$, $\widehat{AHM} = \widehat{AKN} = 90^0$) $\Rightarrow \dfrac{AM}{AN} = \dfrac{MH}{NK}$

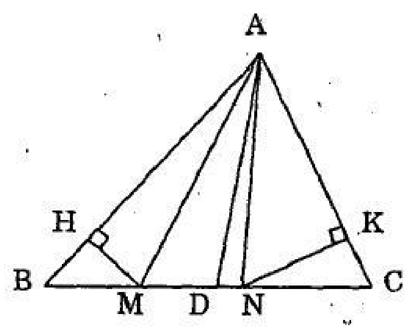
Do đó: $\dfrac{S_{ABM}}{S_{ACN}} = \dfrac{BM}{CN} = \dfrac{MH.AB}{NK.AC} = \dfrac{AM.AB}{AN.AC}$.

Vậy $\dfrac{BM}{CN} = \dfrac{AM}{AN} \cdot \dfrac{AB}{AC}$ (1)

Tương tự: $\dfrac{BN}{CM} = \dfrac{AN}{AM} \cdot \dfrac{AB}{AC}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\dfrac{BM}{CN} \cdot \dfrac{BN}{CN} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$.

Mà BM = CM nên $\dfrac{BN}{CN} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$



Từ lời giải này giúp ta giải được bài toán tổng quát hơn sau:

Bài toán 2: Cho tam giác ABC có đường phân giác trong AD. Ở miền trong góc BAD và góc CAD lần lượt vẽ hai tia AM, AN sao cho MAD = NAD (M thuộc đoạn BD, N thuộc đoạn CD).

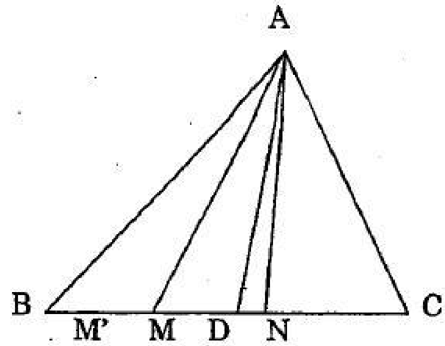
Chứng minh rằng: $\dfrac{BM}{CM}\cdot\dfrac{BN}{CN}=\dfrac{AB^2}{AC^2}$

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán 9, TP Hồ Chí Minh 1996 – 1997)

Rõ ràng khi thay giả thiết M thuộc đoạn BD, N thuộc đoạn CD bởi giả thiết rộng hơn M, N thuộc đường thẳng BC thì bài toán vẫn đúng và lời giải như trên. Đây cũng chính là định lý Steiner (1796 – 1863).

Câu hỏi được đặt ra, liệu có bài toán đảo chăng? Ta tìm câu trả lời.

Gọi M' là điểm trên đường thẳng BC sao cho M'AD = NAD, M ≠ N.



$\dfrac{BM'}{CM'}\cdot\dfrac{BN}{CN}=\dfrac{AB^2}{AC^2}$

mà $\dfrac{BM}{CM}\cdot\dfrac{BN}{CN}=\dfrac{AB^2}{AC^2}$ (gt)

Suy ra: $\dfrac{BM'}{CM'}=\dfrac{BM}{CM}$

$\Rightarrow \dfrac{BM'}{BM'+CM'}=\dfrac{BM}{BM+CM}$

hay $\dfrac{BM'}{BC}=\dfrac{BM}{BC}\Rightarrow BM'=BM\Rightarrow M'\equiv M\Rightarrow MAD=NAD.$

Lời giải bài toán 3, bài toán " thuận và đảo" đã có:

Bài toán 3: Cho tam giác ABC, AD là phân giác trong của tam giác ABC, M và N thuộc đường thẳng BC.

Chứng minh rằng: $\widehat{MAD}=\widehat{NAD}\Leftrightarrow\dfrac{BM}{CM}\cdot\dfrac{BN}{CN}=\dfrac{AB^2}{AC^2}$.

