

nhóm các phân thức mà không phải quy đồng các mẫu. Ví dụ phải thực hiện phép tính sau:

$$\begin{aligned} & \frac{x^3}{x-1} - \frac{x^2}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \\ &= \left( \frac{x^3}{x-1} - \frac{1}{x-1} \right) - \left( \frac{x^2}{x+1} - \frac{1}{x+1} \right) \\ &= \frac{x^3-1}{x-1} - \frac{x^2-1}{x+1} \quad \text{TXĐ: } x \neq \pm 1 \\ &= \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} - \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} \\ &= x^2+x+1 - (x-1) = x^2+2. \end{aligned}$$

### Bài 13

a) Chứng minh đẳng thức:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

b) Áp dụng kết quả trên để tính tổng:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{x^2+3x+2} + \frac{1}{x^2+5x+6} + \frac{1}{x+3}; \\ B &= \frac{2}{x(x+2)} + \frac{2}{(x+2)(x+4)} + \frac{2}{(x+4)(x+6)} + \frac{1}{x+6}. \end{aligned}$$

#### • Tìm hiểu đề bài

Đề bài yêu cầu chứng minh đẳng thức đã cho, sau đó áp dụng kết quả để tính tổng các phân thức A và B đã cho.

#### • Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, ta biến đổi vế phải, chính là làm phép trừ hai phân thức không cùng mẫu, để có kết quả bằng vế trái.

Với câu b, vận dụng kết quả câu a, giúp cho việc làm phép cộng các phân thức không cùng mẫu đã cho một cách nhanh chóng.

● Cách giải

a) Biến đổi vế phải

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$$

Vế trái bằng vế phải, đẳng thức được chứng minh.

b) - Ta thấy mẫu của biểu thức A là các đa thức, để áp dụng được kết quả câu a, cần phân tích các mẫu thành nhân tử:

$$x^2 + x = x(x+1)$$

$$x^2 + 3x + 2 = x^2 + x + 2x + 2 = x(x+1) + 2(x+1) = (x+1)(x+2)$$

$$x^2 + 5x + 6 = x^2 + 2x + 3x + 6 = x(x+2) + 3(x+2) = (x+2)(x+3)$$

Do đó có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{x+3} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

- Ta nhận thấy:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} = \frac{x+2-x}{x(x+2)} = \frac{2}{x(x+2)}$$

$$\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} = \frac{x+4-x-2}{(x+2)(x+4)} = \frac{2}{(x+2)(x+4)}$$

$$\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} = \frac{x+6-x-4}{(x+4)(x+6)} = \frac{2}{(x+4)(x+6)}$$

Do đó có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{2}{x(x+2)} + \frac{2}{(x+2)(x+4)} + \frac{2}{(x+4)(x+6)} + \frac{1}{x+6} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

### Bài 14

a) Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức

$$A = \frac{2x+1}{4x-2} + \frac{1-2x}{4x+2} - \frac{2}{1-4x^2} \quad \text{với } x = \frac{1}{4},$$

$$\text{với } x = -\frac{1}{2}.$$

b) Biết rằng  $2x - y = 7$ , hãy tính giá trị của biểu thức

$$B = \frac{5x-y}{3x+7} - \frac{3y-2x}{2y-7}.$$

#### • Tìm hiểu đề bài

Đề bài câu a cho biểu thức A gồm cộng, trừ các phân thức không cùng mẫu. Phải quy đồng mẫu, làm các phép tính rồi tính giá trị theo biến x đã cho.

Câu b cho biểu thức B gồm hiệu của 2 phân thức, phải tính giá trị của B biết  $2x - y = 7$ .

#### • Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, trước hết phải tìm mẫu chung của các phân thức, sau đó rút gọn các phân thức, chú ý tìm TXĐ của các phân thức, cuối cùng là tính giá trị của A theo các biến đã cho.

Với câu b hãy thay  $7 = 2x - y$  vào các mẫu của 2 phân thức đã cho, từ đó có kết quả bài toán.

• Cách giải

$$\begin{aligned}
 \text{a) } A &= \frac{2x+1}{4x-2} + \frac{1-2x}{4x+2} - \frac{2}{1-4x^2} \\
 &= \frac{2x+1}{2(2x-1)} + \frac{1-2x}{2(2x+1)} + \frac{2}{(2x-1)(2x+1)} \\
 &= \frac{(2x+1)^2 - (2x-1)^2 + 4}{2(2x-1)(2x+1)} \\
 &= \frac{(2x+1+2x-1)(2x+1-2x+1) + 4}{2(2x-1)(2x+1)} \\
 &= \frac{8x+4}{2(2x-1)(2x+1)} = \frac{4(2x+1)}{2(2x-1)(2x+1)}, \text{ TXD: } x \neq \pm \frac{1}{2} \\
 &= \frac{2}{2x-1}
 \end{aligned}$$

Với  $x = \frac{1}{4}$  thì  $A = \frac{2}{2 \cdot \frac{1}{4} - 1} = \frac{2}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{2}{-\frac{1}{2}} = -4$

Với  $x = -\frac{1}{2} \notin \text{TXD}$ , nên không có giá trị của A.

b) Thay  $7 = 2x - y$  vào mẫu của 2 phân thức có:

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{5x-y}{3x+(2x-y)} - \frac{3y-2x}{2y-(2x-y)} \\
 &= \frac{5x-y}{5x-y} - \frac{3y-2x}{3y-2x}, \text{ TXD: } x \neq \frac{1}{5}y, x \neq \frac{3}{2}y
 \end{aligned}$$

$$= 1 - 1 = 0.$$

• Khai thác bài toán

- Trong câu a bài toán trên đã áp dụng quy tắc đổi dấu:

$$- \frac{-A}{B} = \frac{A}{B}$$

$$- \frac{A}{-B} = \frac{A}{B}$$

$$\begin{aligned} \text{Cụ thể là } & + \frac{1 - 2x}{4x + 2} = - \frac{-(1 - 2x)}{4x + 2} = - \frac{2x - 1}{4x + 2} \\ & - \frac{2}{1 - 4x^2} = - \left( - \frac{2}{-(1 - 4x^2)} \right) = \frac{2}{4x^2 - 1} \end{aligned}$$

Lưu ý là việc đổi dấu một phân thức giúp cho việc tìm mẫu chung của các phân thức thêm nhanh chóng.

- Ở câu b, ta có thể giải bài toán theo một cách khác là thay  $2x - y = 7$  vào các tử bằng cách viết lại các tử để xuất hiện đa thức  $2x - y$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } B &= \frac{5x - y}{3x + 7} - \frac{3y - 2x}{2y - 7} \\ &= \frac{3x + (2x - y)}{3x + 7} - \frac{2y - (2x - y)}{2y - 7} \\ &= \frac{3x + 7}{3x + 7} - \frac{2y - 7}{2y - 7} = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

### Bài 15

a) Thực hiện phép tính rồi tìm các giá trị của biến để biểu thức

$$A = (x^2 - y^2) \cdot \frac{x^2 + y^2}{y^4 - x^2y^2} \text{ có giá trị âm.}$$

b) Thực hiện phép tính rồi tìm các giá trị của biến để biểu thức

$$B = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 - 1} \cdot \frac{2x^2 + 2x + 2}{x - 1} \text{ có giá trị dương.}$$

#### • Tìm hiểu đề bài

Đề bài câu a là phép nhân một đa thức với một phân thức. Sau khi nhân, tìm các giá trị của biến để  $A < 0$ .

Câu b là phép nhân một phân thức với một phân thức. Sau khi nhân, tìm các giá trị của biến để  $B > 0$ .

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, cần áp dụng quy tắc  $A \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{D}$ , rồi phân tích mẫu thành nhân tử, rút gọn phân thức thỏa mãn TXĐ của nó.

Với câu b, cần áp dụng quy tắc  $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$ , rồi phân tích tử và mẫu thành nhân tử, rút gọn phân thức thỏa mãn TXĐ của nó.

● **Cách giải**

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= (x^2 - y^2) \cdot \frac{x^2 + y^2}{y^4 - x^2 y^2} = \frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{y^2(y^2 - x^2)} \\ &= - \frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{y^2(x^2 - y^2)} = - \frac{x^2 + y^2}{y^2} \end{aligned}$$

TXĐ:  $y \neq 0$ ;  $x \neq \pm y$ .

Ta thấy, do  $y \neq 0$  nên  $y^2 > 0$ ; do  $x^2 + y^2 > 0$  nên suy ra

$$- \frac{x^2 + y^2}{y^2} < 0.$$

Vậy biểu thức A đã cho có giá trị âm với mọi giá trị của biến thuộc tập xác định, tức là  $y \neq 0$ ;  $x \neq \pm y$ .

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 - 1} \cdot \frac{2x^2 + 2x + 2}{x - 1} \\ &= \frac{(x + 1)^2}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} \cdot \frac{2(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \frac{2(x + 1)^2}{(x - 1)^2} \end{aligned}$$

$$(\text{Vì } x^2 + x + 1 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \neq 0)$$

TXĐ:  $x \neq 1$

Ta thấy, do  $x \neq 1$  nên  $(x - 1)^2 > 0$ , và với  $x \neq -1$  thì  $(x + 1)^2 > 0$  nên  $2(x + 1)^2 > 0$ , suy ra  $\frac{2(x + 1)^2}{(x - 1)^2} > 0$

Vậy biểu thức B đã cho có giá trị dương với mọi giá trị của biến thuộc tập xác định, tức là  $x \neq \pm 1$ .

● **Khai thác bài toán**

Nhận xét thêm về các biến:

- Với câu a, điều kiện để biểu thức A đã cho có giá trị âm là  $y \neq 0, x \neq \pm y$ . Nhưng điều kiện để biểu thức rút gọn  $-\frac{x^2 + y^2}{y^2}$  có giá trị âm chỉ là  $y \neq 0$ .

- Với câu b, điều kiện để biểu thức B đã cho có giá trị không âm (tức là lớn hơn hoặc bằng 0) là  $x \neq 1$ . Nhưng để biểu thức rút gọn  $\frac{2(x+1)^2}{(x-1)^2}$  có giá trị dương là  $x \neq -1$ .

**Bài 16.** Chứng minh các đẳng thức sau:

$$a) \frac{a + b + c}{(a + b)^2 - c(a + b)} \cdot \frac{2a + 2b}{a^2 + 2ab + b^2 - c^2} = \frac{2}{(a + b - c)^2}$$

$$b) \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 6} \cdot \frac{x^2 + x - 12}{x^2 + 3x - 4} = \frac{y^2 - 2y - 15}{y^2 - 3y - 10} \cdot \frac{y^2 - 4}{y^2 + y - 6}$$

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài yêu cầu chứng minh đẳng thức, có thể biến đổi vế này sao cho bằng vế kia, hoặc biến đổi cả hai vế để cùng bằng một số nào đó. Ở câu b vế trái chứa biến  $x$  còn vế phải lại chứa biến  $y$ .

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, hãy biến đổi vế trái để được một biểu thức bằng vế phải.

Với câu b, hãy biến đổi cả hai vế (vì hai vế có biến khác nhau) để chúng cùng bằng một số nào đó.

• Cách giải

a) Biến đổi vế trái:

$$\begin{aligned} & \frac{a + b + c}{(a + b)^2 - c(a + b)} \cdot \frac{2a + 2b}{a^2 + 2ab + b^2 - c^2} \\ &= \frac{a + b + c}{(a + b)(a + b - c)} \cdot \frac{2(a + b)}{(a + b)^2 - c^2} \\ &= \frac{(a + b + c) \cdot 2(a + b)}{(a + b)(a + b - c)(a + b + c)(a + b - c)} = \frac{2}{(a + b - c)^2} \end{aligned}$$

Vế trái bằng vế phải, đẳng thức được chứng minh.

b) Biến đổi vế trái:

$$\begin{aligned} & \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 6} \cdot \frac{x^2 + x - 12}{x^2 + 3x - 4} \\ &= \frac{(x^2 - 1) + (x - 1)}{(x^2 - 4) - (x + 2)} \cdot \frac{(x^2 - 9) + (x - 3)}{(x^2 - x) + (4x - 4)} \\ &= \frac{(x - 1)(x + 2)}{(x + 2)(x - 3)} \cdot \frac{(x - 3)(x + 4)}{(x - 1)(x + 4)} = 1. \end{aligned}$$

Biến đổi vế phải:

$$\begin{aligned} & \frac{y^2 - 2y - 15}{y^2 - 3y - 10} \cdot \frac{y^2 - 4}{y^2 + y - 6} \\ &= \frac{y^2 - 5y + 3y - 15}{y^2 - 5y + 2y - 10} \cdot \frac{y^2 - 2^2}{y^2 - 4 + y - 2} \\ &= \frac{y(y - 5) + 3(y - 5)}{y(y - 5) + 2(y - 5)} \cdot \frac{(y + 2)(y - 2)}{(y^2 - 4) + (y - 2)} \\ &= \frac{(y - 5)(y + 3)}{(y - 5)(y + 2)} \cdot \frac{(y + 2)(y - 2)}{(y - 2)(y + 3)} = 1. \end{aligned}$$



Vế trái bằng vế phải vì cùng bằng 1, đẳng thức được chứng minh.

