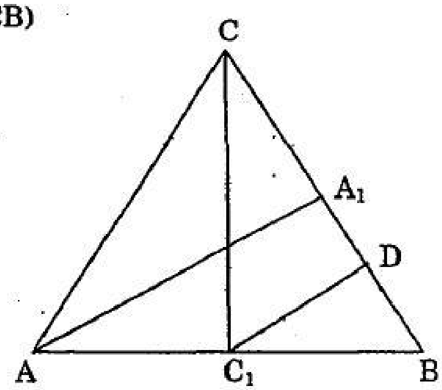
Bài 4:

Cách 1: Từ C_1 vẽ $C_1D \parallel AA_1 = CC_1$ ($D \in CB$)

Vì C_1 là trung điểm của đoạn AB nên C_1D là đường trung bình của tam giác AA_1B



Suy ra: $C_1D = \dfrac{1}{2}AA_1 = CC_1$

Cho ta ΔCC_1D cân tại C_1.

Suy ra $\widehat{C_1DC} = \widehat{C_1CD}$.

Mà $\widehat{C_1DC} = \widehat{DC_1B} + \hat{B} = \widehat{A_1AB} + \hat{B}$

(Vì $\widehat{A_1AB} = \widehat{DC_1B}$: đồng vị)

$\widehat{C_1DC} = \dfrac{1}{2}\widehat{CAB} + \hat{B} = \dfrac{1}{2}\hat{B} + \hat{B} = \dfrac{3}{2}\hat{B}$ (vì $\widehat{CAB} = \hat{B}$)

hay $\widehat{C_1CD} = \dfrac{3}{2}\hat{B}$

Tam giác ACB cân tại C nên trung tuyến CC_1 cũng là phân giác của tam giác ACB.

Suy ra $\widehat{ACB} = 2\widehat{C_1CD} = 2.\dfrac{3}{2}B = 3B$.

Ta có: $\widehat{ACB} + \widehat{CAB} + \hat{B} = 180^0$

Suy ra: $3\hat{B} + \hat{B} + \hat{B} = 180^0$ hay $5\hat{B} = 180^0$ cho ta $\hat{B} = 36^0$

$\widehat{ACB} = 3.36^0 = 108^0$

Cách 2:

Tam giác ABC cân tại C có CC_1 là trung tuyến nên CC_1 cũng là đường cao $\Rightarrow CC_1 \perp AB$ suy ra $\widehat{BC_1C} = 90^0$ kẻ $C_1D \parallel AA_1$ ($D \in CB$) mà C_1 là đường trung điểm của đoạn AB nên C_1D là đường trung bình của tam giác ABA_1.

Cho ta $C_1D = \dfrac{1}{2}AA_1 = CC_1$

ΔC_1CD cân tại C_1

Suy ra $\widehat{BCC_1} = \widehat{CDC_1} - \widehat{CA_1A} = \varphi$ (đặt $\widehat{CA_1A} = \varphi$)

Vậy $\widehat{ABA_1} = 90^0 - \varphi$ (vì ΔCC_1B cân tại C_1)

Suy ra: $\varphi = \widehat{CA_1A} = \dfrac{1}{2}\hat{A} + \hat{B} = \dfrac{1}{2}(90^0 - \varphi) + (90^0 - \varphi)$

Cho ta $\varphi = 54^0$

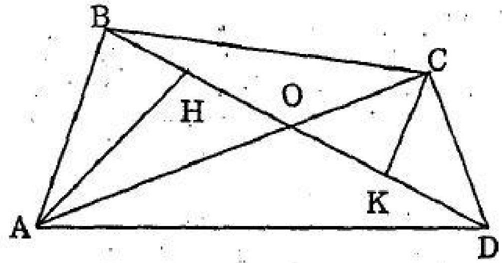
Suy ra $\hat{C} = 2\varphi = 108^0$

Bài 5: *Cách 1:* Giả sử: $\widehat{AOB} = \widehat{COD} = 30^0$

Vẽ $AH \perp OB$, $CK \perp OD$

Tam giác $\widehat{AOH}$ có $\widehat{AHO} = 90^0$; $\widehat{AOH} = 30^0$

nên ΔAOH là nửa tam giác đều, cho ta: $AH = \frac{1}{2}OA$



ΔCOK có $\widehat{CKO} = 90^0$; $\widehat{COK} = 30^0$ nên ΔCOK là nửa tam giác đều, cho ta $CK = \frac{1}{2}OC$.

Ta có: $S_{AOB} = \frac{1}{2}AH.OB = \frac{1}{4}AO.OB$ (1)

$S_{BOC} = \frac{1}{2}CK.OB = \frac{1}{4}OC.OB$ (2)

Cộng vế với vế (1) và (2) ta được $S_{ABC} = \frac{1}{4}OB.AC$

Tương tự: $S_{ADC} = \frac{1}{4}OD.AC$

Suy ra:

$S_{ABC} + S_{ADC} = S_{ABCD} = \frac{1}{4}AC(OB + OD) = \frac{1}{4}AC.BD = \frac{1}{4}.10.12 = 30cm^2$

Cách 2:

$S_{ABD} = \frac{1}{2}AH.BD = \frac{1}{4}OA.BD$; $S_{BCD} = \frac{1}{2}CK.BD = \frac{1}{4}OC.BD$

$\Rightarrow S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{4}(OA + OC).BD = \frac{1}{4}AC.BD = \frac{1}{4}.10.12 = 30cm^2$

Bài 6: *Cách 1:* Ta có: $\frac{BH}{BQ} = \frac{BH}{BP}$ (1)

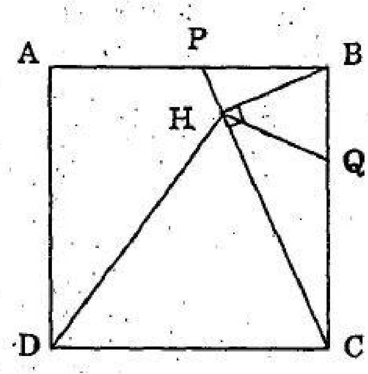
(vì BQ = BP)

$\frac{BH}{BP} = \frac{CH}{CB}$ (2)

(Vì $\Delta BHP \backsim \Delta CHB$ (g–g))

$\frac{CH}{CB} = \frac{CH}{CD}$ (3)

(Vì CB = CD)



Từ (1), (2) và (3) suy ra $\frac{BH}{BQ} = \frac{CH}{CD}$ (4)

Mặt khác HPB = QBH (hai góc cùng phụ với PBN)

$\widehat{DCH} = \widehat{HPB}$ (hai góc so le trong; AB//CD)

Suy ra $\widehat{DCH} = \widehat{QBH}$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra $\Delta DHC \backsim \Delta QHB$ (g–c–g)

cho ta $\widehat{DHC} = \widehat{QHB}$

Suy ra: $\widehat{DHQ} = \widehat{CHB} = 90^0$

Cách 2: BH cắt AD tại E, EC cắt DQ tại O.

Xét ΔABE và ΔBCP có:

$\widehat{BAE} = \widehat{CBP}$ ($= 90^0$):

AB = BC, $\widehat{ABE} = \widehat{BCP}$ (hai góc cùng phụ với góc $\widehat{HBC}$)

Do đó $\Delta ABE = \Delta BCP$ (g–c–g)

Suy ra AE = BP.

Mà BP = BQ (gt)

Do đó AE = BQ.

Suy ra AD – AE = BC – BQ

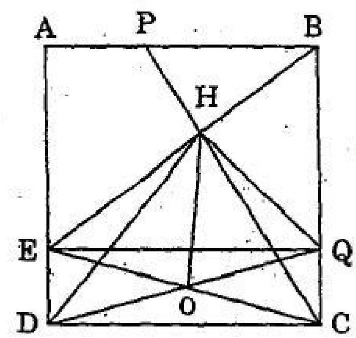
Suy ra ED = QC.

Tứ giác EQCD có ED = QC, ED // QC

nên là hình bình hành.

Mà $\widehat{EDC} = 90^0$

Do đó tứ giác DEQC là hình chữ nhật.



Suy ra EC = DQ, O là trung điểm của DQ và EC.

ΔCEH vuông tại H, HO là đường trung tuyến nên $HO = \frac{1}{2}EC$.

Vậy $HO = \frac{1}{2}DQ$. Tam giác DHQ có HO là đường trung tuyến và $HO = \frac{1}{2}DQ$

Do đó ΔDHQ vuông tại H.

Suy ra $\widehat{DHQ} = 90^0$.

BỘ ĐỀ 66

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI GIẢI THƯỞNG LÊ QUÝ ĐÔN QUẬN TÂN BÌNH, TPHCM – NĂM HỌC 2001 – 2002

Bài 1:

1. Giải phương trình $2x^2 - x + \frac{3}{2x-1} = 4$

2. Cho các biểu thức sau: $A = \frac{x^2+2x+1}{x^2-4x+5}$ và $B = \frac{2x^2-8x+10}{x^3-x^2-5x-3}$

a/ Tìm điều kiện có nghĩa của B.

b/ Tìm giá trị bé nhất của A và giá trị tương ứng của x.

c/ Tìm giá trị của x để A.B < 0

Bài 2: Cho tam giác ABC vuông tại A có đường phân giác BD cắt đường cao AH tại I.

1) Chứng minh tam giác ADI cân.

2) Chứng minh: AD.BD = BI.DC

3) Từ D kẻ DK vuông góc BC tại K. Tứ giác ADKI là hình gì? Chứng minh điều ấy.

Bài 3: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và AD là đường phân giác. Chứng minh rằng: $AD^2 < AB.AC$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $2x^2 - x + \dfrac{3}{2x-1} = 4$ (1)

Điều kiện: $2x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{1}{2}$

Với điều kiện trên phương trình (1) tương đương với:

$(2x^2 - x)(2x - 1) + 3 = 4(2x - 1)$

$\Leftrightarrow 4x^3 - 2x^2 - 2x^2 + x + 3 = 8x - 4 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x^2 - 7x + 7 = 0$

$\Leftrightarrow 4x^2(x - 1) - 7(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (4x^2 - 7)(x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2 - 7 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2 = 7 \\ x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = \dfrac{7}{4} \\ x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \notin Q \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Chứng minh $x^2 = \dfrac{7}{4}$ thì $x \notin Q$

Giả sử ta có $x \in Q$ đặt $x = \dfrac{a}{b}$ ($a, b \in N$; $b > 0$ ƯCLN $(a;b) = 1$).

Ta có: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = \dfrac{7}{4} \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{b^2} = \dfrac{7}{4} \Leftrightarrow 4a^2 = 7b^2$

$4a^2 \vdots 7$ mà ƯCLN $(4; 7) = 1$ nên $a^2 \vdots 7 \Rightarrow a \vdots 7$

$\Rightarrow a^2 \vdots 7^2 \Rightarrow 7b^2 \vdots 7^2 \Rightarrow b^2 \vdots 7 \Rightarrow b \vdots 7$

Do đó ƯCLN $(a;b) \geq 7$. Điều này vô lý!

Vậy điều giả sử trên sai nên $x \notin Q$.

Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

2) $A = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 4x + 5}$ và $B = \dfrac{2x^2 - 8x + 10}{x^3 - x^2 - 5x - 3}$

a/ Biểu thức B có nghĩa khi mẫu thức $x^3 - x^2 - 5x - 3 \neq 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x^2 - 6x + x - 3 \neq 0$

$\Leftrightarrow x^2(x - 3) + 2x(x - 3) + (x - 3) \neq 0$

$\Leftrightarrow (x - 3)(x^2 + 2x + 1) \neq 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 1)^2 \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \neq 0 \\ x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

Vậy biểu thức B có nghĩa khi $x \neq 3$ và $x \neq -1$.

b/ Ta có: $A = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-4x+5} = \dfrac{(x+1)^2}{x^2-4x+5+1} = \dfrac{(x+1)^2}{(x-2)^2+1}$

Ta có: $(x+1)^2 \ge 0$ và $(x-2)^2 + 1 > 0\ \forall x$

Do đó: $\dfrac{(x+1)^2}{(x-2)^2+1} \ge 0\ \forall x$ hay $A \ge 0\ \forall x$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Vậy biểu thức A đạt giá trị nhỏ nhất bằng 0 khi $x = -1$.

c/ Ta có: $AB = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-4x+5}.\dfrac{2x^2-8x+10}{x^3-x^2-5x-3}$ $(x \ne 3, x \ne -1)$

$= \dfrac{(x+1)^2.2(x^2-4x+5)+1}{(x^2-4x+5)(x-3)(x+1)^2} = \dfrac{2}{x-3}$

Do đó: $A.B < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{x-3} < 0 \\ x \ne 3, x \ne -1 \end{cases}$ $(x \ne 3, x \ne -1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3 < 0 \\ x \ne 3, x \ne -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x \ne 3, x \ne -1 \end{cases} \Leftrightarrow x < 3$ và $x \ne -1$

Vậy $A.B < 0$ khi $x < 3$ và $x \ne -1$.

Bài 2:

1) Ta có: $\widehat{AID} = \widehat{BIH}$ (hai góc đối đỉnh)

$\widehat{BIH} + \widehat{HBI} = 90^0$ (tam giác BIH vuông tại H)

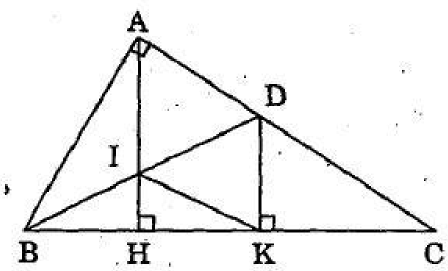
Suy ra: $AIB + \widehat{IBH} = 90^0$

$\widehat{ADI} + \widehat{IBA} = 90^0$ (tam giác ABD vuông tại A)

$\widehat{ABI} = \widehat{HBI}$ (BD là phân giác)

Suy ra $\widehat{AID} = \widehat{ADI}$, do đó tam giác AID cân tại A.

2) Xét ΔIAB và ΔDCB có $\widehat{ABI} = \widehat{CBD}$, $\widehat{IAB} = \widehat{DCB}$ (hai góc cùng phụ với góc ABC)



Do đó $\Delta IAB \backsim \Delta DCB \Rightarrow \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BI}{BD}$

ΔABC có BD là đường phân giác nên $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{DC}$

Do đó $\dfrac{BI}{BD} = \dfrac{AD}{DC} \Rightarrow AD.BC = BI.DC$

3) Vì BD là tia phân giác của góc $\widehat{ABC}$ nên ta có DA = DK.

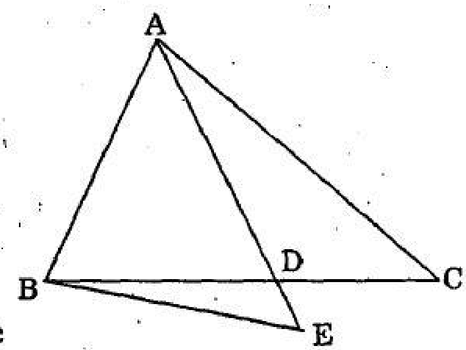
Mà IA = DA nên IA = DK.

Tứ giác ADKI có IA = DK và IA // DK (cùng vuông góc với BC)

Suy ra tứ giác ADKI là hình bình hành.

Mặt khác ta có AD = AI nên hình bình hành ADKI là hình thoi.

Bài 3: *Cách 1:* $\widehat{ADC} > \widehat{ABC}$ (vì $\widehat{ADC}$ là góc ngoài của ΔADB) nên trên tia đối của tia DA có điểm E sao cho $\widehat{ABE} = \widehat{ADC}$



Xét hai tam giác ABE, ADC có:

$\widehat{BAE} = \widehat{DAC}$ (AD là tia phân giác)

và ABE = ADC.

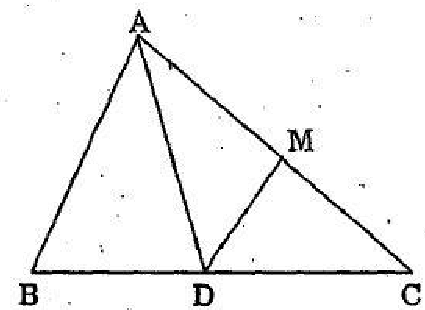
Do đó: $\Delta ABE \backsim \Delta ADC$ (g–g)

Suy ra $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AE}{AC} \Rightarrow AD.AE = AB.AC$

Mà AE > AD

Do đó: $AD^2 < AB.AC$

Cách 2: $\widehat{ADC} > \widehat{ABC}$ (Vì $\widehat{ADC}$ là góc ngoài của $\widehat{ADB}$) nên trên tia AC có điểm M sao cho $\widehat{ADM} = \widehat{ABC}$.



Xét ΔABD và ΔADM có $\widehat{BAD} = \widehat{DAM}$ (AD là phân giác), $\widehat{ABD}$ = ADM.

Do đó $\Delta ABD \backsim \Delta ADM$

Suy ra: $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AM}{AD} \Rightarrow AD^2 = AM.AB$

Mà AM < AC.

Do đo: $AD^2 < AB.AC$

BỘ ĐỀ 67

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN PHÚ NHUẬN, TPHCM NĂM HỌC 2001 – 2002

Bài 1:

1) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $\dfrac{4x^3 - 6x^2 + 8x}{2x - 1}$ có giá trị nguyên.

2) Tìm giá trị của a, b để biểu thức $A = a^2 - 4ab + 5b^2 - 2b + 5$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị đó.

Bài 2: Giải các phương trình sau:

1) $\dfrac{3x-1}{x-1} - \dfrac{2x+5}{x+3} + \dfrac{4}{x^2+2x-3} = 2$

2) $\dfrac{x+1}{2002} + \dfrac{x+2}{2001} + \dfrac{x+3}{2000} = \dfrac{x+4}{1999} + \dfrac{x+5}{1998} + \dfrac{x+6}{1997}$

Bài 3: Trên quãng đường AB dài 72km, hai người khởi hành cùng một lúc từ A để đến B. Vận tốc của người thứ nhất là 12km/h, vận tốc của người thứ hai là 15km/h. Hỏi sau lúc khởi hành bao lâu thì người thứ nhất còn cách B một quãng đường gấp đôi quãng đường từ người thứ hai đến B?

Bài 4: Cho hình vuông ABCD có cạnh là a. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC.

1) Tính theo a diện tích tứ giác AMND.

2) Phân giác của góc $\widehat{CDM}$ cắt BC tại P, chứng minh: DM = AM + CP.

Bài 5: Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^0$, D là một điểm nằm giữa A và C, qua C dựng CE vuông góc với đường thẳng BD tại E. Chứng minh:

1) Tam giác ADE đồng dạng với tam giác BDC.

2) AB.CE + AE.BC = AC.BE

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $\dfrac{4x^3 - 6x^2 + 8x}{2x-1} = \dfrac{4x^3 - 2x^2 - 4x^2 + 2x + 6x - 3 + 3}{2x-1}$

$= \dfrac{2x^2(2x-1) - 2x(2x-1) + 3(2x-1) + 3}{2x-1}$

$= 2x^2 - 2x + 3 + \dfrac{3}{2x-1}$ có giá trị nguyên.

Do đó: $3 \vdots (2x - 1)$

$\Leftrightarrow 2x - 1 \in Ư(3) \Leftrightarrow 2x - 1 \in \{1; -1; 3; -3\}$

$\Leftrightarrow 2x \in \{2; 0; 4; -2\} \Leftrightarrow x \in \{1; 0; 2; -1\}$

2) $A = a^2 - 4ab + 5b^2 - 2b + 5 = (a^2 - 4ab + 4b^2) + (b^2 - 2b + 1) + 4$

$= (a - 2b)^2 + (b - 1)^2 + 4 \geq 4$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (a - 2b)^2 = 0.(b - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow a - 2b = 0$ và $b - 1 = 0$

$\Leftrightarrow a = 2b$ và $b = 1$

$\Leftrightarrow a = 2$ và $b = 1$

Vậy A đạt giá trị nhỏ nhất là 4.

$\Leftrightarrow a = 2$ và $b = 1$.

Bài 2: 1) Ta có: $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

$x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$

$x^2 + 2x - 3 = x^2 - x + 3x - 3 = x(x - 1) + 3(x - 1)$

$= (x - 1)(x + 3) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ và $x \neq -3$

TXĐ: $x \neq 1$, $x \neq -3$

MTC: $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$

Ta có: $\dfrac{3x-1}{x-1} - \dfrac{2x+5}{x+3} + \dfrac{4}{x^2+2x-3} = 2$

$\Leftrightarrow (3x - 1)(x + 3) - (2x + 5)(x - 1) + 4 = 2(x^2 + 2x - 3)$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 9x - x - 3 - 2x^2 + 2x - 5x + 5 + 4 = 2x^2 + 4x - 6$

$\Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 2x^2 + 4x - 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3x - 12 = 0$

$\Leftrightarrow x(x - 4) + 3(x - 4) = 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-4=0 \\ x+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \quad \text{(nhận)} \\ x=-3 \quad \text{(loại vì } -3 \notin \text{TXĐ)} \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình là x = 4.

2) $\frac{x+1}{2002}+\frac{x+2}{2001}+\frac{x+3}{2000}=\frac{x+4}{1999}+\frac{x+5}{1998}+\frac{x+6}{1997}$

$(\frac{x+1}{2002}+1)+(\frac{x+2}{2001}+1)+(\frac{x+3}{2000}+1)$

$=(\frac{x+4}{1999}+1)+(\frac{x+5}{1998}+1)+(\frac{x+6}{1997}+1)$

$\frac{x+2003}{2002}+\frac{x+2003}{2001}+\frac{x+2003}{2000}=\frac{x+2003}{1999}+\frac{x+2003}{1998}+\frac{x+2003}{1997}$

$\frac{x+2003}{2002}+\frac{x+2003}{2001}+\frac{x+2003}{2000}-\frac{x+2003}{1999}-\frac{x+2003}{1998}-\frac{x+2003}{1997}=0$

$(x+2003)(\frac{1}{2002}+\frac{1}{2001}+\frac{1}{2000}-\frac{1}{1999}-\frac{1}{1998}-\frac{1}{1997})=0$

Vì $\frac{1}{2002}<\frac{1}{1999}, \frac{1}{2001}<\frac{1}{1998}, \frac{1}{2000}<\frac{1}{1997}$

Do đó: $\frac{1}{2002}+\frac{1}{2001}+\frac{1}{2000}-\frac{1}{1999}-\frac{1}{1998}-\frac{1}{1997}<0$

Vậy: x + 2003 = 0 ⇔ x = –2003

Nghiệm của phương trình đã cho là –2003.