Hơn nữa lại nhận ra rằng: $\widehat{MAD}=\widehat{NAD}=60^0$

$\Leftrightarrow \widehat{M}\equiv\widehat{N}\equiv\widehat{D}\Leftrightarrow\dfrac{BD^2}{CD^2}=\dfrac{AB^2}{AC^2}$

$\Leftrightarrow\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{AB}{AC}$ (tính chất đường phân giác trong của một tam giác).

AD' là đường phân giác ngoài của tam giác ABC.

$\widehat{MAD}=\widehat{NAD}=90^0\Leftrightarrow\widehat{M}\equiv\widehat{N}\equiv\widehat{D}'\Leftrightarrow\dfrac{BD'^2}{CD'^2}=\dfrac{AB^2}{AC^2}$

$\Leftrightarrow\dfrac{BD'}{CD'}=\dfrac{AB}{AC}$ (tính chất đường phân giác ngoài của một tam giác).

Xoay quanh bài toán một chắc chắn còn nhiều điều thú vị nữa, các bạn tiếp tục tìm tòi và suy nghĩ nhé!

XVI. VẬN DỤNG HẰNG ĐẲNG THỨC $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ ĐỂ GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN CỰC TRỊ CỦA BIỂU THỨC BẬC HAI

Một số bài toán tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN), giá trị lớn nhất (GTLN) của biểu thức bậc hai vận dụng hằng đẳng thức $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, $x^2 \geq 0$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$ và một chút khéo léo sẽ giúp giải bài toán dạng này.

Chúng tôi xin được trao đổi cùng bạn đọc vấn đề này.

DẠNG 1: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = ax^2 + bx + c$.

a, b, c là hằng số, $a \neq 0$.

Một số bài toán

Bài 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x^2 - 6x + 8$

Hướng dẫn: $A = x^2 - 6x + 8 = (x^2 - 6x + 9) - 1$

$= (x-3)^2 - 1 \geq -1$

Bài 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của: $B = 2x^2 - 3x + 1$

Hướng dẫn: $B = 2x^2 - 3x + 1 = 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}\right) - \frac{9}{8} + 1$

$= 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{-1}{8} \geq \frac{-1}{8}$

Bài 3: Tìm giá trị lớn nhất của: $C = -3x^2 + 2x + 5$

Hướng dẫn: $C = -3x^2 + 2x + 5 = -3\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{3} + 5$

$= -3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{16}{3} \leq \frac{16}{3}$

Nhận xét: $M = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + c$

$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$

Như vậy:

1) Nếu $a > 0$ GTNN của M là $\frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-b}{2a}$ và không có GTLN.

2) Nếu $a < 0$ GTLN của M là $\frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-b}{2a}$ và không có GTNN.

Từ nhận xét trên, ta đã có phương pháp chung để giải bài toán tìm GTNN, GTLN của biểu thức bậc hai một biến.

DẠNG 2: Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$

(a, b, c, d, e, f là hằng số ; $ab \neq 0$)

Một số bài toán

Bài 4: Tìm giá trị nhỏ nhất, của biểu thức

$$D = x^2 + 2y^2 - 2xy + 4x - 2y + 15$$

Hướng dẫn:
$$\begin{aligned}
D &= x^2 + 2y^2 - 2xy + 4x - 2y + 15\\
&= x^2 + 2(2 - y)x + 2y^2 - 2y + 15\\
&= x^2 + 2(2 - y)x + (4 - 4y + y^2) + (y^2 + 2y + 1) + 10\\
&= x^2 + 2(2 - y)x + (2 - y)^2 + (y + 1)^2 + 10\\
&= (x + 2 - y)^2 + (y + 1)^2 + 10 \geq 10
\end{aligned}$$

Bài 5: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$E = 3x^2 + 14y^2 - 12xy + 6x - 8y + 10$$

