Bài 5: Gọi E trung điểm AC, do M, N lần lượt là trung điểm AB, CD suy ra ME, NE là đường trung bình của tam giác ABC và tam giác CAD nên ME // BC;

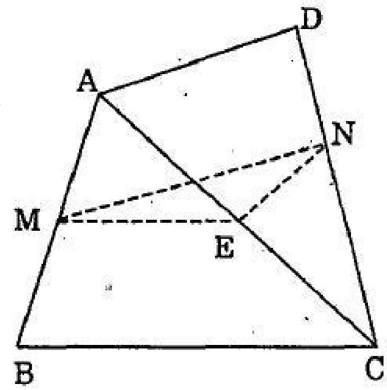
$ME = \frac{BC}{2}$ và NE // AD; $NE = \frac{AD}{2}$

Suy ra $ME + NE = \frac{BC + AD}{2}$

Mà $MN = \frac{BC + AD}{2}$

Do đó $MN = ME + NE$

Suy ra M, N, E thuộc cùng một đường thẳng mà AD và BC cùng song song với đường thẳng ấy nên AD // BC. Vậy tứ giác ABCD là hình thang.



BỘ ĐỀ 41

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 8 TRƯỜNG THCS NGUYỄN DU QUẬN 1, TPHCM – NĂM HỌC 1998 – 1999

Bài 1: Giải phương trình:

1) $\frac{x^2 - x}{x^2 - x + 1} - \frac{x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2} = 1$ 2) $|x^2 - 5x + 5| = -2x^2 + 10x - 11$

Bài 2: Cho a, b, c là ba số đôi một khác nhau.

1) Tính: $S = \frac{ab}{(b-c)(c-a)} + \frac{bc}{(c-a)(a-b)} + \frac{ac}{(a-b)(b-c)}$

2) Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{(b-c)^2} + \frac{b^2}{(c-a)^2} + \frac{c^2}{(a-b)^2} \geq 2$

Bài 3: Cho ba số dương có tổng bằng 4. Chứng minh rằng tổng của hai số bất kỳ trong ba số đó không bé hơn tích của ba số đó.

Bài 4: Cho tam giác ABC cân tại A ($\widehat{A} < 90^0$), từ B kẻ BM vuông góc với AC. Chứng minh rằng: $\frac{AM}{MC} = 2\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 - 1$

Bài 5: Cho hình bình hành ABCD tâm O, Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BO, AO. Lấy điểm F trên cạnh AB sao cho tia FM cắt cạnh BC tại E và tia FN cắt cạnh AD tại K.

Chứng minh rằng:

1) $\frac{BA}{BF} + \frac{BC}{BE} = 4$ 2) $BE + AK \geq BC$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: 1) Ta có: $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \neq 0$

$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$

Vậy TXĐ = $\{x \mid x \neq 2, x \neq -1\}$

Đặt $t = x^2 - x$ phương trình đã cho được viết:

$\frac{t}{t+1} - \frac{t+2}{t-2} = 1 \Leftrightarrow t(t-2) - (t+2)(t+1) = (t+1)(t-2)$ $(t \neq -1; t \neq 2)$

$\Leftrightarrow t^2 + 4t = 0 \Leftrightarrow t = 0$ hoặc $t = -4$

Với: $t = 0$ ta có $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$

. $t = 4$, ta có $x^2 - x = -4$ phương trình vô nghiệm

(vì $x^2 - x + 4 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 0$ và $x = 1$

2) $|x^2 - 5x + 5| = -2x^2 + 10x - 11$

Đặt $t = x^2 - 5x + 5$, ta có $|t| = -2t - 1$ (*)

Điều kiện để phương trình (*) có nghiệm là: $-2t - 1 \geq 0 \Leftrightarrow t \leq -\frac{1}{2}$

Vậy $|t| = -t$

Phương trình (*) $\Leftrightarrow -t = -2t - 1 \Leftrightarrow t = -1$

Vậy $x^2 - 5x + 5 = -1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x(x - 3) - 2(x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 3)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = 3$

Kết luận: $S = \{2, 3\}$

Bài 2: 1) *Cách 1:* $x = \frac{a}{b-c}$; $y = \frac{b}{c-a}$; $z = \frac{c}{a-b}$ (*)

Ta nhận thấy:

$(x + 1)(y + 1)(z + 1) = (x - 1)(y - 1)(z - 1)$

$\Rightarrow xyz + xy + yz + zx + x + y + z + 1$

$= xyz - (xy + yz + zx) + x + y + z - 1$

$\Rightarrow 2(xy + yz + zx) = -2 \Rightarrow xy + yz + zx = -1$

Vậy: $S = \frac{ab}{(b-c)(c-a)} + \frac{bc}{(c-a)(a-b)} + \frac{ac}{(a-b)(b-c)} = -1$

Cách 2: Ta có: $S = \frac{ab(a-b) - bc(c-b) + ac(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

Xét tử thức, ta có

$ab(a - b) - bc(c - b) + ac(c - a)$

$= ab(a - b) - bc[(c - a) + (a - b)] + ac(c - a)$

$= ab(a - b) - bc(c - a) - bc(a - b) + ac(c - a)$

$= -b(a-b)(c-a) + c(a-b)(c-a)$

$= (a-b)(c-b)(c-a) = -(a-b)(b-c)(c-a)$

Vậy $S = \dfrac{-(a-b)(b-c)c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = -1$

2) Ta có: $(x+y+z)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq -2(xy + yz + zx)$

Với $xy + yx + zx = -1 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 2$

Thay (*) vào ta được bất đẳng thức: $\dfrac{a^2}{(b-c)^2} + \dfrac{b^2}{(c-a)^2} + \dfrac{c^2}{(a-b)^2} \geq 2$

Bài 3: Gọi a, b, c là ba số dương thỏa mãn: $a + b + c = 4$

Ta cần chứng minh $a + b \geq abc$

Cách 1: Xét hiệu: $a + b - abc = a + b - ab(4 - a - b)$

(do $a + b + c = 4 \Rightarrow c = 4 - a - b$)

$= a + b - 4ab + a^2b + ab^2 = a(b^2 - 2b + 1) + b(a^2 - 2a + 1)$

$= a(b-1)^2 + b(a-1)^2 \geq 0$

Vì $a, b > 0$ và $(b-1)^2 \geq 0$, $(a-1)^2 \geq 0$

nên $a(b-1)^2 \geq 0$; $b(a-1)^2 \geq 0 \Rightarrow a + b \geq abc$.

Dấu "=" xảy ra $a = b = 1$ và $c = 2$.

Cách 2: $\forall$ x, y ta có:

$(x-y)^2 \geq \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy \geq 4xy \Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 4xy$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$

Áp dụng với hai số $a + b$ và c, ta có:

$16 = [(a+b)+c]^2 \geq 4(a+b)c \Rightarrow 16(a+b) \geq 4(a+b)^2c$ (do $a + b > 0$)

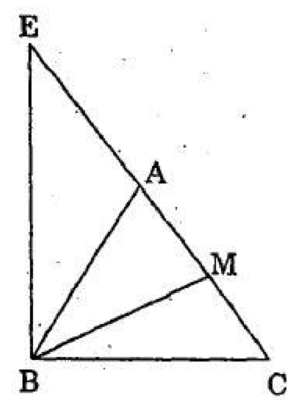
$\Rightarrow 16(a+b) \geq 16abc \Rightarrow a + b \geq abc$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=4 \\ a+b=c \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=1 \\ c=2 \end{cases}$

Bài 4: Lấy E là điểm đối xứng của C qua A.

Suy ra: $AC = AE = AB$.

Vậy tam giác BEC vuông tại B.



Kẻ $BM \perp EC$ nên: $MC = \dfrac{BC^2}{CE} = \dfrac{BC^2}{2AC}$ (1)

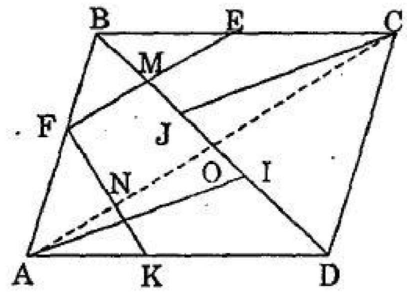
Mà $AM = AC - MC$

$= AC - \dfrac{BC^2}{2AC} = \dfrac{2AC^2 - BC^2}{2AC}$ (2)

Từ (1) và (2), ta được:

$\dfrac{AM}{MC} = \dfrac{2AC^2 - BC^2}{BC^2} = 2\left(\dfrac{AB}{BC}\right)^2 - 1$

Bài 5: 1) Kẻ AI // EF (I $\in$ BD), kẻ CJ // EF (J $\in$ BD).



Ta có: $\dfrac{BA}{BF} = \dfrac{BI}{BM}$ và $\dfrac{BC}{BE} = \dfrac{BJ}{BM}$

$\Rightarrow \dfrac{BA}{BF} + \dfrac{BC}{BE} = \dfrac{BI + BJ}{BM} = \dfrac{2BO}{BM} = 4$

(Do $\Delta OIA = \Delta OJC$ (g – c – g))

nên OI = OJ

suy ra BI + BJ = BO + OI + BO – OJ = 2OB

2) Theo kết quả câu a: $\dfrac{BA}{BF} + \dfrac{BC}{BE} = 4$

Lý luận tương tự, ta có: $\dfrac{AB}{AF} + \dfrac{AD}{AK} = 4$

Cộng vế với vế hai đẳng thức trên ta được:

$$8 = AB\left(\frac{1}{BF} + \frac{1}{AF}\right) + BC\left(\frac{1}{BE} + \frac{1}{AK}\right) \qquad (*)$$

$\forall x, y > 0$ ta có: $(x + y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow \dfrac{x + y}{xy} \geq \dfrac{4}{x + y} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \geq \dfrac{4}{x + y}$

Áp dụng, ta được:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{BF} + \dfrac{1}{AF} \geq \dfrac{4}{AF + BF} = \dfrac{4}{AB} \\ \dfrac{1}{BE} + \dfrac{1}{AK} \geq \dfrac{4}{BE + AK} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 8 = AB\left(\frac{1}{BF} + \frac{1}{AF}\right) + BC\left(\frac{1}{BE} + \frac{1}{AK}\right) \geq \frac{4AB}{AB} + \frac{4BC}{BE + AK}$$

$$\Rightarrow 4 \geq \frac{4BC}{BE + AK} \Rightarrow BE + AK \geq BC \text{ (đpcm)}$$

Chú ý: Ở bài 2, ta chọn $x = \dfrac{a + b}{a - b}$; $y = \dfrac{b + c}{b - c}$; $z = \dfrac{c + a}{c - a}$

thì $xy + yz + zx = \dfrac{a + b}{a - b}.\dfrac{b + c}{b - c} + \dfrac{b + c}{b - c}.\dfrac{c + a}{c - a} + \dfrac{c + a}{c - a}.\dfrac{a + b}{a - b}$

Rõ ràng: $(x + 1)(y + 1)(z + 1) = (x - 1)(y - 1)(z - 1)$

Suy ra $xy + yz + zx = -1$

Vậy ta có bất đẳng thức sau: $\left(\dfrac{a + b}{a - b}\right)^2 + \left(\dfrac{b + c}{b - c}\right)^2 + \left(\dfrac{c + a}{c - a}\right)^2 \geq 2$ (1)

Thêm 3 vào cả hai vế ta được:

$$\left(\frac{a + b}{a - b}\right)^2 + 1 + \left(\frac{b + c}{b - c}\right)^2 + 1 + \left(\frac{c + a}{c - a}\right)^2 + 1 \geq 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(a^2+b^2)}{(a-b)^2}+\frac{2(b^2+c^2)}{(b-c)^2}+\frac{2(c^2+a^2)}{(c-a)^2} \ge 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{(a-b)^2}+\frac{b^2+c^2}{(b-c)^2}+\frac{c^2+a^2}{(c-a)^2} \ge \frac{5}{2} \qquad (2)$$

Thêm –3 vào cả hai vế của (1) ta được:

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2-1+\left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2-1+\left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2-1 \ge -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{4ab}{(a-b)^2}+\frac{4bc}{(b-c)^2}+\frac{4ac}{(c-a)^2} \ge -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{ab}{(a-b)^2}+\frac{bc}{(b-c)^2}+\frac{ac}{(c-a)^2} \ge -\frac{1}{4} \qquad (3)$$

Cộng vế với vế (2) và (3) ta được:

$$\frac{a^2+b^2+ab}{(a-b)^2}+\frac{b^2+c^2+bc}{(b-c)^2}+\frac{c^2+a^2+ac}{(c-a)^2} \ge \frac{5}{2}-\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)(a^2+b^2+ab)}{(a-b)^3}+\frac{(b-c)(b^2+c^2+bc)}{(b-c)^3}+\frac{(c-a)(c^2+a^2+ac)}{(c-a)^3} \ge \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3-b^3}{(a-b)^3}+\frac{b^3-c^3}{(b-c)^3}+\frac{c^3-a^3}{(c-a)^3} \ge \frac{9}{4}$$

Từ đây ta có bài toán hay và khó sau:

Cho a, b, c là ba số từng đôi một khác nhau. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3+b^3}{(a-b)^3}+\frac{b^3+c^3}{(b-c)^3}+\frac{c^3+a^3}{(c-a)^3} \ge \frac{9}{4}$$

BỘ ĐỀ 42

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
QUẬN 1, TPHCM – NĂM HỌC 1998 – 1999

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử

1) $x^2 - 6x - 16$

2) $x^3 - x^2 + x + 3$

Bài 2: Thực hiện phép tính:

$$A = \frac{x^2-yz}{(x+y)(x-y)}+\frac{y^2-xz}{(y+z)(y+x)}+\frac{z^2-xy}{(x+z)(y+z)}$$

Bài 3: Cho $|a| \le 1; |a-c| < 1999; |b-1| < 1999$.

Chứng minh rằng $|ab-c| < 3998$

Bài 4: Tìm x, y, z thỏa phương trình:

$$9x^2 + y^2 + 2z^2 - 18x + 4z - 6y + 20 = 0$$

Bài 5: Cho tam giác ABC (BA = BC). Trên cạnh AC chọn điểm K nằm giữa A và C. Trên tia đối của tia CA lấy điểm E sao cho: CE = AK. Chứng minh rằng BK + BE > BA + BC.

Bài 6: Cho tam giác đều ABC. Gọi M là một điểm bất kì nằm trong tam giác. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ M đến ba cạnh của tam giác có giá trị không đổi khi M thay đổi vị trí trong tam giác.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $x^2 - 6x - 16 = x^2 - 8x + 2x - 16 = x(x - 8) + 2(x - 8) = (x - 8)(x + 2)$

2) $x^3 - x^2 + x + 3 = x^3 - 2x^2 + 3x + x^2 - 2x + 3 =$

$= x(x^2 - 2x + 3) + 1(x^2 - 2x + 3) = (x^2 - 2x + 3)(x + 1)$

Bài 2: Ta có:

$$\frac{x^2 - yz}{(x+y)(x+z)} = \frac{x^2 + xy - xy - yz}{(x+y)(x+z)} = \frac{x(x+y) - y(x+z)}{(x+y)(x+z)} = \frac{x}{x+z} - \frac{y}{x+y}$$

$$\frac{y^2 - xz}{(y+z)(y+x)} = \frac{y^2 + yz - yz - xz}{(y+z)(y+x)} = \frac{y(y+z) - z(x+y)}{(y+z)(y+x)} = \frac{y}{x+y} - \frac{z}{y+z}$$

$$\frac{z^2 - xy}{(z+x)(z+y)} = \frac{z^2 + xz - xz - -xy}{(z+x)(z+y)} + \frac{z(x+z) - x(z+y)}{(x+z)(z+y)} = \frac{z}{y+z} - \frac{x}{x+z}$$

Cộng vế với vế các đẳng thức trên ta được A = 0.

Bài 3: Vận dụng $|x + y| \le |x| + |y|$

Ta có: $|ab - c| = |ab - a + a - c| = |a(b-1) + (a-c)|$

$\le |a(b-1) + (a-c)| = |a||b-1| + |a-c|$

Theo giả thiết: $|a| < 1, |a - c| < 1999, |b - 1| < 1999$

Do đó $|ab - c| < 1999 + 1999 = 3998$

Bài 4: $9x^2 + y^2 + 2z^2 - 18x + 4z - 6y + 20 = 0$

$\Leftrightarrow 9x^2 - 18x + 9 + y^2 - 6y + 9 + 2z^2 + 4z + 2 = 0$

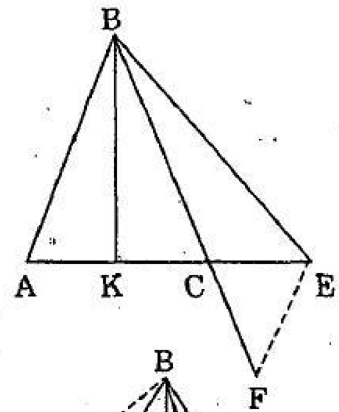
$\Leftrightarrow 9(x^2 - 2x + 1) + (y - 3)^2 + 2(z^2 + 2z + 1) = 0$

$\Leftrightarrow 9(x - 1)^2 + (y - 3)^2 + 2(z + 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 3 = 0 \text{ (do } 9(x-1)^2 \ge 0, (y-3)^2 \ge 0 \text{ và } 2(z+1)^2 \ge 0) \\ z + 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = -1 \end{cases}$

Bài 5: *Cách 1:* Trên tia đối của tia CB, lấy điểm F: CF = BC.