Bài 3:

Gọi thời gian cần xác định là x (giờ) (điều kiện x > 0)

Quãng đường người thứ nhất đã đi là 12x (km)

Quãng đường người thứ hai đã đi là 15x (km)

Quãng đường người thứ nhất còn cách B là: 72 – 12x (km)

Quãng đường người thứ hai còn cách B là: 72 – 15x (km)

Theo đầu bài ta có phương trình:

72 – 12x = 2(72 – 15x)

72 – 12x = 144 – 30x

30x – 12 = 144 – 72

18x = 72

x = 72 : 18

x = 4

Thỏa điều kiện trên.

Bài 4:

1) Ta có: $S_{AMND} = S_{ABCD} - S_{BMN} - S_{DNC}$

$S_{AMND} = a^2 - \frac{1}{2}BM.BN - \frac{1}{2}DC.NC = a^2 - \frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2} - a.\frac{a}{2}$

$$= a^2 - \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{8}$$

2) Trên tia đối của tia CB lấy điểm Q sao cho CQ = AM

Dễ dàng chứng minh $\Delta ADM = \Delta CDQ$ (g–c–g)

Cho ta $\widehat{CDQ} = \widehat{MDA} = \alpha$

Suy ra $\widehat{ADP} = \widehat{ADM} + \widehat{MDB} = \alpha + \beta$

$\widehat{PDQ} = \widehat{QDC} + \widehat{CDP} = \alpha + \beta$

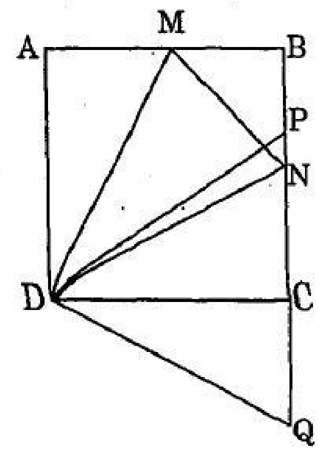
Cho ta $\widehat{AQP} = \widehat{PDQ}$

Dễ dàng chứng minh $\widehat{QPD} = \widehat{ADP}$ (so le trong)

Suy ra $\widehat{QPD} = \widehat{PDQ}$ cho ta PQ = QD;

mà DM = DQ ($\Delta ADM = \Delta DCQ$)

nên DM = PQ = PC + CQ = PC = AM



Bài 5:

1) ΔABD và ΔECD có: $\widehat{BAD} = \widehat{CED} = 90^0$ (gt)

$\widehat{BDA} = \widehat{CDE}$ (hai góc đối đỉnh)

Vậy $\Delta ABD \backsim \Delta ECD$ (g–g)

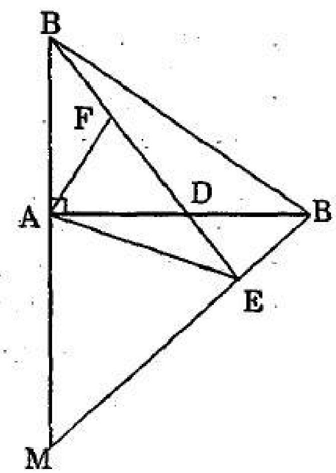
Cho ta $\frac{DA}{DE} = \frac{DB}{DC}$ hay $\frac{DA}{DB} = \frac{DE}{DC}$

ΔADE và ΔBDC có:

ADE = BDC (hai góc đối đỉnh)

$\frac{DA}{DB} = \frac{DE}{DC}$

Vậy $\Delta ADE \backsim \Delta BDC$ (c–g–c)



2) *Cách 1:* Gọi M là giao điểm của AB và CE

Xét hai tam giác MBE và MCA

Ta có: M chung, $\widehat{MEB} = \widehat{MAC} = 90^0$

Vậy $\Delta MBE \backsim \Delta MCA$ (g–g)

Cho ta: $\frac{MB}{ME} = \frac{MC}{MA}$

Xét hai tam giác MAE và tam giác MCB ta có: $\frac{MB}{ME} = \frac{MC}{MA}$, M chung.

Vậy $\Delta MAE = \Delta MBC$ mà $\widehat{MEA} + \widehat{AEB} = 90^0$, $\widehat{MBC} + \widehat{BAC} = 90^0$

Xét hai tam giác ABF và ACE, ta có: $\widehat{BAF} = \widehat{CAE}$; $\widehat{ABF} = \widehat{ACE}$ ($\Delta MBE \backsim \Delta MCA$)

Vậy $\Delta ABF \backsim \Delta ACE$ (g–g)

Cho ta: $\frac{AB}{AC} = \frac{BF}{CE}$ suy ra AB . CE = AC . BF (1)

Xét hai tam giác AEF và ABC. Ta có:

$\widehat{EAF} = \widehat{BAC} = 90^0$, $\widehat{AEF} = \widehat{ACB}$

Vậy $\Delta AEF \backsim \Delta ACB$ (g–g)

Cho ta $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{EF}{BC}$ suy ra AE.BC = AC.EF (2)

Cộng vế theo vế (1) và (2) ta được:

AB.CE + AE.BC = AC.BF + AC.EF

AB.CE + AE.BC = AC.(BF + EF) = AC.BE

Cách 2: Gọi J là điểm trên đoạn thẳng AC sao cho $\widehat{ABJ} = \widehat{EBC}$

Xét ΔABJ và ΔEBC có: $\widehat{ABJ} = \widehat{EBC}$. $\widehat{JAB} = \widehat{CEB}$ ($= 90^0$)

Do đó $\Delta ABJ \backsim \Delta EBC$

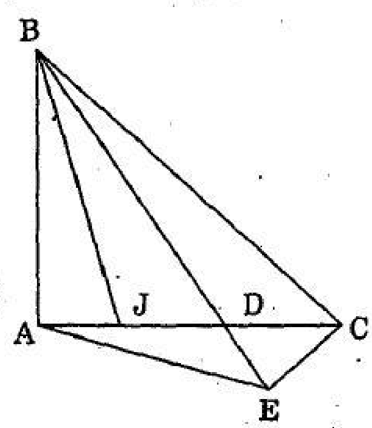
Suy ra $\dfrac{AB}{BE} = \dfrac{AJ}{CE}$

$\Rightarrow$ AB.CE = BE.AJ (1)

ta có: $\widehat{ABJ} + \widehat{JBE} = \widehat{EBC} + \widehat{JBE}$

(vì $\widehat{ABJ} = \widehat{EBC}$)

suy ra $\widehat{ABE} = \widehat{JBC}$



Xét ΔABE và ΔJBC có:

$\widehat{ABE} = \widehat{JBC}$, $\widehat{AEB}$ = JCB (vì $\Delta ADE \backsim \Delta BDC$)

Do đó: $\Delta ABE \backsim \Delta JBC$

Suy ra: $\dfrac{AE}{JC} = \dfrac{BE}{BC}$

Suy ra: AE.BC = BE.JC (2)

Từ (1) và (2) có AB.CE + AE.BC = BE.AJ + BE.JC = BE (AJ + JC) = BE .AC

BỘ ĐỀ 68

ĐỀ THI TUYỂN CHỌN HỌC SINH GIỎI TRƯỜNG THCS HOA LƯ QUẬN 9, TPHCM – NĂM HỌC 2001 – 2002

Bài 1: Tính giá trị của biểu thức $A = \dfrac{x - y}{x + y}$ biết rằng:

$x^2 - 2y^2 = xy$ ($y \neq 0$, $x + y \neq 0$)

Bài 2: Giải phương trình: $\left|2x - |2x - 1|\right| = -m^2x$ với m là tham số.

Bài 3: Cho a, b là hai số thỏa mãn: $2a^2 + \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{b^2}{4} = 4$.

Chứng minh $ab \geq -2$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 4:

1) Cho các số a, b, c $\in [0,1]$.

Chứng minh rằng $a + b^2 + c^3 - ab - bc - ca \le 1$

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

Bài 5: Cho tam giác ABC, gọi D là điểm thuộc cạnh BC. Chứng minh rằng $AB^2.CD + AC^2.BD - AD^2.BC = CD.BD.BC$ (hệ thức Stewart)

– Nếu D là trung điểm BC, hãy tìm hệ thức liên hệ giữa trung tuyến và các cạnh của tam giác.

– Nếu AD là phân giác BAC, hãy tìm hệ thức liên hệ giữa phân giác và các cạnh của tam giác.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: với $y \ne 0$; $x + y \ne 0$

Ta có: $x^2 - 2y^2 = xy \Leftrightarrow x^2 - xy - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + xy - 2xy - 2y^2 = 0$

$\Leftrightarrow x(x + y) - 2y(x + y) = 0 \Leftrightarrow (x + y)(x - 2y) = 0$

$\Leftrightarrow x = 2y$ (vì $x + y \ne 0$)

Do đó: $A = \dfrac{2x - y}{2x + y} = \dfrac{y}{3y} = \dfrac{1}{3}$ (do $y \ne 0$)

Bài 2: Xét phương trình: $\left|2x - |2x - 1|\right| = -m^2x$ (1)

– Nếu m = 0: phương trình (1) có dạng $\left|2x - |2x - 1|\right| = 0$

$\Leftrightarrow 2x - |2x - 1| = 0 \Leftrightarrow |2x - 1| = 2x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} 2x - 1 = 2x \\ 2x - 1 = -2x \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} 0x = 1 \text{ (vô nghiệm)} \\ x = \dfrac{1}{4} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

– Xét trường hợp $m \ne 0$

Do $\left|2x - |2x - 1|\right| \ge 0$ nên $-m^2x \ge 0$ mà $m^2 > 0$ (vì $m \ne 0$)

– Xét phương trình $(4 - m^2)x = 1$

Nếu $m = \pm 2$: phương trình có dạng $0x = -1$, phương trình vô nghiệm

Nếu $m \ne \pm 2$: phương trình có nghiệm $x = \dfrac{1}{4 - m^2}$

Để $x = \dfrac{1}{4 - m^2}$ là nghiệm của phương trình (1) thì:

$x \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4 - m^2} \le 0 \Leftrightarrow 4 - m^2 < 0 \Leftrightarrow m^2 > 4 \Leftrightarrow |m| > 2$

Kết luận:

m = 0 : phương trình có nghiệm $x = \dfrac{1}{4}$

$|m| > 2$: phương trình có nghiệm $x = \dfrac{1}{4 - m^2}$

$m = \pm 2$: phương trình vô nghiệm

Bài 3: Từ $2a^2 + \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{b^2}{4} = 4 \Rightarrow \left(a^2 + \dfrac{1}{a^2} - 2\right) + \left(a^2 + ab + \dfrac{b^2}{4}\right) = ab + 2$

$\Rightarrow ab + 2 = \left(a - \dfrac{1}{a}\right)^2 + \left(a + \dfrac{b}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow ab \geq -2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{a} \\ a + \dfrac{b}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b = -2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$

Bài 4:

1) Do a, b, c $\in [0,1] \Rightarrow (1 - a)(1 - b)(1 - c) \geq 0$

$\Rightarrow 1 + ab + bc + ac - a - b - c - abc \geq 0$

$\Rightarrow a + b + c - ab - bc - ax \leq 1 - abc \leq 1$ (do $abc \geq 0$)

Mặt khác: $0 \leq b \leq 1 \Rightarrow b^2 \leq b$, $0 \leq c \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} c^2 \leq c \\ c^3 \leq c^2 \end{cases} \Rightarrow c^3 \leq c$

Vậy $a + b^2 + c^3 - ab - bc - ac \leq a + b + c - ab - bc - ac \leq 1$

2) ***Nhận xét:*** $A \geq 0$ thì $\min(A^2) = (\min A)^2$

Ta có:

$P = x^4 + 2x^3 + 2x + 1$

$= x^4 + 2x^3 + x^2 + 2(x^2 + x) = (x^2 + x)^2 + 2(x^2 + x) + 1 = (x^2 + x + 1)^2$

Vì $x^2 + x + \dfrac{1}{2} = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} \geq \dfrac{3}{4}$

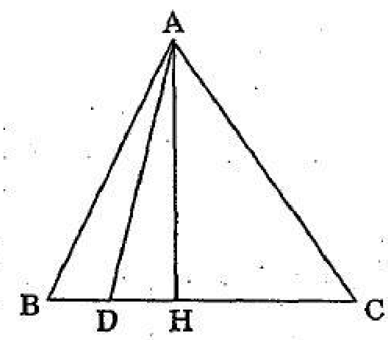
Suy ra: $\min(x^2 + x + 1) = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

Vậy $P = \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{9}{16} \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

Bài 5:

Kẻ $AH \perp BC$. Không mất tính tổng quát, giả sử $D \in [BH]$

Áp dụng định lý Pytago đối với các tam giác vuông ABH, ACH và ADH có:



$AB^2 = BH^2 + AH^2 = (BD + DH)^2 + AH^2$

$AC^2 = CH^2 + AH^2 = (CD - DH)^2 + AH^2$

$AD^2 = AH^2 + DH^2$

Ta có: $AB^2.CD + AC^2.BD - AD^2.BC$

$= (BD + DH)^2.CD + AH^2.CD + (CD - DH)^2.BD$

$+ AH^2BD - AH^2BC - DH^2.BC$

$= BD^2.CD + DH^2.CD + 2BD.DH.CD + CD^2.BD - 2CD.DH.BD$
$+ DH^2.BD + AH^2(CD + BD) - AH^2.BC - DH^2.BC$
$= BD^2.CD + DH^2(CD + BD) + CD^2.BD - DH^2.BC$
$= BD^2.CD + CD^2.BD = BD.CD(CD + BD) = BD.CD.BC$

Nếu AD là đường trung tuyến thì $BD = DC = \dfrac{BC}{2}$. Thay vào hệ thức trên ta được: $AD^2 = \dfrac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4}$

Nếu AD là đường phân giác trong thì:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{AB}{AB + AC} \Rightarrow BD = \frac{AB.BC}{AB + AC}, CD = \frac{AC.BC}{AB + AC}$$

Thay vào hệ thức trên ta được: $AD^2 = \dfrac{AB.AC[(AB + AC)^2 - BC^2]}{(AB + AC)^2}$

BỘ ĐỀ 69

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN 9, TPHCM – NĂM HỌC 2001 – 2002

Bài 1:

1) Phân tích thành nhân tử đa thức sau: $x^2 - 10x + 16$
2) Tìm giá trị nguyên của x để $A \vdots B$. Biết $A = 10x^2 - 7x - 5$ và $B = 2x - 3$

Bài 2:

1) Giải bất phương trình sau: $m^2x + 1 < m - x$
2) Tìm giá trị nhỏ nhất của: $A = \dfrac{5x^2 - 4x + 4}{x^2}$ với $x \neq 0$
3) Tìm giá trị lớn nhất của: $B = \dfrac{4x + 1}{x^2 + 5}$

Bài 3: Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD và DA.

1) Chứng minh: $NQ \leq \dfrac{AB + DC}{2}$
2) Trong trường hợp $NQ = \dfrac{AB + DC}{2}$ thì tứ giác ABCD là hình gì ?

Trong trường hợp này, vẽ đường thẳng song song với AB cắt AD tại E, cắt MP tại O cắt BC tại F. Chứng minh O là trung điểm của EF.

Bài 4: Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh BC lấy điểm M bất kỳ.
Gọi P là giao điểm của hai đường thẳng AM và CD.
Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{AP^2}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $x^2 - 10x + 16 = x^2 - 2x - 8x + 16 = x(x-2) - 8(x-2) = (x-2)(x-8)$

2) Xét: $\dfrac{A}{B} = \dfrac{10x^2 - 7x - 5}{2x-3} = \dfrac{5x(2x-3) + 8x - 5}{2x-3}$

$$= 5x + \frac{4(2x-3)+7}{2x-3} = 5x + 4 + \frac{7}{2x-3}$$

Với $x \in Z$ thì $A \vdots B$ khi $\dfrac{7}{2x-3} \in Z \Rightarrow 7 \vdots (2x-3)$

2x – 3	7	–7	1	–1
2x	10	–4	4	2
x	5	–2	2	1

Vậy $x = 5, -2, 2, -1$ thì $A \vdots B$.

Bài 2:

1) $m^2x + 1 < m - x \Leftrightarrow (m^2+1)x < m - 1$

$\Leftrightarrow x < \dfrac{m-1}{m^2+1}$ (vì $m^2 + 1 > 0$)

2) Ta có: $A = \dfrac{5x^2 - 4x + 4}{x^2} = \dfrac{4x^2 + x^2 - 4x + 4}{x^2} = 4 + \dfrac{(x-2)^2}{x^2} \geq 4\ \forall x \neq 0$

Vì $\begin{cases}(x-2)^2 \geq 0 \\ x^2 > 0 \text{ (do } x \neq 0) \end{cases} \Rightarrow \dfrac{(x-2)^2}{x^2} \geq 0$

$A = 4 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy min $A = 4$

3) $B = \dfrac{4x+1}{x^2+5} = \dfrac{(x^2+5) - x^2 + 4x - 4}{x^2+5} = 1 - \dfrac{(x-2)^2}{x^2+5} \leq 1\ \forall x$

Vì $(x-2)^2 \geq 0$ và $x^2 + 5 > 0 \Rightarrow -\dfrac{(x-2)^2}{x^2+5} \leq 0\ \forall x$

$B = 1 \Leftrightarrow x = 2$. Vậy max $B = 1$.

Bài 3:

1) Xem lời giải bài 5, bộ đề 71

2) Do EF // AB và MA = MB

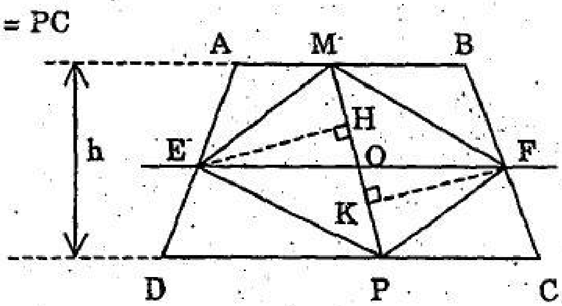
$\Rightarrow S_{AME} = S_{BMF}$, EF // CD và PD = PC

$\Rightarrow S_{PED} = S_{CPF}$

Ta có:

$S_{AMPD} = \dfrac{AM + DP}{2}h$

$= \dfrac{MB + PC}{2}h = S_{MBCP}$



$\Rightarrow S_{EMP} = S_{MFP} \Rightarrow \frac{1}{2}EH.MP = \frac{1}{2}FK.MP \Rightarrow EH = FK$

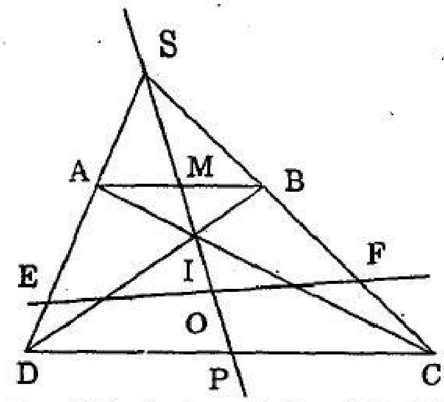
Vậy: $\Delta OEH = \Delta OFK$ ($EH = FK$, $\widehat{H} = \widehat{K} = 90^0$, $\widehat{OEH} = \widehat{OFK}$)

$\Rightarrow OE = OF$

nghĩa là O trung điểm EF.

Cách khác: Dùng bổ đề hình thang

"Đường thẳng nối giao điểm các đường chéo của hình thang với giao điểm của các cạnh bên kéo dài sẽ chia đáy hình thang thành hai phần bằng nhau".



Thật vậy, do AB // CD, ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{AM}{DP} = \dfrac{SM}{SP} = \dfrac{MB}{PC} \\ \dfrac{AM}{PC} = \dfrac{MI}{IP} = \dfrac{MP}{DP} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{AM^2}{DP.PC} = \frac{MB^2}{DP.PC} \Rightarrow AM^2 = MB^2$$

Vậy AM = MB và PD = PC

Áp dụng bổ đề hình thang, nếu gọi S là giao điểm hai cạnh bên AD, BC kéo dài và và $AC \cap BD = \{I\}$ thì S, M, I, P thẳng hàng.

Xét hình thang ABFE có AB // EF, M là trung điểm AB, S là giao điểm hai cạnh bên EA, FB kéo dài. SM đi qua trung điểm của EF, nghĩa là O là trung điểm EF.

Bài 4: Xem lời giải bài 4, bộ đề 71.

BỘ ĐỀ 70

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI TRƯỜNG THCS NGUYỄN DU – QUẬN 1, TPHCM – NĂM HỌC 2001 – 2002

Bài 1: Cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Tính $\frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2}$

Bài 2: Giải phương trình:

1) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

2) $\frac{x+3}{x-4} + \frac{x-1}{x-2} = \frac{2}{6x-8-x^2}$

Bài 3:

1) Chứng minh bất đẳng thức: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$

2) Cho a, b, c là ba số dương. Chứng minh:

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Bài 4: Cho tam giác ABC có trung tuyến AD, và BE vuông góc với nhau tại O. Cho AC = b và BC = a. Tính diện tích hình vuông có cạnh là AB.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: Ta có: $a + b + c = 0$ thì

$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3 = -c^3 - 3ab(-c) + c^3 = 3abc$

(do $a + b + c = 0$ nên $a + b = -c$)

Đặt $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$, $c = \frac{1}{z}$ $(x, y, z \neq 0)$, ta có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$.