Hướng dẫn:
$$\begin{aligned}
E &= 3x^2 + 14y^2 - 12xy + 6x - 8y + 10\\
&= 3x^2 + 6(1 - 2y)x + 14y^2 - 8y + 10\\
&= -3[x^2 + 2(1 - 2y)x + (1 - 2y)^2] - 3(1 - 2y)^2 + 14y^2 - 8y + 10\\
&= 3(x + 1 - 2y)^2 - 3 + 12y - 12y^2 + 14y^2 - 8y + 10\\
&= 3(x + 1 - 2y)^2 + 2(y^2 + 2y + 1) + 5\\
&= 3(x + 1 - 2y)^2 + 2(y^2 + 1)^2 + 5 \geq 5
\end{aligned}$$

Bài 6: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$F = -x^2 - 10y^2 + 6xy - 2x + 10y + 3$$

Hướng dẫn:
$$\begin{aligned}
F &= -x^2 - 10y^2 + 6xy - 2x + 10y + 3\\
&= -x^2 + 2(3y - 1)x - 10y^2 + 10y + 3\\
&= -[x^2 - 2(3y - 1)x + (3y - 1)^2] + (3y - 1)^2 - 10y^2 + 10y + 3\\
&= -(x - 3y + 1)^2 + 9y^2 - 6y + 1 - 10y^2 + 10y + 3\\
&= -(x - 3y + 1)^2 - (y^2 - 4y + 4) + 8\\
&= -(x - 3y + 1)^2 - (y - 2)^2 + 8 \leq 8.
\end{aligned}$$

Nhận xét: $P = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$

$= ax^2 + (cy + d)x + by^2 + ey + f$

$$= a[x^2 + \frac{1}{a}(cy + d)x + \frac{1}{4a^2}(cy + d)^2] - \frac{1}{4a}(cy + d)^2 + by^2 + ey + f$$

$$= ... = a\ (x + \frac{1}{2a}(cy + d)^2 + m(y + x)^2 + p)$$

Chú ý: – Nếu $|a|$ là bình phương đúng nên chọn x làm ẩn (xem bài 4) nếu $|b|$ là bình phương đúng nên chọn y làm ẩn.

– Nếu $|a| < |b|$ nên chọn x làm ẩn (xem bài 5)

Bài tập tự luyện

1) Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a/ $x^2 - x + 1$

b/ $3x^2 + 5x - 2$

c/ $x^2 + 2y^2 - 2xy - 4y + 5$

d/ $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 2x + 2y$

e/ $2x^2 + 4y^2 - 4xy - 4x - 4y + 2003$

2) Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

a/ $-x^2 + 3x$

b/ $-2x^2 + x - 1$

c/ $-x^2 - y^2 + xy + 2x + 2y$

d/ $-5x^2 - 2xy - 2y^2 + 14x + 10y - 1$

e/ $-8x^2 - 3y^2 - 26x + 6y + 100$

XVII. HAI BÀI TOÁN TỔNG QUÁT CỦA MỘT DẠNG BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG ĐẠI SỐ

Các bài toán bất đẳng thức đại số mà các biến tham gia trong bài toán là các số dương có vai trò hoán vị vòng quanh, đồng thời có một vế là tổng của các phân thức mà mỗi phân thức có tử là đa thức bậc hai và mẫu là đa thức bậc nhất rất đa dạng và phong phú. Việc tìm kiếm bài toán tổng quát để giúp học sinh với một lượng thời gian ít mà hiểu được vấn đề tương đối khó là điều hết sức cần thiết.

Tôi xin đề xuất hai bài toán tổng quát cho một dạng bài toán này:

Bài Toán 1: Cho $a, b, c > 0$; $p, m, n \geq 0$; m và n không đồng thời bằng 0 thỏa mãn $p \geq 2mn$.