● **Khai thác bài toán**

- Bài toán câu b, có thể ra cách khác như sau:

Chứng minh rằng các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến:

$$a) A = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 6} \cdot \frac{x^2 + x - 12}{x^2 + 3x - 4};$$

$$b) B = \frac{y^2 - 2y - 15}{y^2 - 3y - 10} \cdot \frac{y^2 - 4}{y^2 + y - 6}.$$

Hãy nêu nhận xét về hai biểu thức A và B.

- Cũng ở câu b này, có thể nêu ra nhận xét về phân tích đa thức thành nhân tử, chẳng hạn:

Với  $y^2 - 2y - 15$ , không thể đặt nhân tử chung, nhóm số hạng hoặc dùng hằng đẳng thức, mà phải thêm bớt hạng tử. Thêm và bớt thế nào? Hãy để ý đến 15 có các ước là 3 và 5, từ đó có  $y^2 - 2y - 15 = y^2 - 5y + 3y - 15$ .

Với  $y^2 - 3y - 10$  cũng vậy, để ý đến 10 có các ước là 2 và 5, từ đó có  $y^2 - 3y - 10 = y^2 - 5y + 2y - 10$ .

Với  $y^2 + y - 6$  có thể:

a) Thêm  $2y$ , bớt  $2y$ , có:

$$y^2 - 2y + 3y - 6 = y(y - 2) + 3(y - 2) = (y - 2)(y + 3)$$

b) Tách hạng tử 6, có:

$$y^2 - 4 + y - 2 = (y - 2)(y + 2) + (y - 2) = (y - 2)(y + 3).$$

**Bài 17.** Thực hiện các phép tính sau:

$$a) \frac{5x + 5y}{3x - 3y} : \frac{10x}{x^2 - y^2}; \quad b) \frac{x - 2}{x + 2} : \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + 2x + 4};$$

$$c) \frac{x - y}{x} : \frac{x^2 - 2xy + y^2}{xy}; \quad d) \frac{1 - x^4}{x + 1} : (x^2 - 1).$$

● **Tim hiểu đề bài**

Đề bài yêu cầu thực hiện phép chia phân thức cho phân thức.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Cần áp dụng quy tắc sau:

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} \quad (\text{với } \frac{C}{D} \neq 0)$$

$$\frac{A}{B} : C = \frac{A}{B \cdot C} \quad (\text{với } C \neq 0).$$

Để có thể thực hiện các quy tắc trên cần biến đổi tử và mẫu thành nhân tử. Chú ý khi rút gọn cần lưu ý đến biến phải thuộc TXD.

● **Cách giải**

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{5x + 5y}{3x - 3y} : \frac{10x}{x^2 - y^2} &= \frac{5(x + y)}{3(x - y)} : \frac{10x}{(x + y)(x - y)} \\ &= \frac{5(x + y)}{3(x - y)} \cdot \frac{(x + y)(x - y)}{10x} = \frac{(x + y)^2}{6x}. \end{aligned}$$

TXD:  $x \neq \pm y$ ;  $x \neq 0$ .

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{x - 2}{x + 2} : \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + 2x + 4} &= \frac{x - 2}{x + 2} : \frac{(x - 2)^2}{(x + 2)^2} \\ &= \frac{x - 2}{x + 2} \cdot \frac{(x + 2)^2}{(x - 2)^2} = \frac{x + 2}{x - 2}. \end{aligned}$$

TXD:  $x \neq \pm 2$ .

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{x - y}{x} : \frac{x^2 - 2xy + y^2}{xy} &= \frac{x - y}{x} : \frac{(x - y)^2}{xy} \\ &= \frac{x - y}{x} \cdot \frac{xy}{(x - y)^2} = \frac{y}{x - y}. \end{aligned}$$

TXD:  $x \neq 0$ ;  $y \neq 0$ ;  $x \neq y$ .

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{1-x^4}{x+1} : (x^2-1) &= \frac{-(x^4-1)}{x+1} : (x^2-1) = \\ &= \frac{-(x^2-1)(x^2+1)}{x+1} : (x^2-1) = -\frac{x^2+1}{x+1}. \end{aligned}$$

TXD:  $x \neq \pm 1$ .

● Khai thác bài toán

Vấn đề đặt ra là làm thế nào mà biết kết quả tìm được là đúng?  
Câu trả lời là: hãy thử lại.

Ta thử lại với câu a chẳng hạn:

$$\frac{10x}{x^2-y^2} \cdot \frac{(x+y)^2}{6x} = \frac{10x(x+y)(x+y)}{6x(x+y)(x-y)} = \frac{5(x+y)}{3(x-y)} = \frac{5x+5y}{3x-3y}$$

Qua thử lại, ta tìm được phân thức bị chia  $\frac{5x+5y}{3x-3y}$ .

Bài 18. Chứng minh các đẳng thức:

$$\text{a) } \left[ \frac{1}{a-1} - \frac{2a}{(a^2+1)(a-1)} \right] : \frac{a^2+a+1}{a^2+1} = \frac{a-1}{a^2+a+1} \text{ với } a \neq 1;$$

$$\text{b) } \left( \frac{1-x^3}{1-x} - x \right) : \frac{1+x}{1-x-x^2+x^3} = (1-x)^2(1+x^2)$$

với  $x \neq \pm 1$ .

● Tìm hiểu đề bài

Đề bài đòi hỏi hãy biến đổi vế trái bằng vế phải, ngầm hiểu vế phải là đáp số của biểu thức ở vế trái.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Cần phải thực hiện các phép tính ở vế trái theo thứ tự: làm tính trong ngoặc, trong móc vuông trước, ở đó phép tính nhân và chia làm trước rồi mới làm phép tính cộng trừ.

● Cách giải

a) Biến đổi vế trái:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{a-1} - \frac{2a}{(a^2+1)(a-1)} \right] : \frac{a^2+a+1}{a^2+1} \\ &= \left[ \frac{a^2+1}{(a^2+1)(a-1)} - \frac{2a}{(a^2+1)(a-1)} \right] : \frac{a^2+a+1}{a^2+1} \\ &= \frac{a^2-2a+1}{(a^2+1)(a-1)} : \frac{a^2+a+1}{a^2+1} \\ &= \frac{(a-1)^2}{(a^2+1)(a-1)} \cdot \frac{a^2+1}{a^2+a+1} = \frac{a-1}{a^2+a+1} \end{aligned}$$

Vế trái bằng vế phải, đẳng thức được chứng minh.

b) Biến đổi vế trái:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1-x^3}{1-x} - x \right) : \frac{1+x}{1-x-x^2+x^3} \\ &= \left[ \frac{(1-x)(1+x+x^2)}{1-x} - x \right] : \frac{1+x}{(1+x^3)-x(1+x)} \\ &= (1+x+x^2-x) : \frac{1+x}{(1+x)(1-x+x^2)-x(1+x)} \\ &= (1+x^2) : \frac{1+x}{(1+x)(1-x+x^2-x)} \\ &= (1+x^2) : \frac{1}{(1-x)^2} = (1+x^2) \cdot (1-x)^2 \end{aligned}$$

● Khai thác bài toán

Biết rằng, nếu có  $A = B$  thì có  $A - B = 0$ . Do đó để chứng minh hai đẳng thức đã cho có thể chứng minh hai đẳng thức sau:

$$a) \left[ \frac{1}{a-1} - \frac{2a}{(a^2+1)(a-1)} \right] : \frac{a^2+a+1}{a^2+1} - \frac{a-1}{a^2+a+1} = 0;$$

$$b) \left( \frac{1-x^3}{1-x} - x \right) : \frac{1+x}{1-x-x^2+x^3} - (1-x)^2(1+x^2) = 0.$$

Coi đây như 2 bài tập, bạn đọc hãy tự làm.

## B. CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

### ĐỀ BÀI

**Bài 19.** Cho phân thức  $A = \frac{3x^2 + 3x - 18}{x^2 + 4x + 3}$ .

- Tìm tập xác định của phân thức;
- Tìm giá trị của  $x$  để phân thức bằng 0.

**Bài 20.** Viết các biểu thức sau dưới dạng những phân thức có cùng tử:

a)  $\frac{x+y}{y}$  và  $\frac{x-y}{x}$  ;

b)  $\frac{x^3+y^3}{(x^2+y^2-xy)y}$  và  $\frac{x+y}{x}$ .

**Bài 21.** Tìm giá trị nguyên của  $x$  để phân thức sau có giá trị là một số nguyên. Tìm giá trị nguyên đó của phân thức.

a)  $A = \frac{5x+19}{x+2}$  ;      b)  $B = \frac{2x^3-9x^2+10x+4}{2x-1}$

**Bài 22.** Rút gọn các phân thức sau:

a)  $\frac{x^6-1}{(x-1)(2x^2+4x+2)}$  ;      b)  $\frac{x^3-4x^2-x+4}{x^3-7x^2+14x-8}$

**Bài 23.** Giải các phương trình sau:

a)  $\frac{9x + 7}{2} - (x - \frac{x - 2}{7}) = 36;$

b)  $\frac{x - 1}{4} - \frac{1}{8} (\frac{x - 5}{4} - \frac{14 - 2x}{5}) = \frac{x - 9}{2} - \frac{7}{8}.$

**Bài 24.** Rút gọn rồi tính giá trị biểu thức:

$$\frac{(x - y)^2 + xy}{(x + y)^2 - xy} \cdot \left[ 1 : \frac{x^5 + y^5 + x^3y^2 + x^2y^3}{(x^3 - y^3)(x^3 + y^3 + x^2y + xy^2)} \right]$$

với  $x = 1, y = -3,25.$

**Bài 25.** Cho biểu thức:

$$A = \left( \frac{x + 1}{x - 1} - \frac{x - 1}{x + 1} \right) : \frac{2x}{5x - 5}.$$

a) Rút gọn A;

b) Tính giá trị của biểu thức A với  $x = -3,5;$

c) Với giá trị nào của x để  $A = 4?$

## HƯỚNG DẪN - CÁCH GIẢI

**Bài 19.** ● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, hãy giải phương trình  $x^2 + 4x + 3 = 0$  để tìm giá trị của biến, sau đó để phân thức có nghĩa thì  $x^2 + 4x + 3$  phải khác 0, từ đó có TXĐ.

Với câu b, để tìm các giá trị của x sao cho phân thức bằng 0 cần giải phương trình  $3x^2 + 3x - 18 = 0.$

● Cách giải

a)  $x^2 + 4x + 3 = x^2 + x + 3x + 3 = (x^2 + x) + (3x + 3)$   
 $= x(x + 1) + 3(x + 1) = (x + 1)(x + 3) = 0$  khi

$x = -1$  hoặc  $x = -3$

Vậy TXĐ:  $x \neq -1; x \neq -3.$

$$\begin{aligned} \text{b) } 3x^2 + 3x - 18 &= 3(x^2 + x - 6) = 3(x^2 - 4 + x - 2) \\ &= 3[(x^2 - 4) + (x - 2)] = 3(x - 2)(x + 3) = 0 \end{aligned}$$

khi  $x = 2$  hoặc  $x = -3$ .

$$\text{Vì } x = -3 \notin \text{TXĐ nên chỉ có } x = 2 \text{ thì } \frac{3x^2 + 3x - 18}{x^2 + 4x + 3} = 0.$$

### Bài 20. • Hướng dẫn cách tìm lời giải

Vận dụng tính chất cơ bản của phân thức để biến phân thức đã cho thành phân thức mới có tử phù hợp.

#### • Cách giải

$$\text{a) } \frac{x + y}{y} = \frac{(x + y)(x - y)}{y(x - y)} = \frac{x^2 - y^2}{y(x - y)}$$

$$\text{và } \frac{x - y}{x} = \frac{(x - y)(x + y)}{x(x + y)} = \frac{x^2 - y^2}{x(x + y)}$$

Ta được hai phân thức cùng tử.

$$\text{b) } \frac{x^3 + y^3}{(x^2 + y^2 - xy)y} = \frac{(x + y)(x^2 - xy + y^2)}{(x^2 + y^2 - xy)y} = \frac{x + y}{y}$$

Như vậy  $\frac{x + y}{y}$  và  $\frac{x + y}{x}$  là hai phân thức có cùng tử.