Suy ra: $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{3}{xyz}$

Khi ấy: $\frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2} = \frac{xyz}{x^3} + \frac{xyz}{y^3} + \frac{xyz}{z^3}$

$= xyz\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{xyz}{z^3}\right) = xyz\frac{3}{xyz} = 3$

Bài 2:

1) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x + 2) - (x + 2) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Kết luận $S = \{\pm 1, -2\}$

2) ***Nhận xét:*** $6x - 8 - x^2 = -(x^2 - 6x + 8) = -(x - 4)(x - 2)$

Điều kiện: $x \neq 4$, $x \neq 2$

Phương trình đã cho được viết:

$(x + 3)(x - 2) + (x - 1)(x - 4) = -2 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 + x^2 - 5x + 4 + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{(nhận)} \\ x = 2 \text{(loại)} \end{array}\right.$

Kết luận: $S = \{0\}$

Bài 3:

1) Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ac$

$\Leftrightarrow (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ac + a^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$ (đúng)

Vì $(a - b)^2 \geq 0$, $(b - c)^2 \geq 0$ và $(c - a)^2 \geq 0$ $\forall$ a, b, c

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

2) Với $x, y > 0$ ta có bất đẳng thức $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

Thật vậy: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} \geq x^2 + y^2 \geq 2xy$ (do $x, y > 0$)

$\Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$ (đúng)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

Với a, b, c > 0, áp dụng bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}=\frac{1}{c}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\geq\frac{2}{c}$$

$$\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}=\frac{1}{a}\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\geq\frac{2}{a}$$

$$\frac{a}{bc}+\frac{c}{ab}=\frac{1}{b}\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)\geq\frac{2}{b}$$

Cộng vế với các bất đẳng thức cùng chiều ta được:

$$2\left(\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}\right)\geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

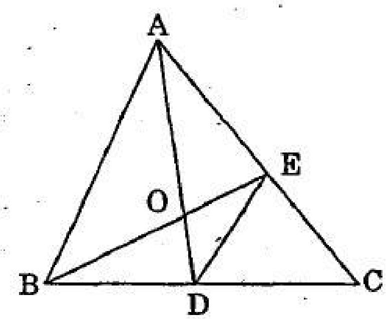
Suy ra: $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}=\frac{c}{ab}\geq\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Bài 4: Vì D, E là trung điểm BC, AC nên O là trọng tâm của tam giác ABC.

Suy ra OB = 2OE và OA = 2OD

Áp dụng định lý Py–ta–go có:



$$\begin{cases} OA^2+OE^2=AE^2=\dfrac{b^2}{4} \\ OB^2+OD^2=BD^2=\dfrac{a^2}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (OA^2+OB^2)+(OE^2+OD^2)=\frac{a^2+b^2}{4}$$

$$\Rightarrow AB^2+\frac{OB^2+OA^2}{4}=\frac{a^2+b^2}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4}AB^2=\frac{a^2+b^2}{4} \Rightarrow AB=\frac{a^2+b^2}{5}$$

Vậy diện tích hình vuông cạnh AB là: $\frac{a^2+b^2}{5}$ (đvdt)

BỘ ĐỀ 71

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN 1, TPHCM – NĂM HỌC 2001 – 2002

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử

1) $4x^2 - 9y^2 + 4x - 6y$ 2) $x^2 - x - 2001.2002$

Bài 2: Cho ba số a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 0$

Chứng minh rằng $a^3 + a^2c - abc + b^2c + b^3 = 0$

Bài 3: Chứng minh: $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 1 \geq 0$ với mọi giá trị của x.

Bài 4: Rút gọn và tính giá trị của biểu thức: $\frac{x^2+4x+4}{x^3+2x^2-4x-8}$ với x = 2002

Bài 5:

1) Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F là trung điểm của AD và BC. Tìm điều kiện của tứ giác để $EF = \frac{AB + CD}{2}$

2) Gọi M, N, P và Q theo thứ tự là trung điểm của DF, EB, AF và EC. Chứng minh tứ giác MNPQ là hình bình hành.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $4x^2 - 9y^2 + 4x - 6y = (2x - 3y)(2x + 3y) + 2(2x - 3y)$
$= (2x - 3y)(2x + 3y + 2)$

2) $x^2 - x - 2001.2002 = x^2 - 2002x + 2001x - 2001.2002$
$= x(x - 2002) + 2001(x - 2002) = (x + 2001)(x - 2002)$

Cách khác:

$x^2 - x - 2001.2002 = x^2 - x - (2002 - 1)2002$
$= (x^2 - 2002^2) - (x - 2002) = (x - 2002)(x + 2002) - (x - 2002)$
$= (x - 2002)(x + 2001)$

Bài 2: Ta có:

$a^3 + a^2c - abc + b^2c + b^3 = a^3 + b^3 + c(a^2 - ab + b^2)$
$= (a + b)(a^2 - ab + b^2) + c(a^2 - ab + b^2)$
$= (a^2 - ab + b^2)(a + b + c) = 0$ (do $a + b + c = 0$)

Bài 3:

$(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 1 = (x + 1)(x + 4)(x + 2)(x + 3) + 1$
$= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) + 1$
$= (x^2 + 5x + 5 - 1)(x^2 + 5x + 5 + 1) + 1 = (x^2 + 5x + 5)^2 - 1 + 1$
$= (x^2 + 5x + 5)^2 \geq 0 \ \forall x$

Bài 4: Với $x \neq \pm 2$, ta có:

$$A = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8} = \frac{(x+2)^2}{x^2(x+2) - 4(x+2)}$$

$$= \frac{(x+2)^2}{(x^2 - 4)(x+2)} = \frac{(x+2)^2}{(x-2)(x+2)^2} = \frac{1}{x-2}$$

Tại $x = 2002$ thì $A = \frac{1}{2000}$

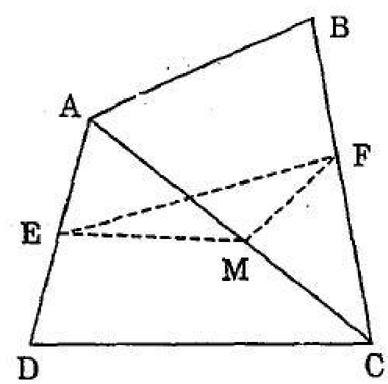
Bài 5:

1) Gọi M là trung điểm AC, do E, F lần lượt là trung điểm AD, BC $\Rightarrow$ MF, ME là đường trung bình của tam giác ABC và tam giác CAD, nên $ME // DC$, $ME = \frac{DC}{2}$ và $MF // AB$, $MF = \frac{AB}{2}$

Suy ra: $ME + MF = \frac{AB + CD}{2}$

Mà $EF \le ME + MF \Rightarrow EF \le \frac{AB + CD}{2}$

Theo giả thiết $EF = \frac{AB + CD}{2}$



$\Rightarrow$ E, M, F thẳng hàng.

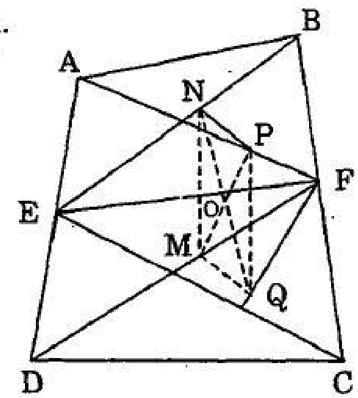
AB, và CD cùng song song với đường thẳng ấy nên AB // CD. Vậy tứ giác ABCD là hình thang.

2) Ta có E, P là trung điểm AD, AF nên EP là đường trung bình của tam giác ADF.

$\Rightarrow EP // DF$ và $EP = \frac{DF}{2} = MF$ (vì K là trung điểm DF)

Vậy EPFM là hình bình hành.

Lý luận tương tự, ENFQ là hình bình hành.



EPFM là hình bình hành $\Rightarrow$ MP và EF cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

ENFQ là hình bình hành $\Rightarrow$ NQ và EF cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Vậy MP, EF và NQ có chung trung điểm, hay MP và NQ cắt nhau tại trung điểm mỗi đường. Do đó MNPQ là hình bình hành.

BỘ ĐỀ 72

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TRUYỀN THỐNG 26/3 QUẬN 10, TPHCM NĂM HỌC 2001 – 2002

Bài 1: Giải phương trình

1) $x + \frac{1}{x} = 0$ 2) $x + \frac{1}{x} = 2$

Bài 2: Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

$A = 3x^2 + 2x + 1$ $B = x - x^2$

Bài 3:

1) Chứng minh rằng: $(a^3 + 11a - 6a^2 - 6) \vdots 6$ với $a \in Z$

2) Chứng minh rằng tổng lập phương ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 9.

Bài 4: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

1) $a + b \ge \frac{12ab}{9 + ab}$ với $a > 0; b > 0$

2) $(a + b - c)(b + c - c) \le abc$ với a, b, c là số đo ba cạnh của một tam giác.

Bài 5: Cho tam giác ABC cân tại A, vẽ đường phân giác AH. Gọi I là trung điểm của AB, đường vuông góc với AB ở I cắt AH tại O. Dựng M là điểm sao cho O là trung điểm AM.

1) Chứng minh tứ giác IOMB là hình thang vuông.

2) Gọi K là trung điểm OM. Chứng minh tam giác IKB cân.

3) Chứng minh tứ giác AIKC có tổng các góc đối bằng 180^0.

Bài 6: Cho tam giác ABC nhọn, kẻ ba đường cao AD, BE và CF.

Chứng minh:

1) $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$ 2) EB là phân giác $\widehat{FED}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $x + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing$. Phương trình vô nghiệm

2) $x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 + 1 = 2x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 + 1 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

Bài 2:

Ta có: $A = 3x^2 + 2x + 1 = 3(x^2 + 2\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}) + \frac{2}{3} = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2}{3} \geq \frac{2}{3}$

Vì $3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0\ \forall x$

$A = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$. Vậy min $A = \frac{2}{3}$

$B = x - x^2 = -\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}, \forall x$

Vì $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0, \forall x$

$B = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Vậy max $B = \frac{1}{4}$

Bài 3: 1) Với $a \in Z$, ta có:

$a^3 + 11a - 6a^2 = a^3 - a^2 - 5a^2 + 5a + 6a - 6$

$= a^2(a - 1) - 5a(a - 1) + 6(a - 1) = (a - 1)(a^2 - 5a + 6)$

$= (a - 1)[(a^2 - 4) + (10 - 5a)] = (a - 1)[(a - 2)(a + 2) - 5(a - 2)]$

$= (a - 1)(a - 2)(a - 3) \vdots 6$ với $a \in Z$.

Vì $a \in Z$ do đó $(a - 1)$, $(a - 2)$ và $(a - 3)$ là ba số nguyên liên tiếp.

Trong hai số nguyên liên tiếp, có một số chia hết cho 2; trong ba số nguyên liên tiếp có một số chia hết cho 3 mà (2,3) = 1; 2; 3 = 6, nên tích ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 6.

2) *Cách 1:* Xét ba số nguyên liên tiếp: n, n + 1 và n + 2 $n \in Z$

Ta có:

$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + n^3 + 6n^2 + 12n + 8$

$= 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9 = 3n^3 - 3n + 9(n^2 + 2n + 1)$

$= 3n(n-1)(n+1) + 9(n+1)^2 \vdots 9$

Vì $\begin{cases} 9(n+1)^2 \vdots 9, n \in Z \\ 3(n-1)n(n+1) \vdots 9 \end{cases} \Rightarrow 3n(n-1)(n+1) + 9(n+1)^2 \vdots 9$

Cách 2: Gọi ba số nguyên liên tiếp là n − 1, n, n + 1

Ta có: $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$

$= n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1$

$= 3n^3 + 6n = 3n^3 - 3n + 9n = 3n(n^2 - 1) + 9n$

$= 3n(n+1)(n-1) + 9n \vdots 9$ (vì $n(n+1)(n-1) \vdots 9$ và $9n \vdots 9$)

Bài 4: 1) Với a, b > 0 ta có:

$a + b \geq \dfrac{12ab}{9+ab} \Leftrightarrow (a+b)(9+ab) \geq 12ab$ (do $9 + ab \geq 0$)

$\Leftrightarrow 9a + 9b + a^2b + ab^2 - 12ab \geq 0$

$\Leftrightarrow (a^2b - 6ab + 9b) + (ab^2 - 6ab + 9a) \geq 0 \Leftrightarrow b(a-3)^2 + a(b-3)^2 \geq 0$

Vì $b(a-3)^2 \geq$ và $a(b-3)^2 \geq 0$, với a, b > 0

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = 3$

2) *Cách 1:* Với a, b, c là số đo ba cạnh tam giác, ta có:

$a^2 \geq a^2 - (b-c)^2 = (a+b+c)(a-b+c) > 0$ (vì $a > |b-c|$)

$b^2 \geq b^2 - (c-a)^2 = (b+c-a)(b-c+a) > 0$

$c^2 \geq c^2 - (a-b)^2 = (c+a-b)(c-a+b) > 0$

Nhân vế với vế các bất đẳng thức dương cùng chiều ta được:

$(abc)^2 \geq (a+b-c)^2(a+c-b)^2(b+c-a)^2$

$\Rightarrow abc \geq (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$

(vì a, b, c là số đo ba cạnh tam giác nên a + b > c, b + c > a và a + c > b)

Cách 2: Đặt $x = a + b - c > 0$, $y = a + c - b > 0$ và $z = b + c - a > 0$

Suy ra: $a = \dfrac{x+y}{2}$; $b = \dfrac{x+z}{2}$; $c = \dfrac{y+z}{2}$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

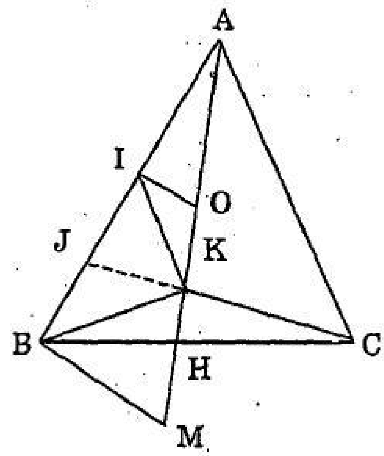
$xyz \leq \dfrac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8} \Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$ (đúng)

Ta có: $\begin{cases} (x+y)^2 \geq 4xy > 0 \\ (y+z)^2 \geq 4yz > 0 \\ (x+z)^2 \geq 4xz > 0 \end{cases} \Rightarrow (x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2 \geq (8xyz)^2$

Do đó: $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$

Bài 5:

1) Ta có: MO = OA, IA = IB (gt) nên IO là đường trung bình của tam giác ABM $\Rightarrow$ OI // MB



Mà AB $\perp$ OI (gt) nên AB $\perp$ MB

Tứ giác CIBM có: OI // MB và IB $\perp$ OI

Suy ra OIBM là hình thang vuông.

2) Gọi J là trung điểm BI suy ra JK là đường trung bình của hình thang OIBM

$\Rightarrow$ JK // OI mà BI $\perp$ OI nên JK $\perp$ BI.

Vậy KJ là trung trực BI, K $\in$ KJ

$\Rightarrow$ KI = KB $\Rightarrow$ ΔKBI cân tại K

3) Do ΔBKI cân tại K nên $\widehat{KBI} = \widehat{BIK}$.

Trong ΔABC cân tại A, AH là đường phân giác, suy ra AH là trục đối xứng.

$\Rightarrow \widehat{ABK} = \widehat{ACK}$

Vậy $\widehat{BIK} = \widehat{ACK}$

Ta có: $\widehat{AIK} + \widehat{ACK} = \widehat{AIK} + \widehat{BIK} = 180^0$ (hai góc kề bù)

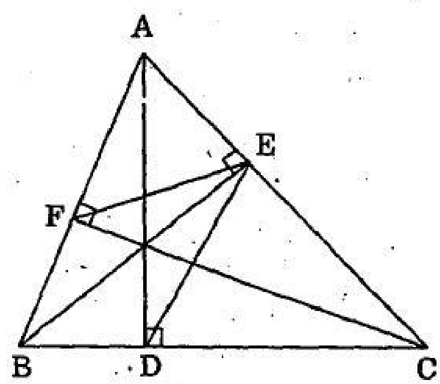
$\Rightarrow \widehat{IAC} + \widehat{IKC} = 180^0$

Bài 6:

1) Xét ΔAEB và ΔAFC có $\widehat{A}$ chung, $\widehat{AEB} = \widehat{AFE} = 90^0$

$\Rightarrow \Delta AEB \backsim \Delta AFC$ (g–g)

$\Rightarrow \dfrac{AE}{AF} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$



Xét ΔAEF và ΔABC có:

$\widehat{A}$ chung và $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$

(chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta AEF \backsim \Delta ABC$ (g–g)

$\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ABC}$

2) Lý luận tương tự ta có:

$\Delta CED \backsim \Delta CBA$ (g–g) $\Rightarrow \widehat{CED} = \widehat{ABC}$

Suy ra $\widehat{AEF} = \widehat{CED} = \widehat{ABC}$

Ta có: $\widehat{FEB} = 90^0 - \widehat{AEF} = 90^0 - \widehat{CED} = \widehat{BED}$

Mà tia EB nằm giữa hai tia EF, ED $\Rightarrow$ EB phân giác $\widehat{FED}$.

BỘ ĐỀ 73

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN 8 TRƯỜNG THCS HOÀNG VĂN THỤ, QUẬN 10, TPHCM – NĂM HỌC 2001 – 2002

Bài 1: Giải phương trình và bất phương trình sau:

1) $|x-1| + |x-5| = 4$ 2) $\dfrac{(x-1)(x-3)}{x^2+2x+3} \le 1$

Bài 2: Chứng minh rằng:

1) $x^2 + 4y^2 + z^2 + 14 \ge 2x + 12y + 4z$ với mọi x, y, z

2) Với a, b, c là ba số dương: $\dfrac{bc}{a} + \dfrac{ac}{b} + \dfrac{ab}{c} \ge a + b + c$

Bài 3:

1) Tìm giá trị nhỏ nhất của $y = x^2 + x + 3$

2) Tìm giá trị lớn nhất của $y = -\big||x|-1\big| + 5$

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông tại A có độ dài cạnh huyền bằng 2 (đơn vị). Gọi AM, BN và CP là trung tuyến của tam giác.

1) Tính: $AM^2 + BN^2 + CP^2$

2) Chứng minh rằng: $4 < AM + BN + CP < 5$

Bài 5: Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia BA và CA lấy hai điểm di động M và N sao cho BM = CN. Gọi I là trung điểm của MN. Điểm I di động trên đường nào?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: *Cách 1:* Áp dụng bất đẳng thức: $|A| + |B| \ge |A+B|$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A.B \ge 0$

Thật vậy, do cả hai vế không âm bình phương cả hai vế ta được:

$(|A| + |B|)^2 \ge |A+B|^2 \Leftrightarrow A^2 + 2|AB| + B^2 \ge A^2 + 2AB + B^2 \Leftrightarrow |AB| \ge AB$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow A.B \ge 0$

Áp dụng ta được $|x-1| + |x-5| = |x-1| + |5-x| \ge |x-1+5-x| = 4$ (1)

Để có đẳng thức (1) $\Leftrightarrow (x-1)(5-x) \ge 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \ge 0 \\ 5-x \ge 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x-1 \le 0 \\ 5-x \le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 1 \le x \le 5$ hoặc $\begin{cases} x \le 1 \text{ (vô nghiệm - loại)} \\ x \ge 5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 1 \le x \le 5$

Vậy nghiệm của phương trình là $1 \le x \le 5$

Cách 2: Xét phương trình: $|x-1| + |x-5| = 4$ (1)

Xét các khả năng sau:

a/ Với $x < 1$: phương trình (1)

$\Leftrightarrow 1 - x + 5 - x = 4 \Leftrightarrow -2x + 6 = 4 \Leftrightarrow x = 1$ (loại)

b/ Với $1 \le x \le 5$: phương trình (1)

$\Leftrightarrow 1 - x + 5 - 4 - 4 \Leftrightarrow 0x + 4 = 4 \Leftrightarrow 0x = 0$, x tùy ý thỏa $1 \le x \le 5$.

c/ Với $x > 5$: phương trình (1)

$\Leftrightarrow x - 1 + x - 5 = 4 \Leftrightarrow 2x - 6 = 4 \Leftrightarrow x = 5$ (loại)

Kết luận: Nghiệm của phương trình là $1 \le x \le 5$

Cách 3: Vận dụng $|A| \ge A$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow A \ge 0$

Ta có $|x-1| + |x-5| = |x-1| + |5-x| \ge x - 1 + 5 - x = 4$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \ge 0 \\ 5-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ x \ge 5 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le x \le 5$

Nghiệm của phương trình là $1 \le x \le 5$

2) ***Nhận xét:*** $x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2 > 0$ với mọi x

Ta có: $\dfrac{(x-1)(x-3)}{x^2+2x+3} \le 1$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 3) \le x^2 + 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \le x^2 + 2x + 3$

$\Leftrightarrow 6x \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 0$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \ge 0$

Bài 2: 1) Với mọi x, y, z ta có:

$x^2 + 4y^2 + z^2 + 14 \ge 2x + 12y + 4z$

$\Leftrightarrow x^2 + 4y^2 + z^2 - 2x - 12y - 4z + 14 \ge 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (4y^2 - 12y + 9) + (z^2 - 4z + 4) \ge 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (2y - 3)^2 + (z - 2)^2 \ge$ (đúng)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ 2y-3=0 \\ z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{3}{2} \\ z=2 \end{cases}$

2) *Cách 1:* Ta có: $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x} \ge 2 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+y^2}{xy} \ge 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \ge 2xy$ (do $x, y > 0$)

$\Leftrightarrow (x - y)^2 \ge 0$ (đúng)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$

Áp dụng bất đẳng thức trên, ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{bc}{a}+\dfrac{ac}{b} = c\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right) \ge 2c \text{ với } a, b, c > 0 \\ \dfrac{ac}{b}+\dfrac{ab}{c} = a\left(\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{c}\right) \ge 2a \\ \dfrac{bc}{a}+\dfrac{ab}{c} = b\left(\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}\right) \ge 2b \end{cases}$$

Suy ra: $2\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right) \geq 2(a+b+c) \Leftrightarrow \frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c} \geq a+b+c$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c > 0$

Cách 2: với a, b, c dương ta có:

$\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c} \geq a+b+c \Leftrightarrow \frac{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}{abc} \geq a+b+c$

$\Leftrightarrow b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2 \geq abc(a+b+c)$ (do a, b, c > 0)

$\Leftrightarrow 2b^2c^2 + 2a^2c^2 + 2a^2b^2 \geq 2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2$

$\Leftrightarrow (a^2b^2 - 2ab^2c + b^2c^2) + (b^2c^2 - 2abc^2 + a^2c^2) + (a^2c^2 - 2a^2bc + a^2b^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow (ab - bc)^2 + (bc - ac)^2 + (ac - ab)^2 \geq 0$ (đúng)

Vì $(ab - bc)^2 \geq 0$; $(bc - ac)^2 \geq 0$; $(ac - ab)^2 \geq 0$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a, b, c > 0 \\ ab = bc = ac \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c > 0$