Chứng minh rằng:

$$\frac{m^2b^2+n^2c^2+pbc}{a}+\frac{m^2c^2+n^2a^2+pca}{b}+\frac{m^2a^2+n^2b^2+pab}{c}$$

$\geq (m^2 + n^2 + p)(a + b + c)$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Áp dụng bất đẳng thức Cosi cho hai số dương, ta có:

$$\frac{mb+nc}{(m+n)a}+\frac{(m+n)a}{mb+nc}\geq 2$$

Do đó $(m + n)(mb + nc)\left[\frac{mb+nc}{(m+n)a}+\frac{(m+n)a}{mb+nc}\right] \geq (m + n)(mb + nc).2$

$$\Leftrightarrow \frac{(mb+nc)^2}{a}+(m+n)^2a \geq 2(m+n)(mb+nc) \qquad (1)$$

Tương tự có: $\frac{(mc+na)^2}{b}+(m+n)^2 b \geq 2(m+n)(mc+na)$ (2)

$$\frac{(ma+nb)^2}{c}+(m+n)^2c \geq 2(m+n)(ma+nb) \qquad (3)$$

Kết hợp (1), (2), (3) và (*), biết rằng

$$\frac{(p-2mn)bc}{a}+\frac{(p-2mn)ca}{b}+\frac{(p-2mn)ab}{c}\geq (p-2mn)(a+b+c) \qquad (*)$$

ta có đpcm.

Với $m = n = 1$, $p = 2$

Với $m = 2$, $n = 3$, $p = 6$

... là các bài toán rất thường gặp ở các sách báo về toán *BẤT ĐẲNG THỨC*

Bài toán 2: Cho $a, b, c, m, n > 0$

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{mb+nc}+\frac{b^2}{mc+na}+\frac{c^2}{ma+nb}\geq \frac{1}{m+n}(a+b+c)$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương, ta có:

$$\frac{(m+n)a}{mb+nc}+\frac{mb+nc}{(m+n)a}\geq 2$$

Do đó: $\frac{a}{m+n}\left[\frac{(m+n)a}{mb+nc}+\frac{mb+nc}{(m+n)a}\right]\geq \frac{a}{m+n}.2$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{mb+nc}+\frac{mb+nc}{(m+n)^2}\geq \frac{2}{m+n}.a \qquad (4)$$

Tương tự có: $\dfrac{b^2}{mc + na} + \dfrac{mc + na}{(m + n)^2} \geq \dfrac{2}{m + n}.b$ (5)

$\dfrac{c^2}{ma + nb} + \dfrac{ma + nb}{(m + n)^2} \geq \dfrac{2}{m + n}.c$ (6)

Từ (4), (5), (6) ta có đpcm.

Với m = n =1

Với m = 2, n = 3

... là các bài toán rất thường gặp ở các sách báo về toán *BẤT ĐẲNG THỨC*

Các bạn có tìm thêm được điều gì nữa chăng?

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU 3

A. CÁC BỘ ĐỀ TOÁN 5

Bộ đề 1. Đề thi học sinh giỏi Quận 6, TP.HCM – Năm học 1990 – 1991 5

Bộ đề 2. Đề thi học sinh giỏi giải thưởng Lê Quý Đôn, quận Tân Bình, TP.HCM – Năm học 1989 – 1990 9

Bộ đề 3. Đề thi học sinh giỏi giải thưởng Lê Quý Đôn, quận Tân Bình, TP.HCM – Năm học 1990 – 1991 11

Bộ đề 4. Đề thi học sinh giỏi giải thưởng Lê Quý Đôn, quận Tân Bình, TP.HCM – Năm học 1991 – 1992 13

Bộ đề 5. Đề thi học sinh giỏi Quận 6, TP.HCM – Năm học 1991 – 1992 16

Bộ đề 6. Đề thi học sinh giỏi giải thưởng Lê Quý Đôn, quận Tân Bình, TP.HCM – Năm học 1992 – 1993 18