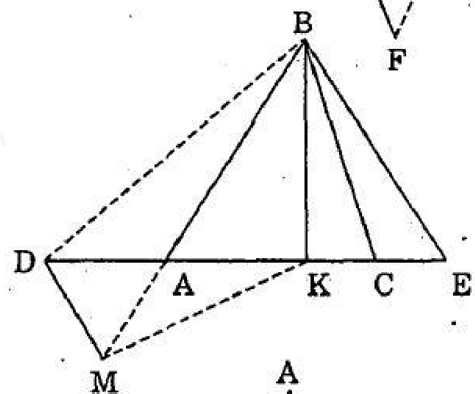
Ta có: $\widehat{BAC} = \widehat{ACB} = \widehat{ECF}$ (do tam giác BAC cân tại B): AB = BC = CF

$\Rightarrow \Delta BAK = \Delta FCE$ (c–g–c)

$\Rightarrow$ EF = BK

Ta có: BK + BE = EF + BE > BF = BC + CF = BC + AB

Cách 2: Dựng $D = S_A(K)$ và $M = S_A(B)$



Vậy DBKM là hình bình hành

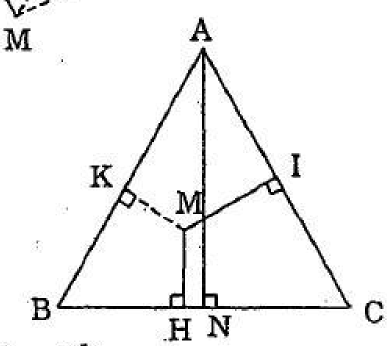
Ta có: $\Delta BAD = \Delta BCE$ (AD = CE, BAD = BCE, AB = BC)

$\Rightarrow$ BD = BE

Vậy BK + BE = MD + BD > MB = 2AB = AB + AC

(ΔMBD có MD + BD > MB)

Bài 6: Đặt AB = BC = AC = a



Kẻ MH $\perp$ BC, MK $\perp$ AB và MI $\perp$ AC, AA' $\perp$ BC.

Do điểm M ở miền trong tam giác ABC nên:

$S_{ABC} = S_{MBC} + S_{MAC} + S_{MAB}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}AA'.BC = \frac{1}{2}MH.BC + \frac{1}{2}MI.AC + \frac{1}{2}MK.AB$$

$\Rightarrow$ ah = a. MH + a. MI + a. MK (AA' = h – không đổi)

$\Rightarrow$ MH + MI + MK = h

BỘ ĐỀ 43

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI GIẢI THƯỞNG LÊ QUÝ ĐÔN QUẬN TÂN BÌNH, TPHCM – NĂM HỌC 1999 – 2000

Bài 1:

1) Cho biểu thức $A = x^2 - x + \dfrac{1}{3}$

Tìm giá trị nhỏ nhất của A và giá trị tương ứng của x.

2) Chứng tỏ rằng biểu thức sau đây luôn dương với mọi x trong tập xác định:

$$B = \frac{(1-x^2)^2}{1+x^2} : \left[\left(\frac{1-x^3}{1-x} + x\right)\left(\frac{1+x^3}{1+x} - x\right)\right]$$

Bài 2: Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a và E là điểm bất kỳ trên BC (E khác B và C). Hai đường thẳng AE và DC cắt nhau tại F. Tia Ax vuông góc với AE tại A cắt đường thẳng CD tại I.

1) Chứng minh $\widehat{AEI} = 45^0$

2) Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{AE^2} + \dfrac{1}{AF^2}$

3) Chứng minh diện tích tam giác AEI không nhỏ hơn $\dfrac{1}{2}a^2$

Bài 3:

1) Một người muốn trồng 12 cây hoa thành 7 hàng mà mỗi hàng có 4 cây. Hỏi phải trồng như thế nào? Em hãy vẽ sơ đồ vị trí các cây theo đúng yêu cầu trên?

2) Cho hình bình hành ABCD (AB > AD). Từ C kẻ CE và CF lần lượt vuông góc với các đường thẳng AB, AD (E thuộc AB và F thuộc AD). Chứng minh rằng: AB.AE = AD.AF = AC^2.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: 1) $A = x^2 - x + \dfrac{1}{3} = x^2 - x + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{12} = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{12} \geq \dfrac{1}{12}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x - \dfrac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

Vậy A đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{1}{12} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

2) Xét biểu thức: $M = \left(\dfrac{1-x^3}{1-x} + x\right)\left(\dfrac{1+x^3}{1+x} - x\right)$

Điều kiện: $\begin{cases} 1 - x \neq 0 \\ 1 + x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$

Ta có: $M = \left[\dfrac{(1-x)(1+x+x^2)}{1-x} + x\right]\left[\dfrac{(1+x)(1-x+x^2)}{1+x} - x\right]$

$= (1 + x + x^2 + x)(1 - x + x^2 - x)$

$= (1 + 2x + x^2)(1 - 2x + x^2) = (1 + x)^2 (1 - x)^2$

Ta có $M = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 + x \neq 0 \\ 1 - x \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \neq -1 \\ x \neq 1 \end{array}\right.$

Vậy tập xác định của biểu thức B là $x \neq \pm 1$.

Ta có:

$$B = \dfrac{(1-x^2)^2}{1+x^2} : [(1+x)^2(1-x)^2] = \dfrac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)(1-x^2)^2} = \dfrac{1}{1+x^2} > 0$$

$(x \neq \pm 1)$ (vì $1 + x^2 \geq 0$)

Bài 2:

1) Xét hai tam giác ABE và ADI ta có AB = AD (ABCD là hình vuông)

$\widehat{BAE} = \widehat{DAI}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc AB ⊥ AD; AE ⊥ AI)

$\widehat{ABE} = \widehat{ADI} = 90^0$

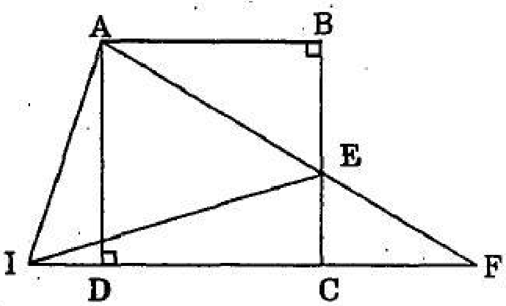
Vậy ΔABE = ΔADI (g–c–g)

Suy ra AE = AI.

ΔAEI vuông tại A có AE = AI

nên ΔAEI vuông cân tại A.

suy ra $\widehat{AEI} = 45^0$.



2) Xét ΔFDA và ΔABE có

$\widehat{DFA} = \widehat{BAE}$ (AB // DF), $\widehat{FDA} = \widehat{ABE}$ (= 90^0)

Do đó ΔFDA ∽ ΔABE

$\Rightarrow \dfrac{AF}{AE} = \dfrac{DF}{AB} \Rightarrow \dfrac{AF^2}{AE^2} = \dfrac{DF^2}{AB^2}$

Mà $DF^2 = AF^2 - AD^2 = AF^2 - AB^2$

Do vậy: $\dfrac{AF^2}{AE^2} = \dfrac{AF^2 - AB^2}{AB^2}$

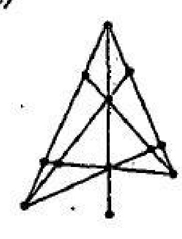
$\Rightarrow \dfrac{AF^2}{AE^2} = \dfrac{AF^2}{AB^2} - 1 \Rightarrow \dfrac{1}{AE^2} = \dfrac{1}{AB^2} - \dfrac{1}{AF^2}$

3) Ta có: AE ≥ AB

AI ≥ AD (quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc)

Suy ra: $\dfrac{1}{2}AE.AI \geq \dfrac{1}{2}AB.AD$

$S_{AEI} \geq \dfrac{1}{2}a^2$



Bài 3:

1) Sơ đồ trồng cây ở hình bên

2) Từ B vẽ BN ⊥ AC, từ D vẽ DM ⊥ AC

Xét hai tam giác vuông CMD và ANB ta có:

AB = CD (ABCD là hình bình hành)

$\widehat{MCD} = \widehat{BAN}$ (góc so le trong; AB // CD)

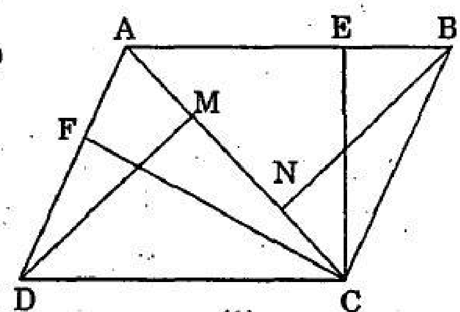
Vậy ΔCMD = ΔANB (ch–gn)

Suy ra AN = CM.

Xét hai tam giác vuông ADM và ACF ta có: $\widehat{MAB}$ chung

Vậy ΔADM ∽ ΔACF (g–g)

Cho ta: $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AM}{AF}$ hay AD.AF = AM.AC



(1)

Chứng minh tương tự ta có: $\Delta AEC \backsim \Delta ANB$ (g–g)

Cho ta: $\dfrac{AE}{AN} = \dfrac{AC}{AB}$ hay AE.AB = AN.AC = MC.AC (2)

Cộng vế theo vế (1) và (2) ta được: AE.AB + AF.AD = MC.AC + AM.AC

AE.AB + AF.AD = (MC + AM).AC = AC^2

BỘ ĐỀ 44

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 8
QUẬN 5, TPHCM – NĂM HỌC 1999 – 2000

Bài 1: Cho $4a^2 + b^2 = 5ab$ với $2a > b > 0$.

Tính số trị của phân thức: $P = \dfrac{ab}{4a^2 - b^2}$

Bài 2: Giải và biện luận phương trình (ẩn là x):

$(ab + 2)x + a = 2b + (b + 2a)x$

Bài 3: Phân tích thành nhân tử: $A = x^3 + y^3 + x^3 - 3xyz$

Bài 4: Trong một cuộc đua mô tô có ba xe khởi hành cùng một lúc. Xe thứ hai trong một giờ chạy chậm hơn xe thứ nhất 15km và nhanh hơn xe thứ ba 3km nên đến đích chậm hơn xe thứ nhất 12 phút và sớm hơn xe thứ ba 3 phút. Không có sự dừng lại dọc đường đi. Tìm vận tốc mỗi xe quãng đường đua và thời gian chạy của mỗi xe.

Bài 5: 1) Cho tam giác ABC cân, đỉnh A. Một điểm M thuộc cạnh BC. Kẻ MD vuông góc với cạnh AB, ME vuông góc với AC. Chứng minh rằng tổng MD + ME không phụ thuộc vào vị trí của điểm M trên BC.

2) Cho góc nhọn $\widehat{xAy}$. Tìm tập hợp những điểm M có tổng các khoảng cách đến hai cạnh Ax và Ay bằng một số a cho trước.

Bài 6: Cho tam giác ABC, qua một điểm O tùy ý trong tam giác, ta kẻ các đường AO, BO, CO cắt BC, CA, AB lần lượt tại M, N và P. Chứng minh hệ thức:

$$\frac{OM}{AM} + \frac{ON}{BN} + \frac{OP}{CP} = 1$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: $4a^2 + b^2 = 5ab$

$\Leftrightarrow 4a^2 + b^2 - 5ab = 0 \Leftrightarrow 4a^2 - 4ab + b^2 - ab = 0 \Leftrightarrow 4a(a - b) - b(a - b) = 0$

$\Leftrightarrow (a - b)(4a - b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a - b = 0 \\ 4a - b = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ 4a = b \end{array}\right.$

(vì $2a > b > 0$ (gt))

Do đó a = b (nhận), 4a = b (loại)

Ta có: $P = \dfrac{ab}{4a^2 - b^2} = \dfrac{a.a}{4a^2 - a^2} = \dfrac{a^2}{3a^2} = \dfrac{1}{3}$

Bài 2: $(ab + 2)x + a = 2b + (b + 2a)x \Leftrightarrow (ab + 2)x - (b + 2a)x = 2b - a$

$\Leftrightarrow (ab + 2 - b - 2a)x = 2b - a \Leftrightarrow [b(a - 1) - 2(a - 1)]x = 2b - a$

$\Leftrightarrow (a - 1)(b - 2)x = 2b - a \qquad (*)$

$(a - 1)(b - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a - 1 = 0 \\ b - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 2 \end{array}\right.$

Do đó:

1) Nếu $a = 1$ ta có $(*) \Leftrightarrow 0x = 2b - 1$

a/ Nếu $b = \frac{1}{2}$ thì $0x = 0 \Leftrightarrow x$ tùy ý

b/ Nếu $b \neq \frac{1}{2}$ thì $x \in \varnothing$

2) Nếu $b = 2$ ta có $(*) \Leftrightarrow 0x = 4 - a$

a/ Nếu $a = 4$ thì $0x = 0 \Leftrightarrow$ tùy ý

b/ Nếu $a \neq 4$ thì $x \in \varnothing$

3) Nếu $a \neq 1$ và $b \neq 2$ $(*) \Leftrightarrow x = \dfrac{2b - a}{(a - 1)(b - 2)}$

Tóm lại:

- Nếu $a = 1$ và $b = \frac{1}{2}$ hoặc $a = 4$ và $b = 2$

  Phương trình có nghiệm tùy ý.

- Nếu $a = 1$ và $b \neq \frac{1}{2}$ hoặc $a \neq 4$ và $b = 2$

  Phương trình vô nghiệm

- Nếu $a \neq 1$ và $b \neq 2$

  Phương trình có nghiệm duy nhất: $x = \dfrac{2b - a}{(a - 1)(b - 2)}$

Bài 3: $A = x^3 + y^3 + x^3 - 3xyz = x^3 + (y + z)^3 - 3yz(y + z) - 3xyz$

$= (x + y + z)[x^2 - x(y + z) + (y + z)^3] - 3yz(x + y + z)$

$= (x + y + z)[x^2 - x(y + z) + (y + z)^3 - 3yz]$

$= (x + y + z)(x^2 - xy - xz + y^3 + 2yz + z^2 - 3yz)$

$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$

Bài 4: 3 phút $= \frac{1}{20}$ (phút)

Cách 1: Gọi thời gian xe thứ nhất đi hết quãng đường là x (giờ) (điều kiện $x > 0$)

Trong khoảng thời gian này xe thứ nhất đi nhiều hơn xe thứ hai 15x (km).

Quãng đường này xe thứ hai đi hết 12 phút $= \frac{1}{5}$ giờ

Do đó vận tốc xe thứ hai là: $15x : \frac{1}{5} = 75x$ (km/h)

Trong một giờ xe thứ nhất đi nhanh hơn xe thứ ba là: $15 + 3 = 18$ (km)
Trong thời gian x (giờ) thì xe thứ nhất đi hơn xe thứ ba là 18x (km)

Quãng đường này xe thứ ba phải đi trong $12 + 3 = 15$ phút $= \frac{1}{4}$ (giờ)

Vận tốc xe thứ ba là: $18x : \frac{1}{4} = 7x$ (km/h)

Theo đầu bài ta có phương trình: $75x - 72x = 3$

$3x = 3 \Rightarrow x = 1$ (thỏa điều kiện trên)

Thời gian xe thứ nhất đi là 1 (giờ)

Vận tốc xe thứ hai là 75 (km/h)

Vận tốc xe thứ nhất là $75 + 15 = 90$ (km/h)

Vận tốc xe thứ ba là $75 - 3 = 72$ (km/h)

Thời gian xe thứ hai đi là $1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$ (giờ)

Thời gian xe thứ ba đi là $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ (giờ)

Quãng đường đua dài $90 . 1 = 90$ (km)

Cách 2: 12 phút $= \frac{1}{5}$ (giờ), 3 phút $= \frac{1}{20}$ (giờ)

Gọi vận tốc, thời gian của xe thứ hai là x (km/giờ), y (giờ)

(điều kiện $x > 3$, $y > \frac{1}{5}$)

Vận tốc của xe thứ nhất là $x + 15$ (km/giờ)

Thời gian xe thứ nhất đi là $y - \frac{1}{5}$ (giờ)

Vận tốc của xe thứ ba là $x - 3$ (km/h)

Thời gian xe thứ ba đi là $y + \frac{1}{20}$ (giờ)

Quãng đường đua dài xy (km)

hay $(x + 15)(y - \frac{1}{5})$ (km)

hay $(x - 3)(y + \frac{1}{20})$ (km)

$$xy = (x + 15)(y - \frac{1}{5}) \Leftrightarrow xy = xy - \frac{1}{5}x + 15y - 3 \Leftrightarrow 15y = \frac{1}{5}x + 3 \quad (1)$$

Mặt khác cũng có: $xy = (x - 3)(y + \frac{1}{20})$

$$\Leftrightarrow xy = xy + \frac{1}{20}x - 3y - \frac{3}{20} \Leftrightarrow 3y = \frac{1}{20}x - \frac{3}{20} \Leftrightarrow 15y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) có:

$\frac{1}{4}x - \frac{3}{4} = \frac{1}{5}x + 3 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x - \frac{1}{5}x = 3 + \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{20}x = \frac{15}{4} \Leftrightarrow x = \frac{15}{4}.20$

$x = 75$ (thỏa điều kiện trên)

do đó $15y = \frac{1}{5}.\ 75 + 3 \Leftrightarrow 15y = 18$

$y = \frac{6}{5}$ (thỏa điều kiện trên)

Vận tốc xe thứ hai là 75 (km / giờ)

Thời gian xe thứ hai đi là $\frac{6}{5}$ (giờ)

Vận tốc xe thứ nhất là 75 + 15 = 90 (km/giờ)

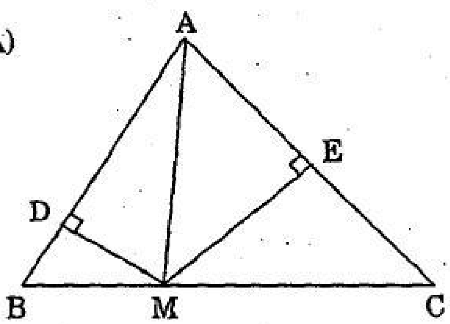
Thời gian xe thứ nhất là $\frac{6}{5} - \frac{1}{5} = 1$ (giờ)

Vận tốc xe thứ ba là 75 − 3 = 72 (km/giờ)

Thời gian xe thứ ba đi là $\frac{6}{5} + \frac{1}{20} = \frac{5}{4}$ (giờ)

Quãng đường đua dài $72 . \frac{5}{4} = 90$ (km)

Bài 5: 1) AB = AC (tam giác ABC cân tại A)



$S_{MAB} + S_{MAC} = S_{ABC}$

$\frac{MD.AB}{2} + \frac{ME.AC}{2} = S_{ABC}$

$\frac{AB}{2}(MD + ME) = S_{ABC}$

$MD + ME = \frac{2S_{ABC}}{AB}$

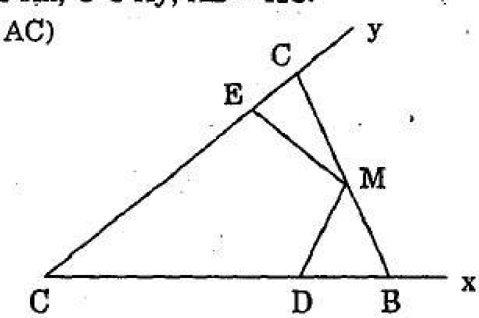
h không đổi (h là độ dài đường cao vẽ từ B, C của tam giác ABC).