### Bài 21. • Hướng dẫn cách tìm lời giải

Thực hiện phép chia tử cho mẫu để tách được phân nguyên của phân thức. Muốn phân thức có giá trị nguyên thì phân thức di sau phân nguyên phải là số nguyên. Từ đó lập bảng tìm các giá trị  $x$  nguyên và giá trị nguyên của phân thức.

#### • Cách giải

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{5x + 19}{x + 2} = \frac{5(x + 2) + 9}{x + 2} = \frac{5(x + 2)}{x + 2} + \frac{9}{x + 2} \\ &= 5 + \frac{9}{x + 2} \end{aligned}$$

Do  $x$  là số nguyên nên  $A$  là số nguyên nếu  $x + 2$  là ước của 9. Ước của 9 là  $\pm 1, \pm 3, \pm 9$ . Do đó:

|         |    |    |    |   |     |   |
|---------|----|----|----|---|-----|---|
| $x + 2$ | -1 | 1  | -3 | 3 | -9  | 9 |
| $x$     | -3 | -1 | -5 | 1 | -11 | 7 |
| $A$     | -4 | 14 | 2  | 8 | 4   | 6 |

b) Thực hiện phép chia  $2x^3 - 9x^2 + 10x + 4$  cho  $2x - 1$  được thương là  $x^2 - 4x + 3$  và dư 7.

$$\text{Từ đó có } B = x^2 - 4x + 3 + \frac{7}{2x - 1}.$$

Do  $x$  là số nguyên nên  $B$  là số nguyên nếu  $2x - 1$  là ước của 7. Ước của 7 là  $\pm 1; \pm 7$ . Do đó:

|          |    |   |    |   |
|----------|----|---|----|---|
| $2x - 1$ | -1 | 1 | -7 | 7 |
| $x$      | 0  | 1 | -3 | 4 |
| $B$      | -4 | 7 | 23 | 4 |

### Bài 22. ● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Xem hướng dẫn bài 6 mục "Phân thức đại số và các phép tính".

#### ● Cách giải

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{x^6 - 1}{(x - 1)(2x^2 + 4x + 2)} &= \frac{(x^2)^3 - 1}{(x - 1)2(x^2 + 2x + 1)} \\ &= \frac{(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)}{2(x - 1)(x + 1)^2} = \frac{(x - 1)(x + 1)(x^4 + x^2 + 1)}{2(x - 1)(x + 1)^2} \\ &= \frac{x^4 + x^2 + 1}{2(x + 1)} \end{aligned}$$

TXD:  $x \neq \pm 1$ .



$$\begin{aligned}
\text{b) } \frac{x^3 - 4x^2 - x + 4}{x^3 - 7x^2 + 14x - 8} &= \frac{(x^3 - 4x^2) - (x - 4)}{(x^3 - 8) - (7x^2 - 14x)} \\
&= \frac{x^2(x - 4) - (x - 4)}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4) - 7x(x - 2)} = \frac{(x - 4)(x^2 - 1)}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4 - 7x)} \\
&= \frac{(x - 4)(x - 1)(x + 1)}{(x - 2)(x^2 - 5x + 4)} = \frac{(x - 4)(x - 1)(x + 1)}{(x - 2)(x^2 - x - 4x + 4)} \\
&= \frac{(x - 4)(x - 1)(x + 1)}{(x - 2)[x(x - 1) - 4(x - 1)]} = \frac{(x - 4)(x - 1)(x + 1)}{(x - 2)(x - 1)(x - 4)} = \\
&= \frac{x + 1}{x - 2}.
\end{aligned}$$

TXĐ:  $x \neq 1$ ;  $x \neq 2$ ;  $x \neq 4$ .

### Bài 23. • Hướng dẫn cách tìm lời giải

Trước hết hãy thực hiện phép tính trong dấu ngoặc, sau đó quy đồng mẫu rồi khử mẫu. Chuyển vế rồi thực hiện các phép tính để tìm nghiệm.

#### • Cách giải

$$\text{a) } \frac{9x + 7}{2} - \left(x - \frac{x - 2}{7}\right) = 36$$

$$\frac{9x + 7}{2} - \frac{7x - x + 2}{7} = 36$$

$$\frac{9x + 7}{2} - \frac{6x + 2}{7} = 36$$

$$7(9x + 7) - 2(6x + 2) = 36 \cdot 14$$

$$63x + 49 - 12x - 4 = 504$$

$$63x - 12x = 504 - 49 + 4$$

$$\text{hay } 51x = 459; \quad x = 9$$

$$b) \frac{x-1}{4} - \frac{1}{8} \left( \frac{x-5}{4} - \frac{14-2x}{5} \right) = \frac{x-9}{2} - \frac{7}{8}$$

$$\frac{x-1}{4} - \frac{1}{8} \cdot \frac{5x-25-56+8x}{20} = \frac{x-9}{2} - \frac{7}{8}$$

$$\frac{x-1}{4} - \frac{13x-81}{160} = \frac{x-9}{2} - \frac{7}{8}$$

$$40x - 40 - 13x + 81 = 80x - 720 - 140;$$

$$40x - 13x - 80x = -720 - 140 - 81 + 40;$$

$$53x = 901; \quad x = \frac{901}{53} = 17.$$

#### Bài 24. • Hướng dẫn cách tìm lời giải

Có thể đặt A là biểu thức bị nhân và đặt B là biểu thức nhân (trong móc vuông). Nên thực hiện riêng từng biểu thức A, B rồi ghép lại để có kết quả rút gọn của bài toán.

##### • Cách giải

$$A = \frac{(x-y)^2 + xy}{(x+y)^2 - xy} = \frac{x^2 - 2xy + y^2 + xy}{x^2 + 2xy + y^2 - xy} = \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2}$$

$$\begin{aligned} B &= 1 : \frac{x^5 + y^5 + x^3y^2 + x^2y^3}{(x^3 - y^3)(x^3 + y^3 + x^2y + xy^2)} \\ &= 1 : \frac{(x^5 + x^3y^2) + (x^2y^3 + y^5)}{(x^3 - y^3)[(x^3 + x^2y) + (xy^2 + y^3)]} \\ &= 1 : \frac{x^3(x^2 + y^2) + y^3(x^2 + y^2)}{(x^3 - y^3)[x^2(x+y) + y^2(x+y)]} \\ &= 1 : \frac{(x^2 + y^2)(x^3 + y^3)}{(x^3 - y^3)(x+y)(x^2 + y^2)} \\ &= 1 : \frac{(x^2 + y^2)(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{(x-y)(x^2 + xy + y^2)(x+y)(x^2 + y^2)} \end{aligned}$$

$$= 1 : \frac{x^2 - xy + y^2}{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}$$

$$= \frac{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}{x^2 - xy + y^2}$$

$$\text{Vậy } A \cdot B = \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2} \cdot \frac{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}{x^2 - xy + y^2} = x - y.$$

Tính giá trị:

$$x - y = 1 - (-3,25) = 1 + 3,25 = 4,25.$$

### Bài 25. • Hướng dẫn cách tìm lời giải

Để rút gọn cần thực hiện phép tính trong dấu ngoặc trước, sau đó làm phép chia. Chú ý đến TXĐ.

Để tìm  $x$  cần phải giải phương trình mà vế trái là biểu thức đã được rút gọn và vế phải bằng 4. Giá trị tìm được phải thuộc TXĐ.

#### • Cách giải

a) Rút gọn A

$$A = \left( \frac{x + 1}{x - 1} - \frac{x - 1}{x + 1} \right) : \frac{2x}{5x - 5}$$

$$= \frac{(x + 1)^2 - (x - 1)^2}{(x - 1)(x + 1)} : \frac{2x}{5(x - 1)}$$

$$= \frac{(x + 1 + x - 1)(x + 1 - x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} \cdot \frac{5(x - 1)}{2x}$$

$$= \frac{4x}{(x - 1)(x + 1)} \cdot \frac{5(x - 1)}{2x} = \frac{10}{x + 1}.$$

TXĐ:  $x \neq 0$ ;  $x \neq \pm 1$ .

b) Tính giá trị của A

$$A = \frac{10}{x + 1} = \frac{10}{-3,5 + 1} = \frac{10}{-2,5} = -4.$$

c) Tìm giá trị của  $x$  để  $A = 4$ .

$$\frac{10}{x+1} = 4 \Leftrightarrow 4x + 4 = 10 \Leftrightarrow 4x = 6 \Leftrightarrow x = 1,5.$$

$$x = 1,5 \in \text{TXD}.$$

## IV. HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

### A. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

#### ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN

**Bài 1.** Cho biết  $x$  và  $y$  là hai đại lượng tỉ lệ thuận.

a) Điền số thích hợp vào các ô trống trong bảng sau:

|     |     |   |    |   |    |
|-----|-----|---|----|---|----|
| $x$ | 0,5 | 1 |    | 3 |    |
| $y$ | -1  |   | -4 |   | -8 |

b)  $y$  tỉ lệ thuận với  $x$  theo hệ số tỉ lệ nào? viết công thức.

c)  $x$  tỉ lệ thuận với  $y$  theo hệ số tỉ lệ nào? viết công thức.

#### ● Tìm hiểu đề bài

Đề bài câu a cho một số giá trị của  $x$  và  $y$  ở trong bảng, biết  $x$  và  $y$  là hai đại lượng tỉ lệ thuận, phải điền tiếp các số vào các ô trống trong bảng.

Câu b cho  $y$  tỉ lệ thuận với  $x$ , phải tìm hệ số tỉ lệ  $a$  theo các giá trị có trên bảng, sau đó viết công thức về mối tương quan giữa  $y$  và  $x$ .

Câu c, tương tự như câu b với  $x$  tỉ lệ thuận với  $y$ .

#### ● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, biết rằng  $x$  và  $y$  là hai đại lượng tỉ lệ thuận với nhau

tức là chúng liên hệ với nhau theo công thức  $y = ax$  (1) trong đó  $a$  là hệ số tỉ lệ. Từ (1) suy ra  $a = \frac{y}{x}$  (2). Căn cứ vào hai giá trị của  $x$ ,  $y$  ở cột thứ nhất suy ra  $a = \frac{-1}{0,5} = -2$ . Từ đó tính được giá trị của  $y$  ở cột 3 và cột 5 theo công thức (1). Muốn tìm giá trị của  $x$  ở cột 4 và cột 6 cần biến đổi công thức (1), ta có  $x = \frac{y}{a}$  (3).

Với câu b, biết  $y$  tỉ lệ thuận với  $x$  tức là có  $y = ax$ , hãy căn cứ vào một cặp giá trị bất kì của  $x$ ,  $y$  có trong bảng để tìm hệ số tỉ lệ  $a$ , từ đó viết được công thức.

Với câu c, làm tương tự câu b.

● **Cách giải**

a) Biết  $x$  và  $y$  là hai đại lượng tỉ lệ thuận tức là chúng liên hệ với nhau theo công thức  $y = ax$  (1).

Từ (1) suy ra  $a = \frac{y}{x}$  (2). Thay  $x$ ,  $y$  bởi cặp giá trị ở cột 1 trong bảng, ta có  $a = \frac{-1}{0,5} = -2$ . Do đó:

$$\text{Giá trị của } y \text{ ở cột 3 là } y_3 = a \cdot x = -2 \cdot 1 = -2$$

$$\text{Giá trị của } y \text{ ở cột 5 là } y_5 = a \cdot x = -2 \cdot 3 = -6.$$

Từ (1) suy ra  $x = \frac{y}{a}$  (3). Thay giá trị của  $y$  ở cột 4, cột 6 lần lượt vào (3) với  $a = -2$ , có:

$$\text{Giá trị của } x \text{ ở cột 4 là: } x_4 = \frac{y_4}{a} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$\text{Giá trị của } x \text{ ở cột 6 là: } x_6 = \frac{y_6}{a} = \frac{-8}{-2} = 4.$$

Vậy bảng đã cho được điền đầy đủ như sau:

|   |     |    |    |    |    |
|---|-----|----|----|----|----|
| x | 0,5 | 1  | 2  | 3  | 4  |
| y | -1  | -2 | -4 | -6 | -8 |

b) Biết  $y$  tỉ lệ thuận với  $x$  tức là chúng liên hệ với nhau theo công thức  $y = ax$ . Thay bất kì cặp giá trị nào của  $x, y$  trong bảng trên ta sẽ có hệ số tỉ lệ  $a$ :

$$-6 = a \cdot 3 \Rightarrow a = -6 : 3 = -2.$$

Ta có công thức  $y = -2x$ .

c) Biết  $x$  tỉ lệ thuận với  $y$  tức là chúng liên hệ với nhau theo công thức  $x = ay$ . Thay bất kì cặp giá trị nào của  $x, y$  trong bảng trên ta sẽ có hệ số tỉ lệ  $a$ :

$$2 = a \cdot (-4) \Rightarrow a = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

Ta có công thức  $x = -\frac{1}{2}y$ .