Bài 3:

1) Ta có: $y = x^2 + x + 3 = x^2 + 2\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{11}{4} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \geq \frac{11}{4}$

vì $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \geq \frac{11}{4}$ với mọi x

$y = \frac{11}{4} \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

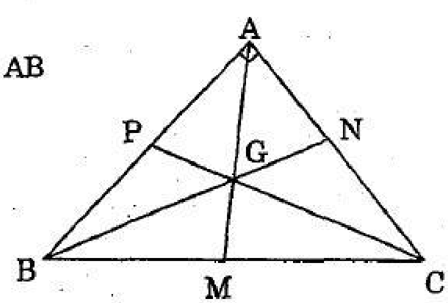
Vậy min $y = \frac{11}{4}$

2) Với mọi x, ta có: $\left||x|-1\right| \geq 0 \Rightarrow -\left||x|-1\right| \leq 0 \Rightarrow y = -\left||x|-1\right| + 5 \leq 5$

$y = 5 \Leftrightarrow |x| - 1 = 0 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Vậy max y = 5

Bài 4:



1) Theo giả thiết N, P là trung điểm AC, AB nên $AN = \frac{AC}{2}$ và $AP = \frac{AB}{2}$

Tam giác ABC vuông tại A, AM là trung tuyến với cạnh huyền nên $AM = \frac{BC}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Gọi G là giao điểm ba trung tuyến, ta có:

$\begin{cases} BN^2 = AB^2 + AN^2 = AB^2 + \frac{AC^2}{4} \text{ (định lý Pytago đối với vuông } \Delta ABN) \\ CP^2 = AC^2 + AP^2 = AC^2 + \frac{AB^2}{4} \text{ (định lý Pytago đối với vuông } \Delta ACP) \end{cases}$

$\Rightarrow BN^2 + CP^2 = \frac{5}{4}(AB^2 + AC^2) = \frac{5}{4}BC^2 = \frac{5}{4}.4 = 5$

Vậy $AM^2 + BN^2 + CP^2 = 1 + 5 = 6$

2) Chứng minh $4 < AM + BN + CP < 5$

Áp dụng tính chất trọng tâm tam giác, ta có:

$BN = \frac{3}{2}$ BG và $CP = \frac{3}{2}$ CG

Suy ra: $BN + CP = \frac{3}{2}(BG + CG) > BC$

(bất đẳng thức trong tam giác BGC)

$\Rightarrow BN + CP > \frac{3}{2}.2 = 3 \Rightarrow AM + BN + CP > 1 + 3 = 4$

Ta có: $(AM - BN)^2 \geq 0 \Rightarrow AM^2 + BN^2 - 2AM.BN \geq 0$

$\Rightarrow AM^2 + BN^2 \geq 2AM.BN$

Lý luận tương tự:

$AM^2 + CP^2 \geq 2AM.CP$

$BN^2 + CP^2 \geq 2BN.CP$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức cùng chiều ta được:

$2(AM^2 + BN^2 + CP^2) \geq 2AM.BN + 2BN.CP + 2AM.CP$

$\Rightarrow 3(AM^2 + BN^2 + CP^2) \geq AM^2 + BN^2 + CP^2 + 2(AM.BN + BN.CP + AM.CP)$

$\Rightarrow 3(AM^2 + BN^2 + CP^2) \geq (AM + BN + CP)^2$

Mà $AM^2 + BN^2 + CP^2 = 6$ (Kết quả câu 1)

Vậy: $(AM + BN + CP)^2 \leq 3.6 = 18 < 25 \Rightarrow AM + BN + CP < 5$

Kết luận $4 < AM + BN + CP < 5$

Chú ý: Có thể trình bày bằng cách chứng minh $AM + BN + CP < 5$ như sau:

Tam giác BMN có: $BN < MN + BM$

$\Rightarrow BN < \frac{AB + BC}{2}$

Tương tự ta có: $CP < \frac{AB + BC}{2}$

Mà $AM = \frac{BC}{2}$, $AB < BC$, $AC < BC$

Do đó: $AM + BN + CP < \frac{BC}{2} + \frac{BC + BC}{2} + \frac{BC + BC}{2}$

$AM + BN + CP < \frac{2}{2} + \frac{2+2}{2} + \frac{2+2}{2} = 5$

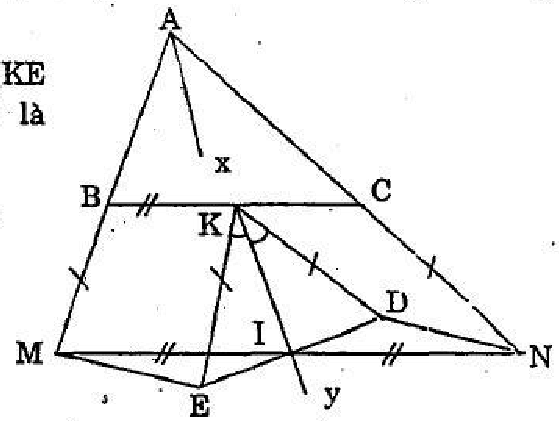
Bài 5: *Cách 1:* Gọi K là trung điểm BC. Dựng hình bình hành BKEM suy ra BK // ME và BK = ME.

Dựng hình bình hành KCND suy ra CK // DN và CK = DN

Mà BK = CK

Suy ra ME = DN và ME // DN

Vậy MEND là hình bình hành, do đó hai đường chéo MN và ED cắt nhau tại trung điểm mỗi đường, mà I là trung điểm MN nên I cũng là trung điểm ED.



Dễ thấy tam giác KED cân tại K (KE = BM = CN = KD). Suy ra KI là phân giác của $\widehat{EKD}$.

Dễ thấy $\widehat{BAC} = \widehat{EKD}$ nên KI // Ax là tia phân giác BAC.

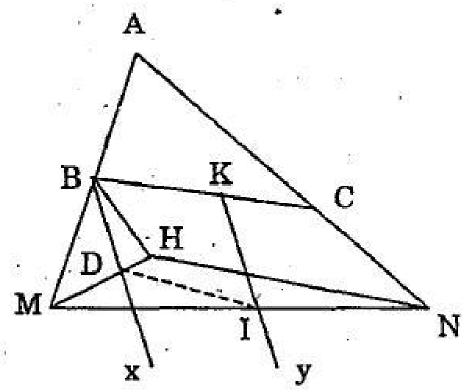
Do K cố định suy ra thuộc tia Ky // Ax.

Vậy I thuộc tia Ky cố định.

Cách 2: Gọi K là trung điểm điểm BC. Dựng hình bình hành BCNH suy ra CN = BH = BM. Gọi D là trung điểm MH. Vậy tam giác BMH cân tại B, có BD là trung tuyến nên cũng là phân giác.

Do D, I là trung điểm MH, NH nên DI là đường trung bình tam giác MHN.

$\Rightarrow$ DI// NH, $DI = \dfrac{NH}{2}$



Mà BK // NH và $BK = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{NH}{2}$

(cạnh đối hình bình hành)

Vậy BK//DI và BK = DI suy ra BKID là hình bình hành.

Suy ra: KI//BD mà $\widehat{MBH} = \widehat{BAC}$ (không đổi) và tia BH//AC (cố định) nên BD là phân giác góc $\widehat{MBH}$ cố định.

Do K cố định suy ra I thuộc tia Ky//Bx

Chú ý: Ở bài toán 4 ta có: $AM^2 + BN^2 + CP^2 = 6$

Mà $\dfrac{3}{4}(AB^2 + AC^2 + BC^2) = \dfrac{3}{4}(BC^2 + BC^2) = \dfrac{3}{2}BC^2 = \dfrac{3}{2}.4 = 6$

Suy ra: $AM^2 + BN^2 + CP^2 = \dfrac{3}{4}(AB^2 + AC^2 + BC^2)$

Từ đây cho ta nghĩ đến bài toán:

"Chứng minh rằng tổng các bình phương độ dài các đường trung tuyến của một tam giác vuông bằng 75% tổng các bình phương độ dài các cạnh của nó."

BỘ ĐỀ 74

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 8 TRƯỜNG THCS NGUYỄN DU QUẬN 1 – TP.HCM NĂM 2002 – 2003

(VÒNG 1)

Bài 1: Cho $a - b = 100$

Tính giá trị của biểu thức:

$a^2(a + 1) - b^2(b - 1) + ab - 3ab(a - b + 1)$

Bài 2: Cho $a + b - c = 0$

Chứng minh $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4)$

Bài 3: Chứng minh

a/ $4x^2 + 4xy + 4y^2 - 6y + 4 > 0$ với mọi x, y

b/ $a^6 + 1 \geq a^2 (a^2 + 1)$

Bài 4: Giải phương trình:

a/ $2|x| - |x - 1| + 2 = 0$ b/ $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \dfrac{3}{1 - x^2}$

Bài 5: Cho tam giác ABC vuông tại A có BC cố định, đường cao AH. Gọi D là hình chiếu của H trên AC. E là hình chiếu của H trên AB.

Chứng minh: hình chữ nhật ADHE có diện tích lớn nhất khi tam giác ABC vuông cân.

Bài 6: Cho tam giác ABC, lấy điểm D bất kì thuộc cạnh BC không trùng với B, C. Từ C và B kẻ hai tia Cx và By (thuộc cùng nửa mặt phẳng chứa điểm A, bờ là đường thẳng BC) song song với AD chúng cắt BA, CA theo thứ tự tại E và F.

a/ Chứng minh: $\dfrac{1}{AD} = \dfrac{1}{BF} + \dfrac{1}{CE}$.

b/ Tìm vị trí của D để BCEF là hình bình hành.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

Với $a - b = 100$, ta có:

$a^2(a + 1) - b^2(b - 1) + ab - 3ab(a - b + 1)$

$= a^3 + a^2 - b^3 + b^2 + ab - 3a^2b + 3ab^2 - 3ab$

$= (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^2) + (a^2 - 2ab + b^2)$

$= (a - b)^3 + (a - b)^2 = 100^3 + 10^2 = 1000000 + 10000 = 1010000$

Bài 2:

Với $a + b - c = 0$

Suy ra $0 = (a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ac$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2(bc + ac - ab)$

$\Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^2 = 4(b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2 + 2abc^2 - 2ab^2c - 2a^2bc)$

$\Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^2 = 4[b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2 - 2abc(a + b - c)]$

$\Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^2 = 4(b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2)$ (vì $a + b - c = 0$) (1)

Ta có: $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + b^2c^2)$

$= a^4 + b^4 + c^4 + 2.\dfrac{(a^2 + b^2 + c^2)}{4}$ (do (1))

Suy ra: $2(a^2 + b^2 + c^2) = 2(a^4 + b^4 + c^4) + (a^2 + b^2 + c^2)^2$

Vậy $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4)$ (đpcm)

Bài 3:

a/ Với mọi x, y ta có:

$4x^2 + 4xy + 4y^2 - 6y + 4 > 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 4xy + y^2 + 3y^2 - 6y + 3 + 1 > 0$

$\Leftrightarrow (4x + y)^2 + 3(y - 1)^2 + 1 > 0$ (đúng)

Vì $(2x + y)^2 \geq 0$ và $3(y - 1)^2 \geq 0\ \forall x, y$.

b/ $a^6 + 1 \geq a^2(a^2 + 1) \Leftrightarrow (a^2 + 1)(a^4 - a^2 + 1) - a^2(a^2 + 1) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a^2 + 1)(a^4 - a^2 + 1 - a^2) \geq 0 \quad \Leftrightarrow (a^2 + 1)(a^2 - 1)^2 \geq 0$ (đúng)

Vì $(a^2 + 1) > 0$ và $(a^2 - 1)^2 \geq 0\ \forall a$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$

Bài 4:

a/ Xét các trường hợp sau:

- Với $x < 0$ thì $|x| = -x$ và $|x - 1| = -(x - 1)$

  Phương trình đã cho có dạng: $-2x + x - 1 + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 > 0$ (loại)

- Với $x \leq x \leq 1$ thì $|x| = x$ và $|x - 1| = -(x - 1)$

  Phương trình đã cho có dạng: $2x + x - 1 + 2 = 0 \Leftrightarrow 3x = -1$

  $\Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{3} < 0$ (loại)

- Với $x > 0$ thì $|x| = x$ và $|x - 1| = x - 1$

  Phương trình đã cho có dạng: $2x - (x - 1) + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -3 < 0$ (loại)

Kết hợp ba trường hợp trên, phương trình đã cho vô nghiệm.

b/ Ta có: $x^3 - x^2 - x + 1 = x^2(x - 1) - (x - 1) = (x^2 - 1)(x - 1)$

$= (x - 1)^2(x + 1)$

Điều kiện: $x \neq \pm 1$

Phương trình đã cho trở thành:

$(x - 1)^2 + 2 = -3(x - 1) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = -3x + 3 \Leftrightarrow x^2 + x = 0$

$\Leftrightarrow x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in \text{TXĐ} \\ x = -1 \notin \text{TXĐ} \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 0$.

Bài 5: *Cách 1:* Tứ giác AEHD là hình chữ nhật

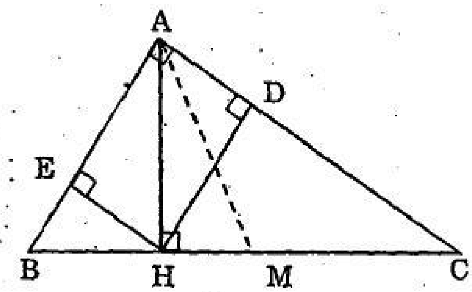
($\widehat{A} = \widehat{E} = \widehat{D} = 90^0$) $S_{AEHD} = 2S_{AEH}$

Xét ΔEAH và ΔACB có:

$\widehat{E} = \widehat{A} = 90^0$, $\widehat{EAH} = \widehat{ACB}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$\Rightarrow \Delta EAH \backsim \Delta ACB$ (g–g) $\Rightarrow \dfrac{S_{EAH}}{S_{ABC}} = \left(\dfrac{AH}{BC}\right)^2$ (1)

Gọi M là trung điểm BC, do ΔABC vuông tại A nên $AM = \dfrac{BC}{2}$.



Ta có: $AH \le AM = \dfrac{BC}{2} \Rightarrow \dfrac{AH}{BC} \le \dfrac{1}{2}$

Từ (1) cho $\dfrac{S_{EAH}}{S_{ABC}} \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow S_{EAH} \le \dfrac{1}{4} S_{ABC} \Rightarrow \dfrac{S_{EAHD}}{2} \le \dfrac{1}{4} S_{ABC}$

$\Rightarrow S_{EAHD} \le \dfrac{1}{2} S_{ABC} = \dfrac{1}{4} BC \,.\, AH \le \dfrac{1}{4} BC \,.\, AM = \dfrac{BC^2}{8}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi: $AM = \dfrac{1}{2} BC \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A.

Cách 2: Tứ giác AEHD là hình chữ nhật $\Rightarrow S_{AEHD} = AE \,.\, EH$

ΔAEH vuông tại E, theo định lí Py–ta–go có: $AE^2 + EH^2 = AH^2$

Vẽ AM là đường trung tuyến của tam giác ABC $\Rightarrow AM = \dfrac{BC}{2}$

Ta có: $AH \le AM$ (vì $AH \perp HM$)

Do đó $(AE - EH)^2 \ge 0 \Rightarrow EA \,.\, EH \le \dfrac{AE^2 + EH^2}{2}$

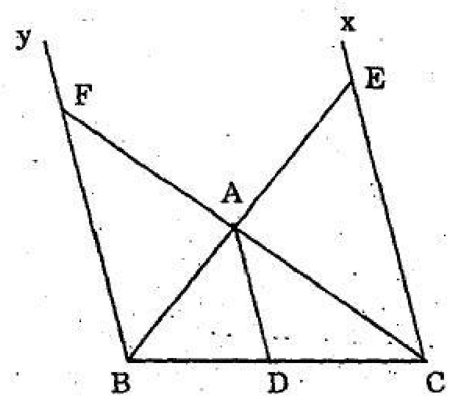
nên $S_{AEHD} \le \dfrac{AH^2}{2} \le \dfrac{BC^2}{8}$

$S_{AEHD} \le \dfrac{BC^2}{8}$; $\dfrac{BC^2}{8}$ không đổi

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow AE = EH, H \equiv M \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A.

Bài 6:

a/ $\dfrac{1}{AD} = \dfrac{1}{BF} = \dfrac{1}{CE}$



Áp dụng hệ quả định lý Ta Lét, ta có:

AD // CE: $\dfrac{AD}{CE} = \dfrac{BD}{BC}$

AD // BF: $\dfrac{AD}{BF} = \dfrac{CD}{BC}$

$\Rightarrow \dfrac{AD}{CE} + \dfrac{AD}{BF} = \dfrac{BD + CD}{BC} = \dfrac{BC}{BC} = 1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{CE} + \dfrac{1}{BF} + \dfrac{1}{AB}$

b/ Tìm vị trí D để BCEF là hình bình hành. Vì BF // CE (vì cùng song song với AD)

BCEF là hình bình hành $\Leftrightarrow$ BF = CE

$\Leftrightarrow \dfrac{AD}{BF} = \dfrac{AD}{CE} \Leftrightarrow \dfrac{CD}{BC} = \dfrac{BD}{BC} \Leftrightarrow CD = BD$

$\Leftrightarrow$ D là trung điểm BC.

BỘ ĐỀ 75

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 8 TRƯỜNG THCS NGUYỄN DU QUẬN 1 – TP.HCM NĂM 2002 – 2003

(VÒNG 2)

Bài 1:

Cho a và b là hai số dương. Chứng minh rằng: $\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} \le \sqrt{ab}$

Bài 2: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$

Bài 3: Giải phương trình: $x^2 + x - \dfrac{7}{x^2+x+1} = 5$

Bài 4: Cho biểu thức $A = \dfrac{n^3+2n^2-1}{n^3+2n^2+2n+1}$

a/ Rút gọn A.

b/ Tìm tất cả số nguyên n để A nhận giá trị nguyên.

Bài 5: Cho hình vuông ABCD cạnh là a, lấy điểm I trên cạnh AB. Đường thẳng DI cắt đường thẳng BC tại E. Đường thẳng CI cắt đường thẳng AE tại M và cắt đường thẳng AD tại P. Đường thẳng BM cắt AP tại K. Đặt AI = x. BM cắt DE tại F.

a/ Tính BE và AP theo a và x.

b/ Suy ra AK = AI.

c/ Chứng tỏ rằng khi I di động trên cạnh AB, di động trên một đường cố định. Hãy giới hạn đường đó.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: Kí hiệu $\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} \le \sqrt{ab}$ (1)

Dùng phép biến đổi tương đương.

(1) $\dfrac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \Leftrightarrow 2ab \le \sqrt{ab}(a+b) \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} \le a+b$

$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \geq 0$ (2)

Vì (2) đúng với mọi a, b > 0 nên (1) được chứng minh.

Bài 2:

$$P = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$$

Nhận xét: $x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0\ \forall x.$

Xét $3 - P = 3 - \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} = \frac{2x^2 - 4x + 2}{x^2 - x + 1} = \frac{2(x+1)^2}{x^2 - x + 1} \geq 0$

$P \leq 3$ giá trị lớn nhất của P là 3 khi $x = 1$.

Xét $P - \frac{1}{3} = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{3} = \frac{2x^2 + 4x + 2}{3(x^2 - x + 1)} = \frac{2(x+1)^2}{3(x^2 - x + 1)} \geq 0$

$\Rightarrow P \geq \frac{1}{3}$ giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{3}$ khi $x = -1$

Bài 3:

Điều kiện $x \in R$ vì $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0\ \forall x.$

Đặt $x^2 + x + 1 = t$ $(t > 0)$, ta có phương trình: $t - 1 - \frac{7}{t} = 5$

$\Leftrightarrow t^2 - 6t - 7 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 7t + t - 7 = 0$

$\Leftrightarrow t(t - 7) + (t - 7) = 0 \Leftrightarrow (t - 7)(t + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 7 \\ t = -1 \text{(loại)} \end{array}\right.$

Với $x^2 + x + 1 = 7 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow x = -3$ hoặc $x = 2$

Vậy $S = \{-3, 2\}$

Bài 4:

a/ Rút gọn $A = \frac{n^3 + n^2 + n - 1}{n^3 + 1 + 2n^2 + 2n} = \frac{(n+1)(n^2 + n - 1)}{(n+1) + (n^2 + n + 1)} = \frac{n^2 + n - 1}{n^2 + n + 1}$

Vậy $A = \frac{n^2 + n - 1}{n^2 + n + 1}$ với $n \neq -1$.

b/ Xét $A = 1 - \frac{2}{n^2 + n + 1}$ với $n, a \in Z$ thì $\frac{2}{n^2 + n + 1} \in Z$

$\Leftrightarrow n^2 + n + 1 \in Ư(2) = \{1, -1, 2, -2\} \Rightarrow n^2 + n + 1 \in \{1, -1\}$

mà $n^2 + n + 1 = n(n + 1) + 1$ là số lẻ

- Với $n^2 + n + 1 = 1 \Leftrightarrow n \in \{0, -1\}$ vì $n \neq -1$ nên chỉ có $n = 0$
- Với $n^2 + n + 1 = -1 \Leftrightarrow (n + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = -1$ (vô lí).

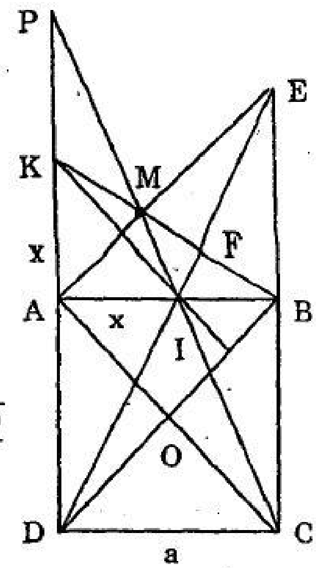
Vậy chỉ có $n = 0$ thỏa mãn.

Bài 4:

a/ Tính BE và AP.