Do đó tổng MD + ME không phụ thuộc vào vị trí của điểm M trên BC.

2) *Phần thuận*

Qua M vẽ đường thẳng BC sao cho $B \in Ax$, $C \in Ay$, AB = AC.

Vẽ $MD \perp AB$, $ME \perp AC$ ($D \in AB$, $E \in AC$)



Theo câu 1) có MD + ME = h (h là khoảng cách từ B đến Ay và là khoảng cách từ C đến Ax).

Do đó h = a

Vậy M thuộc đoạn thẳng BC (B, C cách các tia Ay, Ax một khoảng bằng a cho trước).

Giới hạn: Vì M nằm trong góc $\widehat{xOy}$, do đó M chuyển động trên đoạn BC.

Phần đảo: Lấy điểm M bất kỳ trên đoạn thẳng BC.

Gọi khoảng cách từ M đến Ax, Ay lần lượt là h_1, h_2.

$S_{MAB} + S_{MAC} = S_{ABC}$

ta có $\frac{1}{2}h_1AB + \frac{1}{2}h_2AC = \frac{1}{2}aAB$

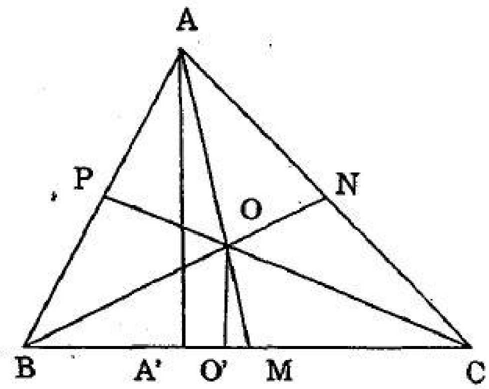
$h_1 + h_2 = a$

Kết luận: Tập hợp các điểm M là đoạn thẳng BC (B, C cách tia Ax, Ay một khoảng bằng a)

Chú ý: Hãy giải bài toán trong trường hợp thay chữ "tổng" bằng chữ "hiệu"

Bài 6: Vẽ $AA' \perp BC$, $OO' \perp BC$ ($A', O' \in BC$)

Suy ra $OO' \parallel AA'$.



Tam giác AA'M có $OO' \parallel AA'$

$\Rightarrow \frac{OM}{AM} = \frac{OO'}{AA'}$

Do đó $\frac{OM}{AM} = \frac{\frac{OO'.BC}{2}}{\frac{AA'.BC}{2}} = \frac{S_{OBC}}{S_{ABC}}$

Tương tự: $\frac{ON}{BN} = \frac{S_{OAC}}{S_{ABC}}, \frac{OP}{CP} = \frac{S_{OAB}}{S_{ABC}}$

Mà $S_{ABC} = S_{OBC} + S_{OAC} + S_{OAB}$

Do đó: $\frac{OM}{AM} + \frac{ON}{BN} + \frac{OP}{CP} = \frac{S_{OBC} + S_{OAC} + S_{OAB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$

BỘ ĐỀ 45

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN 6, TPHCM – NĂM HỌC 1999 – 2000

Bài 1:

1) $(x + 2)(x + 3)^2(x + 4) = 12$ 2) $|2x - 1| - 3|x + 1| = 2x + 6$

Bài 2:

1) Cho tam giác ABC có các đường cao BD, CE.
Chứng minh $\widehat{AED} = \widehat{ACB}$.

2) Cho tam giác ABC có đường phân giác AD.
Chứng minh $AD^2 = AB.AC - DB.DC$

Bài 3:

1) Cho đa thức bậc hai: $P(x) = ax^2 + bx + c$
Tìm a, b, c biết $P(0) = 26$; $P(1) = 3$; $P(2) = 2000$

2) Cho ba số a, b, c thỏa điều kiện: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$
Tính $(a^{25} + b^{25})(b^3 + c^3)(c^{2000} - a^{2000})$

Bài 4: Cho tam giác ABC ($\widehat{A} < 90^0$). Bên ngoài tam giác dựng các hình vuông ABDE, ACFG. Dựng hình bình hành AEIG. Chứng minh:

1) $\Delta ABC = \Delta GIA$ và $CI = BF$.

2) Ba đường thẳng AI, BF, CD đồng quy.

Bài 5: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$A = 5x^2 + 2y^2 + 4xy - 2x + 4y + 2005$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: 1) *Cách 1:* $(x + 2)(x + 3)^2(x + 4) = 12$

$\Leftrightarrow (x + 2)(x + 4)(x + 3)^2 = 12 \Leftrightarrow (x^2 + 6x + 8)(x^2 + 6x + 9) = 12$

Đặt $t = x^2 + 6x + 8$ phương trình trở thành

$t.(t + 1) = 12 \Leftrightarrow t^2 + t - 12 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 4t - 12 = 0$

$\Leftrightarrow t(t - 3) + 4(t - 3) = 0 \Leftrightarrow (t - 3)(t + 4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = -4 \end{array}\right.$

Với t = 3 ta có: $x^2 + 6x + 8 = 3 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 5x + 5 = 0$

$\Leftrightarrow x(x + 1) + 5(x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x + 5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -5 \end{array}\right.$

Với t = –4 ta có $x^2 + 6x + 8 = -4 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 3)^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$ (vì $(x + 3)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 + 3 > 0$)

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm số: $x_1 = -1$, $x_2 = -5$.

Cách 2: $(x + 2)(x + 3)^2(x + 4) = 12$

$\Leftrightarrow (x + 2)(x + 4)(x + 3)^2 = 12 \Leftrightarrow (x^2 + 4x + 2x + 8)(x^2 + 6x + 9) = 12$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + 6x + \frac{17}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + 6x + \frac{17}{2} + \frac{1}{2}\right) = 12$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + 6x + \frac{17}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 12 \Leftrightarrow \left(x^2 + 6x + \frac{17}{2}\right)^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 6x + \dfrac{17}{2} = \dfrac{7}{2} \\ x^2 + 6x + \dfrac{17}{2} = -\dfrac{7}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 6x + 5 = 0 \\ x^2 + 6x + 12 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + x + 5x + 5 = 0 \\ x^2 + 6x + 9 + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x(x + 1) + 5(x + 1) = 0 \\ (x + 3)^2 + 3 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x + 1)(x + 5) = 0 \\ x \in \phi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 = 0 \\ x + 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -5 \end{array}\right.$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = -1$; $x_2 = -5$

2) $|2x - 1| - 3|x + 1| = 2x + 6$ (1)

• Nếu $x < -1$ phương trình (1) trở thành

$1 - 2x + 3(x + 1) = 2x + 6 \Leftrightarrow 1 - 2x + 3x + 3 = 2x + 6 \Leftrightarrow x = -2$ (nhận)

• Nếu $-1 \le x \le \frac{1}{2}$, phương trình (1) trở thành:

$1 - 2x - 3(x + 1) = 2x + 6 \Leftrightarrow 1 - 2x - 3x - 3 = 2x + 6 \Leftrightarrow 7x = -8$

$\Leftrightarrow x = -\frac{8}{7}$ (loại)

• Nếu $x > \frac{1}{2}$ phương trình (1) trở thành:

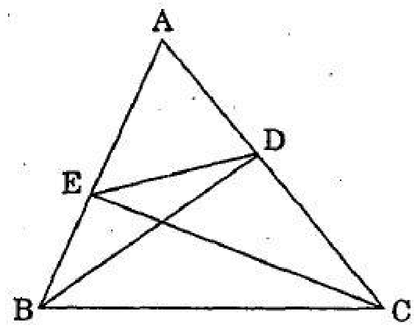
$2x - 1 - 3(x + 1) = 2x + 6 \Leftrightarrow 2x - 1 - 3x - 3 = 2x + 6 \Leftrightarrow 3x = -10$

$\Leftrightarrow x = -\frac{10}{3}$ (loại)

Kết luận: Vậy phương trình (1) có một nghiệm số là $x = -2$.

Bài 2:

1) Xét hai tam giác ABD vã ACE, ta có:



$\widehat{A}$ chung

$\widehat{ADB} = \widehat{AEC} = 90^0$

Do đó $\Delta AED \backsim \Delta ACE$ (g–g)

Xét ΔABD và ΔABC, ta có:

$\widehat{A}$ chung

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ ($\Delta ABD \backsim \Delta ACE$)

Do đó $\Delta ADE \backsim \Delta ABC$ (c–g–c)

Suy ra $\widehat{AED} = \widehat{ACB}$

2) Vì $\widehat{ADC} > \widehat{ABC}$ ($\widehat{ADC}$ là góc ngoài của ΔABD)

Do đó trên tia đối của tia AD có điểm E sao cho $\widehat{ABE} = \widehat{ADC}$.

ΔAEB và ΔACD có: $\widehat{BEA} = \widehat{ACB}$

$\widehat{BAE} = \widehat{CAD}$ (AD là phân giác)

Vậy $\Delta AEB \backsim \Delta ACD$ (g–g)

Suy ra $\frac{AE}{AC} = \frac{AB}{AD}$ hay $AE.AD = AB.AC$

$(AD + DE).AD = AB.AC$, $AD^2 + AD.DE = AB.AC$ (1)

Xét ΔBDE và ΔADC, ta có:

$\widehat{BDE} = \widehat{ADC}$ (hai góc đối đỉnh)

$\widehat{BED} = \widehat{ACD}$ ($\Delta AEB \backsim \Delta ACD$)

Vậy $\Delta BDE \backsim \Delta ADC$ (g–g)

Suy ra: $\frac{BD}{AD} = \frac{DE}{DC}$; $BD.DC = AD.DE$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AB.AC = AD^2 + BD.DC$

Cho ta: $AD^2 = AB.AC - DB.DC$

Bài 3: 1) $P(x) = ax^2 + bc + c$

$P(0) = 26 \Rightarrow a.0^2 + b.0 + c = 26 \Rightarrow c = 26$

$P(1) = 3 \Rightarrow a.1^2 + b.1 + c = 3 \Rightarrow a + b + 26 = 3 \Rightarrow a + b = -23$ (1)

$P(2) = 2000 \Rightarrow a.2^2 + b.2 + c = 2000 \Rightarrow 4a + 2b + 26 = 2000$

$\Rightarrow 4a + 2b = 1974 \Rightarrow 2a + b = 987$ (2)

Trừ vế theo vế (2) và (1) ta được $a = 1010$

Thay $a = 1010$ vào (1) ta được $b = -1033$

2) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{a+b+c}$

$\Leftrightarrow bc(a + b + c) + ac(a + b + c) + ab(a + b + c) = abc$

$\Leftrightarrow 3abc + a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b = abc$

$\Leftrightarrow a^2c + b^2c + 2abc + b^2a + a^2b + c^2a + c^2b = 0$

$\Leftrightarrow c(a + b)^2 + ab(a + b) + c^2(a + b) = 0$

$\Leftrightarrow (a + b)(ca + cb + ab + c^2) = 0 \Leftrightarrow (a + b)(ca + c^2 + cb + ab) = 0$

$\Leftrightarrow (a + b)[c(a + c) + b(a + c)] = 0 \Leftrightarrow (a + b)(b + c)(c + a) = 0$

$\Leftrightarrow a + b = 0$ hoặc $b + c = 0$ hoặc $c + a = 0$

$\Leftrightarrow a = -b$ hoặc $b = -c$ hoặc $c = -a$

Do đó a^{25} một trong ba thừa số của tích

$(a^{25} + b^{25})(b^3 + c^3)(c^{2000} - a^{2000})$ sẽ bằng 0

Suy ra tích $(a^{25} + b^{25})(b^3 + c^3)(c^{2000} - a^{2000})$ bằng 0

Có thể trình bày cách khác như sau:

$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{a+b+c} \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{a+b+c} - \dfrac{1}{c}$

$\Leftrightarrow \dfrac{a+b}{ab} = \dfrac{c-(a+b+c)}{c(a+b+c)} \Leftrightarrow \dfrac{a+b}{ab} = \dfrac{-(a+b)}{c(a+b+c)}$

$\Leftrightarrow (a + b)c(a + b + c) = -ab(a + b) \Leftrightarrow (a + b)[c(a + b + c) + ab] = 0$

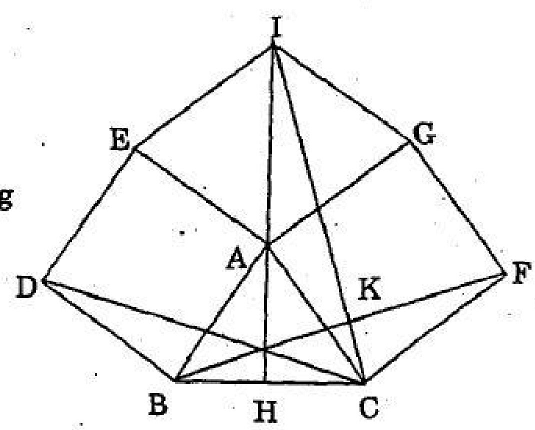
$\Leftrightarrow (a + b)[ac + c(b + c) + ab] = 0$

$\Leftrightarrow (a + b)[a(b + c) + c(b + c)] = 0$

$\Leftrightarrow (a + b)(b + c)(c + a) = 0$

Và tiếp tục như cách trên.

Bài 4:



1) ΔABC và ΔGIA có:

AB = GI (vì cùng bằng AE)

AC = GA (vì cùng bằng AC)

$\widehat{BAC} = \widehat{IGA}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc:

$GI \perp AB$, $GA \perp AC$)

Vậy $\Delta ABC = \Delta GIA$ (c–g–c)

Cho ta $\widehat{ACB} = \widehat{GAI}$

Kéo dài IA cắt BC tại H.

$\widehat{GAI} + \widehat{CAH} = 180^0 - \widehat{GAC} = 180^0 - 90^0 = 90^0$

Suy ra $\widehat{ACB} + \widehat{CAH} = 90^0$, cho ta $\widehat{AHC} = 90^0$

hay $AH \perp BC$

ΔCAI và ΔFCB có: $CA = FC$

$AI = BC$ ($\Delta ABC = \Delta GIA$)

$\widehat{CAI} = \widehat{FCB}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc $IA \perp BC$; $CA \perp CF$)

Vậy $\Delta CAI = \Delta FCB$ (c–g–c)

Cho ta $CI = BF$

2) Gọi K là giao điểm của CI và BF.

Ta có: $\widehat{AIC} = \widehat{FBC}$ ($\Delta BCF = \Delta IAC$)

$\widehat{IAG} = \widehat{BCA}$ ($\Delta ABC = \Delta GIA$)

Suy ra $\widehat{AIC} + \widehat{IAG} = \widehat{FBC} + \widehat{BCA}$

$\widehat{AIC} + \widehat{IAG} + \widehat{ICA} = \widehat{FBC} + \widehat{BCA} + \widehat{ICA}$

$90^0 = FBC + BCK$

Do đó $\widehat{BKC} = 90^0$

Hay $BF \perp CI$

Chứng minh tương tự ta có $BI \perp CD$.

Suy ra AI, BF, CD là các đường cao của ΔIBC nên chúng đồng quy tại một điểm.

Bài 5: $A = 5x^2 + 2y^2 + 4xy - 2x + 4y + 2005$

$= 4x^2 + 4xy + y^2 + y^2 + 4y + 4 + x^2 - 2x + 1 + 2000$

$= (2x + y)^2 + (y + 2)^2 + (x - 1)^2 + 2000 \geq 2000$

Dấu "=" xảy ra:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ y + 2 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ y = -2 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2.1 + (-2) = 0 \\ x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Vậy $\min A = 2000 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$

BỘ ĐỀ 46

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI GIẢI THƯỞNG LƯƠNG THẾ VINH QUẬN 1, TPHCM – NĂM HỌC 1999 – 2000

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử

1) $x^2 + 8x - 20$ 2) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$

Bài 2: Cho $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ và $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$

Chứng minh $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Bài 3: Giải phương trình $|x| - 2|x-1| + 3|x-2| = 4$

Bài 4: Cho tam giác ABC có ba đường phân giác AD, BE, CF.