#### ● Khai thác bài toán

Không nên cho rằng: nếu hai đại lượng tỉ lệ thuận với nhau thì khi giá trị của đại lượng này tăng làm cho giá trị tương ứng của đại lượng kia cũng tăng.

Chẳng hạn, với trường hợp hệ số tỉ lệ là số âm như ở bài toán trên, khi giá trị của  $x$  tăng từ 1 đến 4, thì giá trị của  $y$  lại giảm từ -2 xuống -8.

Nhận thấy rằng, khi hệ số tỉ lệ là số âm, có thể dùng giá trị tuyệt đối để phát biểu về hai đại lượng tỉ lệ thuận như sau: nếu hai đại lượng tỉ lệ thuận với nhau thì khi giá trị tuyệt đối của đại lượng này tăng (hoặc giảm) làm cho giá trị tuyệt đối tương ứng của đại lượng kia cũng tăng (hoặc giảm). Chẳng hạn, với bài toán trên, rõ ràng khi giá trị tuyệt đối của  $x$  tăng từ 1 đến 4, thì giá trị tuyệt đối tương ứng của  $y$  cũng tăng từ  $|-2|$  đến  $|-8|$ .

## Bài 2

a) Một công nhân làm được 20 dụng cụ trong 30 phút. Hỏi trong 75 phút người đó làm được bao nhiêu dụng cụ?

b) Cứ 100 kg thóc có 64 kg gạo. Hỏi 15 thúng thóc cho bao nhiêu kilôgam gạo biết rằng mỗi thúng thóc có 20 kg thóc?

### • Tìm hiểu đề bài

Đề bài câu a cho: 30 phút thì làm được 20 dụng cụ, hỏi trong 75 phút làm được bao nhiêu dụng cụ. Thời gian và số dụng cụ là hai đại lượng tỉ lệ thuận.

Câu b cho: cứ 100 kg thóc có 64 kg gạo. Hỏi trong 20 kg . 15 = 300 kg thóc có bao nhiêu kg gạo. Số kilôgam thóc và số kg gạo là hai đại lượng tỉ lệ thuận.

### • Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, đại lượng thứ nhất là số phút ( $x$ ) có hai giá trị  $x_1 = 30$  phút,  $x_2 = 75$  phút; đại lượng thứ hai là số dụng cụ ( $y$ ), mới có giá trị  $y_1 = 20$  dụng cụ, cần phải tìm giá trị  $y_2$ .

Biết hai đại lượng  $x$ ,  $y$  tỉ lệ thuận với nhau, nên theo tính chất của hai đại lượng tỉ lệ thuận có  $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$ . Từ đó suy ra được  $y_2$ .

Với câu b, suy luận tương tự như câu a.

### • Cách giải

a) Ta có thể lập bảng tóm tắt đề bài như sau:

| Thời gian ( $x$ ) | Số dụng cụ ( $y$ )   |
|-------------------|----------------------|
| 30 phút ( $x_1$ ) | 20 dụng cụ ( $y_1$ ) |
| 75 phút ( $x_2$ ) | $y_2$                |

Biết rằng, thời gian làm việc và số dụng cụ làm được là hai đại lượng tỉ lệ thuận, nên theo tính chất của đại lượng tỉ lệ thuận có:

$$\frac{30}{75} = \frac{20}{y_2}$$

Từ đó  $y_2 = \frac{20 \cdot 75}{30} = 50$ . Như vậy trong 75 phút người công nhân làm được 50 dụng cụ.

b) Ta có thể lập bảng tóm tắt đề bài như sau:

| Số kilôgam thóc (x) | Số kilôgam gạo (y) |
|---------------------|--------------------|
| 100 kg ( $x_1$ )    | 64 kg ( $y_1$ )    |
| 300 kg ( $x_2$ )    | $y_2$              |
| (20 · 15 = 300)     | .                  |

Biết rằng, số kilôgam thóc đem xay xát và số kilôgam gạo thu được là hai đại lượng tỉ lệ thuận, nên theo tính chất của đại lượng tỉ lệ thuận có:

$$\frac{100}{300} = \frac{64}{y_2}$$

Từ đó  $y_2 = \frac{64 \cdot 300}{100} = 192$ . Như vậy, trong 300 kg thóc có 192 kg gạo.

● Khai thác bài toán

Trong bảng tóm tắt câu a chẳng hạn, có hai giá trị của đại lượng x và hai giá trị của đại lượng y:

$$x_1 = 30 \text{ phút} \quad y_1 = 20 \text{ dụng cụ}$$

$$x_2 = 75 \text{ phút} \quad y_2 = ?$$

Tính chất của đại lượng tỉ lệ thuận được vận dụng là:

$$\frac{30}{75} = \frac{20}{y_2} \text{ hay tổng quát } \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

Vận dụng tính chất của đại lượng tỉ lệ thuận để giải mọi bài toán thuộc loại kể trên, chẳng hạn:

Dùng 8 máy thì tiêu thụ hết 70 lít xăng. Hỏi dùng 12 máy cùng



loại thì số xăng tiêu thụ là bao nhiêu?

$$\begin{array}{l} \text{Ta có:} \\ x_1 = 8 \text{ máy} \qquad y_1 = 70 \text{ lít xăng} \\ x_2 = 12 \text{ máy} \qquad y_2 = ? \end{array}$$

Theo tính chất của đại lượng tỉ lệ thuận có:

$$\frac{8}{12} = \frac{70}{y_2} \Rightarrow y_2 = \frac{70 \cdot 12}{8} = 105 \text{ (lít)}.$$

**Bài 3.** Ba người thợ cùng làm việc với nhau và đã nhận được số tiền công là 950 000 đ. Số tiền công nhận được của mỗi người tỉ lệ thuận với số ngày công đã làm. Biết tỉ số tiền công của người thứ nhất và người thứ hai là 4:3, tỉ số tiền công của người thứ hai và người thứ ba là 6:5. Tính số tiền công của mỗi người.

● **Tim hiểu đề bài**

Ba người thợ đã nhận được 950 000 đ tiền công. Số tiền công mỗi người được nhận tỉ lệ thuận với số ngày công, nghĩa là làm nhiều công sẽ được lĩnh nhiều tiền hơn. Mặt khác còn cho biết tỉ số tiền công giữa người thứ nhất và người thứ hai, giữa người thứ hai và người thứ ba. Phải tính số tiền công của mỗi người.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Gọi số tiền công của người thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là a, b, c đồng thời ta có  $a + b + c = 950\,000$  đ.

$$\text{Mặt khác, ta có } \frac{a}{b} = \frac{4}{3} \text{ và } \frac{b}{c} = \frac{6}{5} \text{ hay } \frac{a}{4} = \frac{b}{3} \text{ (1) và } \frac{b}{6} = \frac{c}{5} \text{ (2).}$$

Phải tìm cách biến dãy (1), dãy (2) thành một dãy các tỉ số bằng nhau, rồi áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau để tìm các kết quả của bài toán.

● **Cách giải**

Gọi số tiền công được nhận của người thứ nhất, thứ hai, thứ ba theo thứ tự là a, b, c đồng thời ta có  $a + b + c = 950\,000$  đ.

Theo đầu bài, ta có  $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$  và  $\frac{b}{c} = \frac{6}{5}$  suy ra  $\frac{a}{4} = \frac{b}{3}$  (1) và  $\frac{b}{6} = \frac{c}{5}$  (2).

Biết rằng, nếu nhân hai vế của một đẳng thức với cùng một số khác không thì được một đẳng thức tương đương với nó, do đó:

$$\text{Từ } \frac{a}{4} = \frac{b}{3} \Rightarrow \frac{a}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{b}{3} \cdot \frac{1}{2} \text{ hay } \frac{a}{8} = \frac{b}{6} \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) và (3) suy ra } \frac{a}{8} = \frac{b}{6} = \frac{c}{5}.$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{8} = \frac{b}{6} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{8+6+5} = \frac{950000}{19} = 50\,000$$

$$\text{Do đó có: } \frac{a}{8} = 50000 \Rightarrow a = 50000 \cdot 8 = 400\,000 \text{ (đ)}$$

$$\frac{b}{6} = 50000 \Rightarrow b = 50000 \cdot 6 = 300\,000 \text{ (đ)}$$

$$\frac{c}{5} = 50000 \Rightarrow c = 50000 \cdot 5 = 250\,000 \text{ (đ)}$$

Vậy số tiền công của người thứ nhất, thứ hai và thứ ba lần lượt là 400 000 đ; 300 000 đ và 250 000 đ.

#### ● Khai thác bài toán

Ở bài toán trên, ta đã biến đổi dãy tỉ số (1) (hoặc tỉ lệ thức 1) và dãy tỉ số (2) thành một dãy các tỉ số bằng nhau là  $\frac{a}{8} = \frac{b}{6} = \frac{c}{5}$ .

Vấn đề đặt ra là nếu có  $\frac{a}{b} = \frac{5}{12}$  (3) và  $\frac{b}{c} = \frac{8}{9}$  (4) thì có thể biến đổi dãy (3) và dãy (4) về một dãy các tỉ số mới bằng nhau được không?

Được, ta làm như sau: Trước hết tìm BCNN(12; 8) = 24;  $24 : 12 = 2$ ;  $24 : 8 = 3$ . Sau đó, nhân hai vế của dãy (3) với  $\frac{1}{2}$  và nhân hai

vế của dãy (4) với  $\frac{1}{3}$ , ta có:

$$\frac{a}{10} = \frac{b}{24}, \quad \frac{b}{24} = \frac{c}{27}$$

Từ đó suy ra dãy các tỉ số bằng nhau là:

$$\frac{a}{10} = \frac{b}{24} = \frac{c}{27}$$

Bạn đọc có thể tự làm bài toán sau: Ba người thợ cùng làm việc với nhau và đã nhận được số tiền công là 1 220 000 đ. Số tiền công nhận được của mỗi người tỉ lệ thuận với số ngày công đã làm. Biết tỉ số tiền công của người thứ nhất và người thứ hai là 5 : 12, tỉ số tiền công của người thứ hai và người thứ ba là 8 : 9. Tính số tiền công của mỗi người.

Dáp số: 200 000 đ; 480 000 đ; 540 000 đ.

**Bài 4.** Chia số 828 thành ba phần:

a) Tỉ lệ thuận với 3; 4 và 5;

b) Tỉ lệ thuận với  $\frac{1}{2}$ ;  $\frac{2}{3}$  và  $\frac{3}{4}$ .

• **Tìm hiểu đề bài**

Phải chia số 828 thành ba phần, chẳng hạn a, b, c, tỉ lệ thuận với 3; 4 và 5 tức là  $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$  (câu a).

Phải chia số 828 thành ba phần, chẳng hạn a, b, c, tỉ lệ thuận với  $\frac{1}{2}$ ;  $\frac{2}{3}$  và  $\frac{3}{4}$  tức là  $\frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{2}{3}} = \frac{c}{\frac{3}{4}}$ .

• **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Hãy dựa vào tính chất của dãy tỉ số bằng nhau để tìm kết quả bài toán.

• Cách giải

a) Gọi ba phần phải tìm lần lượt là a, b, c; biết ba phần này tỉ lệ thuận với 3; 4 và 5 nên có:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$$

Do  $a + b + c = 828$  và theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{3+4+5} = \frac{828}{12} = 69.$$

Từ đó có:

$$\frac{a}{3} = 69 \Rightarrow a = 69 \cdot 3 = 207$$

$$\frac{b}{4} = 69 \Rightarrow b = 69 \cdot 4 = 276.$$

$$\frac{c}{5} = 69 \Rightarrow c = 69 \cdot 5 = 345.$$

Vậy ba phần phải tìm lần lượt là 207; 276 và 345.

b) Gọi ba phần phải tìm lần lượt là a, b, c; biết ba phần này tỉ lệ với  $\frac{1}{2}$ ;  $\frac{2}{3}$  và  $\frac{3}{4}$  hay với  $\frac{6}{12}$ ;  $\frac{8}{12}$  và  $\frac{9}{12}$ , nên có:

$$\frac{a}{\frac{6}{12}} = \frac{b}{\frac{8}{12}} = \frac{c}{\frac{9}{12}}$$

Do  $a + b + c = 828$  và theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{\frac{6}{12}} = \frac{b}{\frac{8}{12}} = \frac{c}{\frac{9}{12}} = \frac{a+b+c}{\frac{6+8+9}{12}} = \frac{828}{\frac{23}{12}} = 36 \cdot 12$$

Từ đó có:

$$\frac{a}{6} = 36.12 \Rightarrow a = 36.12 \cdot \frac{6}{12} = 216$$

$$\frac{b}{8} = 36.12 \Rightarrow b = 36.12 \cdot \frac{8}{12} = 288$$

$$\frac{c}{9} = 36.12 \Rightarrow c = 36.12 \cdot \frac{9}{12} = 324.$$

Vậy ba phần phải tìm lần lượt là 216; 288 và 324.