• $\Delta ADI \backsim \Delta BEI$ (g–g) $\Rightarrow \dfrac{AD}{BE} = \dfrac{AI}{BI} \Rightarrow BE = \dfrac{a(a-x)}{x}$

• $\Delta ADI \backsim \Delta BEI$ (g–g) $\Rightarrow \dfrac{AP}{BC} = \dfrac{AI}{BI} \Rightarrow AP = \dfrac{ax}{a-x}$



b/ Ta có: $\Delta AKM \backsim \Delta EBM$ (g–g)

$\Rightarrow \dfrac{AK}{EB} = \dfrac{AM}{EM}$ (1)

$\Delta AMP \backsim \Delta EMC$ (g–g) $\Rightarrow \dfrac{AP}{EC} = \dfrac{AM}{EM}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{AK}{EB} = \dfrac{AP}{EC}$

$\Rightarrow AK = \dfrac{EB.AP}{EC} \Rightarrow AK = \dfrac{a(a-x)}{x}.\dfrac{ax}{a-x}.\dfrac{1}{a+\dfrac{a(a-x)}{x}}$

$\Rightarrow AK = x$

Vậy AK = AI

c/ Vì AK = AI $\Rightarrow \Delta AKI$ vuông cân $\Rightarrow \widehat{AKI} = 45^0$

mà $\widehat{DAC} = 45^0 \Rightarrow \widehat{AKI} = \widehat{DAC}$ (đồng vị) $\Rightarrow AC \parallel KI$

mà $AC \perp BD \Rightarrow KI \perp BD$. Xét ΔKBD có:

$KI \perp BD$, $BA \perp KD \Rightarrow$ I là trực tâm của ΔKBD

$\Rightarrow DI \perp KB$ tại F.

Khi I di động trên cạnh AB, Ta có $\widehat{DFB} = 90^0$, BD cố định.

$\Rightarrow$ F chạy trên đường tròn đường kính BD tâm O là trung điểm BD.

Giới hạn: Vì I di động trên cạnh AB $\Rightarrow$ F chỉ di động trên $\dfrac{1}{4}$ cung tròn BA của đường tròn đường kính BD.

BỘ ĐỀ 76

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 8 (ĐỀ THAM KHẢO) TRƯỜNG THCS NGUYỄN DU – QUẬN 1 – TP. HCM NĂM HỌC 2003 – 2004

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a/ $3x^2 - 10x - 8$ b/ $18x^3 - \dfrac{8}{25}x$

c/ $(x^2 - x + 2)^2 + (x - 2)^2$

Bài 2: Cho $a + b = 1$ và $ab \neq 0$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{b^3-1} + \dfrac{b}{a^3-1} = \dfrac{2(ab-2)}{a^2b^2+3}$

Bài 3: Giải phương trình:

a/ $(x + 1)(x + 2)(x + 4)(x + 5) = 40$ b/ $x^2 + y^2 + xy - 3x - 3y + 3 = 0$

c/ $x^2 + \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 = \dfrac{5}{4}$

Bài 4: Cho $a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3 = 1$. Tính $S = a^2 + b^9 + c^{2004}$

Bài 5: Cho tam giác ABC. Biết rằng tồn tại các điểm M, N lần lượt trên các cạnh AB, BC sao cho $2.\dfrac{BM}{AM} = \dfrac{BN}{CN}$ và $\widehat{BNM} = \widehat{ANC}$.

Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

Bài 6: Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BC và CD của tứ giác lồi ABCD. Chứng minh rằng: $S_{ABCD} \le \dfrac{1}{2}(AM + AN)^2$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

a/ $3x^2 - 10x - 8 = 3x^2 - 12x + 2x - 8 = 3x(x - 4) + 2(x - 4)$

$= (x - 4)(3x + 2)$

b/ $18x^3 - \dfrac{8}{25}x = 2x(9x^2 - \dfrac{4}{25}) = 2x(3x - \dfrac{2}{5})(3x + \dfrac{2}{5})$

c/ Cách 1:

$(x^2 - x + 2)^2 + (x - 2)^2 = (x^2 + 4 - x - 2)^2 + (x - 2)^2$

$= (x^2 + 4)^2 - 2(x^2 + 4)(x + 2) + (x + 2)^2 + (x - 2)^2$

$= (x^2 + 4)^2 - 2(x^2 + 4)(x + 2) + 2(x^2 + 4)$

$= (x^2 + 4)(x^2 + 4 - 2x - 4 + 2) = (x^2 + 4)(x^2 - 2x + 2)$

Cách 2:

$(x^2 - x + 2)^2 + (x - 2)^2 = (x^2 - 2x + x + 2)^2 + (x - 2)^2$

$= (x^2 - 2x + 2)^2 + 2x(x^2 - 2x + 2) + x^2 + (x - 2)^2$

$= (x^2 - 2x + 2)^2 + 2x(x^2 - 2x + 2) + 2(x^2 - 2x + 2)$

$= (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x + 2 + 2x + 2) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 4)$

Cách 3:

$(x^2 - x + 2)^2 + (x - 2)^2 = (x^2 - x + 2)^2 - x^2 + (x - 2)^2 + x^2$

$= (x^2 - x + 2 + x)(x^2 - x + 2 - x) + 2(x^2 - x + 2)$

$= (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2 + 2) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 4)$

Cách 4:

$(x^2 - x + 2)^2 + (x - 2)^2 = (x^2 - x + 2)^2 - (x + 2)^2 + (x + 2)^2 + (x - 2)^2$

$= (x^2 - x + 2 + x + 2)(x^2 - x + 2 - x - 2) + 2(x^2 + 4)$

$= (x^2 + 4)(x^2 - 2x + 2)$

Bài 2: Với $a + b = 1$ và $ab \neq 0$, ta có:

$$\frac{a}{b^3 - 1} + \frac{b}{a^3 - 1} = \frac{a(a^3 - 1) + b(b^3 - 1)}{(a^3 - 1)(b^3 - 1)} = \frac{(a^4 + b^4) - (a + b)}{a^3b^3 - (a^3 + b^3) + 1}$$

$$= \frac{(a^2+b^2)^2 - 2a^2b^2 - 1}{a^3b^3 - (a+b)^2 + 3ab(a+b) + 1} = \frac{[(a+b)^2 - 2ab]^2 - 2a^2b^2 - 1}{a^3b^3 + 3ab}$$

$$= \frac{1 - 4ab + 4a^2b^2 - 2a^2b^2 - 1}{ab(a^2b^2+3)} \text{ (thay } a + b = 1)$$

$$= \frac{2ab(ab-2)}{ab(a^2b^2+3)} = \frac{2(ab-2)}{(a^2b^2+3)} \text{ (do } ab \neq 0)$$

Bài 3:

a/ $(x + 1)(x + 5)(x + 2)(x + 4) = 40$

$\Leftrightarrow (x^2 + 6x + 5)(x^2 + 6x + 8) = 40$

đặt $t = x^2 + 6x$, phương trình trở thành:

$(t + 5)(t + 8) = 40 \Leftrightarrow t^2 + 13t = 0 \Leftrightarrow t(t + 13) = 0$

$\Leftrightarrow t = 0$ hay $t = -13$

- Với $t = 0$ thì $x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(x + 6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -6$
- Với $t = -13$ thì $x^2 + 6x + 13 = 0$ vô nghiệm.

Vì $x^2 + 6x + 13 = (x + 3)^2 + 4 > 0\ \forall x$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 0$; $x = -6$

b/ $x^2 + y^2 + xy - 3x - 3y + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 3)x + y^2 - 3y + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2.\frac{(y-3)}{2}.x + \frac{(y-3)^2}{4} + y^2 - 3y + 3 - \frac{(y-3)^2}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + \frac{(y-3)}{2})^2 + \frac{4y^2 - 12y + 12 - y^2 + 6y - 9}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4}(y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{y-3}{2} = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm là ($x = 1$; $y = 1$)

c/ $x^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = \frac{5}{4}$

TXĐ: $x \neq -1$, phương trình trở thành:

$$\left(x - \frac{x}{x+1}\right)^2 + 2.\frac{x^2}{x+1} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + 2.\frac{x^2}{x+1} + 1 = \frac{5}{4} + 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{x+1} + 1\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x^2}{x+1} + 1 = \frac{3}{2} \\ \frac{x^2}{x+1} + 1 = -\frac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2 - x + 1 = 0 \\ 2x^2 + 5x + 5 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Vì $2x^2 + 5x + 5 = 2(x^2 + 2\frac{5}{4}x + \frac{25}{16}) + \frac{15}{8} = 2(x + \frac{5}{4})^2 + \frac{15}{8} > 0\ \forall x$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$, $x = -\frac{1}{2}$

Bài 4:

Do $a^2 + b^2 + c^2 = 1. \Rightarrow |a| \le 1$; $|b| \le 1$; $|c| \le 1$

Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 - (a^3 + b^3 + c^3) = 0$

$\Leftrightarrow a^2(1 - a) + b^2(1 - b) + c^2(1 - c) = 0$ (*)

Vì $a \le 1 \Rightarrow 1 - a \ge 0$

Tương tự: $b^2(1 - b) \ge 0$, $c^2(1 - c) \ge 0$. Suy ra vế trái của (*) là tổng các số không âm, nên:

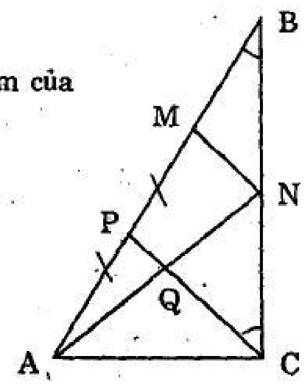
$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2(1-a) = 0 \\ b^2(1-b) = 0 \\ c^2(1-c) = 0 \end{cases}$$

Vậy a, b, c $\in \{0;1\}$ trong đó có hai số bằng 0 và một số bằng 1.

Giả sử $a = b = 0$, $c = 1$ thì $S = a^2 + b^9 + c^{2004} = 0 + 0 + 1^{2004} = 1$

Vậy S = 1.

Bài 5:



Cách 1: Gọi P là trung điểm của AM, Q là giao điểm của AM, Q là giao điểm của AN với CP. Ta có:

$\frac{BM}{PM} = 2\frac{BM}{AM} = \frac{BN}{CN} \Rightarrow MN \parallel CP$ (Talet đảo)

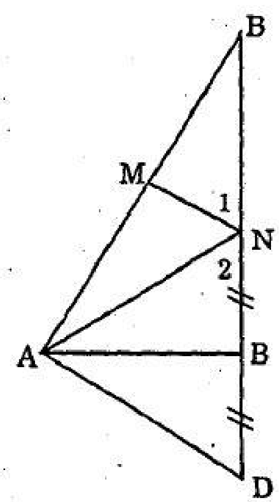
$\Rightarrow \widehat{QCN} = \widehat{MNB} = \widehat{AMC} \Rightarrow \Delta QCN$ cân tại Q.

Mặt khác: PA = PM, $PQ \parallel MN$

$\Rightarrow$ QA = QN nên QA = QC = QN

$\Rightarrow \Delta ACN$ vuông tại C.

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại C.



Cách 2: Dựng D là điểm đối xứng của N qua AC

$\Rightarrow$ ND = CN + CD = 2CN

Ta có: $2\frac{MB}{MA} = \frac{BN}{CN}$

$\Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{BN}{2CN} = \frac{BN}{ND}$

$\Rightarrow MN \parallel AD$ (Talet đảo)

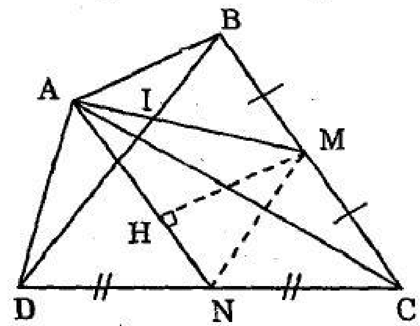
$\Rightarrow \widehat{D} = \widehat{N}_1 = \widehat{N}_2 \Rightarrow \Delta AND$ cân tại A

nên đường trung tuyến AC cũng là đường cao.

Vậy $AC \perp CB \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại C.

Bài 6:

Trong một tam giác, đường trung tuyến chia tam giác thành hai phần có diện tích bằng nhau, nên:



$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = 2S_{AMC} + 2S_{ANC}$

$= 2(S_{AMC} + S_{ANC}) = 2S_{AMCN}$

$= 2(S_{AMN} + S_{CMN}) = 2(S_{AMN} + S_{IMN})$

(với $AM \cap BD = I$)

Do MN // BD nên ΔIMN và ΔCMN có chung đáy và cùng chiều cao.

$\Rightarrow S_{CMN} = S_{IMN}$ và $S_{IMN} \leq S_{AMN}$

Vậy $S_{ABCD} \leq 2(S_{AMN} + S_{AMN}) = 4S_{AMN} = 4\dfrac{1}{2}AN.NH$

$\leq 2\ AN.AM$ (vì $AH \leq AM$)

Ta có: $(AM - AN)^2 \geq 0 \ \Rightarrow AM^2 + AN^2 \geq 2AM.AN$

$$\Rightarrow (AM + AN)^2 \geq 4AM.AN \Rightarrow \left(\frac{AM + AN}{2}\right)^2 \geq AM.AN$$

Suy ra: $S_{ABCD} \leq 2\left(\dfrac{AM + AN}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}(AM + AN)^2$ (đpcm)

BỘ ĐỀ 77

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 8
QUẬN I, TP HỒ CHÍ MINH – NĂM HỌC 2002 – 2003

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a/ $x^2 + 6x + 5$ b/ $(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 2) - 12$

Bài 2:

a/ Cho $x + y + z = 0$. Chứng minh: $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

b/ Rút gọn phân thức: $\dfrac{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2}$

Bài 3: Cho x, y, z là độ dài ba cạnh tam giác.

$A = 4x^2y^2 - (x^2 + y^2 - z^2)^2$. Chứng minh: $A > 0$.

Bài 4: Tìm số dư trong phép chia của biểu thức.

$(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) + 2002$ cho $x^2 + 8x + 12$

Bài 5: Cho tam giác ABC vuông tại A (AC > AB), đường cao AH. Trên tia HC lấy HD = HA. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E.

a/ Chứng minh AE = AB.

b/ Gọi M là trung điểm BE. Tính góc $\widehat{AHM}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

a/ $x^2 + 6x + 5 = x^2 + 5x + x + 5 = x(x + 5) + (x + 5) = (x + 5)(x + 1)$

b/ Đặt $A = (x^2 - x + 1)(x^2 - x + 2) - 12$

Đặt $t = x^2 - x + 1$, ta được:

$A = t(t + 1) - 12 = t^2 + t - 12 = t^2 + 4t - 3t - 12 = t(t + 4) - 3(t + 4)$

$= (t + 4)(t - 3)$

Thay $t = x^2 - x + 1$

$A = (x^2 - x + 5)(x^2 - x - 2) = (x^2 - x + 5)[(x^2 + x) - 2x - 2)]$

$= (x^2 - x + 5)[x(x + 1) - 2(x - 1)] = (x + 1)(x - 2)(x^2 - x + 5)$

Bài 2:

a/ Áp dụng hằng đẳng thức: $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

Ta có: $x^3 + y^3 + z^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) + z^3$

$= (-z)^3 - 3xy(-z) + z^3$ (vì $x + y + z = 0$ nên $z = -(x + y)$) $= 3xyz$

b/ Ta có:

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y)^3 - 3xy(x + y) + z^3 - 3xyz$

$= (x + y + z)^3 - 3(x + y)z(x + y + z) - 3xy(x + y + z)$

$= (x + y + z)[(x + y + z)^2 - 3xz - 3yz - 3xy)]$

$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz - 3xz - 3yz - 3xy)$

$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$

$= (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2$

$= x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2zy + x^2$

$= 2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

Với x, y, z không đồng thời bằng nhau, ta có:

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2} = \frac{(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)}{2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)}$$

$$= \frac{x + y + z}{2}$$

Bài 3: Với x, y, z là độ dài ba cạnh tam giác, ta có:

$A = 4x^2y^2 - (x^2 + y^2 - z^2)^2 = (2xy + x^2 + y^2 - z^2)(2xy - x^2 - y^2 + z^2)$

$= [(x + y)^2 - z^2][z^2 - (x - y)^2] = (x + y - z)(x + y + z)(z + x - y)(z - x + y)$

Theo bất đẳng thức tam giác, ta được:

$$\begin{cases} x + y > z \\ x + z > y \\ y + z > x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z > 0 \\ x + z - y > 0 \\ y + z - x > 0 \end{cases} \Rightarrow (x + y - z)(x + z - y)(y - z + x) > 0$$

Kết hợp với $x + y + z > 0$ cho $A > 0$ (đpcm).

Bài 4:

Cách 1:

Đặt $f(x) = (x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) + 2002$

Ta có: $f(x) = (x + 1)(x + 7)\ (x + 3)(x + 5) + 2002$

$= (x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 15) + 2002$
$= (x^2 + 8x + 7)[(x^2 + 8x + 12) + 3)] + 2002$
$= (x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 12) + 3(x^2 + 8x + 7) + 2002$
$= (x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 12) + 3(x^2 + 8x + 12) + 2002 - 15$
$= (x^2 + 8x + 12)(x^2 + 8x + 10) + 1987$

Vậy số dư trong phép chia f(x) cho $x^2 + 8x + 12$ là 1987.

Cách 2:

$f(x) = (x^2 + 4x + 3)(x^2 + 12x + 35) + 2002$
$= x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 12x^3 + 48x^2 + 36x + 35x^2 + 140x + 105 + 2002$
$= x^4 + 16x^3 + 86x^2 + 176x + 2107.$

Thực hiện phép chia:

$$\begin{array}{l|l} x^4 + 16x^3 + 86x^2 + 176x + 2107 & x^2 + 8x + 12 \\ \hline -x^4 - 8x^3 - 12x^2 & x^2 + 8x + 10 \\ \hline 8x^3 + 74x^2 + 176x & \\ \quad -8x^3 + 64x^2 - 96x & \\ \hline \qquad 10x^2 + 80x + 2107 & \\ \qquad -10x^2 - 80x - 120 & \\ \hline \qquad\qquad 1987 & \end{array}$$

Vậy số dư trong phép chia f(x) cho $x^2 + 8x + 12$ là 1987.

Cách 3:

Bậc của đa thức thương là 2 nên đa thức dư có dạng ax + b. Gọi đa thức thương là Q(x), ta có:

$(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) + 2002 = (x^2 + 8x + 12)Q(x) + ax + b$

Cho $x = -2$, ta có: $-1.1.3.5 + 2002 = -2a + b$
$\Leftrightarrow -2a + b = 1987$
Cho $x = -6$, ta có: $-5.(-3).(-1).1 + 2002 = -6a + b$
$\Leftrightarrow -6a + b = 1987$
Ta có $(-2a + b) - (-6a + b) = 0 \Leftrightarrow a = 0$
Do đó $b = 1987$
Đa thức dư là 1987.

Cách 4:

$f(x) = (x + 1)(x + 7)(x + 3)(x + 5) + 2002 =$
$= (x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 15) + 2002$
$= [(x^2 + 8x + 12) - 5][(x^2 + 8x + 12) + 3] + 2002$
$= (x^2 + 8x + 12)^2 - 2(x^2 + 8x + 12) - 15 + 2002$
$= (x^2 + 8x + 12)^2 - 2(x^2 + 8x + 12) + 1987$

Vậy số dư trong phép chia f(x) cho $x^2 + 8x + 12$ là 1987.

Bài 5:

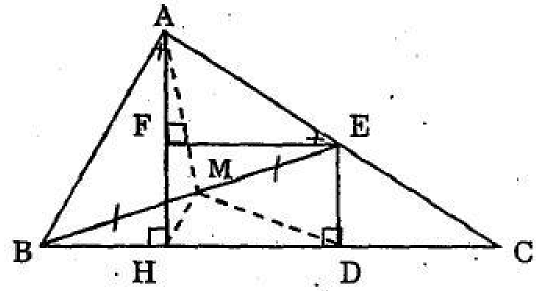
a/ AE = AB

Kẻ $EF \perp AH$, suy ra tứ giác HDEF là hình chữ nhật ($\widehat{H} = \widehat{F} = \widehat{D} = 90^0$)

$\Rightarrow EF = HD$ mà $AH = HD$ (gt) $\Rightarrow EF = AH$

Xét ΔHBA và ΔFAE có: $\hat{H} = \hat{F} = 90^0$, $AH = EF$ (chứng minh trên), $\widehat{FEA} = \widehat{HAB}$ (vì cùng phụ với $\widehat{FAE}$) $\Rightarrow \Delta HBA = \Delta FAE$ (g–c–g) $\Rightarrow AB = AE$.

b/ Tính $\widehat{AHM}$.



Do ΔABE vuông cân tại A

nên $AM = \dfrac{BE}{2}$

Lại có ΔBDE vuông tại D, DM là trung tuyến nên $MD = \dfrac{BE}{2}$

Vậy $AM = MD$.

Xét ΔAHM và ΔDHM có HM chung, $AM = MD$ (cmt), $AH = HD$ (gt)

Do đó $\Delta AHM = \Delta DHM$ (c–c–c) $\Rightarrow \widehat{MHA} = MHD = \dfrac{\widehat{AHD}}{2} = \dfrac{90^0}{2} = 45^0$

BỘ ĐỀ 78

ĐỀ THI HỌC BỔNG TOÁN 8 TRƯỜNG THCS HOA LƯ QUẬN 9, TP.HCM – NĂM HỌC 2002 – 2003

Bài 1: Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

a/ $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2$ b/ $x^6 - x^4 + 2x^3 + 2x^2$

c/ $(x + 1)^4 + (x^2 + x + 1)^2$ d/ $x^{10} + x^5 + 1$

Bài 2: Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức:

$$f(x, y) = \frac{x(x+5) + y(y+5) + 2(xy-3)}{x(x+6) + y(y+6) + 2xy} \text{ với } x + y = 2003$$

Bài 3:

Cho ba số x, y, z thỏa mãn đồng thời: $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ xy + yz + zx = 0 \end{cases}$

Hãy tính giá trị của biểu thức: $P = (x - 1)^{2001} + y^{2002} + (z + 1)^{2003}$

Bài 4:

1) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = (2x - 1)^2 + (x - 3)^2$

2) Tìm x biết: $(8x - 4x^2 - 1)(x^2 + 2x + 1) = 4(x^2 + x + 1)$

Bài 5: Cho ΔABC nhọn ($AB < AC$), kẻ đường cao AH. Gọi M, N, D lần lượt là trung điểm các cạnh BC, BA và AC.