Chứng minh:

1) $\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB} = 1$ 2) $\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} > \frac{1}{BC} + \frac{1}{CA} + \frac{1}{AB}$

Bài 5: Hai điểm A và B cách nhau một con sông (hai bờ song song). Tìm địa điểm bắc cầu để quãng đường đi từ A đến B ngắn nhất (Cầu bao giờ cũng vuông góc với bờ sông).

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $x^2 + 8x - 20 = x^2 + 10x - 2x - 20 = x(x + 1) - 2(x + 10)$
$= (x + 10)(x - 2)$

2) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = x^3 - 4x^2 + 4x - x^2 + 4x - 4$
$= x(x^2 - 4x + 4) - (x^2 - 4x + 4) = (x - 1)(x - 2)^2$

Bài 2: Do $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0 \Rightarrow \frac{ayz + bxz + cxy}{xyz} = 0$

$\Rightarrow ayz + bxz + cxy = 0$ (1)

Mặt khác: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ nên $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 = 1$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2\left(\frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{xz}{ac}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2\frac{cxy + ayz + bxz}{abc} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ (do (1))}$$

Bài 3: Xét các trường hợp sau:

1) Với $x \le 0$: Phương trình đã cho tương đương:
$-x + 2(x - 1) + 3(2 - x) = 4 \Leftrightarrow -x + 2x - 2 + 6 - 3x = 4$
$\Leftrightarrow -2x + 4 = 4 \Leftrightarrow x = 0$ (nhận)

2) Với $0 < x \le 1$ phương trình đã cho tương đương:
$x + 2(x - 1) + 3(2 - x) = 4 \Leftrightarrow x + 2x - 2 + 6 - 3x = 4 \Leftrightarrow 0x = 0$
phương trình có vô số nghiệm với $0 < x \le 1$

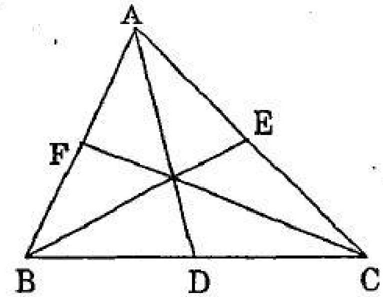
3) Với $1 < x < 2$ phương trình đã cho tương đương
$x - 2(x - 1) + 3(2 - x) = 4 \Leftrightarrow x - 2x + 2 + 6 - 3x = 4$
$\Leftrightarrow -4x + 8 = 4 \Leftrightarrow x = 1$ (loại)

4) Với $x \ge 2$ phương trình đã cho tương đương
$x - 2(x - 1) + 3(x - 2) = 4 \Leftrightarrow x - 2x + 2 + 3x - 6 = 4 \Leftrightarrow 2x - 4 = 4$
$\Leftrightarrow x = 4$ (nhận)

Kết luận: Nghiệm của phương trình là các giá trị x thoả mãn $x = 4$, $0 < x \le 1$

Bài 4:

1) Áp dụng tính chất đường phân giác trong đối với tam giác ABC có:



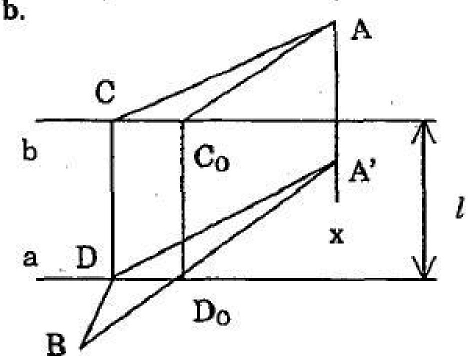
$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC};\ \frac{EC}{EA} = \frac{BC}{AB} \text{ và } \frac{FA}{FB} = \frac{AC}{BC}$$

suy ra: $\frac{BD}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB} = \frac{AB}{AC}.\frac{BC}{AB}.\frac{AC}{BC} = 1$

2) Xem lời giải bài 5, bộ đề 49.

Bài 5: Biểu thị hai điểm A và B bằng hai điểm A, B trên hình vẽ, hai bờ sông bằng hai đường thẳng a và b; a // b.

Ta tìm địa điểm bắc cầu sao cho tổng quãng đường đi từ A đến B ngắn nhất. Nghĩa là AC + CD + BD ngắn nhất. Dù cầu được bắc ở đâu thì quãng đường CD = 1 chiều rộng khúc sông, do đó ta tìm vị trí của CD để (AC + BD) ngắn nhất. Dựng hình bình hành ACDA', suy ra AC = A'D.



Đối với ba điểm B, D, A' có A'B ≤ A'D + BD = AC + BD

Do A' ∈ Ax ⊥ a và AA' = l nên A' cố định suy ra A'B không đổi.

Vậy min (AC + BD) = A'B ⇔ A', D, B thẳng hàng.

⇔ D ≡ D_0 với A'B cắt b tại D_0.

Vậy địa điểm bắc cầu cần tìm là C_0D_0.

Nhận xét: Ở bài toán này minh họa sự kết hợp phương pháp phân tích hình học và bất đẳng thức, áp dụng các phép biến đổi hình học cơ bản để giải các bài toán trên cực trị hình học.

Trong bài toán trên, ta giả sử hai bờ sông tạo thành hai đường thẳng song song. Nếu dòng sông không có bề rộng thì bài toán quá dễ, chỉ bằng cách nối hai điểm A và B là được. Điều này gợi ý cho ta một cách là làm thế nào để bỏ qua bề rộng của dòng sông. Trong thiết kế người ta chuyển một trong hai địa điểm về phía bờ sông một đoạn đúng bằng chiều rộng của dòng sông nghĩa là coi dòng sông không còn bề rộng nữa.

Giả sử ta tịnh tiến về phía bờ sông ở điểm A tới A' một đoạn bằng chiều rộng con sông. Từ A' nối B cắt bờ bên phía B tại D_0. Điểm D_0 chính là một đầu cầu. Từ D_0 kẻ đường vuông góc sang cắt đường bờ sông bên kia tại C_0 chính là một đầu cầu nối với A.

Trong cách giải bài trên, ta áp dụng phép tịnh tiến để di chuyển địa điểm, từ đây ta có thể có các bài toán thực tế sau.

Bài 1: Hai điểm dân cư cách nhau một số con sông có lòng sông rộng khác nhau. Hãy bắc các cây cầu và làm đường nối hai điểm dân cư với con đường ngắn nhất.

Bài 2: Một người lính cần phải kiểm tra phải chăng có mìn trong địa phận của mình quản lý có dạng tam giác đều. Bán kính của công cụ dò mìn của người lính bằng nửa đường cao của tam giác. Nếu người lính xuất phát từ một đỉnh tam giác, đường nào là ngắn nhất để người lính thực hiện đi dò mìn hết địa phận của mình?

BỘ ĐỀ 47

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 8 TRƯỜNG THCS NGUYỄN DU QUẬN 1, TPHCM – NĂM HỌC 1999 – 2000

(BÀI SỐ 1)

Bài 1:

1) Phân tích đa thức thành nhân tử: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

2) Rút gọn phân thức:

$$A = \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{a + b + c}$$

Bài 2: Giải phương trình: $x^3 + x^2 + 4 = 0$

Bài 3: Chứng minh rằng nếu $abc = 1$ thì

$$\frac{a}{ab + a + 1} + \frac{b}{bc + b + 1} + \frac{c}{ac + c + 1} = 1$$

Bài 4: Chứng minh: $x^5 + y^5 \geq x^4y + xy^4$ với $x, y \neq 0$ và $x + y \geq 0$

Bài 5: Cho tam giác ABC, gọi D là trung điểm AB. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho AE = 2EC. Gọi O là giao điểm của CD và BE. Chứng minh rằng:

1) Diện tích tam giác BOC bằng diện tích tam giác AOC.

2) BO = 3EO.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: 1) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

$= (a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3 - 3abc$

$= (a + b + c)^3 - 3(a + b)c(a + b + c) - 3ab(a + b + c)$

$= (a + b + c)[(a + b + c)^2 - 3(a + b)c - 3ab]$

$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac - 3ab - 3bc - 3ac)$

$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$

2) $A = \dfrac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{a + b + c} = \dfrac{(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)}{(a + b + c)}$

(với $a + b + c \neq 0$)

$= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac$

Nhận xét: Nếu $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$

$\Leftrightarrow (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) = 0$ (kết quả bài 1a)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ a=b=c \end{array}\right.$$

Từ đó ta có bài toán:

1) Chứng minh rằng $a^3+b^3+c^3=3abc$ thì $a+b+c=0$ hoặc $a=b=c$

Đặt $x=a-b$; $y=b-c$ và $z=c-a$ thì $x+y+z=0$

Vậy $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$

Suy ra $x^3+y^3+z^3=3xyz$

Ta có bài toán:

2) Phân tích đa thức thành nhân tử: $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$

3) Nếu $abc \neq 0$ và $a^3+b^3+c^3=3abc$

Tính giá trị biểu thức $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)$

Ta dễ thấy ngay: $a^3+b^3+c^3=3abc$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=c \\ a+b+c=0 \end{array}\right.$$

Nếu $a=b=c$: $A=8$

Nếu $a+b+c=0$

$$A=\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)=\frac{a+b}{b}.\frac{b+c}{c}.\frac{a+c}{a}=\frac{(-c)}{b}.\frac{(-a)}{c}.\frac{(-b)}{a}=-1$$

4) Cho $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$ và $a, b, c \neq 0$

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{3}{abc}$

Hướng dẫn: Do $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2 \Rightarrow ab+bc+ac=0$

$\Rightarrow \frac{ab+bc+ac}{abc}=0$ (do $abc \neq 0$) $\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$

Vận dụng kết quả của bài 1 ta có: $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{3}{abc}$

Bài 2: $x^3+x^2+4=0 \Leftrightarrow x^3+8+x^2-4=0$

$\Leftrightarrow (x+2)(x^2-2x+4)+(x-2)(x+2)=0$

$\Leftrightarrow (x+2)(x^2-2x+4+x-2)=0$

$\Leftrightarrow (x+2)(x^2-x+2)=0 \Leftrightarrow x=-2$

(vì $x^2-x+2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$)

Bài 3: *Cách 1:* Với $abc = 1 \Rightarrow a = \dfrac{1}{bc}$

Ta có: $\dfrac{a}{ab+a+1} + \dfrac{b}{bc+b+1} + \dfrac{c}{ac+c+1} = 1$

$$= \frac{1}{bc\left(b.\frac{1}{bc} + \frac{1}{bc} + 1\right)} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{\frac{c}{bc}+c+1} = 1$$

$$= \frac{1}{b+1+bc} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{bc}{1+bc+b} = \frac{1+b+bc}{1+bc+b} = 1$$

Cách 2: Do $abc = 1 \Rightarrow a, b, c \neq 0$

Ta có: $\dfrac{a}{ab+a+1} + \dfrac{b}{bc+b+1} + \dfrac{c}{ac+c+1} =$

$$= \frac{abc}{bc(ab+a+1)} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{bc}{b(ac+c+1)}$$

$$= \frac{1}{bc+b+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{bc}{bc+b+1} = \frac{1+b+bc}{1+bc+b} = 1$$

Bài 4: $x^5 + y^5 \geq x^4y + xy^4 \Leftrightarrow x^5 - x^4y + y^5 - xy^4 \geq 0$

$\Leftrightarrow x^4(x-y) - y^4(x-y) \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)(x^4 - y^4) \geq 0$

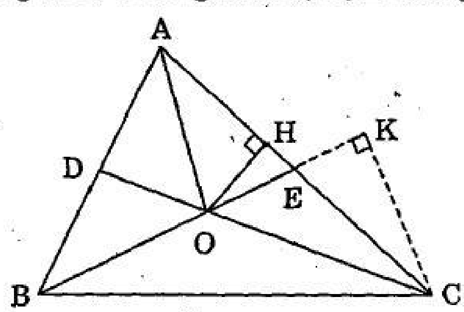
$\Leftrightarrow (x-y)(x^2-y^2)(x^2+y^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2(x+y)(x^2+y^2) \geq 0$ (đúng)

Vì $x \neq y$ nên $(x-y)^2 > 0$; $(x+y) \geq 0$ (gt) và $x^2 + y^2 \geq 0$

Bài 5:

1) ΔOAD và ΔOBD có $AD = BD$ và chung đỉnh O đồng thời A, B, D thẳng hàng nên có chiều cao bằng nhau.



$\Rightarrow S_{OAD} = S_{OBD}$

Tương tự: $S_{CAD} = S_{CBD}$

Suy ra: $S_{OBC} = S_{BCD} - S_{OBD}$

$= S_{CAD} - S_{OAD} = S_{AOC}$

2) Kẻ $OH \perp AC$, $CK \perp BE$

Ta có:

$$\frac{S_{OEC}}{S_{OAC}} = \frac{\frac{1}{2}OH.EC}{\frac{1}{2}OH.AC} = \frac{EC}{AC} = \frac{1}{3} \text{ (vì } AE = 2EC \text{ nên } EC = \frac{1}{3}AC)$$

$$\Rightarrow \frac{S_{OEC}}{S_{BOC}} = \frac{1}{3}$$

Mặt khác $\dfrac{S_{OEC}}{S_{BOC}} = \dfrac{\frac{1}{2}OE.CK}{\frac{1}{2}OB.CK} = \dfrac{OE}{OB} \Rightarrow \dfrac{OE}{OB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow OB = 3OE$

BỘ ĐỀ 48

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 8 TRƯỜNG THCS NGUYỄN DU QUẬN 1, TPHCM – NĂM HỌC 1999 – 2000

(BÀI SỐ 2)

Bài 1: Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác ABC biết rằng:

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)=8$$

Chứng minh tam giác ABC là tam giác đều.

Bài 2: Giải phương trình: $x^2 - 3x + 2 + |x - 1| = 0$

Bài 3: Phân tích đa thức thành nhân tử:

$x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + 2xyz$

Bài 4: Xác định giá trị của x, y để có đẳng thức:

$5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2y - 2x + 2 = 0$

Bài 5: Trên cạnh AB của hình vuông ABCD, người ta lấy điểm tùy ý E. Tia phân giác của góc CDE cắt BC tại K. Chứng minh AE + KC = DE.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: Ta có: $\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)=8$

$\Leftrightarrow \left(1+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)=8 \Leftrightarrow 1+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{a}{b}+1-8=0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}-2\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}-2\right)=0$

$\Leftrightarrow \frac{a^2+b^2-2ab}{ab}+\frac{b^2+c^2-2bc}{bc}+\frac{a^2+c^2-2ac}{ac}$

$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(b-c)^2}{bc}+\frac{(c-a)^2}{ac}=0 \Leftrightarrow a=b=c$

(Do a, b, c là độ dài ba cạnh tam giác trên nên a, b, c > 0 và $(a-b)^2 \ge 0$, $(b-c)^2 \ge 0$, $(c-a)^2 \ge 0$ $\forall$ a, b, c).

Vậy tam giác ABC đều.

Bài 2: *Cách 1:* $x^2 - 3x + 2 + |x - 1| = 0$

Xét các trường hợp sau:

1) Với $x \ge 1$: $|x - 1| = x - 1$

(1) $\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ (nhận)

2) Với $x < 1$: $= 1 - x$

(1) $\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 + 1 - x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 - 4x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+1) - 4(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1-4) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-3)=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=3$ (loại)

Kết luận: $S = \{1\}$

Cách 2:

$$x^2 - 3x + 2 + |x-1| = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - x + 1 + |x-1| = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + |x-1| = 1 - x$$

Điều kiện để phương trình có nghiệm: $1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$

Dưới điều kiện đó $|x-1| = 1-x$

Phương trình đã cho tương đương: $x^2 - 3x + 1 - x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \text{ (nhận)} \\ x = 3 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Bài 3: $x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + 2xyz$

$= xy(x+y) + z^2(x+y) + z(x^2 + 2xy + y^2)$

$= xy(x+y) + z^2(x+y) + z(x+y)^2 = (x+y)(xy + z^2 + xz + yz)$

$= (x+y)[y(x+z) + z(x+z)] = (x+y)(y+z)(x+z)$

Bài 4: *Cách 1:* $5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2y - 2x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) + 4x^2 + 4y^2 + 8xy = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + 4(x+y)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

(vì $(x-1)^2 \geq 0$, $(y+1)^2 \geq 0$ và $4(x+y)^2 \geq 0$)

Cách 2: $5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2y - 2x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 4x^2 + y^2 + 1 + 4xy - 4x - 2y + x^2 + 4y^2 + 1 + 4xy + 2x + 2y = 0$

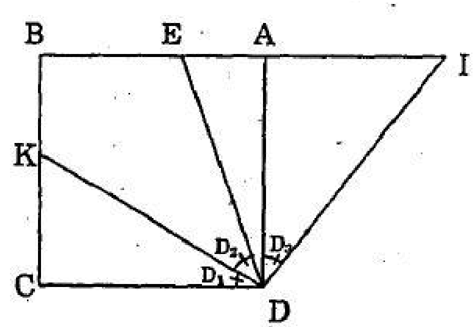
$$\Leftrightarrow (2x+y-1)^2 + (x+2y+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Bài 5: Trên tia đối của tia AB lấy điểm I sao cho CK = AI.