Bộ đề 7. Đề thi học sinh giỏi Quận 6, TP.HCM – Năm học 1992 – 1993 21

Bộ đề 8. Đề thi học sinh giỏi giải thưởng Lê Quý Đôn, quận Tân Bình, TP.HCM – Năm học 1993 – 1994 24

Bộ đề 9. Đề thi học sinh giỏi Quận 6, TPHCM – Năm học 1993 – 1994 27

Bộ đề 10. Đề thi học sinh giỏi giải thưởng Lê Quý Đôn, quận Tân Bình, TP.HCM – Năm học 1994 – 1995 31

Bộ đề 11. Đề thi học sinh giỏi Quận 3, TP.HCM – Năm học 1994 – 1995 34

Bộ đề 12. Đề thi học sinh giỏi Quận 6, TP.HCM – Năm học 1994 – 1995 37

Bộ đề 13. Đề thi học sinh giỏi Quận 1, TP.HCM – Năm học 1994 – 1995 43

Bộ đề 14. Đề thi học bổng Marie Curie trường THCS Nguyễn Du quận 1, TP.HCM – Năm học 1994 – 1995 46

Bộ đề 15. Đề thi học sinh giỏi giải thưởng Lê Quý Đôn, quận Tân Bình TP.HCM – Năm học 1995 – 1996 49

Bộ đề 16. Đề thi học sinh giỏi Quận 6, TP.HCM – Năm học 1995 – 1996 52

Bộ đề 17. Đề thi học sinh giỏi Quận 3, TP.HCM – Năm học 1995 – 1996 57

Bộ đề 18. Đề thi học sinh giỏi Quận 3, TP.HCM – Năm học 1995 – 1996 60

Bộ đề 19. Đề thi chọn đội tuyển toán 8 trường THCS Nguyễn Du quận 1, TP.HCM – Năm học 1995 – 1996 64

Bộ đề 20. Đề thi chọn đội tuyển toán 8 trường THCS Nguyễn Du quận 1, TP.HCM – Năm học 1995 – 1996 68

Bộ đề 21. Đề thi học sinh giỏi Quận 1, TPHCM Năm học 1995 – 1996 72

Bộ đề 22. Đề thi học sinh giỏi toán trường Lê Quý Đôn, quận Tân Bình, TP.HCM – Năm học 1996 – 1997 76
Bộ đề 23. Đề thi học sinh giỏi Quận 3, TP.HCM – Năm học 1996 – 1997 78
Bộ đề 24. Đề thi học sinh giỏi Quận 6, TP.HCM – Năm học 1996 – 1997 81
Bộ đề 25. Đề thi chọn đội tuyển toán 8 trường THCS Nguyễn Du quận 1, TP.HCM – Năm học 1996 – 1997 83
Bộ đề 26. Đề thi chọn đội tuyển toán 8 trường THCS Nguyễn Du quận 1, TP.HCM – Năm học 1996 – 1997 86
Bộ đề 27. Đề thi chọn học sinh giỏi Quận 1, TP.HCM – Năm học 1996 – 1997 89
Bộ đề 28. Đề thi học bổng trường THCS Nguyễn Du, quận 1, TP.HCM – tháng 11 năm học 1996 – 1997 91
Bộ đề 29. Đề thi học bổng trường THCS Nguyễn Du, quận 1, TP.HCM tháng 11 năm học 1996–1997 94
Bộ đề 30. Đề thi học sinh giỏi giải thưởng Lê Quý Đôn, quận Tân Bình, TP.HCM – Năm học 1997–1998 97
Bộ đề 31. Đề thi học sinh giỏi Quận 6, TP.HCM – Năm học 1997–1998 100
Bộ đề 32. Đề thi học bổng trường THCS Nguyễn Du, quận 1 – TP.HCM tháng 10 năm học 1997–1998 103
Bộ đề 33. Đề thi học sinh giỏi giải thưởng Lương Thế Vinh, quận 9, TP.HCM – Năm học 1997 – 1998 107
Bộ đề 34. Đề thi học bổng trường THCS Nguyễn Du, quận 1, TPHCM – tháng 2 năm học 1998 – 1999 109
Bộ đề 35. Đề thi chọn đội tuyển toán 8 trường THCS Nguyễn Du, quận 1, TP.HCM – năm học 1997 – 1998 112
Bộ đề 36. Đề thi chọn học sinh giỏi Quận 1, TP.HCM – Năm học 1997 – 1998 115
Bộ đề 37. Đề thi học sinh giỏi giải thưởng TP.HCM, quận Tân Bình, TP.HCM – Năm học 1998 – 1999 117
Bộ đề 38. Đề thi học sinh giỏi Quận 6, TP.HCM – Năm học 1998–1999 120
Bộ đề 39. Đề thi học sinh giỏi Quận 9, TP.HCM – Năm học 1998–1999 125
Bộ đề 40. Đề thi học bổng trường THCS Nguyễn Du, quận 1, TP.HCM – Năm học 1998 – 1999 128
Bộ đề 41. Đề thi chọn đội tuyển toán 8 trường THCS Nguyễn Du quận 1, TP.HCM – Năm học 1998 – 1999 130
Bộ đề 42. Đề thi chọn học sinh giỏi Quận 1, TP.HCM – Năm học 1998 – 1999 134