1) Chứng minh rằng: ND là trung trực của đoạn thẳng AH. và tứ giác MDNH là hình thang cân.

2) Giả sử: HD vuông góc với MN. Chứng minh rằng: $AH = ND + MH$.

3) Trong trường hợp tứ giác MDNH có: $\widehat{M} = \widehat{D} = 90^0$ và $MH = MD = \dfrac{DN}{2}$, lấy một điểm bất kỳ thuộc cạnh MH ($E \neq M$, $E \neq H$), kẻ tia Ex vuông góc với DE và tia này cắt cạnh NH tại F. Chứng minh rằng: ΔDEF vuông cân. (câu 3 độc lập với hai câu trên)

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

a/ $\dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = \dfrac{1}{2}[(x^2 + y^2)^2 - 4x^2y^2]$

$= \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + 2xy)(x^2 + y^2 - 2xy) = \dfrac{1}{2}(x + y)^2(x - y)^2$

b/ $x^6 - x^4 + 2x^3 + 2x^2 = x^2[x^4 - x^2 + 2(x + 1)]$

$= x^2[x^2(x - 1)(x + 1) + 2(x + 1)]$

$= x^2(x + 1)(x^3 - x^2 + 2) = x^2(x + 1)[x^3 + x^2 - 2x^2 + 2]$

$= x^2(x + 1)[x^2(x + 1) - 2(x - 1)(x + 1)] = x^2(x + 1)^2(x^2 - 2x + 2)$

c/ $(x + 1)^4 + (x^2 + x + 1)^2 = (x + 1)^4 + [x(x + 1) + 1]^2$

$= (x + 1)^4 + x^2(x + 1)^2 + 2x(x + 1) + 1$

$= (x + 1)^2[(x + 1)^2 + x^2] + (2x^2 + 2x + 1)$

$= (x + 1)^2(2x^2 + 2x + 1) + (2x^2 + 2x + 1)$

$= (2x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x + 2)$

d/ $x^{10} + x^5 + 1 = (x^{10} - x) + (x^5 - x^2) + (x^2 + x + 1)$

$= x(x^9 - 1) + x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1)$

$= x(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^6 + x^3 + 1) + x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x + 1)[x(x - 1)(x^6 + x^3 + 1) + x^2(x - 1) + 1]$

$= (x^2 + x + 1)(x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1)$

Bài 2: Ta có:

$$f(x, y) = \frac{x^2 + 5x + y^2 + 5y + 2xy - 6}{x^2 + 6x + y^2 + 6y + 2xy} = \frac{(x^2 + y^2 + 2xy) + 5(x + y) - 6}{(x^2 + y^2 + 2xy) + 6(x + y)}$$

$$= \frac{(x + y)^2 + 5(x + y) - 6}{(x + y)^2 + 6(x + y)}$$

Đặt $t = x + y$, ta được $f(t) = \dfrac{t^2 + 5t - 6}{t^2 + 6t} = \dfrac{(t + 6)(t - 1)}{t(t + 6)} = \dfrac{(t - 1)}{t}$ $(t \neq 0, t \neq -6)$

Vậy $f(x, y) = \dfrac{x + y - 1}{x + y)}$, tại $x + y = 2003$ thì $f(x, y) = \dfrac{2003 - 1}{2003} = \dfrac{2002}{2003}$

Bài 3: Ta có: $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + x(xy + yz + zx)$ (*)

Vì $x + y + z = 0$ và $xy + yz + zx = 0$ (gt) nên từ (*) cho:

$x^2 + y^2 + z^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0$

Tại $x = y = z = 0$, ta được:

$P = (0 - 1)^{2001} + 0^{2002} + (0 + 1)^{2003} = (-1)^{2001} + 1^{2003} = (-1) + 1 = 0$

Bài 4:

1) $A = (2x-1)^2 + (x-3)^2 = 4x^2 - 4x + 1 + x^2 - 6x + 9$

$= 5x^2 - 10x + 10 = 5(x^2 - 2x + 5) + 5 = 5(x-1)^2 + 5 \geq 5\ \forall x$

Vì $(x-1)^2 \geq 0\ \forall x$ nên $(x-1)^2 + 5 \geq 5\ \forall x$

$A = 5 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Vậy min A = 5.

2) *Cách 1:*

- $x = -1$, không là nghiệm của phương trình đã cho
- $x \neq -1$ ta có $(8x - 4x^2 - 1)(x^2 + 2x + 1) = 4(x^2 + x + 1)$

$\Leftrightarrow \dfrac{8x - 4x^2 - 1}{4} = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1}$

Xét $\forall x \neq -1$: $\dfrac{x^2+x+1}{x^2+2x+1} = \dfrac{4x^2+4x+4}{4(x^2+2x+1)} = \dfrac{3(x^2+x+1)+x^2-2x+1}{4(x^2+2x+1)}$

$= \dfrac{3}{4} + \dfrac{(x-1)^2}{4(x+1)^2} \geq \dfrac{3}{4}$. Dấu "=" xảy ra khi x = 1

và $\dfrac{-4x^2+8x+1}{4} = -x^2 + 2x - 1 + \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{4} - (x-1)^2 \leq \dfrac{3}{4}$; dấu "=" xảy ra khi x = 1.

Vậy $\dfrac{8x-4x^2-1}{4} = \dfrac{x^2+x+1}{x^2+2x+1} \Leftrightarrow x = 1$

Phương trình có nghiệm duy nhất x =1

Cách 2: Ta có: $(8x - 4x^2 - 1)(x^2 + 2x + 1) = 4(x^2 + x + 1)$

$\Leftrightarrow 8x^3 + 16x^2 + 8x - 4x^4 - 8x^3 - 4x^2 - x^2 - 2x - 1 = 4x^2 + 4x + 4$

$\Leftrightarrow -4x^4 + 11x^2 + 6x - 1 = 4x^2 + 4x + 4$

$\Leftrightarrow 4x^4 - 7x^2 - 2x + 5 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(4x^3 + 4x^2 - 3x - 5) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(4x^2 + 8x + 5) = 0$

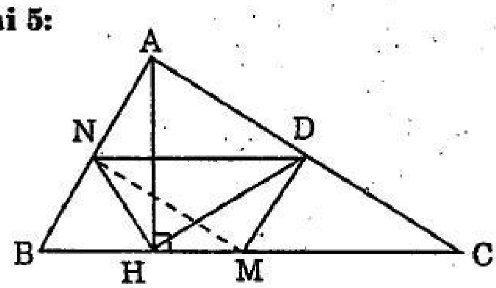
$\Leftrightarrow x = 1$

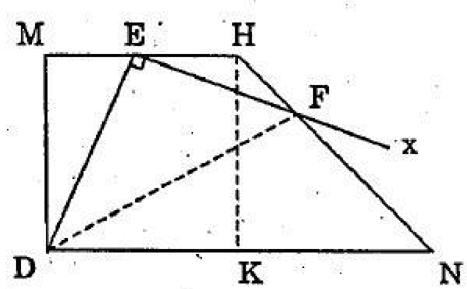
	4	0	−7	−2	5
1	4	4	−3	−5	$\boxed{0}$
1	4	8	5	$\boxed{0}$	

Vì $(4x^2 + 8x + 5) = 4(x^2 + 2x + 1) + 1 = 4(x+1)^2 + 1 > 0\ \forall x$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất x = 1.

Bài 5:





1) Ta có:

$$\begin{cases} NH = NA = \dfrac{AB}{2} \text{ (trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông)} \\ HD = AD = \dfrac{AC}{2} \text{ (trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông)} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ND trung trực AH

ΔABC có N, D trung điểm AB, AC $\Rightarrow$ ND đường trung bình $\Rightarrow$ ND // BC

M là trung điểm BC nên MN đường trung bình $\Rightarrow MN = \dfrac{AC}{2} = HD$

Tứ giác MDNH có ND//MH và MN = HD nên là hình thang cân.

2) Giả sử: $HD \perp MN \Rightarrow HD \perp AC$ tại D và AD = DC nên ΔAHC vuông cân tại H, suy ra AH = HC.

Do AB < AC $\Rightarrow$ BH < HC $\Rightarrow$ M nằm giữa H, C.

Ta có $DN = \dfrac{BC}{2} = MC$

Vậy AH = HC = HM + MC = MH + ND

3) Kẻ $HK \perp DN \Rightarrow HK = MD$, $DK = MH = \dfrac{DN}{2}$ (tính chất đoạn chắn) mà

MH = MD (gt) $\Rightarrow$ HK = DK = KN $\Rightarrow$ ΔHKN vuông tại $\widehat{N} \Rightarrow \widehat{N} = 45^0$, vậy $\widehat{NHM} = 135^0$

Lấy $I \in MD$: MI = ME $\Rightarrow$ EH = ID

Vậy ΔMIE vuông cân tại M nên $\widehat{MIE} = 45^0 \Rightarrow \widehat{DIE} = 135^0$

ΔIED và ΔHFE có: EH = ID (chứng minh trên), $\widehat{EID} = \widehat{EHF} = 135^0$

$\widehat{D} = \widehat{E}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$\Rightarrow \Delta IED$ và ΔHFE (g–c–g) $\Rightarrow$ DE = EF

Vậy ΔDEF vuông cân tại E.

BỘ ĐỀ 79

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI GIẢI THƯỞNG LƯƠNG THẾ VINH QUẬN 9, TP.HCM – NĂM HỌC 2002 – 2003

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a/ $x^4 + 6x^2 + 8$ b/ $x^4 - 4x^2 + x^3 - 4x$

Bài 2: Giải các phương trình và bất phương trình sau:

a/ $|2x - 3| + 2x = 3$ b/ $\dfrac{x-342}{15} + \dfrac{x-323}{17} + \dfrac{x-300}{19} + \dfrac{x-273}{21} = 10$

c/ $\dfrac{3x-2}{9x+1} < \dfrac{1}{3}$

Bài 3:

a/ Chứng minh rằng: với mọi a, b có đẳng thức: $(a^2 + b^2)(a^2 + 1) \geq 4a^2b$

b/ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $P = x^4 + (3 - x)^2$

Bài 4:

Cho các số: $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2003}$. Biết rằng:

$a_k = \dfrac{2k+1}{(k^2+k)^2}$ với mọi k = 1, 2, 3 ..., 2003.

Tính tổng: $S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2003}$

Bài 5: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

a/ Chứng minh: ΔAEF và ΔABC đồng dạng

b/ Chứng minh: H là giao điểm ba đường phân giác trong của ΔDEF.

Bài 6: Cho tam giác ABC vuông tại A, kẻ đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC.

a/ Chứng minh: $BD.CE.BC = AH^3$

b/ Giả sử diện tích tam giác ABC gấp đôi diện tích tứ giác ADHE, chứng tỏ tam giác ABC vuông cân.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

a/ $x^4 + 6x^2 + 8 = x^4 + 2x^2 + 4x^2 + 8 = x^2(x^2 + 2) + 4(x^2 + 2)$

$= (x^2 + 2)(x^2 + 4)$

b/ $x^4 - 4x^2 + x^3 - 4x = x(x^3 - 4x + x^2 - 4) = x[x(x^2 - 4) + (x^2 - 4)]$

$= x(x^2 - 4)(x + 1) = x(x - 2)(x + 2)(x + 1)$

Bài 2:

a/ Áp dụng tính chất $|A| = -A \Leftrightarrow A \leq 0$, ta có:

$|2x - 3| + 2x = 3 \Leftrightarrow |2x - 3| = -(2x - 3) \Leftrightarrow 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{3}{2}$

Vậy $S = \left\{x \middle| x \leq \dfrac{3}{2}\right\}$

b/ $\dfrac{x-342}{15} + \dfrac{x-323}{17} + \dfrac{x-300}{19} + \dfrac{x-273}{21} = 10$

$\Leftrightarrow (\dfrac{x-342}{15} - 1) + (\dfrac{x-323}{17} - 2) + (\dfrac{x-300}{19} - 3) + (\dfrac{x-273}{21} - 4) = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-357}{15} + \dfrac{x-357}{17} + \dfrac{x-357}{19} + \dfrac{x-357}{21} = 0$

$\Leftrightarrow (\dfrac{1}{15} + \dfrac{1}{17} + \dfrac{1}{19} + \dfrac{1}{20})(x - 357) = 0 \Leftrightarrow (x - 357) = 0$

$\Leftrightarrow x = 357$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm x = 357.

c/ $\dfrac{3x-2}{9x+1} < \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{3x-2}{9x+1} - \dfrac{1}{3} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{9x-6-(9x+1)}{3(9x+1)} < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-7}{3(9x+1)} < 0 \Leftrightarrow 9x+1 > 0$ (vì $-7 < 0$)

$\Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{9}$ Vậy $S = \left\{x \mid x > -\dfrac{1}{9}\right\}$

Bài 3:

a/ Ta có: $a^2 + b^2 \geq 2|a|.|b| \geq 0 \ \forall\ a, b$

và $a^2 + 1 \geq 2|a| \geq 0$

$\Rightarrow (a^2 + b^2)(a^2 + 1) \geq 4|a|^2.|b| = 4a^2|b| \geq 4a^2b$ (đpcm)

b/ Ta có: $P = x^4 + (3-x)^2 = x^4 + x^2 - 6x + 9$

$= (x^4 - 2x^2 + 1) + (3x^2 - 6x + 3) + 5 = (x^2-1)^2 + 3(x-1)^2 + 5 \geq 5$

Vì $(x^2-1)^2 \geq 0$ và $3(x-1)^2 \geq 0 \ \forall\ x$

$P = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 5.

Bài 4: Ta có:

$a_k = \dfrac{2k+1}{(k^2+k)^2} = \dfrac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \dfrac{(k^2+2k+1)-k^2}{k^2(k+1)^2} = \dfrac{(k+1)^2-k^2}{k^2(k+1)^2}$

$= \dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{(k+1)^2}$, $\forall k$, $k = 1, 2, 3 \ldots, 2003$

với $k = 1$: $a_1 = 1 - \dfrac{1}{2^2}$

$k = 2$: $a_2 = \dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{3^2}$

....

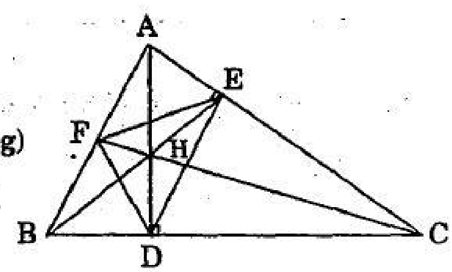
....

$k = 2003$: $a_{2003} = \dfrac{1}{2003^2} - \dfrac{1}{2004^2}$

$\Rightarrow S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2003}$

$= 1 - \dfrac{1}{2004^2} = \dfrac{2005 \times 2003}{2004^2}$

Bài 5



Xét ΔAEB và ΔAFC có: $\widehat{A}$ chung

$\widehat{AEB} = \widehat{AFC} = 90^0 \Rightarrow \Delta AEB \backsim \Delta AFC$ (g–g)

$\Rightarrow \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$

Xét ΔAEF và ΔABC có:

$\hat{A}$ chung, $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta AEF \backsim \Delta ABC$ (g–c) $\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ABC}$

Tương tự: $\Delta CED \backsim \Delta CBA$ (g–c) $\Rightarrow \widehat{CED} = \widehat{CDA}$

Suy ra: $\widehat{AEF} = \widehat{CED} \Rightarrow \widehat{FEB} = \widehat{DEB}$ (cùng phụ với hai góc bằng nhau)

Do đó EH là phân giác FED trong ΔFDE.

Lý luận tương tự ta cũng nhận được DH là phân giác FDE.

$\Rightarrow$ H là giao điểm ba phân giác trong của ΔDEF.

Bài 6:

a/ $AH^3 = BD.CE.BC$

Ta có: $\Delta HAB \backsim \Delta HCA$ (g–g) $\Rightarrow \dfrac{AH}{HC} = \dfrac{HB}{AH} \Rightarrow AH^2 = HB.HC$

$\Delta BDH \backsim \Delta BHA$ (g–g) $\Rightarrow \dfrac{BD}{BH} = \dfrac{BH}{AB} \Rightarrow BH^2 = BD.AB$

$\Delta CEH \backsim \Delta CHA$ (g–g) $\Rightarrow \dfrac{CE}{CH} = \dfrac{CH}{CA} \Rightarrow CH^2 = CE.CA$

ΔABC vuông tại A và $AH \perp BC$ nên

$AH.BC = AB.AC$ ($= 2S_{ABC}$)

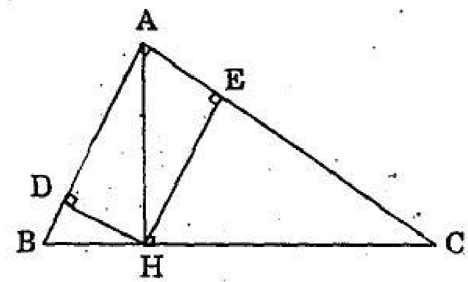
Từ các điều trên cho:

$AH^2 = HB.HC$

$\Rightarrow AH^4 = BH^2.HC^2$

$= BD.AB.CE.AC$

$= (BD.CE)(AB.AC) = BD.CE.BC.AH$



Vậy $AH^3 = BD.CE.BC$ (đpcm)

b/ ΔABC vuông cân: Gọi M trung điểm BC $\Rightarrow AM = \dfrac{BC}{2}$

Tứ giác ADHE là hình chữ nhật ($\hat{A} = \hat{D} = \hat{E} = 90^0$) nên $S_{ADHE} = 2S_{ADH}$;

ta có $S_{ABC} = 2S_{ADHE}$ (gt) $= 4S_{ADH} \Rightarrow \dfrac{S_{ADH}}{S_{ABC}} = \dfrac{1}{4}$

$\Delta DAH \backsim \Delta ABC$ (g–g) $\Rightarrow \dfrac{S_{ADH}}{S_{ABC}} = \left(\dfrac{AH}{BC}\right)^2 \le \left(\dfrac{AM}{BC}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $H \equiv M \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A.

Vậy nếu $S_{ABC} = 2S_{ADHE}$ thì ΔABC vuông cân tại A.

BỘ ĐỀ 80

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI GIẢI LƯƠNG THẾ VINH QUẬN 9, TP.HCM (NĂM 2002 – 2003)

(ĐỀ DỰ TRỮ)

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a/ $x^4 + 6x^2 + 8$ b/ $x^4 - 5x^2 + x^3 - 5x$

Bài 2: Giải phương trình và bất phương trình:

a/ $x^2 - 2x - 3 = 0.$ b/ $\dfrac{x-1}{x-3} > 0.$

Bài 3:

a/ Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \dfrac{6x^2 - 2x + 1}{x^2}$ $(\forall\ x \neq 0)$

b/ Chứng minh $a^4 + a^3b + ab^3 + b^4 \geq 0$

Bài 4: Cho tam giác ABC có chu vi bằng 18cm, trong đó BC là cạnh lớn nhất. Đường phân giác của góc B cắt AC tại M sao cho: $\dfrac{NA}{NB} = \dfrac{1}{2}$. Tính các cạnh của tam giác ABC.

Bài 5: Cho tam giác ABC có AB = 4, AC = 7, đường trung tuyến AM = 3,5. Tính BC.

Bài 6: Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Các điểm D, E theo thứ tự di chuyển trên AB, AC sao cho BD = AE. Xác định vị trí D, E sao cho:

a/ DE có độ dài nhỏ nhất.

b/ Tứ giác BDEC có diện tích nhỏ nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

a/ $x^4 + 6x^2 + 8 = x^4 + 2x^2 + 4x^2 + 8 = x^2(x^2 + 2) + 4(x^2 + 2)$

$= (x^2 + 2) + (x^2 + 4)$

b/ $x^4 - 5x^2 + x^3 - 5x = x(x^3 - 5x + x^2 - 5)$

$= x[x(x^2 - 5) + 1(x^2 + 5)] = x(x^2 - 5)(x + 1) = x(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})(x + 1)$

Bài 2:

a/ $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow x(x + 1) - 3(x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = -1$; $x = 3$

b/ Ta có: $\dfrac{x-1}{x-3} > 2 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x-3} - 2 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1-2(x-3)}{x-3} > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-(2x-5)}{x-3} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x-5}{x-3} < 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-5>0 \text{ và } x-3<0\\ 2x-5<0 \text{ và } x-3>0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>\dfrac{5}{2} \text{ và } x<3\\ x<\dfrac{5}{2} \text{ và } x>3\end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{5}{2}<x<3$$

Vậy $S = \left\{x \middle| \dfrac{5}{2} < x < 3\right\}$

Bài 3:

a/ Với $x \neq 0$ thì $x^2 > 0$.

Cách 1: $A = \dfrac{6x^2-2x+1}{x^2} = \dfrac{5x^2+(x^2-2x+1)}{x^2} = 5 + \dfrac{(x-1)^2}{x^2} \geq 5$

Vì $(x-1)^2 \geq 0$ và $x^2 > 0$ nên $\dfrac{(x-1)^2}{x^2} \geq 0$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 5

Cách 2: Với mọi $x \neq 0$ ta có:

$$A = \frac{6x^2-2x+1}{x^2} = 6 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 2\frac{1}{x} + 1 + 5$$

$$\left(\frac{1}{x}-1\right)^2 + 5 \geq 5 \text{ (vì } \left(\frac{1}{x}-1\right)^2 \geq 0\ \forall x \neq 0\text{)}$$

$A = 5 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của min A là 5

b/ Ta có:

$a^4 + a^3b + ab^3 + b^4 = a^3(a + b) + b^3(a + b) = (a + b)(a^3 + b^3)$

$= (a + b)^2(a^2 - ab + b^2) \geq 0\ \forall$ a, b

Vì $(a + b)^2 \geq 0$; $a^2 - ab + b^2 = \left(a - \dfrac{b}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}b^2 \geq 0$

Dấu đẳng thức xảy ra khi: $\left[\begin{array}{l}a+b=0\\ a=\dfrac{b}{2} \text{ và } b=0\end{array}\right. \Leftrightarrow a = -b$

Vậy bất đẳng thức: $a^4 + a^3b + ab^3 + b^4 \geq 0$, được chứng minh .