Vậy:

$\Delta CDK = \Delta ADI$ ($CK = AI$, $\widehat{A} = \widehat{C} = 90^0$, $CD = AD$) $\Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 = \widehat{D}_3$

và $\widehat{AID} = \widehat{CKD}$



Ta có $\widehat{CKD} = \widehat{KDA}$

(so le trong, BC // AD)

$= \widehat{D}_2 + \widehat{EDA} = \widehat{D}_3 + \widehat{EDA} = \widehat{EDI}$

Suy ra: $\widehat{EDI} = \widehat{EID} \Rightarrow \Delta EDI$ cân tại E

$\Rightarrow ED = EI = EA + AI = EA + CK$

BỘ ĐỀ 49

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI TOÁN 8 TRƯỜNG THCS NGUYỄN DU QUẬN 1, TPHCM – NĂM HỌC 1999 – 2000

(BÀI SỐ 3)

Bài 1: Giải phương trình: $\dfrac{x+1}{x^2+x+1}-\dfrac{x-1}{x^2-x+1}=\dfrac{2(x+2)^2}{x^6-1}$

Bài 2: Tìm giá trị của x để biểu thức sau đạt giá trị lớn nhất:

$A(x)=\dfrac{x}{(x+1999)^2}$ với $x>0$. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Bài 3:

1) Chứng minh nếu $x>0$, $y>0$ thì $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\geq\dfrac{4}{x+y}$

2) Chứng minh nếu a, b, c là ba cạnh của một tam giác, ta có:

$$\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{a+c-b}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Bài 4: Cho tam giác ($\widehat{A}=90^0$) đường cao AH, trung tuyến BM, phân giác CD cắt nhau tại một điểm.

1) Chứng minh: $\dfrac{BH}{HC}.\dfrac{CM}{MA}.\dfrac{AD}{BD}=1$

2) Chứng minh: BH = AC

Bài 5: Cho a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác và x, y, z là độ dài các đường phân giác của tam giác đó.

Chứng minh: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\geq\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: Nhận xét $x^2\pm x+1=\left(x\pm\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$

$x^6-1=(x^3-1)(x^3+1)=(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

Điều kiện: $x\neq\pm1$, phương trình đã cho được viết:

$(x^3+1)(x^2-1)-(x^3-1)(x^2-1)=2(x+2)^2$

$\Leftrightarrow(x^2-1)(x^3+1-x^3+1)=2x^2+8x+8$

$\Leftrightarrow 2x^2-2=2x^2+8x+8\Leftrightarrow 8x=-10\Leftrightarrow x=-\dfrac{5}{4}$

Kết luận: $S=\{-\dfrac{5}{4}\}$

Bài 2: *Cách 1:* Đặt a = 1999

Lúc ấy: $A(x) = \dfrac{x}{(x+a)^2} = \dfrac{(x+a)^2-(x+a)^2+4ax}{4a(x+a)^2} = \dfrac{(x+a)^2-(x-a)^2}{4a(x+a)^2}$

$= \dfrac{1}{4a} - \dfrac{(x-a)^2}{4a(x+a)^2} \le \dfrac{1}{4a}$ (với a > 0 và x > 0)

(vì a > 0 nên $\begin{cases}4a(x+a)^2 \ge 0\\(x-a)^2 \ge 0\end{cases} \Rightarrow -\dfrac{(x-a)^2}{4a(x+a)^2} \le 0, \forall x$

$A(x) = \dfrac{1}{4a} \Leftrightarrow x = a$

Thay a = 1999, ta có: $\max A(x) = \dfrac{1}{4.1999} \Leftrightarrow x = 1999$

Cách 2: Với a = 1999 > 0, ta có $(x-a)^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow (x+a)^2 \ge 4ax \Rightarrow \dfrac{1}{(x+a)^2} \le \dfrac{1}{4ax}$ (do a > 0, x > 0 nên 4ax > 0)

$\Rightarrow A(x) = \dfrac{x}{(x+a)^2} \le \dfrac{x}{4ax} = \dfrac{1}{4a}$

$A(x) = a \Leftrightarrow a$

Vậy $\max A(x) = \dfrac{1}{4a} = \dfrac{1}{4.1999} \Leftrightarrow x = 1999$

Bài 3: **1)** Với x, y > 0

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \ge \dfrac{4}{x+y} \Leftrightarrow \dfrac{x+y}{xy} \ge \dfrac{4}{x+y} \Leftrightarrow (x+y)^2 \ge 4xy$ (do x, y > 0)

$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 \ge 4xy \Leftrightarrow (x-y)^2 \ge 0$ (bất đẳng thức đúng)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$

2) Vì a, b, c là độ dài ba cạnh tam giác nên a + b − c > 0, b + c − a > 0 và a + c − b > 0

Áp dụng bất đẳng thức ta có:

$$\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} \ge \frac{4}{(a+b-c)+(b+c-a)} = \frac{4}{2b} = \frac{2}{b}$$

$$\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} \ge \frac{4}{(b+c-a)+(c+a-b)} = \frac{4}{2c} = \frac{2}{c}$$

$$\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{a+c-b} \ge \frac{4}{(a+b-c)+(a+c-b)} = \frac{4}{2a} = \frac{2}{a}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức cùng chiều ta được:

$$2\left(\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b}\right) \ge 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

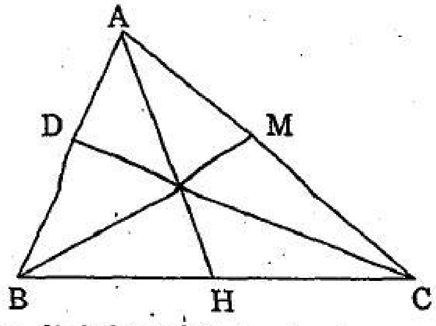
Suy ra: $\dfrac{1}{a+b-c}+\dfrac{1}{b+c-a}+\dfrac{1}{c+a-b}\ge\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$

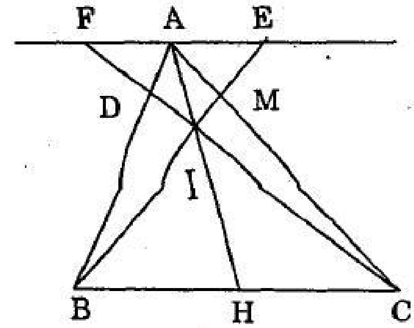
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a+b-c=b+c-a=c+a-b$

$\Leftrightarrow a=b=c \Leftrightarrow$ tam giác ABC đều.

Bài 4:

1) Qua A ta kẻ đường thẳng song song với BC và cắt các tia BM, CD lần lượt tại E và F.





Theo định lý Talet, ta có:

$$\frac{BH}{HC}=\frac{AE}{AF};\frac{MC}{MA}=\frac{BC}{AE} \text{ và } \frac{DA}{DB}=\frac{AF}{BC}$$

Suy ra: $\dfrac{BH}{HC}.\dfrac{MC}{MA}.\dfrac{DA}{DB}=\dfrac{AE}{AF}.\dfrac{BC}{AE}.\dfrac{AF}{BC}=1$

2) Vì M là trung điểm AC nên MA = MC

CD là phân giác trong ACB nên $\dfrac{DA}{BD}=\dfrac{AC}{BC}$

Suy ra $\dfrac{BH}{HC}.\dfrac{MC}{MA}.\dfrac{DA}{DB}=\dfrac{BH}{HC}.\dfrac{AC}{BC}=1$

$\Rightarrow BH.AC=HC.BC=AC^2 \Rightarrow BH=AC$

Bài 5: Xét tam giác ABC, đường thẳng qua B song song với phân giác AD cắt đường thẳng AC ở E, khi đó:

$$\begin{cases}\widehat{A}_1=\widehat{ABE}\ (\text{so le trong})\\ \widehat{A}_2=\widehat{AEB}\ (\text{đồng vị})\end{cases} \text{ mà } \widehat{A}_1=\widehat{A}_2\ (\text{gt}) \Rightarrow \widehat{ABE}=\widehat{AEB}$$

Suy ra tam giác ABE cân tại A.

suy ra $AB=AE=c$

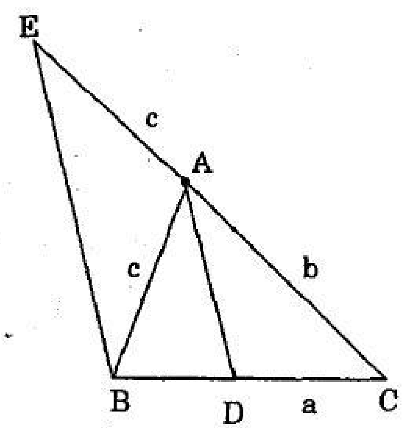
Do $AD \,//\, BE$

nên $\dfrac{x}{BE}=\dfrac{b}{b+c}\Rightarrow x=\dfrac{b}{b+c}BE$

Nhưng $BE<AB+AE=2c$.

Suy ra: $x<\dfrac{2bc}{b+c}$

hay $\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$



Lý luận tương tự, ta có: $\frac{1}{y} > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$ và $\frac{1}{z} > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

Vậy: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} > \frac{1}{2}2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

BỘ ĐỀ 50

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI GIẢI THƯỞNG LÊ QUÝ ĐÔN TRÊN BÁO KHĂN QUÀNG ĐỎ LẦN 2 – NĂM HỌC 2000 – 2001

Bài 1: Trong một cái giỏ đựng một số táo. Đầu tiên người ta lấy ra một nửa số táo và bỏ lại 5 quả, sau đó lấy thêm ra $\frac{1}{3}$ số táo còn lại và lấy thêm 4 quả. Cuối cùng trong giỏ còn lại 12 quả. Hỏi trong giỏ lúc đầu có bao nhiêu quả?

Bài 2: Cho a > 0, b > 0 và c > 0.

Chứng minh $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b} > \frac{3}{a+b+c}$

Bài 3: Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. Cho biết AB = 5, BH = 3. Tính BC.

Bài 4: Cho tam giác ABC. Một đường thẳng song song với BC cắt AC tại E và cắt đường thẳng song song với AB kẻ từ C ở F. Gọi S là giao điểm của AC và BF. Chứng minh $SC^2 = SE.SA$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

Gọi x (quả) là số quả táo trong giỏ lúc đầu (điều kiện $x \in N^*$)

Lấy ra lần thứ nhất: $\frac{x}{2} - 5$ (quả)

Số quả táo còn lại trong giỏ: $\frac{x}{2} + 5$ (quả)

Lấy ra lần thứ hai: $\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}+5\right)+4 = \frac{x}{6}+\frac{17}{3}$ (quả)

Lấy ra cả hai lần: $\frac{x}{2}-5+\frac{x}{6}+\frac{17}{3} = \frac{2x}{3}+\frac{2}{3}$ (quả)

Số quả táo còn lại: $x - \left(\frac{2x}{3}+\frac{2}{3}\right)$ (quả)

Ta có phương trình: $12 = x - \left(\frac{2x}{3}+\frac{2}{3}\right)$

$$12 = \frac{x}{3} - \frac{2}{3}$$

$$\frac{38}{3} = \frac{x}{3}$$
$$x = 38$$

Lúc đầu trong giỏ có 38 quả.

Bài 2: a, b, c > 0 nên:

$$\frac{1}{b+c} > \frac{1}{a+b+c}, \frac{1}{c+a} > \frac{1}{a+b+c}, \frac{1}{a+b} > \frac{1}{a+b+c}$$

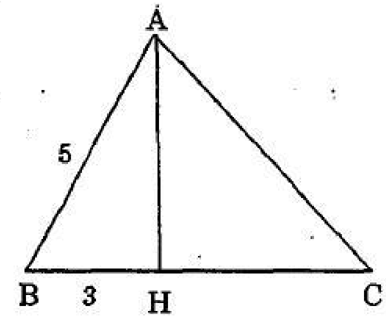
Do đó $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} > \frac{3}{a+b+c}$

Bài 3: Tam giác ABC vuông tại A,

AH là đường cao.

Do đó: $BH.BC = AB^2$

$\Rightarrow BC = \frac{AB^2}{BH} = \frac{25}{3}$ (cm)



Bài 4: Tam giác SBC có EF // BC (gt)

Theo hệ quả của định lý Talet, ta có: $\frac{SE}{SC} = \frac{SF}{SB}$ (1)

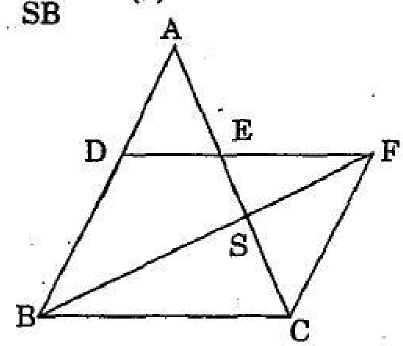
Tam giác SAB có CF // AB (gt)

Theo hệ quả định lý Talet, ta có:

$\frac{SC}{SA} = \frac{SF}{SB}$ (2)

Từ (1) và (2) có $\frac{SE}{SC} = \frac{SC}{SA}$

$\Rightarrow SC^2 = SE.SA$



BỘ ĐỀ 51

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI GIẢI THƯỞNG LÊ QUÝ ĐÔN QUẬN TÂN BÌNH, TPHCM – NĂM HỌC 2000 – 2001

Bài 1:

1) Giải phương trình: $\frac{1}{x^2 - 3x + 9} - \frac{9x}{x^3 + 27} = \frac{1}{x + 3}$

2) Chứng minh đẳng thức sau:

$$\frac{a^2 + 3ab}{a^2 - 9b^2} + \frac{2a^2 - 5ab - 3b^2}{6ab - a^2 - 9b^2} = \frac{a^2 + an + bn + ab}{3bn - a^2 - an + 3ab}$$

Bài 2: Cho hình bình hành ABCD có đường chéo AC lớn hơn đường chéo BD. Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của B và D xuống đường thẳng AC.

1) Tứ giác BEDF là hình gì? Chứng minh điều ấy.

2) Gọi CH và CK lần lượt là đường cao của tam giác ACB và ACD.

a/ Chứng minh: $\dfrac{CH}{CB} = \dfrac{CK}{CD}$

b/ Hai tam giác CHK và ABC đồng dạng.

c/ Chứng minh rằng: $AB.AH + AD.AK = AC^2$

Bài 3: Cho hình bình hành ABCD. Trên cạnh AB và CD lần lượt lấy các điểm M và K sao cho AM = CK. Trên đoạn AD lấy điểm P tùy ý. Đoạn thẳng MK lần lượt cắt PB và PC tại E và F. Chứng minh $S_{PEF} = S_{BME} + S_{CKF}$

Ghi chú: S_{PEF} là diện tích tam giác PEF.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $\dfrac{1}{x^2 - 3x + 9} - \dfrac{9x}{x^3 + 27} = \dfrac{1}{x + 3}$ (1)

Điều kiện để phương trình (1) có nghĩa:

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 9 \neq 0 \\ x^3 + 27 \neq 0 \\ x + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 9 \neq 0 \\ (x+3)(x^2 - 3x + 9) \neq 0 \\ x + 3 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + \dfrac{9}{4} + \dfrac{27}{4} \neq 0 \\ x + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{27}{4} \neq 0 \\ x + 3 \neq 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x \neq -3$ vì $\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{27}{4} > 0$ với mọi x.

Do đó, ta có: $\dfrac{1}{x^2 - 3x + 9} - \dfrac{9x}{(x+3)(x^2 - 3x + 9)} = \dfrac{1}{x + 3}$

$\Leftrightarrow x + 3 - 9x = x^2 - 3x + 9$

$\Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3x + 6 = 0 \Leftrightarrow x(x + 2) + 3(x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x + 2)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 2 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -3 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x = -2$ ($x = -3 \notin$ TXĐ)

Vậy phương trình (1) có một nghiệm số là $x = -2$

2) Rút gọn vế trái: $M = \dfrac{a^2 + 3ab}{a^2 - 9b^2} + \dfrac{2a^2 - 5ab - 3b^2}{6ab - a^2 - 9b^2}$

Điều kiện:

$$\begin{cases} a^2 - 9b^2 \neq 0 \\ 6ab - a^2 - 9b^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a - 3b)(a + 3b) \neq 0 \\ -(a - 3b)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 3b \neq 0 \\ a + 3b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 3b \\ a \neq -3b \end{cases}$$

Với điều kiện trên ta có:

$$M = \frac{a(a+3b)}{(a+3b)(a-3b)} + \frac{2a^2 - 6ab + ab - 3b^2}{-(a-3b)^2}$$

$$= \frac{a}{a-3b} - \frac{2a(a-3b)+b(a-3b)}{(a-3b)^2} = \frac{a}{a-3b} - \frac{(a-3b)(2a+b)}{(a-3b)^2}$$

$$= \frac{a}{a-3b} - \frac{2a+b}{a-3b} = \frac{-a-b}{a-3b} = \frac{a+b}{3b-a} \qquad (1)$$

Rút gọn vế phải $N = \dfrac{a^2 + an + bn + ab}{3bn - a^2 - an + 3ab}$

Điều kiện:

$3bn - a^2 - an + 3ab \neq 0 \Leftrightarrow 3bn - an - a^2 + 3ab \neq 0$

$\Leftrightarrow n(3b-a) - a(a-3b) \neq 0 \Leftrightarrow n(3b-a) + a(3b-a) \neq 0$

$\Leftrightarrow (n+a)(3b-a) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n + a \neq 0 \\ 3b - a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -n \\ a \neq 3b \end{cases}$

Với điều kiện trên, ta có:

$$N = \frac{a(a+n)+b(n+a)}{(n+a)(3b-a)} = \frac{(n+a)(a+b)}{(n+a)(3b-a)}$$

$$N = \frac{a+b}{3b-a} \qquad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có:

$$\frac{a^2+3ab}{a^2-9b^2} + \frac{2a^2-5ab-3b^2}{6ab-a^2-9b^2} = \frac{a^2+an+bn+ab}{3bn-a^2-an+3ab}$$

(với $a \neq 3b$; $a \neq -3b$; $a \neq -n$)

Bài 2: 1) Xét hai tam giác vuông ABE và CDF ta có:

AB = CD (ABCH là hình bình hành)

$\widehat{BAE} = \widehat{DCF}$ (hai góc so le trong có AB // CD)

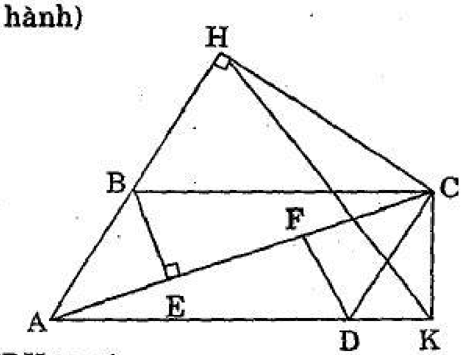
Vậy $\Delta ABE = \Delta CDF$

(cạnh huyền – góc nhọn)

Suy ra BE = DF

Mà BE // DF (cùng vuông góc với AC)

nên tứ giác BEDF là hình bình hành.