● Khai thác bài toán

- Chia số 828 thành ba phần tỉ lệ thuận với  $\frac{1}{2}$ ;  $\frac{2}{3}$  và  $\frac{3}{4}$  như đã trình bày ở trên, ta cần quy đồng mẫu của các phân số đã cho. Khi các phân số đã được quy đồng mẫu thì vấn đề cần quan tâm là các tử, do vậy có thể coi bài toán trên như sau: chia số 828 thành ba phần tỉ lệ thuận với 6, 8 và 9.

Ta sẽ giải bài toán này như sau:

Gọi ba phần phải tìm lần lượt là a, b, c, biết ba phần này tỉ lệ với  $\frac{1}{2}$ ;  $\frac{2}{3}$  và  $\frac{3}{4}$  hay với  $\frac{6}{12}$ ;  $\frac{8}{12}$  và  $\frac{9}{12}$  hoặc với 6; 8 và 9 nên ta có:

$$\frac{a}{6} = \frac{b}{8} = \frac{c}{9}$$

Do  $a + b + c = 828$  và theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{6} = \frac{b}{8} = \frac{c}{9} = \frac{a + b + c}{6 + 8 + 9} = \frac{828}{23} = 36.$$

Từ đó có:

$$\frac{a}{6} = 36 \Rightarrow a = 36.6 = 216$$

$$\frac{b}{8} = 36 \Rightarrow b = 36 \cdot 8 = 288$$

$$\frac{c}{9} = 36 \Rightarrow c = 36 \cdot 9 = 324.$$

*Nhận xét:* Khi chia một số thành các phần tỉ lệ thuận với các phân số, ta quy đồng mẫu các phân số, sau đó đưa bài toán về dạng chia một số thành các phần tỉ lệ với các số nguyên (chính là tử của các phân số đã quy đồng).

- Với bài toán sau đây: chia số 129 thành bốn phần tỉ lệ thuận với 0,5; 0,75; 0,8; và 0,1 thì có thể giải như thế nào ?

Ta có thể giải bằng hai cách như sau:

+ Giữ nguyên các số thập phân đã cho, rồi lập dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{a}{0,5} = \frac{b}{0,75} = \frac{c}{0,8} = \frac{d}{0,1}.$$

+ Đổi các số thập phân ra phân số:

$$0,5 = \frac{1}{2}; 0,75 = \frac{3}{4}; 0,8 = \frac{4}{5}; 0,1 = \frac{1}{10}, \text{ sau đó quy đồng mẫu,}$$

được các phân số:  $\frac{10}{20}$ ;  $\frac{15}{20}$ ,  $\frac{16}{20}$  và  $\frac{2}{20}$ , rồi lập dãy các tỉ số bằng

nhau:

$$\frac{a}{10} = \frac{b}{15} = \frac{c}{16} = \frac{d}{2}.$$

Hai cách làm trên (theo số thập phân hay theo số nguyên) sẽ cho cùng một kết quả, bạn đọc hãy tự làm tiếp bài toán này.

## ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH

### Bài 5

a) Với kí hiệu  $x$  (cm) và  $y$  (cm) là độ dài cạnh đáy và độ dài đường cao tương ứng của một hình tam giác có diện tích bằng

$60 \text{ cm}^2$ , hãy xét xem giữa  $x$  và  $y$  có mối liên hệ như thế nào? Lập bảng các giá trị của  $y$  ứng với các giá trị sau của  $x$ : 10; 20; 30; 40; 50; 60.

b) Biết độ dài ba cạnh của tam giác tỉ lệ thuận với 2; 3; 4. Hỏi độ dài ba đường cao tương ứng của tam giác tỉ lệ thuận với ba số nào?

• **Tim hiểu đề bài**

Đề bài câu a cho một hình tam giác có diện tích  $S = 60 \text{ cm}^2$ . Độ dài cạnh đáy và độ dài đường cao tương ứng của hình tam giác đó lần lượt là  $x \text{ cm}$ ,  $y \text{ cm}$ , cần xác định mối liên hệ giữa  $x$  và  $y$ . Mặt khác đã cho một số giá trị của  $x$ , phải lập bảng để tìm các giá trị tương ứng của  $y$ .

Câu b cho ba cạnh của tam giác tỉ lệ thuận với 2; 3; 4, tìm xem độ dài ba đường cao tương ứng của tam giác tỉ lệ thuận với ba số nào?

• **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, áp dụng công thức tính diện tích  $S$  của một tam giác có độ dài cạnh đáy là  $x \text{ cm}$  và độ dài đường cao tương ứng là  $y \text{ cm}$ :

$$S = \frac{1}{2} xy \text{ (cm}^2\text{)}$$

Biết  $S = 60 \text{ cm}^2$  suy ra  $xy = 120 \text{ (cm}^2\text{)}$ . Từ đây xác định được mối quan hệ giữa  $x$  và  $y$ . Lập bảng với các giá trị đã cho của  $x$  để tính các giá trị tương ứng của  $y$ .

Với câu b, khi tam giác đã cho có độ dài ba cạnh là  $a$ ,  $b$ ,  $c$  và độ dài các đường cao tương ứng với mỗi cạnh đó là  $h_a$ ,  $h_b$ ,  $h_c$ , và  $S$  là diện tích của tam giác, ta có:

$$h_a : h_b : h_c = \frac{2S}{a} : \frac{2S}{b} : \frac{2S}{c} = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$

Từ đó suy ra kết quả bài toán.

● Cách giải

a) Với tam giác có diện tích  $S = 60 \text{ cm}^2$ , độ dài cạnh đáy và độ dài đường cao tương ứng lần lượt là  $x \text{ cm}$ ,  $y \text{ cm}$ , thì công thức tính diện tích tam giác là :  $S = \frac{1}{2} xy = 60 (\text{cm}^2)$  suy ra  $2S = xy = 120 (\text{cm}^2)$

Mối liên hệ giữa  $x$  và  $y$  được cho bởi công thức  $xy = 120$  là liên hệ tỉ lệ nghịch của hai đại lượng  $x$  và  $y$ .

Dựa vào công thức  $xy = 120$  và các giá trị của  $x$  đã cho, ta có thể lập nên bảng sau:

|   |    |    |    |    |     |    |
|---|----|----|----|----|-----|----|
| x | 10 | 20 | 30 | 40 | 50  | 60 |
| y | 12 | 6  | 4  | 3  | 2,4 | 2  |

b) Gọi độ dài ba cạnh của tam giác là  $a, b, c$ , theo đầu bài ta có:

$$a : b : c = 2 : 3 : 4 \text{ hay } \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$$

Gọi các đường cao tương ứng với ba cạnh  $a, b, c$  là  $h_a, h_b, h_c$ , diện tích tam giác là  $S$ , ta có:

$$\begin{aligned} h_a : h_b : h_c &= \frac{2S}{a} : \frac{2S}{b} : \frac{2S}{c} = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} \\ &= \frac{12}{2} : \frac{12}{3} : \frac{12}{4} = 6 : 4 : 3. \end{aligned}$$

● Khai thác bài toán

- Không nên nghĩ rằng, nếu độ dài ba cạnh của tam giác tỉ lệ thuận với 2:3:4 thì các đường cao tương ứng tỉ lệ thuận với 4:3:2.

Thực ra thì các đường cao tương ứng tỉ lệ nghịch với 2:3:4 tức là tỉ lệ thuận với  $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ . Biến đổi tỉ số giữa ba phân số trên



thành tỉ số giữa ba số nguyên bằng cách nhân mỗi số với 12 (BCNN của 2; 3; 4) ta được 6:4:3.

- Ở bảng đã lập trong cách giải có thể rút ra những nhận xét gì ?

Ta có 2 nhận xét sau:

1) Tích một giá trị của đại lượng này ( $x$ ) với giá trị tương ứng của đại lượng kia ( $y$ ) là một hằng số.

Chẳng hạn:  $10.12 = \dots = 50.2,4 = \dots = 120$

Tổng quát:  $x_1.y_1 = x_2.y_2 = \dots = a$  (với  $a$  là hằng số khác 0)

2) Tỉ số hai giá trị bất kì của đại lượng này ( $y$ ) bằng tỉ số nghịch đảo của hai giá trị tương ứng của đại lượng kia ( $x$ ).

Chẳng hạn:

$$\frac{12}{6} = \frac{20}{10}; \quad \frac{4}{3} = \frac{40}{30}, \dots$$

$$\text{Tổng quát: } \frac{y_1}{y_2} = \frac{x_2}{x_1}; \quad \frac{y_1}{y_3} = \frac{x_3}{x_1}; \dots$$

*Chú ý:* Hai nhận xét kể trên chính là hai tính chất thường được áp dụng trong các bài toán về tỉ lệ nghịch.

**Bài 6.** Cho ba đại lượng  $p, q, r$ . Hãy tìm mối tương quan giữa  $p$  với  $r$  biết rằng:

- $p$  và  $q$  tỉ lệ nghịch,  $p$  và  $r$  tỉ lệ nghịch;
- $p$  và  $q$  tỉ lệ nghịch,  $q$  và  $r$  tỉ lệ thuận;
- $p$  và  $q$  tỉ lệ thuận,  $q$  và  $r$  tỉ lệ nghịch.

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài cho

a)  $p$  và  $q$  tỉ lệ nghịch,  $q$  và  $r$  tỉ lệ nghịch, tìm mối tương quan giữa  $p$  và  $r$ .

b) p và q tỉ lệ nghịch, q và r tỉ lệ thuận, tìm mối tương quan giữa p và r.

c) p và q tỉ lệ thuận, q và r tỉ lệ nghịch, tìm mối tương quan giữa p và r.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Cần dựa vào công thức về mối liên hệ giữa hai đại lượng tỉ lệ thuận, tỉ lệ nghịch.

Với câu a thì:

- Khi p và q tỉ lệ nghịch ta có  $p = \frac{a}{q}$  (1)

- Khi q và r tỉ lệ nghịch ta có  $q = \frac{b}{r}$  (2)

Từ đó suy ra được mối quan hệ giữa p và r bằng cách thay (2) vào (1)

Với câu b, c làm tương tự câu a.

● **Cách giải**

a) p và q tỉ lệ nghịch nên  $p = \frac{a}{q}$  (1).

q và r tỉ lệ nghịch nên  $q = \frac{b}{r}$  (2).

Thay (2) vào (1) có:  $p = \frac{a}{\frac{b}{r}} = a \cdot \frac{r}{b} = \frac{a}{b} \cdot r$ .

Vậy p và r tỉ lệ thuận.

b) p và q tỉ lệ nghịch nên  $p = \frac{a}{q}$  (1)

q và r tỉ lệ thuận nên  $q = br$  (3)

Thay (3) vào (1) có:

$$p = \frac{a}{br} = \frac{\frac{a}{b}}{r}$$

Vậy p và r tỉ lệ nghịch.

c) p và q tỉ lệ thuận nên  $p = aq$  (4)

q và r tỉ lệ nghịch nên  $q = \frac{b}{r}$  (2)

Thay (2) vào (4) có:

$$p = a \cdot \frac{b}{r} = \frac{ab}{r}$$

Vậy p và r tỉ lệ nghịch.

#### ● Khai thác bài toán

Hãy xét xem với 3 đại lượng p, q, r đã được xác lập các mối tương quan trong bài toán còn có thể xảy ra mối tương quan nào nữa không ?

Ta thấy còn mối tương quan sau: nếu p và q tỉ lệ thuận, q và r tỉ lệ thuận thì mối tương quan q và r thế nào ? Vì p và q tỉ lệ thuận nên  $p = aq$  (4), q và r tỉ lệ thuận nên  $q = br$  (3). Thay (3) vào (4) ta có:

$$p = a.br = ab.r$$

Vậy p và r tỉ lệ thuận.

**Bài 7.** Ba đội máy cày gồm 13 máy làm việc trên ba cánh đồng có diện tích bằng nhau. Đội một hoàn thành công việc trong 4 ngày, đội hai trong 6 ngày, đội ba trong 8 ngày. Hỏi mỗi đội có mấy máy cày biết rằng năng suất của các máy như nhau ?

#### ● Tìm hiểu đề bài

Đề bài cho biết, có ba cánh đồng có diện tích bằng nhau, với 13 máy cày phân chia cho 3 đội, trong đó đội một, đội hai và đội ba đã hoàn thành công việc lần lượt trong 4; 6; 8 ngày. Hỏi mỗi đội

có mấy máy cày, biết rằng năng suất của các máy như nhau ?

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Biết rằng diện tích ở ba cánh đồng bằng nhau, năng suất của các máy như nhau, nên nếu gọi số máy của đội một, đội hai, đội ba lần lượt là  $x, y, z$ , ta có:  $4x = 6y = 8z$  (vì số máy tỉ lệ nghịch với ngày hoàn thành).