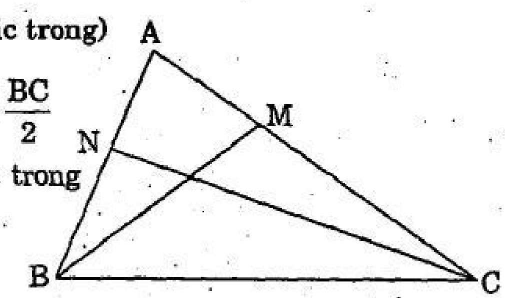
Bài 4: Xét ΔABC, có BM là đường phân giác trong ABC nên:

$\dfrac{AM}{MC} = \dfrac{AB}{BC}$ (tính chất đường phân giác trong)

mà $\dfrac{AM}{MC} = \dfrac{1}{2}$ (gt) $\Rightarrow \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow AB = \dfrac{BC}{2}$

Lý luận tương tự với CN là phân giác trong ACB trong ΔABC ta nhận được:

$\dfrac{NA}{NB} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow AC = \dfrac{3}{4}BC$



Ta lại có: AB + BC + AC = 18

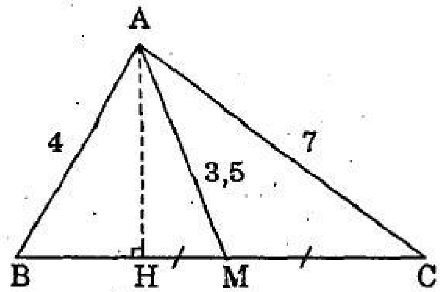
$$\Leftrightarrow \frac{BC}{2} + BC + \frac{3}{4}BC = 18$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{4}BC = 18 \Leftrightarrow BC = 18\frac{4}{9} = 8 \text{ (cm)}$$

Từ đó cho ta: AB = 4 (cm) và AC = 6 (cm)

Vậy ΔABC có: AB = 4 (cm) ; AC = 6 (cm) ; BC = 8 (cm)

Bài 5: Kẻ $AH \perp BC$



Áp dụng định lý Pytago lần lượt với các tam giác vuông, ta có:

$$AM^2 = AH^2 + HM^2$$

$$= \frac{(AB^2 - BH^2) + (AC^2 - HC^2)}{2} + HM^2$$

$$= \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BH^2 - CH^2}{2} + HM^2$$

$$= \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{(BH - CH)^2 - 2BH.CH}{2} + HM^2$$

$$= \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{2} + BH.CH + HM^2$$

$$= \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{2} + (BH - MH)(CM + MN) + HM^2$$

$$= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} + BM^2 - MH^2 + MH^2 \text{ (vì } MB = MC = \frac{BC}{2}\text{)}$$

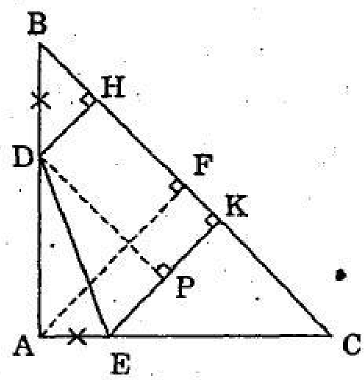
$$= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} + \frac{BC^2}{4} = \frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4}$$

Thay AB = 4, AM = 3,5, AC = 7, ta được:

$4(3,5)^2 - 2\times4^2 - 2\times7^2 = -BC^2 \Leftrightarrow BC^2 = 81 = 9^2 \Leftrightarrow BC = 9$ (BC > 0)

Vậy BC = 9.

Bài 6:



Cách 1:

Kẻ $DH \perp BC$ ($H \in BC$), $EK \perp BC$ ($K \in BC$)

Ta có: ΔHBD và ΔKCE vuông cân tại H, K (tam giác vuông có một góc bằng 45^0) $\Rightarrow$ BH = DH và EK = KC

Kẻ $AF \perp BC$ ($F \in BC$), do ΔABC vuông cân tại A nên BF = FC và DH // AF // EK (vì cùng vuông góc BC)

Áp dụng hệ quả định lí Talét, ta có: $\frac{BH}{BF} = \frac{BD}{AB}$ và $\frac{CK}{CF} = \frac{EC}{AC}$

Suy ra $\frac{BH}{BF} = \frac{CK}{CF} = \frac{BD}{AB} = \frac{EC}{AC} = \frac{BD + (AC - AE)}{AC}$ (vì AB = AC)

$= \frac{AC}{AC} = 1$ (vì BD = AE)

Do đó $BH + CK = BF = \frac{BC}{2}$ (vì $BF = CF = \frac{BC}{2}$)

Ta có: $HK = BC - (BH + CK) = BC - \frac{BC}{2} = \frac{BC}{2}$

Kẻ $DP \perp EK \Rightarrow$ tứ giác DHKP là hình chữ nhật ($\widehat{P} = \widehat{H} = \widehat{K} = 90^0$)

$\Rightarrow DP = HK = \frac{BC}{2}$

Lại có: $DE \geq DP = \frac{BC}{2}$ (không đổi)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow E \equiv P \Leftrightarrow \begin{cases} DE//BC \\ DE = \frac{BC}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D: \text{trung điểm } AB \\ E: \text{trung điểm } AC \end{cases}$

Vậy min $DE = \frac{BC}{2}$ khi D, E lần lượt là trung điểm AB, AC.

b/ Ta có: $S_{ADE} = \frac{1}{2}AD.AE = \frac{1}{2}AD.BD$ (vì AE = BD)

$= \frac{1}{2}AD(AB - AD) = -\frac{1}{2}(AD^2 - AB.AD)$

$= -\frac{1}{2}(AD^2 - 2\frac{AB}{2}.AD + \frac{AB^2}{4}) + \frac{AB^2}{2} = -\frac{1}{2}(AD - \frac{AB}{2})^2 + \frac{AB^2}{8} \leq \frac{AB^2}{8}$

Vậy $S_{BDEC} = S_{ABC} - S_{ADE} \geq \frac{AB^2}{2} - \frac{AB^2}{8} = \frac{3}{8}AB^2$ (không đổi)

Do đó min $S_{BDEC} = \frac{3}{8}AB^2$ khi D, E lần lượt là trung điểm AB, AC.

Cách 2: Để xác định vị trí của D, E để DE nhỏ nhất, ta đặt AB = AC = a (không đổi), AE = BD = x (0 < x < a)

Áp dụng định lý Pytago đối với ΔADE vuông tại A có

$DE^2 = AD^2 + AE^2 = (a - x)^2 + x^2 = 2x^2 - 2ax + a^2 = 2(x^2 - ax) + a^2$

$= 2(x^2 - 2\frac{a}{2}x + \frac{a^2}{4}) + a^2 - \frac{a^2}{2} = 2(x - \frac{a}{2})^2 + \frac{a^2}{2} \geq \frac{a^2}{2}$

Ta có DE nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ DE nhỏ nhất

$\Leftrightarrow x = \frac{a}{2} \Leftrightarrow BD = AE = \frac{a}{2}$

$\Leftrightarrow$ D, E là trung điểm AB, AC

BỘ ĐỀ 81

ĐỀ THI GIẢI HỌC BỔNG – LỚP 8 TRƯỜNG THCS HOA LƯ QUẬN 9, TP.HCM – NĂM HỌC 2003 – 2004

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a/ $(xy + 1)^2 - (x + y)^2$ b/ $(x^2 - 3)^2 + 16$

c/ $x^4 + 2004x + 2003x + 2004$ d/ $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

Bài 2: Tìm x, y biết

a/ $2x^2 + y^2 + 6 = 4(x - y)$

b/ $(2x - 5)^3 + 27(x - 1)^3 + (8 - 5x)^3 = 0$

Bài 3:

Cho hai số a, b thỏa mãn: $2a + b = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = ab$

Bài 4: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn (AB < AC). Gọi H là trực tâm, O là giao điểm ba đường trung trực của tam giác. Gọi D là điểm đối xứng của điểm A qua điểm O.

a/ Chứng minh: Tứ giác BHCD là hình bình hành

b/ Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng: AH = 2.MO

Bài 5: Chứng minh rằng: trong một tam giác có hai cạnh không bằng nhau thì tổng độ dài của cạnh lớn và đường cao tương ứng sẽ lớn hơn tổng độ dài của cạnh nhỏ với đường cao tương ứng.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

a/ $(xy + 1)^2 - (x + y)^2 = (xy + 1 + x + y)(xy + 1 - x - y)$

$= (y + 1)(x + 1)(y - 1)(x - 1)$

b/ $(x^2 - 3)^2 + 16 = x^4 - 6x^2 + 25 = (x^2 + 5)^2 - (4x)^2$

$= (x^2 + 4x + 5)(x^2 - 4x + 5)$

c/ $x^4 + 2004x^2 + 2003x + 2004 = x^4 - x + 2004x^2 + 2004x + 2004$

$= x(x^3 - 1) + 2004(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2004)$

d/ $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b) - 3abc$

$= (a + b + c)(a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab)$

$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$

Bài 2:

a/ $2x^2 + y^2 + 6 = 4(x - y)$

$2x^2 - 4x + 2 + y^2 + 4x + 4 = 0$

$2(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 0$

có $(x - 1)^2 \geq 0$, $(y + 2)^2 \geq 0$

Do đó $x - 1 = 0$ và $y + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1, y = -2$

b/ $(2x - 5)^3 + 27(x - 1)^3 + (8 - 5x)^3 = 0$

$\Leftrightarrow (2x - 5)^3 + (3x - 3)^3 + (8 - 5x)^3 = 0$

có $a + b + c = 0 \Leftrightarrow c = -(a + b)$

Chứng minh được: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Áp dụng: $(2x - 5)^3 + (3x - 3)^3 + (8 - 5x)^3 = 0$

$\Leftrightarrow 3(2x - 5)(3x - 3)(8 - 5x) = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2}, x = 1, x = \frac{8}{5}$

Bài 3:

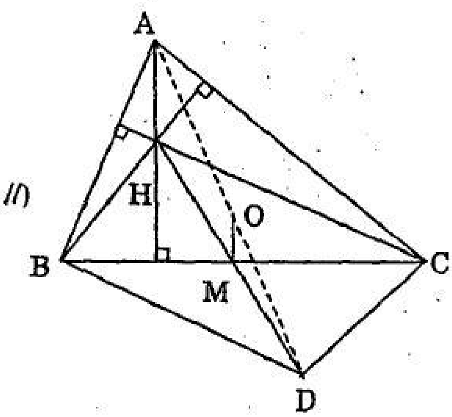
$2a + b = 6 \Rightarrow b = 6 - 2a$

$P = ab = a(6 - 2a) = 6a - 2a^2 = \frac{9}{2} - 2(a - \frac{3}{2})^2 \le \frac{9}{2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$; $b\ 6 - 2\frac{3}{2} = 3$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{9}{2} \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$ và $b = 3$

Bài 4:



a/ $AO = OC = OD \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại C

$\Rightarrow DC \perp AC$ mà $BH \perp AC$

$\Rightarrow BH \mathbin{//} DC$

tương tự $CH \mathbin{//} DB$

$\Rightarrow$ BHCD là hình bình hành (2 cặp cạnh //)

b/ M là trung điểm BC

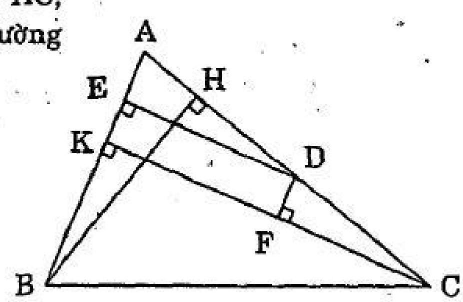
$\Rightarrow$ M là trung điểm HD

O là trung điểm AD

$\Rightarrow$ OM là đường trung bình ΔACD

$\Rightarrow OM = \frac{1}{2}AH$ hay $AH = 2OM$

Bài 5:



Không mất tính tổng quát, giả sử $AB < AC$, BH là đường cao ứng với AC, CK là đường cao ứng với AB

Trên AC lấy D sao cho $AB = AD$;

kẻ $DE \perp AB$, $DF \perp CK$

$\Rightarrow DE = KF$ (tính chất đường chắn)

dễ dàng chứng minh được

$\Delta ABH = \Delta ADE$ (h–g)

$\Rightarrow BH = DE \Rightarrow BH = KF$

ΔDFC vuông tại F $\Rightarrow FC < DC$ (đường xiên > đường vuông góc)

$\Rightarrow AB + CK = AB + KF + FC < AD + BH + DC$

$\Rightarrow AB + CK < AC + BH$

BỘ ĐỀ 82

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI GIẢI LƯƠNG THẾ VINH
QUẬN 9, TP.HCM – NĂM HỌC 2003 – 2004

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a/ $60x + 18x^2 - 6x^3$ b/ $x^8 - 2^8$

Bài 2: Giải phương trình, bất phương trình:

a/ $\frac{x+3}{x-4} + \frac{x-1}{x-2} = \frac{2}{6x-8-x^2}$ b/ $(x + 2)^2 (x + 4)(x - 1) \geq 0$

c/ $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x^3 + 14x^2 + 24x = 0$

Bài 3:

a/ Mười vận động viên tham gia chơi quần vợt. Cứ hai người trong họ chỉ chơi đúng một ván. Người thứ nhất thắng x_1 ván và thua y_1 ván, người thứ hai thắng x_2 ván và thua y_2 ván, ..., người thứ mười thắng x_{10} ván và thua y_{10} ván.

Chứng minh rằng: $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{10}^2 = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_{10}^2$

b/ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$A = xy(x - 2)(y + 6) + 12x^2 - 24x + 3y^2 + 18y + 36$

Bài 4: Cho tam giác ABC cân (AB = AC). gọi O là trung điểm của BC, trên cạnh AB lấy điểm D và trên cạnh AC lấy điểm E sao cho: $OB^2 = BD.CE$.

a/ Chứng minh tam giác OBD và tam giác ECO đồng dạng

b/ Chứng minh khoảng cách OH từ O đến đường thẳng DE có độ dài không đổi khi D, E di động trên AB, AC.

Bài 5: Cho tam giác ABC vuông tại A, G là trọng tâm, BM là đường phân giác của tam giác ABC. Cho $GM \perp AC$. Chứng minh BM vuông góc với trung tuyến AD.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

a/ $60x + 18x^2 - 6x^3 = -6x(x^2 - 3x - 10) = -6x[(x^2 - 5x) + (2x - 10)]$

$= -6x[x(x - 5) + 2(x - 5)] = -6x(x - 5)(x + 2)$

b/ $x^8 - 2^8 = (x^4)^2 - (2^4)^2 = (x^4 + 2^4)(x^4 - 2^4) = (x^4 + 16)(x^2 - 2^2)(x^2 + 2^2)$

$= (x^4 + 16)(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$

Bài 2:

a/ $\frac{x+3}{x-4} + \frac{x-1}{x-2} = \frac{2}{6x-8-x^2} \Leftrightarrow \frac{x+3}{x-4} + \frac{x-1}{x-2} = \frac{-2}{(x-2)(x-4)}$ (1)

Điều kiện: $x \neq 2$ và $x \neq 4$

Quy đồng và khử mẫu, ta có:

$(x + 3)(x - 2) + (x - 4)(x - 1) = -2 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 + x^2 - 5x + 4 = -2$

$\Leftrightarrow 2x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$

$x = 0$ thỏa Điều kiện, $x = 2$ không thỏa Điều kiện, nên phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

b/ ***Nhận xét:*** $x = -2$ là một nghiệm của bất phương trình

Với $x \neq 2$ thì $(x + 2)^2 > 0$, khi đó bất phương trình đã cho ứng với:

$$(x + 4)(x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x+4) \geq 0 \wedge (x-1) \geq 0 \\ (x+4) \leq 0 \wedge (x-1) \leq 0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x \geq 4 \wedge x \geq 1 \\ x \leq 4 \wedge x \leq 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x \geq 1 \\ x \leq -4\end{array}\right.$$

Kết hợp lại thì $x = -2$ hoặc $x \leq -4$ hoặc $x \geq 1$ là nghiệm của phương trình

c/ $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x^3 + 14x^2 + 24x = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 4x + 8)^2 + 2.\dfrac{3}{2}3x(x^2 + 4x + 8) = -2x^2 + \dfrac{9}{4}x^2$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 4x + 8 + \frac{3}{2}x)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2 + 4x + 8 + \dfrac{3}{2}x = \dfrac{x}{2} \\ x^2 + 4x + 8 + \dfrac{3}{2}x = -\dfrac{x}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2 + 5x + 8 = 0 \\ x^2 + 6x + 8 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow (x + 2)(x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

hay $x = -4$ $\left(x^2 + 4x + 8 = (x + \dfrac{5}{2}x)^2 + \dfrac{7}{4} > 0\ \forall x\right)$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x = -2$, $x = -4$.

Bài 3:

a/ Ta nhận thấy mỗi vận động viên chơi đúng 9 ván, tức là $x_1 + y_1 = \ldots = x_{10} + y_{10} = 9$

Ngoài ra: $x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = y_1 + y_2 + \ldots + y_{10}$ (vì một ván đấu chỉ có thắng hoặc thua).

Xét hiệu: $(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{10}^2) - (y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{10}^2)$

$= (x_1^2 - y_1^2) + (x_2^2 - y_2^2) + \ldots + (x_{10}^2 + y_{10}^2)$

$= (x_1 + y_1)(x_1 - y_1) + \ldots + (x_{10} + y_{10})(x_{10} - y_{10})$

$= 9(x_1 - y_1) + 9(x_1 - y_1) + \ldots + 9(x_{10} - y_{10})$

$= 9[(x_1 + \ldots + x_{10}) - (y_1 + \ldots + y_{10})] = 0$

Suy ra: $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{10}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{10}^2$ (đpcm)

b/ Ta có: $A = xy(x - 2)(y + 6) + 12x(x - 2) + 3y(y + 6) + 36$

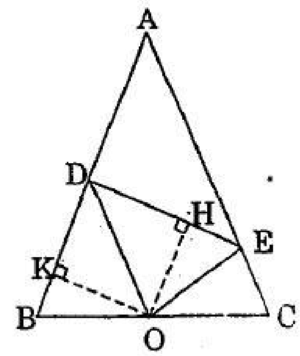
$= x(x - 2)[y(y + 6) + 12] + 3[y(y + 6) + 12] = (y^2 + 6y + 12)(x^2 - 2x + 3)$

$= [(y + 3)^2 + 3][(x - 1)^2 + 2] \geq 3.2 = 6$

Vì $(y + 3)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (y + 3)^2 + 3 \geq 3$ và $(x - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + 2 \geq 2$

Dấu đẳng thức xảy ra khi: $x = 1$ và $y = 3$. Vậy min $A = 6$

Bài 4:



a/ Từ giả thiết cho $OB^2 = BD.CE$

$\Rightarrow OB.OC = BD.CE \Rightarrow \frac{OB}{EC} = \frac{BD}{OC}$

Xét ΔOBD và ΔEOC có:

$\hat{B} = \hat{C}$ (ΔABC cân tại A) và

$\frac{OB}{EC} = \frac{BD}{OC}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta OBD \backsim \Delta EOC$ (c–g–c) $\Rightarrow \widehat{BDO} = \widehat{COE}$ và $\frac{OD}{BD} = \frac{OE}{OC} = \frac{OE}{OB}$

b/ Ta có: $\widehat{DOC} = \widehat{DOE} + \widehat{COE}$ và $\widehat{DOC} = \widehat{OBD} + \widehat{BDO}$ (góc ngoài tại O của ΔOBD) mà $\widehat{BDO} = \widehat{COE}$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \widehat{DOE} = \widehat{OBD}$

Xét ΔODE và ΔBDO có: $\widehat{DOE} = \widehat{OED}$ (chứng minh trên) và $\frac{OD}{BD} = \frac{OE}{OB}$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \Delta ODE$ và ΔBDO (c–g–c)

Do đó: $\widehat{BDO} = \widehat{ODE}$ nghĩa là DO là phân giác $\widehat{BDE} \Rightarrow OH = OK$ (với $OK \perp AB$) mà OK không đổi nên OH không đổi khi D, E di động trên AB, AC.

Bài 5:

Gọi I là giao điểm của BM và AD, H là trung điểm AC $\Rightarrow DH \parallel AB$ và $DH = \frac{AB}{2}$ (H là đường trung bình của ΔABC)

Lại có: $GM \parallel AB$ (cùng $\perp AC$) $\Rightarrow GN \parallel DH$. Áp dụng hệ quả định lí Talét ta có:

ΔADH có $GM \parallel DH$: $\frac{GM}{DH} = \frac{AG}{AD} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{GM}{DH} = \frac{1}{3}$ (vì $AB = 2DH$)

ΔABI có $GM \parallel AB$: $\frac{GM}{AI} = \frac{GM}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{GM + AI}{AI} \Rightarrow AI = \frac{3.AG}{4} = \frac{3}{4}.\frac{2}{3}$

$AD = \frac{AD}{2} \Rightarrow$ I là trung điểm AD. Vậy ΔABD cân tại B nên BI vừa là phân giác vừa là đường cao. Do đó $BM \perp AD$.

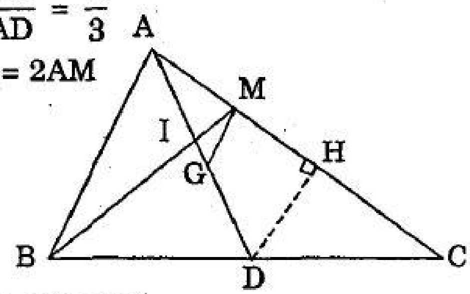
Cách khác: ΔADH có $GM \parallel DH$: $\frac{AM}{AH} = \frac{AG}{AD} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow 3AM = 2AH = AC = AM + MC \Rightarrow MC = 2AM$

Áp dụng tính chất phân giác với

ΔABC: $\frac{BC}{AB} = \frac{MC}{MA} = 2$

$\Rightarrow AB = \frac{BC}{2} = BD$ (D trung điểm BC)



Vậy ΔABD cân tại B nên BI vừa là phân giác vừa là đường cao. Do đó: $BM \perp AD$ (đpcm)

BỘ ĐỀ 83

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI GIẢI LƯƠNG THẾ VINH
QUẬN 9, TP.HCM – NĂM HỌC 2003 – 2004

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a/ $18x^3 - \frac{8}{25}x$ b/ $4x^2 + 22x + 30$

c/ $x^6 + x^4 + x^2y^2 + y^4 - y^6$

Bài 2: Giải phương trình:

a/ $\frac{1}{x-1} + \frac{2x^2-5}{x^3-1} = \frac{4}{x^2+x+1}$

b/ $|x^2 - 3x + 3| = 3x - x^2 - 1$

c/ Tìm các giá trị của m để phương trình (ẩn số x)

$2x^2 - (2m + 7)x + 10m - 15 = 0$ có hai nghiệm phân biệt đều dương

Bài 3: a/ Cho $a^3 - 3ab^2 = 5$ và $b^3 - 3a^2b = 10$. Tính $a^2 + b^2$

b/ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 + y^2 + xy + x + y$

Bài 4: Cho ba phân thức: $\frac{a-b}{1+ab}, \frac{b-c}{1+bc}, \frac{c-a}{1+ac}$. Chứng minh rằng tổng ba phân thức này bằng tích của chúng.