2) a/ Xét hai tam giác vuông CBH và CDK ta có:

$\widehat{CBH} = \widehat{CDK}$ (góc có cạnh tương ứng song song: BC // AD; BA // CD)

Vậy $\Delta CBH \backsim \Delta CDK$ (g–g)

Suy ra: $\dfrac{CH}{CB} = \dfrac{CK}{CD}$

b/ Ta có: CB // AD

Và $CK \perp AD$ nên $CK \perp CB$ mà $AB \perp CH$

nên $\widehat{ABC} = \widehat{HCK}$ (hai góc cùng bù với góc $\widehat{BAD}$)

ΔCHK và ΔABC có:

$ABC = HCK$;

$\dfrac{CH}{CB} = \dfrac{CK}{CD}$ hay $\dfrac{CH}{CB} = \dfrac{CK}{AB}$ $(AB = CD)$

nên $\Delta CHK \backsim \Delta BCA$ (c–g–c)

c/ Xét hai tam giác vuông AFD và CEB ta có:

$AD = BC$ (ABCD là hình bình hành)

$\widehat{FAD} = \widehat{ECB}$ (hai góc so le trong có $BC \parallel AD$)

Vậy $\Delta AFD = \Delta CEB$ (cạnh huyền – góc nhọn)

Cho ta $AF = CE$.

Xét hai tam giác vuông AFD và AKC có A chung.

Suy ra $\Delta AFD \backsim \Delta AKC$ (g–g)

Cho ta: $\dfrac{AF}{AK} = \dfrac{AD}{AC}$

hay $AD.AK = AF.AC$

Suy ra $AD.AK = CE.AC$ (1)

Xét hai tam giác vuông ABE và ACH ta có BAE chung.

Do đó $\Delta ABE \backsim \Delta ACH$ (góc – góc)

Cho ta: $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AE}{AH}$

hay $AB.AH = AE.AC$ (2)

Cộng vế theo vế (1) và (2) ta được:

$AD.AK + AB.AH = CE.AC + AE.AC = (CE + AE).AC = AC^2$

Bài 3: Vẽ $PH \perp BC$ và $BQ \perp CD$ $(H \in BC,\ Q \in CD)$

Ta có: $S_{ABCD} = PH.BC$

$S_{PBC} = \dfrac{1}{2}PH.BC = \dfrac{1}{2}S_{ABCD}$

và $AB = CD$ (ABCD là hình bình hành)

$AM = CK$ (gt)

Suy ra $AB - AM = CD - CK$

hay $BM = DK$

Xét hình thang BMKC ta có:

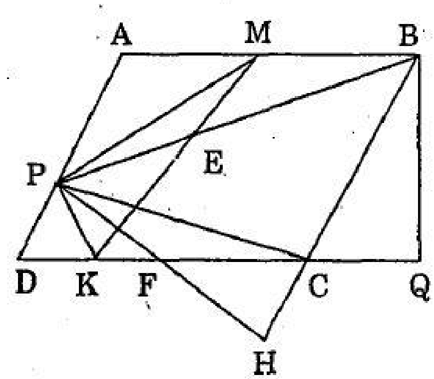
$S_{BMKC} = \dfrac{(BM + KC).BQ}{2}$

$= \dfrac{(DK + KC).BQ}{2} = \dfrac{DC.BQ}{2} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD}$

suy ra $S_{PBC} = S_{BMKC}$

hay $S_{PEF} + S_{BEFC} = S_{BME} + S_{KFC} + S_{BEFC}$

suy ra $S_{PEF} = S_{BME} + S_{KFC}$



BỘ ĐỀ 52

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 8 TRƯỜNG THCS NGUYỄN GIA THIỀU, QUẬN TÂN BÌNH, TPHCM – NĂM HỌC 2000 – 2001

Bài 1:

1) Phân tích đa thức thành nhân tử: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

2) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$A = -x^2 - y^2 + xy + x + y$ và các giá trị tương ứng của x và y.

3) Giải phương trình: $3x^3 + 4x^2 + 5x - 6 = 0$

4) Giải bất phương trình: $\dfrac{x-3}{x+2} > 2$

Bài 2: Cho đoạn thẳng AC = m. Lấy điểm B bất kỳ thuộc đoạn AC ($B \neq A$, $B \neq C$). Tia Bx vuông góc với AC. Trên tia Bx lần lượt lấy các điểm D và E sao cho BD = BA và BE = BC.

1) Chứng minh rằng: CD = AE và $CD \perp AE$.

2) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AE, CD. Gọi I là trung điểm của MN. Chứng minh rằng khoảng cách từ điểm I đến AC không đổi khi B di chuyển trên đoạn AC.

3) Tìm vị trí của điểm B trên đoạn AC sao cho tổng diện tích hai tam giác ABE và BCD có giá trị lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất này theo m.

Bài 3: Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh AB lấy điểm M. Vẽ BH vuông góc với CM. Nối DH. Vẽ HN vuông góc với DH (N thuộc BC).

1) Chứng minh rằng tam giác DHC đồng dạng với tam giác NHB

2) Chứng minh rằng AM.NB = NC.MB

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a^3 + 3a^2b + 2ab^2 + b^3) + c^3 - (3a^2b + 3ab^2 + 3abc)$

$= (a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b + c) = (a + b + c)[(a + b)^2 - (a + b)c + c^2 - 3ab]$

$= (a + b + c)(a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab)$

$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$

2) *Cách 1:*

$$A = -x^2 - y^2 + xy + x + y$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 - 2xy + y^2) - \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) - \frac{1}{2}(y^2 - 2y + 1) + 1$$

$$= 1 - \frac{1}{2}[(x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2] \leq 1$$

Dấu "=" xảy ra: $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - 1 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 1 = 0 \text{ (Đúng)} \\ x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy max A = 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Cách 2: Ta có:

$$A = -x^2 - y^2 + xy + x + y = -x^2 + (y+1)x - y^2 + y$$

$$= -x^2 + 2\frac{(y+1)}{2}.x - \frac{(y+1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{4} - y^2 + y$$

$$= -\left[x - 2.\frac{(y+1)}{2}x + \frac{(y+1)^2}{4}\right] + \frac{y^2 + 2y + 1 - 4y^2 + 4y}{4}$$

$$= -\left(x - \frac{y+1}{2}\right)^2 + \frac{-3y^2 + 6y - 3 + 4}{4}$$

$$= \left(x - \frac{y+1}{2}\right)^2 - 3(y-1)^2 + 1 \le 1, \forall x, y$$

Vì: $\begin{cases} \left(x - \dfrac{y+1}{2}\right)^2 \ge 0 \\ 3(y-1)^2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\left(x - \dfrac{y+1}{2}\right)^2 \le 0 \\ -3(y-1)^2 \le 0 \end{cases} \forall x, y$

$A = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - \dfrac{y+1}{2} = 0 \\ 3(y-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy max A = 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

3) $3x^3 + 4x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow 3x^3 - 2x^2 + 6x^2 - 4x + 9x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(3x-2) + 2x(3x-2) + 3(3x-2) = 0 \Leftrightarrow (3x-2)(x^2 + 2x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow 3x - 2 = 0$ (vì $x^2 + 3x + 3 = (x+1)^2 + 2 > 0$) $\Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm số là: $x = \dfrac{2}{3}$

4) $\dfrac{x-3}{x+2} > 2 \Leftrightarrow \dfrac{x-3}{x+2} - 2 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x - 3 - 2x - 4}{x+2} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x-7}{x+2} > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+7}{x+2} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 7 > 0 \\ x + 2 < 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x + 7 < 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -7 \\ x < -2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x < -7 \\ x > -2 \end{cases} \Rightarrow -7 < x < -2$

Vậy bất phương trình đã cho có các nghiệm là các giá trị $-7 < x < -2$

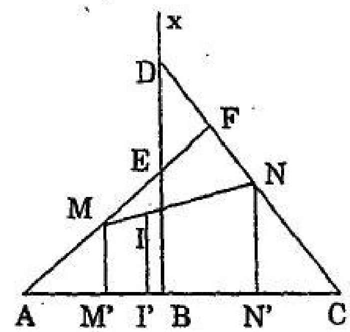
Bài 2: 1) Xét hai tam giác ABE và DBC, ta có:

AB = BD (gt)

BE = BC (gt)

$\widehat{ABE} = \widehat{DBC} = 90^0$

Vậy $\Delta ABE = \Delta DBC$ (c–g–c);
cho ta CD = AE
Gọi F là giao điểm của AE và CD, ta có:
$\widehat{AEB} = \widehat{DEF}$ (hai góc đối đỉnh)
$\widehat{EAB} = \widehat{BDC}$ ($\Delta ABE = \Delta DBC$)
Suy ra $\widehat{AEB} + \widehat{EAB} = \widehat{DEF} + \widehat{BDC}$
Mà $\widehat{AEB} + \widehat{EAB} = 90^0$ nên $DEF + \widehat{BDC} = 90^0$
Suy ra $\widehat{DEF} = 90^0$ hay $AE \perp CD$ tại F.



2) Gọi M', I', N' lần lượt là hình chiếu của M, I, N xuống AC.
Tam giác AEB có M là trung điểm của AE, MM' // BE (cùng vuông góc với AC) nên MM' là đường trung bình của tam giác AEB;

cho ta: $MM' = \frac{1}{2}BE$ hay $MM' = \frac{1}{2}BC$

Chứng minh tương tự, ta có NN' là đường trung bình của ΔBCD;

cho ta $NN' = \frac{1}{2}BD$ hay $NN' = \frac{1}{2}AB$

Tứ giác MNM'N' có MM' // NN' (cùng vuông góc với AC) nên MNM'N' là hình thang.
I là trung điểm của MN, II' // MM' // NN' (cùng vuông góc với AC) nên II' là đường trung bình của hình thang MNM'N'.

Cho ta $II' = \frac{MM' + NN'}{2} = \frac{BC + AB}{4} = \frac{AC}{4} = \frac{m}{4}$ (không đổi)

3) Vì $\Delta ABE = \Delta DBC$ nên $S_{ABE} = S_{DBC}$ suy ra $S_{ABE} + S_{DBC} = 2S_{ABE}$

$2S_{ABE} = 2 \cdot \frac{1}{2}AB.BE = AB.BE = AB.BC$

Cách 1: $AB > 0$; $BC > 0$ mà tổng $AB + BC = AC = m$ (không đổi) nên tích AB.BC đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $AB = BC = \frac{m}{2}$

$\Leftrightarrow$ B là trung điểm của AC

Vậy $\max(S_{ABE} + S_{DBC}) = \frac{m}{2}.\frac{m}{2} = \frac{m^2}{4}$ (đvdt)

$\Leftrightarrow$ B là trung điểm của đoạn AC.
Cách 2: Ta có: $(AB - BC)^2 \geq \Leftrightarrow AB^2 - 2AB.BC + BC^2 \geq 0$
$\Leftrightarrow AB^2 + BC^2 \geq 2AB.BC$
$\Leftrightarrow AB^2 + 2AB.BC + BC^2 \geq 4AB.BC \Leftrightarrow (AB + BC)^2 \geq 4AB.BC$

$\Leftrightarrow AC^2 \geq 4AB.BC \Leftrightarrow m^2 \geq 4AB.BC \Leftrightarrow AB.BC \leq \frac{m^2}{4}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow AB = BC = \frac{m}{2} \Leftrightarrow$ B là trung điểm của đoạn AC.

Vậy $\max(S_{ABE} + S_{DBC}) = \frac{m^2}{4}$ (đvdt) $\Leftrightarrow$ B là trung điểm của đoạn AC.

Bài 3: 1) Xét ΔDHC và ΔNHB có:

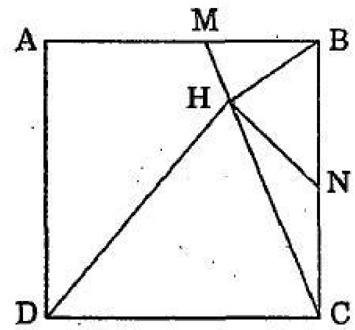
$\widehat{DHC} = \widehat{NHB}$ (hai góc cùng phụ với góc $\widehat{CHN}$)

DCH = NBH (hai góc cùng phụ với góc $\widehat{HCB}$)

Do đó $\Delta DHC \backsim \Delta NHB$ (g–g)

2) ΔMBH và ΔBCH có:

$\widehat{MHB} = \widehat{BHC}$ (= 90^0); $\widehat{BMH} = \widehat{HBC}$ (hai góc cùng phụ với góc $\widehat{MBH}$)



Vậy $\Delta MBH \backsim \Delta BCH$ (g–g)

Cho ta: $\dfrac{MB}{BC} = \dfrac{HB}{HC}$ (1)

Mà $\dfrac{NB}{DC} = \dfrac{HB}{HC}$ (2)

(vì $\Delta DHC \backsim \Delta NHB$)

Và BC = DC (3)

(ABCH là hình vuông)

Từ (1), (2) và (3) suy ra MB = NB cho ta AM = CN

Suy ra AM . NB = NC . MB.

BỘ ĐỀ 53

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 8 TRƯỜNG THCS NGUYỄN GIA THIỀU QUẬN TÂN BÌNH, TPHCM – NĂM HỌC 2000 – 2001

Bài 1:

1) Tính giá trị của biểu thức: $\dfrac{x^2 - 25}{x^3 - 10x^2 + 25} : \dfrac{y - 2}{y^2 - y - 2}$

Biết $x^2 + 9y^2 - 4xy = 2xy - |x - 3|$

2) Giải phương trình: $2x^3 + 3x^2 + 2x - 2 = 0$

Bài 2:

1) Chứng minh rằng: $x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y + 3 \geq 0$

2) Chứng minh rằng: $(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) \leq abc$ với a, b, c là độ dài ba cạnh một tam giác.

Bài 3: Cho hình bình hành ABCD. Gọi M, N là trung điểm của BC và AD. Gọi K là điểm bất kỳ nằm giữa C và D. Gọi P và Q theo thứ tự là các điểm đối xứng của K qua tâm M và N.

1) Chứng minh Q, A, B, P thẳng hàng.

2) Gọi G là giao điểm của PN và QM. Chứng minh GK luôn đi qua điểm I cố định khi K thay đổi trên đoạn CD.

Bài 4: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Chứng minh:

1) Tam giác FHE đồng dạng với tam giác BHC.

2) H là giao điểm các đường phân giác của tam giác DEF.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: 1) $\dfrac{x^2-25}{x^3-10x^2+25}:\dfrac{y-2}{y^2-y-2}$

$$A=\frac{x^2-25}{x(x^2-10x+25)}:\frac{y-2}{y^2+y-2y-2}=\frac{(x-5)(x+5)}{x(x-5)^2}:\frac{y-2}{(y+1)(y-2)}$$

$$=\frac{(x-5)(x+5)(y+1)(y-2)}{x(x-5)^2(y-2)}=\frac{(x+5)(y+1)}{x(x-5)}$$

(với $x\neq 0$, $x\neq 5$, $y\neq 2$, $y\neq -1$)

Ta có: $x^2+9y^2-4xy=2xy-|x-3|\Leftrightarrow x^2-6xy+9y^2+|x-3|=0$

$\Leftrightarrow (x-3y)^2+|x-3|=0$

Do $(x-3y)^2\geq 0$; $|x-3|\geq 0$ nên đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}x-3y=0\\x-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\x=3\end{cases}$$

Thay $x=3$ và $y=1$ vào biểu thức rút gọn của A ta được:

$$A=\frac{(3+5)(1+1)}{3(3-5)}=\frac{16}{-6}=\frac{-8}{3}$$

2) $2x^3+3x^2+2x-2=0\Leftrightarrow 2x^3-x^2+4x^2-2x+4x-2=0$

$\Leftrightarrow x^2(2x-1)+2x(2x-1)+2(2x-1)=0\Leftrightarrow(2x-1)(x^2+2x+2)=0$

$\Leftrightarrow 2x-1=0$ (vì $x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0$) $\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm số là $x=\dfrac{1}{2}$

Bài 2: 1) *Cách 1:* $x^2+xy+y^2-3x-3y+3\geq 0$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-2y+1+xy-x-y+1\geq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+x(y-1)-(y-1)\geq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(x-1)(y-1)\geq 0$

$$\Leftrightarrow\left[(x-1)+\frac{1}{2}(y-1)\right]^2+\frac{3}{4}(y-1)^2\geq 0$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=0\\y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$

Cách 2: Ta có: $x^2+xy+y^2-3x-3y+3=x^2+(y-3)x+y^2-3y+3$

$$=x^2+2.\frac{y-3}{2}x+\frac{(y-3)^2}{4}-\frac{(y-3)^2}{4}+y^2-3y+3$$

$$= \left(x + \frac{y-3}{4}\right)^2 + \frac{4y^2 - 12y + 12 - (y^2 - 6y + 9)}{4}$$

$$= \left(x + \frac{y-3}{4}\right)^2 + \frac{3(y^2 - 2y + 1)}{4} = \left(x + \frac{y-3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4}(y-1)^2 \geq 0$$

Vì $\left(x + \frac{y-3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4}(y-1)^2 \geq 0$ với mọi x, y

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} x + \frac{y-3}{2} = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

2) $(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) \leq abc$

Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 - (b-c)^2 \leq a^2 \\ b^2 - (a-c)^2 \leq b^2 \\ c^2 - (a-b)^2 \leq c^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} (a-b+c)(a+b-c) \leq a^2 \\ (b-a+c)(b+a-c) \leq b^2 \\ (c-a+b)(c+a-b) \leq c^2 \end{array}\right\}$$

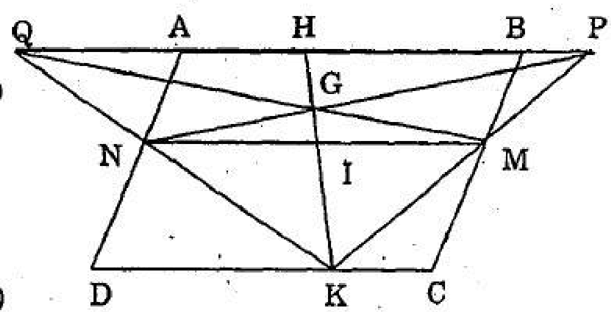
$\Leftrightarrow [(a - b + c)(a + b - c)(- a + b + c)]^2 \leq (abc)^2$

$\Leftrightarrow (a + b - c)(a - b + c)(- a + b + c) \leq abc$

(Vì a, b, c là ba cạnh của tam giác nên $a + b - c > 0$, $a - b + c > 0$, $-a + b + c > 0$)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow$ tam giác ABC đều.