Bộ đề 43. Đề thi học sinh giỏi giải thưởng Lê Quý Đôn, quận Tân Bình, TP.HCM – Năm học 1999 – 2000 136
Bộ đề 44. Đề thi chọn đội tuyển toán 8 quận 5, TP.HCM – Năm học 1999 – 2000 139
Bộ đề 45. Đề thi học sinh giỏi quận 6, TP.HCM – Năm học 1999–2000 143
Bộ đề 46. Đề thi học sinh giỏi giải thưởng Lương Thế Vinh quận 1, TP.HCM – Năm học 1999 – 2000 147
Bộ đề 47. Đề thi chọn đội tuyển toán 8 trường THCS Nguyễn Du, quận 1, TP.HCM – Năm học 1999 – 2000 150
Bộ đề 48. Đề thi chọn đội tuyển toán 8 trường THCS Nguyễn Du, quận 1, TP.HCM – Năm học 1999 – 2000 153
Bộ đề 49. Đề thi chọn đội tuyển học sinh giỏi toán 8 trường THCS Nguyễn Du, quận 1, TP.HCM – Năm học 1999 – 2000 155
Bộ đề 50. Đề thi học sinh giỏi giải thưởng Lê Quý Đôn trên báo khăn quàng đỏ lần 2 – Năm học 2000 – 2001 158
Bộ đề 51. Đề thi học sinh giỏi giải thưởng Lê Quý Đôn, quận Tân Bình, TP.HCM – Năm học 2000 – 2001 159
Bộ đề 52. Đề thi chọn đội tuyển toán 8 trường THCS Nguyễn Gia Thiều, quận Tân Bình, TP.HCM – Năm học 2000 – 2001 163
Bộ đề 53. Đề thi chọn đội tuyển toán 8 trường THCS Nguyễn Gia Thiều, quận Tân Bình, TP.HCM – Năm học 2000 – 2001 166
Bộ đề 54. Đề thi chọn đội tuyển toán 8 trường THCS Nguyễn Du, quận Gò Vấp, TP.HCM – Năm học 2000 – 2001 169
Bộ đề 55. Đề thi học sinh giỏi quận 1, TP.HCM – Năm học 2000 – 2001 **Error! Bookmark not defined.**
Bộ đề 56. Đề thi chọn đội tuyển toán 8 trường THCS Hoa Lư, quận 9 TP.HCM – Năm học 2000 – 2001 174
Bộ đề 57. Đề thi học sinh giỏi quận 9, TP.HCM – Năm học 2000–2001 177
Bộ đề 58. Đề thi kỳ 3 giải thưởng lê quý đôn trên báo khăn quàng đỏ lần 3 – Năm học 2000 – 2001 180
Bộ đề 59. Đề thi kỳ 5 giải thưởng Lê Quý Đôn trên báo khăn quàng đỏ lần 3 – Năm học 2000 – 2001 181
Bộ đề 60. Đề thi kỳ 7 giải thưởng Lê Quý Đôn trên báo khăn quàng đỏ lần 3 – Năm học 2000 – 2001 182
Bộ đề 61. Đề thi kỳ 11 giải thưởng Lê Quý Đôn trên báo khăn quàng đỏ