Bài 5: Cho đoạn thẳng AB và điểm I nằm giữa hai điểm A và B. Trong cùng một mặt phẳng bờ AB, kẻ hai tia Ax và By vuông góc với AB. Trên Ax lấy điểm C, tia vuông góc với IC tại I cắt By tại D.

a/ Chứng minh AC.DB = IA.IB

b/ Ba điểm A, B, c cố định, xác định vị trí của I để diện tích tứ giác ABDC đạt giá trị lớn nhất.

Bài 6: Gọi M và N lần lượt là trung điểm các cạnh AD và BC của hình chữ nhật ABCD. Trên tia đối của tia DC lấy điểm P bất kì. Giao điểm của AC với đường PM là Q. Chứng minh rằng: $\widehat{QMN} = \widehat{MNP}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

a/ $18x^3 - \frac{8}{25}x = 2x(9x^2 - \frac{4}{25}) = 2x(3x + \frac{2}{5})(3x - \frac{2}{5})$

b/ $4x^2 + 22x + 30 = 2(x^2 + 11x + 15) = 2[(2x^2 + 6x) + (5x + 15)]$

$= 2[2x(x + 3) + 5(x + 3)] = 2(x + 3)(2x + 5)$

c/ $x^6 + x^4 + x^2y^2 + y^4 - y^6 = (x^6 - y^6) + (x^4 + x^2y^2 + y^4)$

$= (x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4) + (x^4 + x^2y^2 + y^4)$

$= (x^4 + x^2y^2 + y^4)(x^2 - y^2 + 1)$

$= [(x^2 - y^2)^2 - x^2y^2](x^2 - y^2 + 1)$

$= (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy)(x^2 - y^2 + 1)$

Bài 2:

a/ Ta có: $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$

$x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0\ \forall x.$ TXĐ: $x \neq 1$

Phương trình đã trở thành:

$x^2 + x + 1 + 2x^2 - 5 = 4(x-1) \Leftrightarrow 3x^2 + x - 4 = 4x - 4$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 3x = 0 \quad \Leftrightarrow 3x(x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in \text{TXĐ} \\ x = 1 \notin \text{TXĐ} \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 0$

b/ ***Nhận xét:*** $x^2 - 3x + 3 = (x - \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0\ \forall x$

Suy ra $|x^2 - 3x + 3| = x^2 - 3x + 3$

Phương trình đã cho tương đương

$x^2 - 3x + 3 = 3x - x^2 - 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \qquad \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = 1$; $x = 2$

c/ Ta có: $2x^2 - (2m+7)x + 10m - 15 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 3x - 15 - 2mx + 10m = 0$

$\Leftrightarrow 2x(x-5) + 3(x-5) - 2m(x-5) = 0$

$\Leftrightarrow (x-5)(2x+3-2m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = \dfrac{2m-3}{2} > 0 \end{array}\right.$

Vậy $\forall$m phương trình luôn luôn có nghiệm $x = 5 > 0$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt đều dương

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2m-3}{2} \neq 5 \\ \dfrac{2m-3}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq \frac{13}{2}$ và $m > \frac{3}{2}$

Bài 3:

a/ Ta có: $a^3 - 3ab^2 = 5 \Rightarrow (a^3 - 3ab^2)^2 = a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = 25$

$b^3 - 3a^2b = 10 \Rightarrow (b^3 - 3a^2b)^2 = b^6 - 6a^2b^4 + 9a^4b^2 = 100$

Suy ra $125 = a^6 + b^6 + 3a^2b^4 - 3a^4b^2 = (a^2 + b^2)^3$

Do đó: $a^2 + b^2 = 5$

b/ Ta có: $A = x^2 + y^2 + xy + x + y = x^2 + (y+1)x + y^2 + y$

$= x^2 + \underbrace{2.\frac{y+1}{2}x + \frac{(y+1)^2}{4}} + y^2 + y - \frac{(y+1)^2}{4}$

$= (x + \frac{y+1}{2})^2 + \frac{4y^2 + 4y - y^2 - 2y - 1}{4}$

$= (x + \frac{y+1}{2})^2 + \frac{1}{4}(3y^2 + 2y) - \frac{1}{4}$

$= (x + \frac{y+1}{2})^2 + \frac{3}{4}(y^2 + 2.\frac{1}{3}y + \frac{1}{9}) - \frac{1}{4} - \frac{1}{12}$

$= (x + \frac{y+1}{2})^2 + \frac{3}{4}(y + \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{3} \geq -\frac{1}{3}$

$A = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{y+1}{2} = 0 \\ y + \frac{1}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$ Vậy min $A = -\frac{1}{3}$

Bài 4: Với $ab + 1 \neq 0$, $bc + 1 \neq 0$, $ac + 1 \neq 0$, ta có:

$\frac{a-b}{1+ab} + \frac{b-c}{1+bc} + \frac{c-a}{1+ac} = \frac{a-b}{1+ab} + \frac{b-a+a-c}{1+bc} + \frac{c-a}{1+ac}$

$= \frac{a-b}{1+ab} - \frac{a-b}{1+bc} - \frac{c-a}{1+bc} + \frac{c-a}{1+ac}$

$= (a-b)(\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc}) + (c-a)(\frac{1}{1+ac} + \frac{1}{1+bc})$

$= (a-b)\frac{1+bc-1-ab}{(1+ab)(1+bc)} + (c-a)\frac{1+bc-1-ac}{(1+bc)(1+ac)}$

$= \frac{b(a-b)(c-a)}{(1+ab)(1+bc)} + \frac{c(c-a)(b-a)}{(1+bc)(1+ac)}$

$= \frac{b(a-b)(c-a)}{(1+ab)(1+bc)(1+ac)}[b(1+ac) - c(1+ab)]$

$= \frac{(a-b)(c-a)(b+abc-c-abc)}{(1+ab)(1+bc)(1+ac)} = \frac{a-b}{1+ab}\,\frac{b-c}{1+bc}\,\frac{c-a}{1+ac}$ (đpcm)

Bài 5:

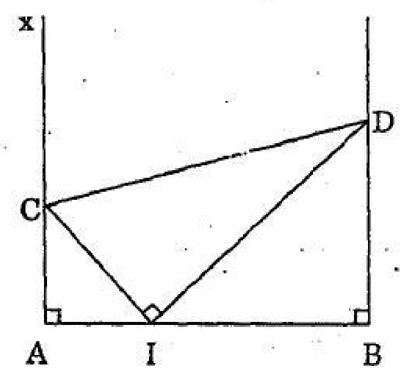
a/ AC.BD = IA.IB

Xét ΔAIC và ΔBDI có: $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^0$

$\widehat{AIC} = \widehat{BDI}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$\Rightarrow$ ΔAIC và ΔBDI (g–g)

$\Rightarrow \frac{IA}{BD} = \frac{AC}{IB} \Rightarrow$ AC.BD = IA.IB (đpcm)



b/ Ta có: ABDC là hình thang vuông (AC // BD vì cùng vuong góc với AB và $\widehat{A} = 90^0$)

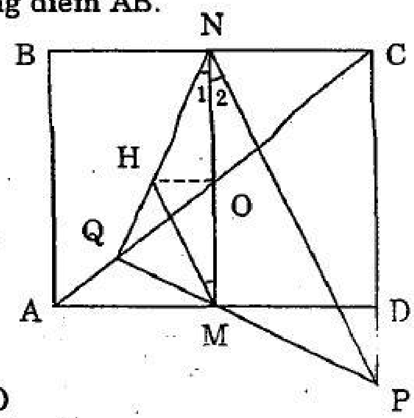
nên $S_{ABDC} = \frac{AC + BD}{2}.AB$

Do A, B, C cố định nên AB, AC không đổi

Vậy S_{ABDC} lớn nhất $\Rightarrow$ BD lớn nhất mà: $\begin{cases} BD = \dfrac{IA.IB}{AC} \text{(chứng minh trên)} \\ IA.IB = IA(AB - IA) = -(IA^2 - AB.IA) = -(IA - \dfrac{AB}{2})^2 + \dfrac{AB^2}{4} \le \dfrac{AB^2}{4} \end{cases}$

$\Rightarrow BD \le \dfrac{AB^2}{4AC}$ (không đổi)

Suy ra S_{ABDC} lớn nhất $\Leftrightarrow IA = \dfrac{AB}{2} \Leftrightarrow$ I trung điểm AB.



Bài 6:

Cách 1: Gọi $AC \cap MN = O$

$\Rightarrow$ O là trung điểm MN

Kẻ đường thẳng vuông góc MN tại O cắt QN tại H $\Rightarrow$ OH là trung trực MN nên HN = HM $\Rightarrow \Delta HMN$ cân tại H $\Rightarrow$ $\widehat{N}_1 = \widehat{HMN}$ (1)

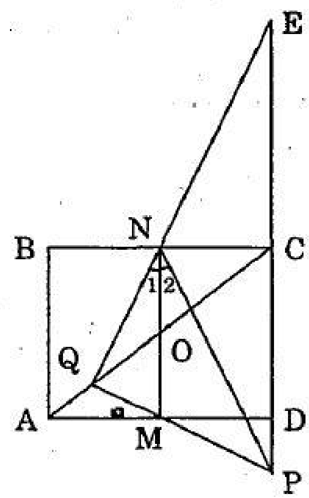
Do OH // NC (vì cùng $\perp$ MN) nên $\dfrac{QH}{HN} = \dfrac{QO}{OC}$

OM // CD nên: $\dfrac{QO}{OC} = \dfrac{QM}{MP}$. Vậy $\dfrac{QH}{HN} = \dfrac{QM}{MP}$

$\Rightarrow$ HM // NP

Do đó $\widehat{N}_2 = \widehat{HMN}$ (so le trong) (2)

Từ (1) và (2) cho $N_1 = N_2$ nghĩa là QNM = MNP (đpcm)



Cách 2: Gọi $AC \cap MN = O \Rightarrow O$ là trung điểm MN và MN // PE

$QN \cap PC = \widehat{E}$. Suy ra: $\widehat{N}_1 = \widehat{E}$ (đồng vị, MN //CE) (1)

$\widehat{N}_2 = \widehat{P}$ (so le trong, MN // PE) (2)

Mặt khác vì MN // PE nên:

$\dfrac{ON}{CE} = \dfrac{OQ}{QC} = \dfrac{OM}{CP}$, ON = OM (chứng minh trên)

$\Rightarrow$ CE = CP $\Rightarrow \Delta NPE$ cân tại N (vì có NC là đường cao vừa là trung tuyến)

$\Rightarrow \widehat{E} = \widehat{P}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) cho $\widehat{N}_1 = \widehat{N}_2$, nghĩa là $\widehat{QMN} = \widehat{MNP}$ (đpcm)

BỘ ĐỀ 84

ĐỀ THI GIẢI LÊ QUÝ ĐÔN
QUẬN TÂN BÌNH, TP.HCM – NĂM HỌC 2002 – 2003

Bài 1: Cho biểu thức $A = \dfrac{x^4 + 2x^2 - 3}{3x^3 - x^2 - 3x + 1}$

1) Tìm điều kiện có nghĩa của A.

2) Tìm điều kiện của x để A âm.

Bài 2:

1) Giải phương trình: $\left(\dfrac{1}{3}x - 2\right)^3 + \left(\dfrac{3}{2}x - 7\right)^3 + (9 - x)^3 = 0$

2) Chứng minh rằng: $1 \le \dfrac{2(x^2 + x + 1)}{x^2 + 1} \le 3$

Bài 3:

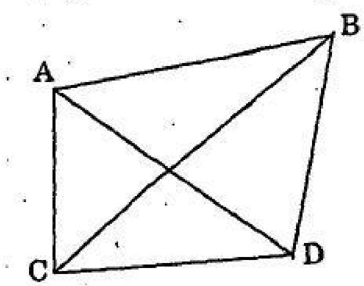
1) Cho hình bình hành ABCD. Gọi M là điểm bất kỳ di động trên cạnh CD và N là điểm bất kỳ di động trên cạnh BC sao cho BM = DN. Hai đường thẳng BM và DN cắt nhau tại P. Chứng minh PA là tia phân giác của góc BPD.

2) Cho tam giác ABC với AB = 4cm, AC = 8cm, BC = 6cm

Hai tia phân giác trong AD và BE cắt nhau tại O.

Chứng minh rằng đoạn thẳng nối điểm O với trọng tâm G của tam giác ABC song song với BC.

Bài 4: Có bốn ngôi làng A, B, C, D nằm ở vị trí như hình vẽ bên. Người ta cần xây dựng một ngôi chợ chung cho bốn làng đó. Hỏi phải xây dựng chợ ở vị trí nào để tổng quãng đường từ chợ đến bốn ngôi làng ngắn nhất.



HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $3x^3 - x^2 - 3x + 1 = x^2(3x - 1) - (3x - 1) = (3x - 1)(x^2 - 1)$
$= (3x - 1)(x + 1)(x - 1) \neq 0$

$\Leftrightarrow 3x - 1 \neq 0,\ x + 1 \neq 0,\ x - 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq \dfrac{1}{3},\ x \neq -1,\ x \neq 1.$

A có nghĩa $\Leftrightarrow x \neq \dfrac{1}{3},\ x \neq -1,\ x \neq 1$

2) $A = \dfrac{x^4 + 2x^2 - 3}{3x^3 - x^2 - 3x + 1} = \dfrac{(x^4 + 2x^2 + 1) - 4}{(3x - 1)(x^2 - 1)} = \dfrac{(x^2 + 1)^2 - 2^2}{(3x - 1)(x^2 + 1)}$

$$= \frac{(x^2+1+2)(x^2+1-2)}{(3x-1)(x^2-1)} = \frac{x^2+3}{3x-1}$$

$A < 0$ khi $3x - 1 < 0$, $x \neq \frac{1}{3}$, $x \neq \pm 1$

$\Leftrightarrow 3x < 1$, $x \neq \frac{1}{3}$, $x \neq \pm 1$ $\quad \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$ và $x \neq -1$

Vậy A âm khi $x < \frac{1}{3}$ và $x \neq -1$

Bài 2:

1) $\left(\frac{1}{3}x - 2\right)^3 + \left(\frac{3}{2}x - 7\right)^3 + (9 - x)^3 = 0$

$\left(\frac{1}{3}x - 2\right)^3 + \left(\frac{3}{2}x - 7\right)^3 + [(2 - \frac{1}{3}x) + (7 - \frac{2}{3}x)]^3 = 0$

$$\left(\frac{1}{3}x - 2\right)^3 + \left(\frac{3}{2}x - 7\right)^3 + (2 - \frac{1}{3}x)^3 + (7 - \frac{2}{3}x)^3 + 3(2 - \frac{1}{3}x)(7 - \frac{2}{3}x)$$
$$(2 - \frac{1}{3}x + 7 - \frac{2}{3}x) = 0$$

$3(2 - \frac{1}{3}x)(7 - \frac{2}{3}x)(9 - x) = 0$

$2 - \frac{1}{3}x = 0$ hoặc $7 - \frac{2}{3}x = 0$ hoặc $9 - x = 0$

$-\frac{1}{3}x = -2$ hoặc $-\frac{2}{3}x = -7$ hoặc $-x = -9$

$x = 6$ hoặc $x = \frac{21}{2}$ hoặc $x = 9$

Nghiệm của phương trình là $x = 6$; $x = \frac{21}{2}$; $x = 9$

b/ $\frac{2(x^2+x+1)}{x^2+1} = \frac{2x^2+x+1}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x^2+1} + \frac{x^2+2x+1}{x^2+1} = 1 + \frac{(x^2+1)^2}{x^2+1} \geq 1$

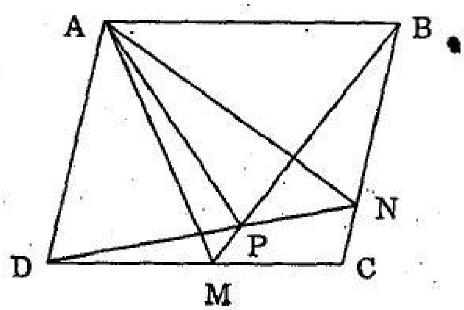
Mặt khác $\frac{2(x^2+x+1)}{x^2+1} = \frac{2x^2+2x+2}{x^2+1}$

$$= \frac{3x^2+3}{x^2+1} + \frac{-x^2+2x-1}{x^2+1} = 3 - \frac{(x^2+1)^2}{x^2+1} \leq 1$$

Vậy $1 \leq \frac{2(x^2+x+1)}{x^2+1} \leq 3$

Bài 3:

1) Gọi h, t lần lượt là độ dài đường cao ứng với cạnh AB, AD của hình bình hành ABCD.



Ta có: $S_{ABCD} = h.AB = t.AD$

mà $S_{ABCD} = \frac{1}{2}h.AB$ và $S_{NAD} = \frac{1}{2}t.AD$

Do đó: $S_{MAB} = S_{NAD}$

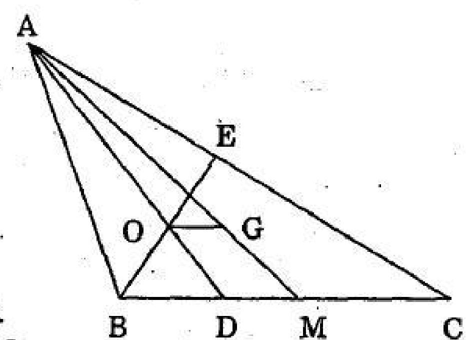
Mặt khác: BM = DN (gt)

nên độ dài các đường cao vẽ từ A đến BM và DN bằng nhau:

⇒ A thuộc tia phân giác của góc BPD

⇒ PA là tia phân giác của góc BPD .

2) ΔABC có AD là đường phân giác nên $\frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC}$



$\Rightarrow \frac{DB}{AB} = \frac{DB + DC}{AB + AC}$

Do đó $\frac{DB}{4} = \frac{6}{4+8}$

$\Rightarrow DB = 2cm$

ΔABC có BO là đường phân giác nên:

$\frac{OA}{AB} = \frac{OD}{DB} \Rightarrow \frac{OA}{AD} = \frac{AB}{DB} = 2cm$

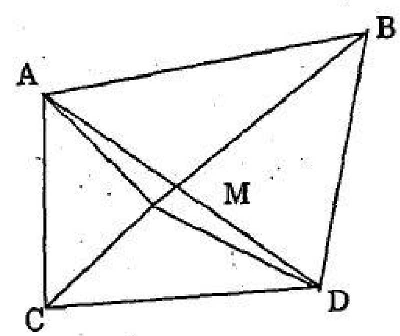
Gọi AM là đường trung tuyến của ΔABC.

⇒ G thuộc đoạn thẳng AM và AG = 2GM

Do đó $\frac{OA}{OD} = \frac{AG}{GM} (= 2)$, áp dụng định Talét lí đảo vào ΔADM, ta có OG//DM. Vậy OG // BC.

Bài 4:

Gọi M là vị trí chợ



Xét ba điểm M, A, D ta có: MA + MD ≥ BC

Xét ba điểm M, B, C ta có: MB + MC ≥ BC

Do đó MA + MB + MC + MD ≥ AD + BC, AD + BC không đổi

Dấu "=" xảy ra ⇔ $\begin{cases} \text{M nằm giữa A và D} \\ \text{M nằm giữa B và C} \end{cases}$

⇔ M là giao điểm của AD và BC.

Vậy M là giao điểm của AD và BC thì tổng khoảng cách từ chợ đến bốn ngôi làng ngắn nhất.

BỘ ĐỀ 85

ĐỀ THI GIẢI LÊ QUÝ ĐÔN – TRƯỜNG THCS LÊ QUÝ ĐÔN QUẬN 3, TP.HCM – NĂM HỌC 2002 – 2003

Bài 1: Chứng tỏ biểu thức sau đây dương với mọi $x \neq \pm 1$

$$A = \left[\left(\frac{1-x^3}{1-x}+x\right)\left(\frac{1+x^3}{1+x}-x\right)\right] : \frac{(1-x^2)^2}{1+x^2}$$

Bài 2: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a/ $4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2$ b/ $x^5 + x + 1$

Bài 3:

a/ Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$

b/ Giải phương trình ẩn x sau: $\frac{x-ab}{a+b} + \frac{x-bc}{b+c} + \frac{x-ca}{c+a} \geq a+b+c$

Bài 4: Cho hình chữ nhật ABCD, vẽ BH vuông góc với AC ($H \in AC$). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AH và CD. Chứng minh rằng: $BM \perp MN$.

Bài 5: Cho tam giác ABC nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Chứng minh rằng:

a/ $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$

b/ EB là tia phân giác của góc DEF.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

$$A = \left[\frac{(1-x)(1+x+x^2)}{1-x}+x\right]\left[\frac{(1-x)(1-x+x^2)}{1+x}-x\right] : \frac{(1-x^2)^2}{1+x^2}$$

$$= (1+x+x^2+x)(1-x+x^2-x) : \frac{[(1+x)(1-x)]^2}{1+x^2}$$

$$= (1+x)^2(1-x)^2 : \frac{(1+x)^2(1-x)^2}{1+x^2} = 1+x^2$$

Vì $x^2 \geq 0$. Do đó $A = 1 + x^2 > 0$

Bài 2:

a/ $4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2 = (2ab)^2 - (a^2+b^2-c^2)^2$

$= (2ab - a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2) = [(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2]$

$= (a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)$

b/ $x^5 + x + 1 = x^5 + x^4 + x^3 - x^4 - x^3 - x^2 + x^2 + x + 1$

$= x^3(x^2+x+1) - x^2(x^2+x+1) + 1(x^2+x+1)$

$= (x^2+x+1)(x^3 - x^2 + 1)$