Từ đó suy ra được dãy các tỉ số bằng nhau, áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau sẽ suy ra kết quả bài toán.

● **Cách giải**

Gọi số máy cày của ba đội lần lượt là  $x, y, z$  (với  $x, y, z$  là các số nguyên dương), ta có  $x + y + z = 13$ .

Vì số máy cày tỉ lệ nghịch với số ngày hoàn thành công việc nên ta có:

$$4x = 6y = 8z, \text{ suy ra}$$

$$\frac{x}{\frac{1}{4}} = \frac{y}{\frac{1}{6}} = \frac{z}{\frac{1}{8}}$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{x}{\frac{1}{4}} = \frac{y}{\frac{1}{6}} = \frac{z}{\frac{1}{8}} &= \frac{x+y+z}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}} = \\ &= \frac{x+y+z}{\frac{6}{24} + \frac{4}{24} + \frac{3}{24}} = \frac{13}{\frac{13}{24}} = 24. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } x = 24 \cdot \frac{1}{4} = 6; y = 24 \cdot \frac{1}{6} = 4; z = 24 \cdot \frac{1}{8} = 3.$$

Số máy của đội một, đội hai, đội ba theo thứ tự là 6; 4; 3 máy.

● **Khai thác bài toán**

Có thể thay tỉ số giữa phân số  $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}$  bằng tỉ số giữa ba số

nguyên bằng cách nhân mỗi số với 24 (BCNN của 4; 6; 8).

Khi đó:

$$x:y:z = \frac{1}{4} : \frac{1}{6} : \frac{1}{8} = \frac{6}{24} : \frac{4}{24} : \frac{3}{24} = 6:4:3.$$

$$\text{Ta có: } \frac{x}{6} : \frac{y}{4} : \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{6+4+3} = \frac{13}{13} = 1.$$

$$\text{Do đó: } x = 1.6 = 6$$

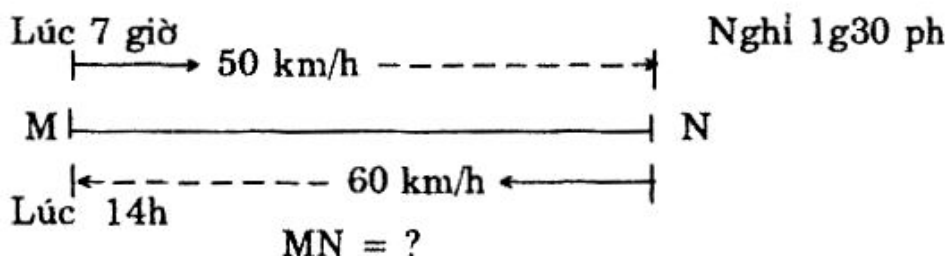
$$y = 1.4 = 4$$

$$z = 1.3 = 3.$$

**Bài 8.** Một ô tô đi từ M đến N, xe khởi hành lúc 7 giờ sáng với vận tốc 50 km/h. Đến N xe nghỉ lại 1 giờ 30 phút rồi trở về M với vận tốc 60 km/h. Ô tô về đến M lúc 14 giờ. Tính độ dài quãng đường MN.

• **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài toán đã cho được minh họa trên hình vẽ sau:



• **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Biết thời gian khởi hành từ M của xe ô tô, biết thời gian nghỉ tại N và biết thời gian về đến M, do đó biết được thời gian xe lăn bánh trên quãng đường MN không đổi cả đi lẫn về.

Trên quãng đường không đổi MN thì thời gian đi  $t_1$ , thời gian về  $t_2$  tỉ lệ nghịch với vận tốc đi  $v_1$  và về  $v_2$ , tức là có  $\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{60}{50}$  (theo tính chất của hai đại lượng tỉ lệ nghịch).

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau và các dữ kiện đã cho, có kết quả bài toán:

● **Cách giải**

Thời gian ô tô đi trên quãng đường MN và NM là:

$$14 - 7 - 1,5 = 5,5 \text{ (giờ)}$$

Gọi thời gian và vận tốc xe ô tô đi từ M đến N là  $t_1$  và  $v_1$ , thời gian và vận tốc xe ô tô đi từ N về M là  $t_2$  và  $v_2$ ; như vậy thời gian  $t$  và vận tốc  $v$  là hai đại lượng tỉ lệ nghịch, nên theo tính chất của đại lượng tỉ lệ nghịch, ta có:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{60}{50} = \frac{6}{5} \text{ hay } \frac{t_1}{6} = \frac{t_2}{5}$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{t_1}{6} = \frac{t_2}{5} = \frac{t_1 + t_2}{6 + 5} = \frac{5,5}{11} = 0,5.$$

Suy ra  $t_1 = 0,5.6 = 3$  (giờ)

Vậy quãng đường MN dài:  $50.3 = 150$  (km).

● **Khai thác bài toán**

Cần lưu ý rằng, đối với toán chuyển động đều loại có khoảng cách giữa hai địa điểm là một số không đổi, chỉ cần quan tâm đến hai đại lượng tỉ lệ nghịch với nhau là  $v$  và  $t$  mà thôi.

Bài toán trên được thay đổi một số chi tiết và đề bài như sau: "Một ô tô đi từ M đến N, xe khởi hành lúc 7 giờ sáng với vận tốc 50 km/h. Đến N xe nghỉ lại 30 phút rồi trở về M với vận tốc 60 km/h. Trên đường về xe đã dừng lại 1 giờ 30 phút để sửa xe nên đã về đến M lúc 14g30 phút. Tính quãng đường MN". Không giải tỉ mỉ bài này, hãy cho biết kết quả bài toán.

Ta thấy, thời gian xe lăn bánh khi đi và lúc về vẫn là 5,5 giờ ( $= 14,5 - (0,5 + 1,5 + 7)$ ), vì hai đại lượng  $v$ ,  $t$  không thay đổi.

đáp số bài toán này giống bài toán trước.

**Bài 9.** Hai xe ô tô cùng khởi hành từ M đến N. Vận tốc xe I là 54 km/h, vận tốc xe II là 36 km/h. Thời gian xe I đi quãng đường MN ít hơn xe II là 30 phút. Tính thời gian mỗi xe đã đi quãng đường MN và chiều dài quãng đường MN.

● **Tim hiểu đề bài**

Đề bài toán đã cho được minh họa trên hình vẽ sau:

Xe I  $\rightarrow$  54 km/h =  $v_1$  -----  $\rightarrow$  |  $t_1$   
M-----N

Xe II  $\rightarrow$  36 km/h =  $v_2$  -----  $\rightarrow$  |  $t_2$  ;  $t_2 - t_1 = 0,5$  (giờ)  
MN = ?

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Biết hai xe ô tô khởi hành cùng một lúc từ M và đi với vận tốc  $v_1 = 54$  km/h và  $v_2 = 36$  km/h, nhưng hai xe đến N không cùng một lúc, tức là xe đi với vận tốc lớn hết  $t_1$  giờ còn xe đi với vận tốc bé hơn hết  $t_2$  giờ ( $t_1 < t_2$ ). Do quãng đường MN không đổi nên  $v_1 t_1 = v_2 t_2 = s$ , s là độ dài quãng đường MN.

Từ đó nhận thấy hai đại lượng v và t tỉ lệ nghịch với nhau, nên từ  $v_1 t_1 = v_2 t_2$  suy ra  $\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{36}{54} = \frac{2}{3}$  hay  $\frac{t_2}{3} = \frac{t_1}{2}$ .

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau và các dữ kiện đã cho sẽ có kết quả bài toán.

● **Cách giải**

Gọi thời gian và vận tốc của xe I đi trên quãng đường MN là  $t_1$  và  $v_1$ , của xe II đi trên quãng đường MN là  $t_2$  và  $v_2$ , trong đó  $t_1 < t_2$ , ta có:

$$v_1 t_1 = v_2 t_2 = s \text{ (s : độ dài quãng đường MN)}$$

Đẳng thức trên chứng tỏ hai đại lượng vận tốc v và thời gian t

tỉ lệ nghịch với nhau, nên theo tính chất của đại lượng tỉ lệ nghịch, ta có:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{36}{54} = \frac{2}{3} \text{ hay } \frac{t_2}{3} = \frac{t_1}{2}$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, có:

$$\frac{t_2}{3} = \frac{t_1}{2} = \frac{t_2 - t_1}{3 - 2} = \frac{0,5}{1} = 0,5 \text{ (vì 30 phút = 0,5 giờ)}$$

Do đó:  $t_1 = 0,5 \cdot 2 = 1$  (giờ)

$$t_2 = 0,5 \cdot 3 = 1,5 \text{ (giờ)}$$

Quãng đường MN dài là:

$$54 \cdot 1 = 54 \text{ (km).}$$

#### ● Khai thác bài toán

Nếu cho biết xe I và xe II đến N cùng một lúc thì cần thay đổi điều kiện nào của đề bài để kết quả bài toán vẫn không thay đổi?

Ta thấy, nếu hai xe khởi hành cùng một lúc thì thời gian xe I đi quãng đường MN ít hơn xe II là 30 phút = 0,5 giờ. Bây giờ muốn cho hai xe đến N cùng một lúc thì phải cho xe II khởi hành trước xe I là 0,5 giờ.

**Bài 10.** Chia số 630 thành ba phần tỉ lệ nghịch với 3; 5 và 6.

#### ● Tìm hiểu đề bài

Phải chia số 630 thành ba phần tỉ lệ nghịch với các số 3; 5 và 6.

#### ● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Biết rằng, muốn chia một số thành các phần tỉ lệ nghịch với  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , ta chỉ việc chia số đó thành các phần tỉ lệ thuận với  $\frac{1}{x}$ ,  $\frac{1}{y}$  và  $\frac{1}{z}$ .

Hãy vận dụng gợi ý trên để giải bài toán này.

#### ● Cách giải

Gọi ba phần phải tìm lần lượt là  $a$ ,  $b$ ,  $c$  (với  $a$ ,  $b$ ,  $c$  là các số



nguyên dương). Cần chia 630 thành ba phần tỉ lệ nghịch a với 3; 5 và 6, ta sẽ chia 630 thành ba phần tỉ lệ thuận với  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{5}$  và  $\frac{1}{6}$ ; tức

là có:  $\frac{a}{\frac{1}{3}} = \frac{b}{\frac{1}{5}} = \frac{c}{\frac{1}{6}}$ . Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{\frac{1}{3}} = \frac{b}{\frac{1}{5}} = \frac{c}{\frac{1}{6}} = \frac{a+b+c}{\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}} = \frac{630}{\frac{10}{30} + \frac{6}{30} + \frac{5}{30}} = \frac{630}{\frac{21}{30}} = 900.$$

Suy ra  $a = 900 \cdot \frac{1}{3} = 300$ ;  $b = 900 \cdot \frac{1}{5} = 180$ ;  $c = 900 \cdot \frac{1}{6} = 150$ .

Vậy ba số cần tìm tỉ lệ nghịch với 3; 5 và 6 là 300; 180 và 150.

## HÀM SỐ

Bài 11. Cho hai hàm số:

$$g(x) = 2 \text{ và } f(x) = \begin{cases} x & \text{với } x > 0 \\ -x & \text{với } x < 0. \end{cases}$$

- Vẽ đồ thị của hai hàm số đó trên cùng một hệ trục tọa độ;
- Quy tắc  $f$  nói trên có thể diễn đạt bởi công thức nào nữa?
- Căn cứ vào đồ thị tìm các giá trị của  $x$  sao cho  $|x| < 2$ .

### • Tìm hiểu đề bài

Cho hai hàm số  $g(x)$  và  $f(x)$  cần phải vẽ đồ thị của hai hàm số đã cho trên cùng một hệ trục tọa độ hay trên một mặt phẳng tọa độ.

Hàm số  $f(x)$  đã cho còn có thể viết cách nào nữa để gọn hơn.

Sau khi đã vẽ được đồ thị hai hàm số trên, từ đó tìm các giá trị của  $x$  thỏa mãn bất đẳng thức:  $|x| < 2$ .

### • Hướng dẫn cách tìm lời giải

- Để vẽ được đồ thị hai hàm số đã cho, đối với mỗi hàm số cần

phải lập bảng giá trị của  $x$  và giá trị tương ứng của  $y$ . Mỗi cặp số  $(x, y)$  ở bảng giá trị cho ta một điểm trên mặt phẳng tọa độ. Nối các điểm có tọa độ là  $(x, y)$  ta được đồ thị của hàm số.

b) Cần vận dụng định nghĩa về giá trị tuyệt đối của một số hay một biểu thức để có câu trả lời hợp lí.