lần 3 – Năm học 2001 – 2002 183
Bộ đề 62. Đề thi kỳ 11 giải thưởng Lê Quý Đôn trên báo khăn quàng đỏ lần 3 – Năm học 2000 – 2001 184
Bộ đề 63. Đề thi kỳ 12 giải thưởng Lê Quý Đôn trên báo khăn quàng đỏ lần 3 – Năm học 2000 – 2001 185
Bộ đề 64. Đề thi học sinh giỏi giải thưởng Lê Quý Đôn – Trường THCS Lê Quý Đôn – quận 3, TP.HCM – Năm học 2001 – 2002 187
Bộ đề 65. Đề thi chọn đội tuyển toán 8 trường THCS Nguyễn Gia Thiều – quận Tân Bình, TP.HCM – Năm học 2001 – 2002 191
Bộ đề 66. Đề thi học sinh giỏi giải thưởng Lê Quý Đôn, quận Tân Bình, TP.HCM – Năm học 2001 – 2002 195
Bộ đề 67. Đề thi học sinh giỏi quận Phú Nhuận, TP.HCM – Năm học 2001 – 2002 198
Bộ đề 68. Đề thi tuyển chọn học sinh giỏi trường THCS Hoa Lư, quận 9, TP.HCM – Năm học 2001 – 2002 202
Bộ đề 69. Đề thi học sinh giỏi quận 9, TP.HCM – Năm học 2001–2002 205
Bộ đề 70. Đề thi chọn đội tuyển học sinh giỏi trường THCS Nguyễn Du – quận 1, TP.HCM – Năm học 2001 – 2002 207
Bộ đề 71. Đề thi học sinh giỏi quận 1, tphcm – năm học 2001 – 2002 209
Bộ đề 72. Đề thi học sinh giỏi truyền thống 26/3 Quận 10, TP.HCM – Năm học 2001 – 2002 211
Bộ đề 73. Đề thi chọn học sinh giỏi toán 8 trường THCS Hoàng Văn Thụ, quận 10, TP.HCM – Năm học 2001 – 2002 215
Bộ đề 74. Đề thi chọn đội tuyển toán 8 trường THCS Nguyễn Du, quận 1 – TP.HCM – Năm 2002 – 2003 220
Bộ đề 75. Đề thi chọn đội tuyển toán 8 trường THCS Nguyễn Du, quận 1 – TP.HCM – Năm 2002 – 2003 223
Bộ đề 76. Đề thi học sinh giỏi toán 8 (đề tham khảo) trường THCS Nguyễn Du – quận 1 – TP.HCM năm học 2003 – 2004 225
Bộ đề 77. Đề thi học sinh giỏi toán 8 quận 1, TP.HCM – Năm học 2002 – 2003 229
Bộ đề 78. Đề thi học bổng toán 8 trường THCS Hoa Lư, quận 9, TP.HCM – Năm học 2002 – 2003 232
Bộ đề 79. đề thi chọn học sinh giỏi giải thưởng Lương Thế Vinh, quận 9, TP.HCM – Năm học 2002 – 2003 235
Bộ đề 80. Đề thi chọn học sinh giỏi giải Lương Thế Vinh, quận 9,

TP.HCM (năm 2002 – 2003) 239

Bộ đề 81. Đề thi giải học bổng – lớp 8 trường THCS Hoa Lư, quận 9, TP.HCM – Năm học 2003 – 2004 243

Bộ đề 82. Đề thi chọn học sinh giỏi giải Lương Thế Vinh, quận 9, TP.HCM – Năm học 2003 – 2004 245

Bộ đề 83. Đề thi chọn học sinh giỏi giải Lương Thế Vinh, quận 9, TP.HCM – Năm học 2003 – 2004 248

Bộ đề 84. Đề thi giải lê quý đôn quận Tân Bình, TP.HCM – Năm học 2002 – 2003 252

Bộ đề 85. Đề thi giải lê quý đôn – trường THCS Lê Quý Đôn quận 3, TP.HCM – năm học 2002 – 2003 255

Bộ đề 86. Đề thi chọn học sinh giỏi toán 8 trường THCS Nguyễn Gia Thiều, quận Tận Bình, TP.HCM – Năm học 2002 – 2003 257

Bộ đề 87. Đề thi học sinh giỏi lớp 8 thành phố Pleiku – Gia lai – Năm học 2002 – 2003 261

Bộ đề 88. Đề thi học sinh giỏi lớp 8 huyện Yên Lạc – tỉnh Vĩnh Phúc – Năm học 2002 – 2003 263

Bộ đề 89. Đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 8 trường THCS Thực Nghiệm Sư Phạm – TP.HCM – Năm học 2003 – 2004 267

Bộ đề 90. Đề thi học sinh giỏi quận Tân Phú TP.HCM – Năm học 2003 – 2004 269

Bộ đề 91. Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 8 trường THCS Ngô Sĩ Liên, quận Tân Bình, TP.HCM năm học 2003 – 2004 271

Bộ đề 92. Đề thi chọn học sinh giỏi giải thưởng Lê Quý Đôn, quận Tân Bình, TP.HCM – Năm học 2003 – 2004 275

Bộ đề 93. Đề thi chọn học sinh giỏi toán 8 Quận 1, TP.HCM – Năm học 2003 – 2004 278

B. Một số vấn đề nâng cao toán 8 281

I. Mẹo nhỏ giúp giải một số bài toán phân tích đa thức thành nhân tử 281

Dạng 1: Phân tích đa thức $ax^2 + bx + c$ thành nhân tử 282

Dạng 2: Phân tích đa thức $x^{3m+2} + x^{3n+1} + 1$ thành nhân tử 282

II. Từ bài toán quen thuộc đến những bài toán thi chọn học sinh giỏi 283

Bài toán A: Chứng minh rằng $m^2 - mn + n^2 \geq 0$ với mọi m, n 283

Bài toán B: Chứng minh rằng $(a + b)^3 - a^3 - b^3 = 3ab (a + b)$ 285

III. Trao đổi về việc dạy và học một dạng toán 286

IV. Về một bài toán bất đẳng thức 287
V. Một thủ thuật đổi biến để giải bài toán bất đẳng thức có điều kiện 288
VI. Về ứng dụng của một bài toán bất đẳng thức đại số trong một số bài toán cực trị hình học 289
VII. Một phong cách học toán 290
VIII. Khai thác một bài toán quen thuộc 296
IX. Về một bài toán hình vuông 297
X. Một chút suy nghĩ về một bài toán diện tích đa giác 298
XI. Sáng tạo từ một bài toán quen thuộc 300
XII. Đi tìm bài toán tổng quát từ bài toán đơn giản bài toán quen thuộc 302
XIII. Lời giải "thật bất ngờ" của một bài toán thi chọn học sinh giỏi 304
XIV. Lời giải hay của một bài toán lớp 8 305
XV. Về một bài toán thi vô địch tây ban nha 306
XVI. Vận dụng hằng đẳng thức $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ để giải một số bài toán cực trị của biểu thức bậc hai 308
Dạng 1: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = ax^2 + bx + c$. 308
Dạng 2: Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$ 309
XVII. Hai bài toán tổng quát của một dạng bài toán bất đẳng đại số 310
MỤC LỤC 313