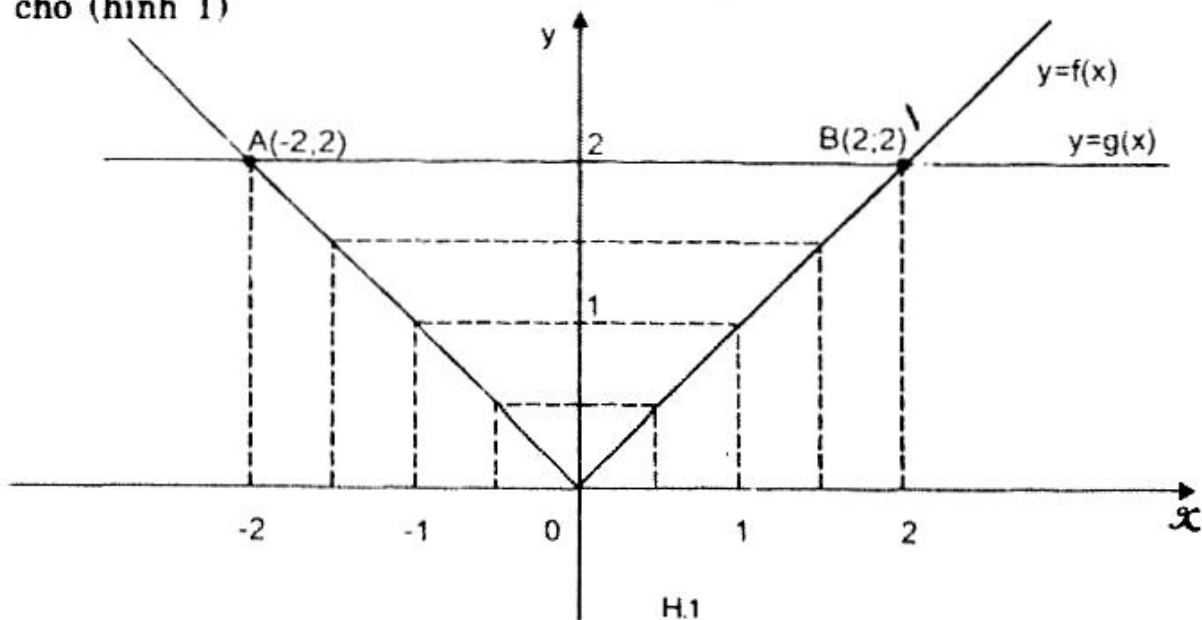
c) Bất đẳng thức  $|x| < 2$  chính là bất đẳng thức  $-2 < x < 2$ .

• Cách giải

a) Trước hết cần lập bảng giá trị của  $x$  và giá trị tương ứng của  $y$  đối với hai hàm số đã cho như sau:

|        |    |      |    |                |   |               |   |     |   |
|--------|----|------|----|----------------|---|---------------|---|-----|---|
| $x$    | -2 | -1,5 | -1 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | 1,5 | 2 |
| $f(x)$ | 2  | 1,5  | 1  | $\frac{1}{2}$  | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | 1,5 | 2 |
| $g(x)$ | 2  | 2    | 2  | 2              | 2 | 2             | 2 | 2   | 2 |

Sau đó, trên mặt phẳng tọa độ xác định các điểm bởi các cặp số  $(x, y)$  đã được xác lập ở bảng trên, sẽ vẽ được đồ thị hai hàm số đã cho (hình 1)



b) Theo định nghĩa giá trị tuyệt đối của một số hay một biểu thức, quy tắc  $f$  còn được biểu diễn bởi  $f(x) = |x|$ .

c) Các giá trị  $x$  phải tìm là hoành độ của các điểm thuộc đồ thị của hàm số  $y = |x|$  nằm phía dưới đường thẳng  $y = 2$ , đó là

$$-2 < x < 2.$$

● Khai thác bài toán

- Hãy tìm giao điểm của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  và  $y = g(x)$  đã cho.

Ta thấy hai đồ thị  $y = f(x)$  và  $y = g(x)$  cắt nhau tại hai điểm A và B mà tọa độ là:

$$A(-2;2) \text{ và } B(2;2).$$

- Nếu hàm số  $y = g(x)$  được cho bởi công thức  $g(x) = -2$ , hãy tìm giao điểm của đồ thị hai hàm số  $y = f(x) = |x|$  và  $y = g(x) = -2$ .

Ta thấy, với  $g(x) = -2$ , đồ thị của nó nằm phía dưới trục hoành  $Ox$ , cách  $Ox$  một đoạn bằng 2 đơn vị, như vậy hai đồ thị  $y = f(x)$  và  $y = g(x)$  trong trường hợp này không cắt nhau tức là không có giao điểm của đồ thị hai hàm số đã cho.

- Nếu hàm số  $y = g(x)$  được cho bởi công thức  $g(x) = 0$ , hãy tìm giao điểm của đồ thị hai hàm số  $y = f(x) = |x|$  và  $y = g(x) = 0$ .

Ta thấy, với  $g(x) = 0$ , đồ thị của nó chính là trục hoành  $Ox$ , giao điểm của hai đồ thị là điểm gốc tọa độ  $O(0;0)$ .

Tóm lại, đồ thị của hai hàm số đã cho có thể có 2 giao điểm, 1 giao điểm hoặc không có giao điểm nào cả.

**Bài 12.** Cho bảng giá trị sau:

|   |    |    |   |    |   |   |   |
|---|----|----|---|----|---|---|---|
| x | -2 | -1 | 1 | 2  | 3 | 4 | 6 |
| y |    |    |   | -6 |   |   |   |

a) Điền các số vào các ô trống trong bảng để  $y$  tỉ lệ thuận với  $x$ . Viết hàm số  $f(x)$  cho liên hệ giữa  $y$  và  $x$ .

b) Điền các số vào các ô trống trong bảng để  $y$  tỉ lệ nghịch với  $x$ . Viết hàm số  $g(x)$  cho liên hệ giữa  $y$  và  $x$ .

c) Vẽ đồ thị của hai hàm số trên cùng một hệ trục tọa độ.

● **Tìm hiểu đề bài**

Cho bảng giá trị, hãy điền vào ô trống để có  $y$  tỉ lệ thuận với  $x$ , viết hàm số  $f(x)$  cho liên hệ giữa  $y$  và  $x$  (câu a);  $y$  tỉ lệ nghịch với  $x$ , viết hàm số  $g(x)$  cho liên hệ giữa  $y$  và  $x$  (câu b); sau đó vẽ đồ thị của cả hai hàm số kể trên (câu c).

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

a) Biết  $y$  tỉ lệ thuận với  $x$  tức là có  $y = ax$ . Thay giá trị  $x = 2$ ;  $y = -6$ , suy ra giá trị của  $a$ , từ đó tính được các số để điền vào các ô trống trong bảng giá trị đã cho.

b) Biết  $y$  tỉ lệ nghịch với  $x$  tức là có  $y = \frac{a}{x}$  hay  $xy = a$ . Thay giá trị  $x = 2$ ;  $y = -6$ , suy ra giá trị của  $a$ , từ đó tính được các số để điền vào các ô trống trong bảng giá trị đã cho.

c) Dựa vào bảng giá trị trên để xác định các điểm thuộc từng hàm số, nối các điểm có cùng tính chất, sẽ được đồ thị của hàm số.

● **Cách giải**

a) Biết  $y$  tỉ lệ thuận với  $x$  tức là có  $y = ax$ . Thay giá trị  $x = 2$ ;  $y = -6$ , ta có  $-6 = 2a$  suy ra  $a = -6 : 2 = -3$ . Lấy  $-3$  nhân với các giá trị của  $x$  đã cho trong bảng, có giá trị của  $y$  tương ứng. Ta có bảng sau:

|     |    |    |    |    |    |     |     |
|-----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| $x$ | -2 | -1 | 1  | 2  | 3  | 4   | 6   |
| $y$ | 6  | 3  | -3 | -6 | -9 | -12 | -18 |

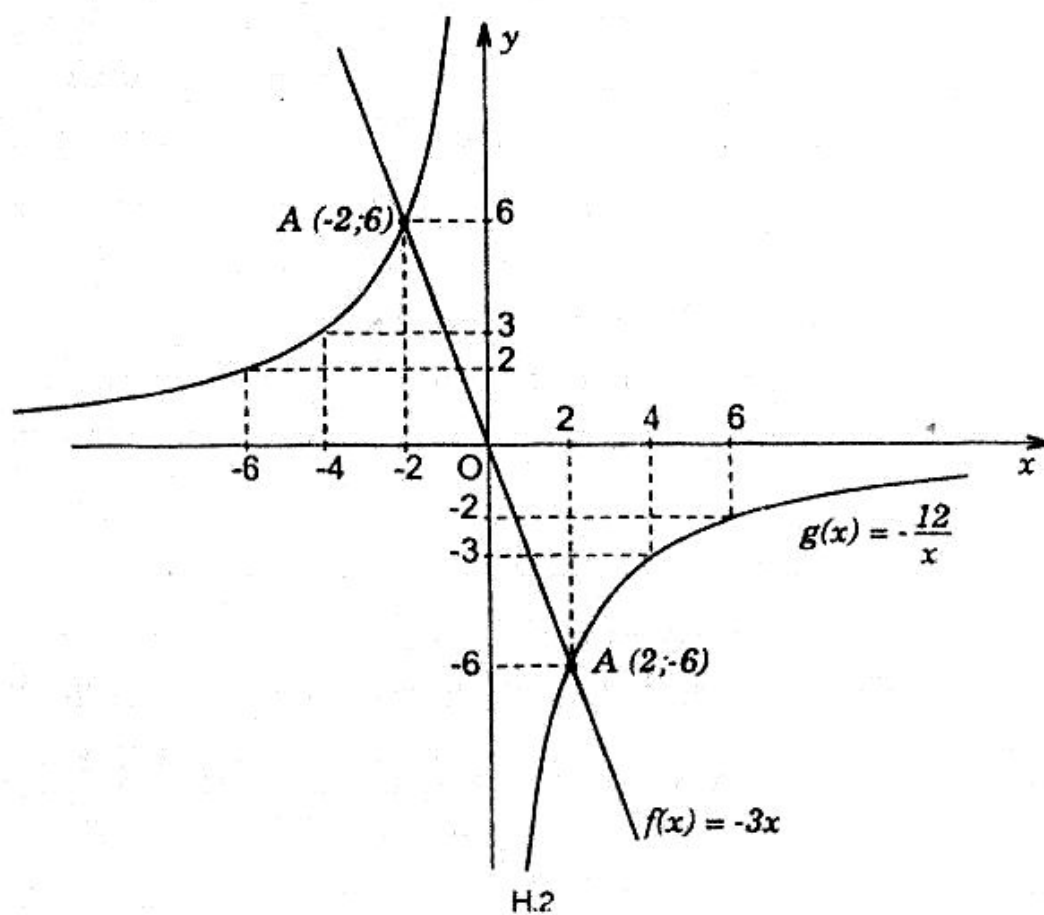
Hàm số  $f(x)$  cho liên hệ giữa  $y$  và  $x$  kể trên là  $y = f(x) = -3x$ .

b) Biết  $y$  tỉ lệ nghịch với  $x$  tức là có  $y = \frac{a}{x}$  hay  $xy = a$ . Thay giá trị  $x = 2$ ;  $y = -6$ , ta có  $-6 \cdot 2 = -12 = a$ . Lấy  $a = -12$  chia cho các giá trị của  $x$  đã cho trong bảng, có giá trị của  $y$  tương ứng. Ta có bảng sau:

|     |    |    |     |    |    |    |    |
|-----|----|----|-----|----|----|----|----|
| $x$ | -2 | -1 | 1   | 2  | 3  | 4  | 6  |
| $y$ | 6  | 12 | -12 | -6 | -4 | -3 | -2 |

Hàm số  $g(x)$  cho liên hệ giữa  $y$  và  $x$  kể trên là  $y = -\frac{12}{x}$ .

c) Căn cứ vào hai bảng giá trị trên, ta vẽ được đồ thị của hai hàm số  $y = -3x$  và  $y = g(x) = -\frac{12}{x}$  như sau (hình 2)



● Khai thác bài toán

Có thể tìm giao điểm của đồ thị hai hàm số bằng cách nào ?

Có thể tìm được giao điểm của hai đồ thị bằng cách:

a) Căn cứ vào hai bảng giá trị ta có A(2;-6) và B(-6;2)

b) Căn cứ vào hai đồ thị đã vẽ có A(2;-6) và B(-6;2).

c) Cũng có thể tìm giao điểm của hai đồ thị bằng cách giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = -3x \\ y = \frac{12}{x} \end{cases} \Leftrightarrow 3x = \frac{12}{x} \Leftrightarrow 3x^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Từ  $x = 2 \Rightarrow y = -6$ ;  $x = -2 \Rightarrow y = 6$ .

### Bài 13

a) Vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ đồ thị các hàm số  $y = \frac{2}{x}$ ,  $y = 2x$  và tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị trên.

b) Vẽ đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{|x|}$ .

#### • Tìm hiểu đề bài

a) Hàm số  $y = \frac{2}{x}$  là một tương quan tỉ lệ nghịch, còn hàm số  $y = 2x$  là một tương quan tỉ lệ thuận, phải vẽ đồ thị hai hàm số này trên cùng một hệ trục tọa độ, sau đó tìm giao điểm của hai đồ thị.

b) Vẽ đồ thị của hàm số  $y = \frac{1}{|x|}$  với chú ý là phải xét  $x > 0$  và  $x < 0$  để loại bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

#### • Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Để vẽ đồ thị hàm số  $y = \frac{2}{x}$  cần lập bảng giá trị của  $y$  ứng với các giá trị của  $x$ , sau đó sẽ căn cứ vào từng cặp giá trị  $(x, y)$  để xác định các điểm thuộc đồ thị.

Còn đồ thị hàm số  $y = 2x$  luôn đi qua gốc tọa độ nên chỉ xét một điểm nữa là đủ.

Hai đồ thị trên cắt nhau, cho ta tọa độ của giao điểm đó.

b) Đồ thị của hàm số  $y = \frac{1}{|x|}$  nằm phía trên trục hoành, lưu ý xét với  $x < 0$  và  $x > 0$ , sau đó lập bảng giá trị của  $x, y$  với chú ý là  $y > 0$ .

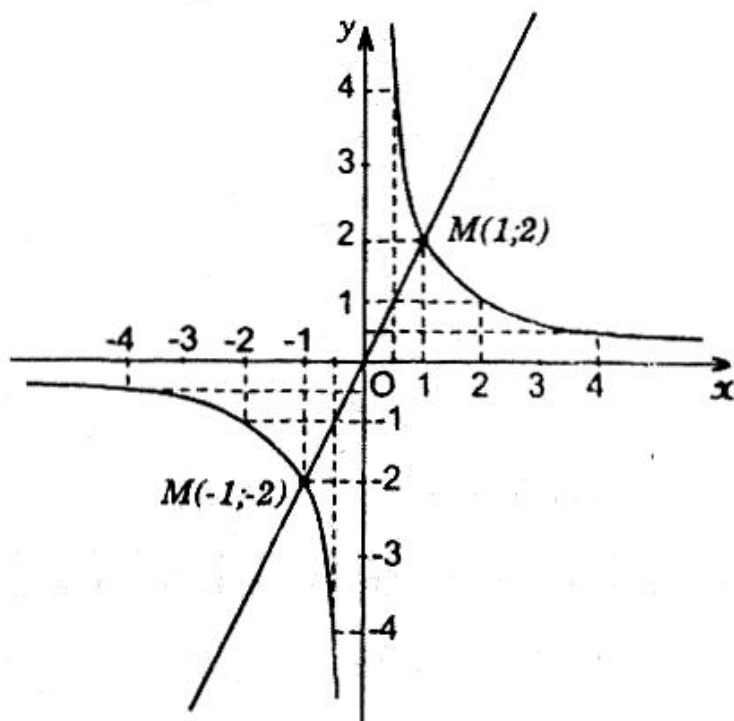
• Cách giải

a) Lập bảng giá trị của hàm số  $y = \frac{2}{x}$ .

|   |                |    |    |                |   |               |   |   |               |
|---|----------------|----|----|----------------|---|---------------|---|---|---------------|
| x | -4             | -2 | -1 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4             |
| y | $-\frac{1}{2}$ | -1 | -2 | -4             |   | 4             | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ |

Đồ thị hàm số  $y = 2x$  đi qua điểm  $O(0;0)$  và  $M(1;2)$ .

Đồ thị hàm số  $y = \frac{2}{x}$  và  $y = 2x$  được vẽ như sau (hình 3):



H.3

Đồ thị hai hàm số đã cho cắt nhau tại  $M(1;2)$  và  $N(-1;-2)$ .

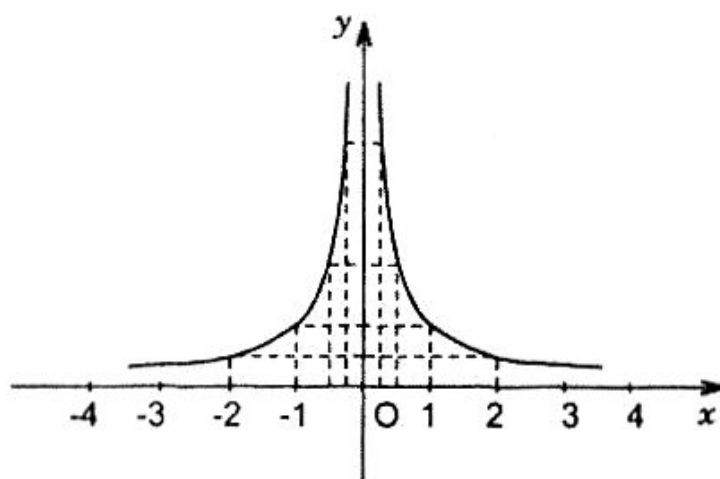
b) Ta có

$$y = \frac{1}{|x|} = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{với } x < 0 \\ \frac{1}{x} & \text{với } x > 0. \end{cases}$$

Lập bảng giá trị:

|   |               |    |                |                |   |               |               |   |               |
|---|---------------|----|----------------|----------------|---|---------------|---------------|---|---------------|
| x | -2            | -1 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2             |
| y | $\frac{1}{2}$ | 1  | 2              | 4              |   | 4             | 2             | 1 | $\frac{1}{2}$ |

Đồ thị như ở hình 4.



H.4

## B. CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

### ĐỀ BÀI

**Bài 14.** Viết công thức cho sự tương ứng giữa:

- Chu vi  $C$  của đường tròn và bán kính  $R$  của nó;
- Diện tích  $S$  của hình tròn và bán kính  $R$  của nó;
- Chu vi  $C$  của hình vuông và cạnh  $a$  của nó;



d) Diện tích  $S$  của hình vuông và cạnh  $a$  của nó;

e) Đáy  $d$  của tam giác và đường cao tương ứng  $h$  của nó biết diện tích tam giác là  $152 \text{ cm}^2$ .

**Bài 15.** Cho  $X = \{-2; -1; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1; 2\}$  và hàm số  $y = f(x) = -x^2 + 3$ .

a) Lập bảng giá trị của  $x$  và giá trị tương ứng của  $y$ .

b) Tính  $f(-4)$ ,  $f(2\frac{1}{2})$ .

**Bài 16.** Cho các hàm số  $y = -x$  và  $y = -\frac{1}{x}$ .

a) Vẽ đồ thị của hai hàm số ấy trên một hệ trục tọa độ.

b) Viết tọa độ giao điểm của hai đồ thị theo kết quả câu a.

c) Kiểm tra lại kết quả câu b bằng tính toán.

### HƯỚNG DẪN - CÁCH GIẢI

**Bài 14.** ● Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Chu vi  $C$  của đường tròn và bán kính  $R$  là một tương quan tỉ lệ thuận.

b) Diện tích  $S$  của đường tròn và bán kính  $R$  là một tương quan tỉ lệ thuận.

c) Chu vi hình vuông  $C$  và cạnh hình vuông  $a$  là một tương quan tỉ lệ thuận.

d) Diện tích hình vuông  $S$  và cạnh hình vuông  $a$  cũng là một tương quan tỉ lệ thuận.

e) Một tam giác có diện tích là  $152 \text{ cm}^2$  thì cạnh đáy  $d$  và đường cao tương ứng  $h$  là một tương quan tỉ lệ nghịch.

● Cách giải

a)  $C = 2\pi R$ ;

b)  $S = \pi R^2$ ;

c)  $C = 4a$ ;

d)  $S = a^2$ .

$$e) d = \frac{2.152}{h} \text{ hay } d = \frac{304}{h}.$$

**Bài 15. • Hướng dẫn cách tìm lời giải**

a) Thay các giá trị của  $x \in X$  vào hàm số  $y = f(x) = -x^2 + 3$  để tính các giá trị của  $y$ .

b) Làm tương tự câu a.

**• Cách giải**

a) Ta có:  $f(-2) = -(-2)^2 + 3 = -4 + 3 = -1$

$$f(-1) = -(-1)^2 + 3 = -1 + 3 = 2$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3 = -\frac{1}{4} + 3 = 2\frac{3}{4}$$

$$f(0) = -(0)^2 + 3 = 3$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 = -\frac{1}{4} + 3 = 2\frac{3}{4}$$

$$f(1) = -(1)^2 + 3 = -1 + 3 = 2$$

$$f(2) = -(2)^2 + 3 = -4 + 3 = -1.$$

Do đó có bảng các giá trị của  $x$  với các giá trị tương ứng của  $y$ :

|   |    |    |                |   |                |   |    |
|---|----|----|----------------|---|----------------|---|----|
| x | -2 | -1 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$  | 1 | 2  |
| y | -1 | 2  | $2\frac{3}{4}$ | 3 | $2\frac{3}{4}$ | 2 | -1 |

b) Ta có  $f(-4) = -(-4)^2 + 3 = -16 + 3 = -13$

$$f\left(2\frac{1}{2}\right) = -\left(2\frac{1}{2}\right)^2 + 3 = -\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3$$

$$= -\frac{25}{4} + 3 = -6\frac{1}{4} + 3 = -3\frac{1}{4}.$$

**Bài 16. • Hướng dẫn cách tìm lời giải**

a) Hàm số  $y = -x$  là một tương quan tỉ lệ thuận, có đồ thị là một đường thẳng đi qua gốc tọa độ  $O(0;0)$ , nên chỉ cần xác định

một điểm bất kì thứ hai, thì vẽ được đường thẳng  $y = -x$ .

Hàm số  $y = -\frac{1}{x}$  là một tương quan tỉ lệ nghịch có đồ thị gồm 2 nhánh đường cong nằm trong góc vuông II và IV, cần lập bảng các giá trị của  $x$  và các giá trị tương ứng của  $y$ .

b) Từ giao điểm hai đồ thị của các hàm số  $y = -x$  và  $y = -\frac{1}{x}$ , hạ các đường vuông góc  $Ox, Oy$  ta có tọa độ các giao điểm.

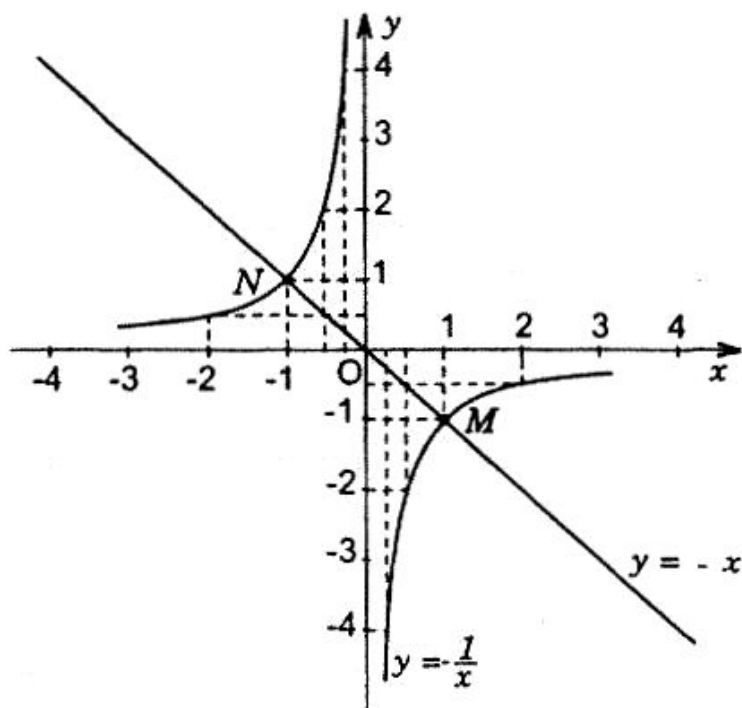
c) Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} y = -x \\ y = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

● Cách giải

a) Khi  $x = 1$  thì  $y = -x = -1$ . Như vậy đồ thị hàm số  $y = -x$  đi qua điểm  $O(0;0)$  và điểm  $M(1;-1)$ .

Lập bảng giá trị của hàm số  $y = -\frac{1}{x}$ .

|   |               |    |                |                |   |               |               |    |                |
|---|---------------|----|----------------|----------------|---|---------------|---------------|----|----------------|
| x | -2            | -1 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1  | 2              |
| y | $\frac{1}{2}$ | 1  | 2              | 4              |   | -4            | -2            | -1 | $-\frac{1}{2}$ |



H5