Bài 3: 1) Ta có : $\frac{NA}{ND} = \frac{NQ}{NK} = 1$



Suy ra AQ // DK (Định lý đảo Talet)

hay AQ // DC (1)

Ta có: $\frac{MB}{MC} = \frac{MP}{MK} = 1$

Suy ra BP // KC (Định lý đảo Talet)

hay BP // DC (2)

mà AB // DC (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra bốn điểm A, B, P, Q thẳng hàng.

2) Gọi H là giao điểm của KG với PQ, I là giao điểm của KG với MN. G là giao điểm của hai trung tuyến PN và QM của tam giác KPQ nên G là trọng tâm của tam giác KPQ. Suy ra KH là trung tuyến của tam giác KPQ.

MN là đường trung bình của tam giác KPQ, cho ta MN // PQ.

Áp dụng định lý Talet vào tam giác KQH với NI // QH (NM // PQ)

Ta có: $\frac{NI}{QH} = \frac{KN}{KQ} = \frac{1}{2}$

Suy ra $\dfrac{NI}{QH} = \dfrac{MN}{QP}$ mà $\dfrac{NI}{QH} = \dfrac{MN}{2QH}$

nên MN = 2 NI cho ta I là trung điểm của đoạn MN.

Do đó điểm I cố định.

Vậy GK luôn đi qua điểm cố định I (I là trung điểm đoạn MN) khi K thay đổi trên đoạn CD.

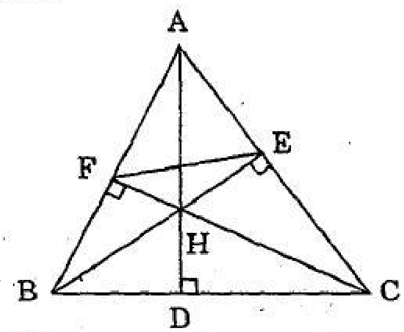
Bài 4:

1) ΔFHB và ΔEHC có:

$\widehat{BFH} = \widehat{CEH} = 90^0$, $\widehat{FHB} = \widehat{EHC}$ (đối đỉnh)

Vậy $\Delta FHB \backsim \Delta EHC$ (g–g)

Cho ta: $\dfrac{HF}{HE} = \dfrac{HB}{HC} \Rightarrow \dfrac{HF}{HB} = \dfrac{HE}{HC}$



ΔFHE và ΔBHC có:

$\widehat{FHE} = \widehat{BHC}$ (đối đỉnh)

$\dfrac{HF}{HB} = \dfrac{HE}{HC}$

Vậy $\Delta FHE \backsim \Delta BHC$ (c–g–c)

2) $\Delta FHE \backsim \Delta BHC$ suy ra FEH = BCH (1)

Ta có: $\widehat{BAH} = \widehat{BCH}$ (2)

(hai góc cùng phụ với góc $\widehat{ABC}$)

($AB \perp CH$, $AH \perp BC$)

Chứng minh tương tự câu 1, ta có $\Delta ABH \backsim \Delta EDH$

nên $\widehat{BAH} = \widehat{BED}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{FEH} = \widehat{BED}$ cho ta EB là tia phân giác FED.

Chứng minh tương tự ta được DA là tia phân giác góc $\widehat{FDE}$, FC là tia phân giác góc $\widehat{EFD}$.

Vậy H là giao điểm các đường phân giác của ΔDEF.

BỘ ĐỀ 54

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 8 TRƯỜNG THCS NGUYỄN DU QUẬN GÒ VẤP, TPHCM – NĂM HỌC 2000 – 2001

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1) $3x^2 - \dfrac{1}{3}y^2 + \dfrac{2}{3}y - \dfrac{1}{3}$ **2)** $x^2 - 5x^2 + 8x - 4$

Bài 2: Tìm x, y, z thỏa mãn: $x^2 + 4y^2 + z^2 = 2x + 12y - 4z - 14$

Bài 3: Cho biểu thức:

$$A = \left(\frac{x+1}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x}\right) : \frac{x+2}{x^2-1} + \frac{6x^2-3x}{x^3+2x^2} - 2 + x$$

1) Rút gọn biểu thức A.

2) Tìm điều kiện của x để A có giá trị âm?

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông tại A. Về phía ngoài của tam giác, ta vẽ các hình vuông ABDE và ACGH.

1) Chứng tỏ tứ giác BCHE là hình thang cân.

2) Kẻ đường cao AH_1 của tam giác ABC.

Chứng tỏ các đường thẳng AH_1, DE, GH đồng quy.

Bài 5: Cho hình chữ nhật ABCD, kẻ BH vuông góc với AC tại H. Gọi M và K lần lượt là trung điểm của AH và CD. Chứng minh $BM \perp MK$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $3x^2 - \frac{1}{3}y^2 + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3} = 3x^2 - \frac{1}{3}(y^2 - 2y + 1)$

$= 3x^2 - \frac{1}{3}(y-1)^2 = 3[x^2 - \frac{1}{9}(y-1)^2] = 3(x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3})(x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3})$

2) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = x^3 - 4x^2 + 4x + 4x - 4$

$= x^2(x-1) - 4x(x-1) + 4(x-1) = (x-1)(x^2 - 4x + 4) = (x-1)(x-2)^2$

Bài 2: $x^2 + 4y^2 + z^2 = 2x + 12y - 4z - 14$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + 4y^2 - 12y + 9 + z^2 - 4z + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (2y-3)^2 + (z-2)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ 2y - 3 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{3}{2} \\ z = 2 \end{cases}$$

Bài 3: 1) $A = \left(\frac{x+1}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x}\right) : \frac{x+2}{x^2-1} + \frac{6x^2-3x}{x^3+2x^2} - 2 + x$

Điều kiện để biểu thức A có nghĩa là: $\begin{cases} x^2-1 \neq 0 \\ x+1 \neq 0 \\ x \neq 0 \\ x+2 \neq 0 \\ x^3+2x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x \neq 0 \\ x \neq -2 \end{cases}$

TXĐ: $x \neq \pm 1$, $x \neq 0$, $x \neq -2$

$$A = \left[\frac{x(x+1)}{x(x+1)(x-1)} + \frac{2(x-1)x}{x(x+1)(x-1)} - \frac{3(x-1)(x+1)}{x(x-1)(x+1)}\right] \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{x+2}$$

$$+ \frac{3x(2x-1)}{x^2(x+2)} - 2 + x$$

$$A = \frac{(x^2 + x + 2x^2 - 2x - 3x^2 + 3)(x-1)(x+1)}{x(x-1)(x+1)(x+2)} + \frac{3x(2x-1)}{x^2(x+2)} - 2 + x$$

$$A = \frac{x(3-x)+3x(2x-1)}{x^2(x+2)} - 2 + x = \frac{3x - x^2 + 6x^2 - 3x}{x^2(x+2)} + x - 2$$

$$A = \frac{5x^2}{x^2(x+2)} + x - 2 = \frac{5}{x+2} + x - 2 = \frac{5 + x^2 - 4}{x+2} = \frac{x^2+1}{x+2}$$

2) $A < 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2<0 \\ x \neq \pm 1 \\ x \neq 0 \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x \neq \pm 1 \\ x \neq 0 \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x < -2$$

Bài 4:

1) Ta có: $\widehat{EBH} = \widehat{BHC} = 45^0$ (tính chất đường chéo hình vuông)

Suy ra EB // HC (hai góc so le trong bằng nhau)

Ta có: EA = AB; AC = AH

nên EA + AC = AB + AH

hay EC = BH

Tứ giác BEHC có EB // HC và EC = BH

nên tứ giác BEHC là hình thang cân.

2) Gọi P là giao điểm của DE và GH

Dễ dàng chứng minh tứ giác AEPH là hình chữ nhật.

Gọi O là giao điểm của AH_1 với EH. Vẽ HQ ⊥ AO, EK ⊥ AO.

ΔABH_1 và ΔEAK có

$\widehat{AH_1B} = \widehat{AKE} = 90^0$; $\widehat{ABH} = \widehat{EAK}$

(hai góc cùng phụ với góc $\widehat{BAH_1}$)

AB = AE

Vậy $\Delta ABH_1 = \Delta EAK$

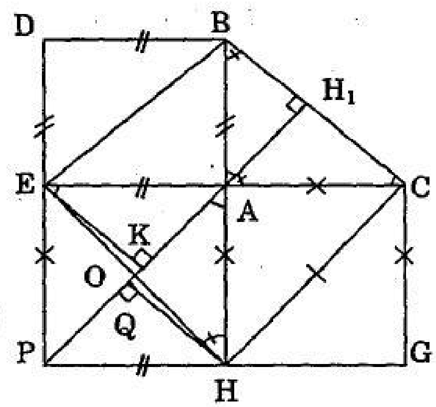
(cạnh huyền – góc nhọn)

Suy ra $AH_1 = EK$ (1)

Chứng minh tương tự ta có:

$\Delta ACH_1 = \Delta HAQ$ (cạnh huyền – góc nhọn)

Suy ra $AH_1 = HQ$ (2)



Từ (1) và (2) suy ra EK = HQ

Xét hai tam giác OEK và OHQ, ta có:

$\widehat{EKO} = \widehat{HQO} = 90^0$, EK = HQ, $\widehat{KEO} = \widehat{QHO}$. (So le trong: EK // QH)

Vậy $\Delta OEK = \Delta OHQ$ (g–c–g)

Suy ra OE = OH

Do đó O là trung điểm của EH.

Vậy O cũng là trung điểm của AP.

(Tính chất hai đường chéo của hình chữ nhật AEPH)

Suy ra P thuộc AO nên P thuộc AH_1.

Vậy ba đường thẳng AH_1, DE, GH đồng quy tại một điểm.

Bài 5: Gọi N là trung điểm của BH, suy ra MN là đường trung bình của tam giác AHB; cho ta MN // AB và MN = $\frac{1}{2}$AB.

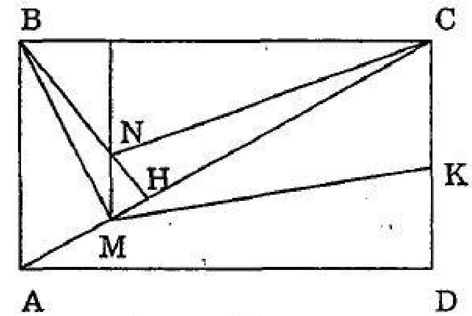
mà AB $\perp$ BC (ABCD là hình chữ nhật)

nên MN $\perp$ BC

Tam giác BMC có BH, MN là hai đường cao cắt nhau tại N nên N là trực tâm của tam giác BMC;

cho ta CN là đường cao của tam giác BMC.

Suy ra CN $\perp$ BM.



Ta có: CK = $\frac{1}{2}$CD

Mà CD = AB nên CK = $\frac{1}{2}$AB, Mặt khác CK // AB (CD // AB)

MN // AB và MN = $\frac{1}{2}$AB

Do đó MN // CK và MN = CK

Suy ra tứ giác CNMK là hình bình hành; cho ta CN // MK

mà CN $\perp$ BM nên MK $\perp$ BM.

BỘ ĐỀ 55

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN 1, TPHCM – NĂM HỌC 2000 – 2001

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử:

1) $ab + ac + b^2 + 2bc + c^2$ 2) $x^4 + 2x^2 - 3$

3) $(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5) + 1$

Bài 2: Rút gọn và tính giá trị của biểu thức với x + y = 2001

$$\frac{x(x+5)+y(y+5)+2(xy-3)}{x(x+6)+y(y+6)+2xy}$$

Bài 3: Thực hiện phép tính:

$$\frac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\frac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\frac{c+a}{(a-b)(b-c)}$$

Bài 4: Cho $a + b + c = 1$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$

Chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Bài 5: Với sợi dây, em hãy nêu cách kiểm tra xem một tấm gỗ hình tứ giác có dạng hình chữ nhật.

Bài 6: Cho hình thang ABCD (AB // CD) điểm M nằm trong tứ giác ABCD, vẽ các hình bình hành MDPA, MCQB. Chứng minh rằng PQ song song CD.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $ab + ac + b^2 + 2bc + c^2 = a(b + c) + (b + c)^2 = (b + c)(a + b + c)$

2) $x^4 + 2x^2 - 3$

$= x^4 - 1 + 2x^2 - 2 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) + 2(x^2 - 1)$

$= (x^2 - 1)(x^2 + 3) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 3)$

3) $(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5) + 1$

$= (x - 2)(x - 5)(x - 3)(x - 4) + 1 = (x^2 - 7x + 10)(x^2 - 7x + 12) + 1$

$= (x^2 - 7x + 11 - 1)(x^2 - 7x + 11 + 1) + 1$

$= (x^2 - 7x + 11)^2 - 1 + 1 = (x^2 - 7x + 11)^2$

Bài 2: Với $x + y \neq 0$ và $x + y + 6 \neq 0$

Ta có:

$$\frac{x(x+5)+y(y+5)+2(xy-3)}{x(x+6)+y(y+6)+2xy} = \frac{x^2+5x+y^2+5y+2xy-6}{x^2+6x+y^2+6y+2xy}$$

$$= \frac{(x^2+y^2+2xy)+5(x+y)-6}{(x^2+y^2+2xy)+6(x+y)} = \frac{(x+y)^2+6(x+y)-(x+y)-6}{(x+y)^2+6(x+y)}$$

$$= \frac{(x+y)(x+y+6)-(x+y+6)}{(x+y)(x+y+6)} = \frac{(x+y+6)(x+y-1)}{(x+y)(x+y+6)} = \frac{x+y-1}{x+y}$$

Thay $x + y = 2001$ thì biểu thức có giá trị $\frac{2000}{2001}$

Bài 3: Với a, b, c đôi một khác nhau, ta có:

$$\frac{a+b}{(b-c)(c-a)} + \frac{b+c}{(c-a)(a-b)} + \frac{c+a}{(a-b)(b-c)}$$

$$= \frac{(a+b)(a-b)+(b+c)(b-c)+(c+a)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{a^2-b^2+b^2-c^2+c^2-a^2}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0$$

Bài 4: Do $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \Rightarrow \frac{ab+bc+ac}{abc} = 0$

$\Rightarrow ab + bc + ac = 0$

Mặt khác $a + b + c = 1$ nên $(a + b + c)^2 = 1$

Suy ra $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = 1$

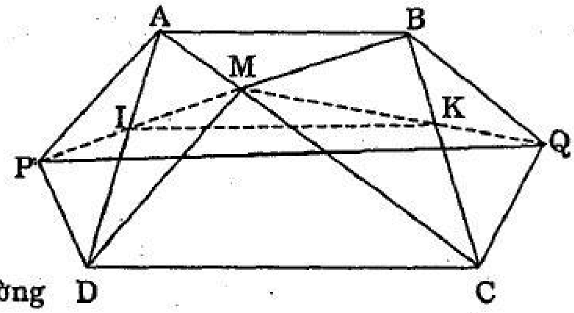
$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 1$ (do $ab + bc + ac = 0$)

Bài 5: Dùng dây đo chiều dài cặp cạnh đối tấm gỗ bằng nhau từng đôi một.

Dùng dây đo hai đường chéo bằng nhau.

Nếu các điều trên thỏa mãn thì tấm gỗ là hình chữ nhật.

Bài 6: Do MAPD và MBQC là hình bình hành nên I là trung điểm AD, MP và K là trung điểm của BC, MQ. Vậy IK là đường trung bình tam giác MPQ.



Suy ra IK // PQ và IK là đường trung bình hình thang ABCD.
Suy ra IK // CD
Vậy PQ // CD

BỘ ĐỀ 56

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 8 TRƯỜNG THCS HOA LƯ QUẬN 9 TPHCM – NĂM HỌC 2000 – 2001

Bài 1: Cho x, y, z là ba số khác 0 thỏa mãn $\begin{cases} x + y + z = 2002 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2002} \end{cases}$

Chứng minh rằng trong ba số x, y, z tồn tại hai số đối nhau.

Bài 2: Cho a, b, c là ba số thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 14 \end{cases}$

Hãy tính giá trị của biểu thức: $A = 1 + a^4 + b^4 + c^4$

Bài 3: Tìm ba số x, y, z sao cho:

$$x^2 + 5y^2 - 4xy + 10x - 22 + |x + y + z| + 26 = 0$$

Bài 4: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

1) $(a^2 + b^2)(a^2 + 1) \geq 4a^2b$, với mọi a, b.

2) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \geq \dfrac{4}{a+b}$ Với mọi a, b > 0

3) $\dfrac{1}{a+3b} + \dfrac{1}{b+3c} + \dfrac{1}{c+3a} \geq \dfrac{1}{a+2b+c} + \dfrac{1}{b+2c+a} + \dfrac{1}{c+2a+b}$

với mọi a, b, c > 0

Bài 5: Cho tứ giác lồi ABCD. Trên hai cạnh AB và CD ta lần lượt lấy hai điểm E và F sao cho: $\dfrac{AE}{BE} = \dfrac{CF}{DF}$.

Chứng minh rằng nếu đường chéo AC đi qua trung điểm I của đoạn thẳng EF thì AC chia đôi diện tích của tứ giác ABCD.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: Trong ba số x, y, z tồn tại hai số đối nhau nghĩa là $x + y = 0$ hoặc $y + z = 0$ hoặc $x + z = 0 \Rightarrow (x + y)(y + z)(z + x) = 0$

Từ điều kiện của đề bài ta có:

$$(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 1 \Rightarrow (x + y + z)(xy + yz + zx) - xyz = 0$$

$\Rightarrow (x + y)(xy + yz + zx) + xyz + z^2(x + y) - xyz = 0$

$\Rightarrow (x + y)(xy + yz + zx + z^2) = 0 \Rightarrow (x + y)[y(x + z) + z(x + z)] = 0$

$\Rightarrow (x + y)(y + z)(x + z) = 0$ (đpcm)

Bài 2: Từ $a + b + c = 0$

$\Rightarrow 0 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$

$\Rightarrow 2(ab + bc + ac) = -(a^2 + b^2 + c^2) = -14 \Rightarrow ab + bc + ac = -7$

Vậy: $49 = (ab + bc + ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 + 2abc(a + b + c)$

$= a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ (do $a + b + c = 0$)

Từ $a^2 + b^2 + c^2 = 14$

$\Rightarrow 196 = (a^2 + b^2 + c)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)$

$= a^4 + b^4 + c^4 + 2.49 \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 = 196 - 98 = 98$

Vậy $A = 1 + a^4 + b^4 + c^4 = 99$.

Bài 3: *Cách 1:* $x^2 + 5y^2 - 4xy + 10x - 22y + |x + y + z| + 26 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4xy + 4y^2 + y^2 - 2y + 1 + 10x - 20y + 25 + |x + y + z| = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2y)^2 + 2.5(x - 2y) + 25 + (y - 1)^2 + |x + y + z| = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2y + 5)^2 + (y - 1)^2 + |x + y + z| = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ y - 1 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad (\text{vì } (x - 2y + 5)^2 \geq 0,\ (y - 1)^2 \geq 0,\ |x + y + z| \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Cách 2: $x^2 + 5y^2 - 4xy + 10x - 22 + |x + y + z| + 26 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2(5 - 2y)x + 5y^2 - 22y + 26 + |x + y + z| = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2(5 - 2y)x + (5 - 2y)^2 + y^2 - 2y + 1 + |x + y + z| = 0$

$\Leftrightarrow (x + 5 - 2y)^2 + (y - 1)^2 + |x + y + z| = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ y = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Bài 4: 1) *Cách 1:*

$(a^2 + b^2)(a^2 + 1) \geq 4a^2b \Leftrightarrow a^4 + a^2b^2 + a^2 + b^4 - 4a^2b \geq 0$

$\Leftrightarrow a^4 - 2a^2b + b^2 + a^2b^2 - 2a^2b + a^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + a^2(b-1)^2 \geq 0$ (đúng)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = \pm 1 \end{cases}$

Cách 2: Với mọi a, b ta có: $\begin{cases} a^2 + b^2 \geq 2|a||b| \\ a^2 + 1 \geq 2|a| \end{cases}$

$\Rightarrow (a^2 + b^2)(a^2 + 1) \geq 4|a|^2|b| = 4a^2|b| \geq 4a^2b$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} |a| = |b| \\ |a| = 1 \\ b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = \pm 1 \end{cases}$

2) Ta có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} \geq \frac{4}{a+b}$

$\Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab$ (do a, b > 0) $\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$ (đúng)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

3) Với a, b, c > 0 áp dụng bất đẳng thức ở trên ta được:

$$\frac{1}{a+3b} + \frac{1}{b+2c+a} \geq \frac{4}{2(a+2b+c)} = \frac{2}{a+2b+c}$$

$$\frac{1}{b+3c} + \frac{1}{c+2a+b} \geq \frac{4}{2(b+2c+a)} = \frac{2}{b+2c+a}$$

$$\frac{1}{c+3a} + \frac{1}{a+2b+c} \geq \frac{4}{2(c+2a+b)} = \frac{2}{c+2a+b}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức cùng chiều, ta được:

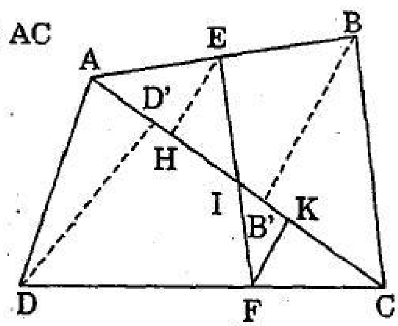
$$\frac{1}{a+3b} + \frac{1}{b+3c} + \frac{1}{c+3a} + \frac{1}{b+2c+a} + \frac{1}{c+2a+b} + \frac{1}{a+2b+c}$$

$$\geq \frac{2}{a+2b+c} + \frac{2}{b+2c+a} + \frac{2}{c+2a+b}$$

Suy ra: $\frac{1}{a+3b} + \frac{1}{b+3c} + \frac{1}{c+3a} \geq \frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{b+2c+a} + \frac{1}{c+2a+b}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a + 3b = b + 2c + a \\ b + 3c = c + 2a + b \\ c + 3a = a + 2b + c \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c$

Bài 5: Kẻ DD', BB', EH, FK cùng vuông góc với AC



Do $EH // BB' \Rightarrow \frac{EH}{BB'} = \frac{AE}{AB}$

$FK // DD' \Rightarrow \frac{FK}{DD'} = \frac{CF}{CD}$

Mà $\frac{AE}{AB} = \frac{CF}{CD}$ (gt)

Suy ra $\frac{EH}{BB'} = \frac{FK}{DD'}$

Mà $\Delta HIE = \Delta KIF$ (IE = IF, HIE = KIF)

Suy ra $HE = FK$

Vậy $BB' = DD'$

Ta có: $S_{ACD} = \frac{1}{2}AC.DD' = \frac{1}{2}AC.BB' = S_{ABC}$

Suy ra đường chéo AC chia đôi diện tích tứ giác ABCD.

BỘ ĐỀ 57

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN 9, TPHCM – NĂM HỌC 2000 – 2001

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử:

1) $3x^2 - 2x - 1$ 2) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

Bài 2:

1) Giải phương trình: $\frac{x+2}{x-2} - \frac{1}{x} - \frac{2}{x(x-2)} = 0$

2) Giải bất phương trình sau: $\frac{4x+7}{2x-1} < 2$

Bài 3: Chứng minh nếu $xyz = 1$ thì:

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+xz} = 1$$

Bài 4:

1) $\forall$ a, b $\in$ Q, chứng minh rằng: $a^4 + a^3b + ab^3 + b^4 \geq 0$

2) Cho: $7x^2 + 8xy + 7y^2 = 10$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $x^2 + y^2$

Bài 5: Cho tứ giác ABCD. Đường thẳng qua A song song với BC, cắt BD tại P và đường thẳng qua B song song với AD cắt AC tại Q. Chứng minh PQ // CD.

Bài 6: Cho tam giác ABC. Trên cạnh BC, CA và AB lần lượt lấy các điểm M, N, P. Lần lượt đặt diện tích các tam giác ANP, MPB, MNC, ABC là S_1, S_2, S_3, S.

1) Chứng minh: $\frac{S_1}{S} = \frac{AN.AP}{AC.AB}$

2) Chứng minh: $S_1 . S_2 . S_3 \leq \frac{1}{64}S^3$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $3x^2 - 2x - 1 = 3x^2 - 3 - 2x + 2 = 3(x^2 - 1) - 2(x - 1)$

$= 3(x - 1)(x + 1) - 2(x - 1) = (x - 1)(3x + 3 - 2) = (x - 1)(3x + 1)$

2) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = x^3 + x^2 + 5x^2 + 5x + 6x + 6$

$= x^2(x + 1) + 5x(x + 1) + 6(x + 1) = (x + 1)(x^2 + 5x + 6)$

$= (x + 1)[x^2 - 4 + 5x + 10]$

$= (x + 1)[(x - 2)(x + 2) + 5(x + 2)] = (x + 1)(x + 2)(x + 3)$

Bài 2:

1) Điều kiện: $x \neq 0$ và $x \neq 2$

Dưới điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$x(x + 2) - (x - 2) - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - x + 2 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \quad \text{(loại)} \\ x = -1 \ \text{(nhận)} \end{array}\right.$

Kết luận: $S = \{-1\}$

2) Ta có: $\dfrac{4x+7}{2x-1} < 2 \Leftrightarrow \dfrac{4x+7}{2x-1} - 2 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{4x+7-2(2x-1)}{2x-1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{9}{2x-1} < 2 \Leftrightarrow 2x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{2}$

Bài 3: (Xem lời giải bài 3, bộ đề 47)

Bài 4:

1) $\forall$a, b ta có:

$a^4 + a^3b + ab^3 + b^4 \geq 0 \Leftrightarrow a^3(a + b) + b^3(a + b) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a + b)(a^3 + b^3) \geq 0 \Leftrightarrow (a + b)^2(a^2 - ab + b^2) \geq 0$

Vì: $(a + b)^2 \geq 0$; $a^2 - ab + b^2 = \left(a - \dfrac{b}{2}\right)^2 + \dfrac{3b^2}{4} \geq 0$, $\forall$ a, b.

2) Từ $7x^2 + 8xy + 7y^2 = 10$ (*)

$\Rightarrow 7(x^2 + y^2) = 10 - 8xy \Rightarrow 11(x^2 + y^2) = 10 + 4x^2 - 8xy + 4y^2$

$\Rightarrow 11(x^2 + y^2) = 10 + 4(x - y)^2$

Mà $4(x - y)^2 \geq 0$, $\forall$ x, y $\Rightarrow 10 + 4(x - y)^2 \geq 10$

Vậy $11(x^2 + y^2) \geq 10 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq \dfrac{10}{11}$

$x^2 + y^2 = \dfrac{10}{11} \Leftrightarrow x = y$ và x, y thỏa (*)

Từ $7x^2 + 8xy + 7y^2 = 10 \Rightarrow 3(x^2 + y^2) = 10 - 4x^2 - 8xy - 4y^2$

$\Rightarrow 3(x^2 + y^2) = 10 - 4(x + y)^2$

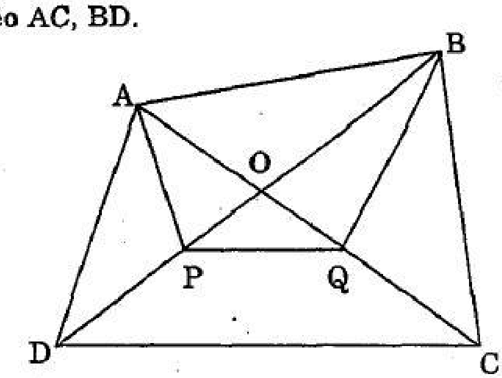
mà $4(x + y)^2 \leq 0$, $\forall$ x,y $\Rightarrow 10 - 4(x + y)^2 \leq 10$

Vậy $3(x^2 + y^2) \leq 10 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq \dfrac{10}{3}$

$x^2 + y^2 = \dfrac{10}{3} \Leftrightarrow x = y$ và x, y thỏa (*)

Kết luận: $\min(x^2 + y^2) = \dfrac{10}{11}$; $\max(x^2 + y^2) = \dfrac{10}{3}$

Bài 5: Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC, BD.



Áp dụng hệ quả định lí Talet, ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OP}{OB} \text{(vì AP // BC)} \\ \dfrac{OQ}{OA} = \dfrac{OB}{OD} \text{(vì BQ // AD)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{OA}{OC}.\frac{OQ}{OA} = \frac{OP}{OB}.\frac{OB}{OD}$$

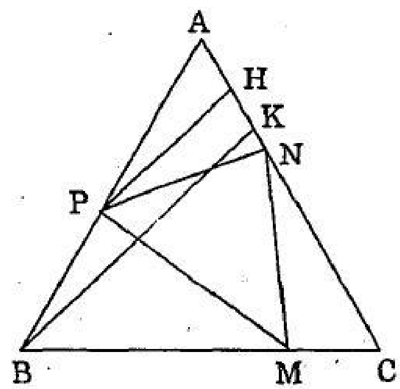
$$\Rightarrow \frac{OQ}{OC} = \frac{OP}{OD}$$

Vậy theo định lý Talet đảo, ta được PQ // CD.

Bài 6:

1) Kẻ PH và BK cùng vuông góc AC, ta được PH // BK.

Áp dụng định lý Talet ta có: $\dfrac{PH}{BK} = \dfrac{AP}{AB}$



Ta có: $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{\frac{1}{2}PH.AN}{\frac{1}{2}BK.AC} = \dfrac{PH}{BK}.\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{PA}{AB}.\dfrac{AN}{AC}$

2) Đặt: $\dfrac{AP}{AB} = a, \dfrac{CN}{AC} = b, \dfrac{BM}{BC} = c$

(với $0 < a, b, c < 1$)

Suy ra: $\dfrac{BP}{AB} = 1 - a; \dfrac{AN}{AC} = 1 - b; \dfrac{CM}{BC} = 1 - c$

Ta có: $\dfrac{S_1}{S} = \dfrac{AP}{AB}.\dfrac{AN}{AC} = a(1 - b)$

Lý luận tương tự như câu a, ta được: $\dfrac{S_2}{S} = \dfrac{BP}{AB}.\dfrac{BM}{BC} = (1 - a)c$

và $\dfrac{S_3}{S} = \dfrac{CM}{BC}.\dfrac{CN}{AC} = (1 - c)b$

Suy ra: $\dfrac{S_1.S_2.S_3}{S^3} = a(1 - a)b(1 - b)c(1 - c) \le \dfrac{1}{4}.\dfrac{1}{4}.\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{64}$

Vì với $0 < x < 1$, ta luôn có: $x(1 - x) \le \dfrac{1}{4}$

Thật vậy: $x(1 - x) = x^2 + x = \left(x^2 - x + \dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{1}{4} = -\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4} \le \dfrac{1}{4}$

vậy $S_1S_2S_3 \le \dfrac{S^3}{64}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi vã chỉ khi M, N, P là trung điểm BC, CA và AB của tam giác ABC.

BỘ ĐỀ 58

ĐỀ THI KỲ 3 GIẢI THƯỞNG LÊ QUÝ ĐÔN TRÊN BÁO KHĂN QUÀNG ĐỎ LẦN 3 – NĂM HỌC 2000 – 2001

Bài 1: Rút gọn các biểu thức rồi tính giá trị:

$$A = \frac{xy^2(y+x) + x^2y(y+x)}{2y^2 - 2x^2}, \text{ với } x = -2,\ y = \frac{1}{3}$$

$$B = \frac{(27x^3 - y^3)(16y^2 - x^2)}{(x+4y)(9x^2 + 3xy + y^2)}, \text{ với } x = -1,\ y = \frac{1}{2}$$

Bài 2: Thực hiện phép chia đa thức: $(x^4 - 1) : (2x^2 + 1)$

Bài 3: Cho hình vuông ABCD có M, N, P, Q lần lượt là các trung điểm của AB, BC, CD, DA. Đường thẳng AN lần lượt cắt DM, BP tại I, J. Đường thẳng CQ lần lượt cắt BP, DM tại H, K. Tứ giác IJHK là hình gì?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: $A = \frac{xy^2(y+x) + x^2y(y+x)}{2y^2 - 2x^2} = \frac{xy(y+x)[y+x]}{2(y-x)(y+x)} = \frac{xy(y+x)}{2(y-x)}$

Với $x = -2,\ y = \frac{1}{3}$ thì $A = \frac{-\frac{2}{3}\left(-\frac{5}{3}\right)}{2\left(\frac{1}{3}+2\right)} = \frac{5}{21}$

$$B = \frac{(27x^3 - y^3)(16y^2 - x^2)}{(x+4y)(9x^2 + 3xy + y^2)} = \frac{(3x-y)(9x^2+3xy+y^2)(4y+x)(4y-x)}{(x+4y)(9x^2+3xy+y^2)}$$

$= (3x - y)(4y - x)$ với $x = -1,\ y = \frac{1}{2}$ thì $B = \frac{-21}{2}$

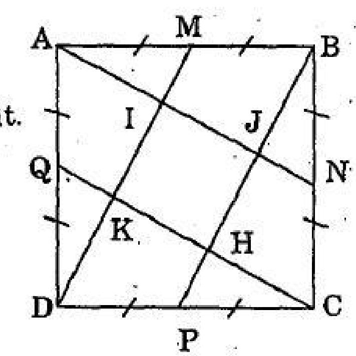
Bài 2: $x^4 - 1 : 2x^2 + 1$ có thương là $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}$ và số dư là $-\frac{3}{4}$.

Bài 3: Tứ giác IJHK có các cạnh đối diện song song (vì MBPD, ANCQ là các hình bình hành).

Hai tam giác vuông AMD và DQC bằng nhau cho $\widehat{ADM} = \widehat{DCQ}$.

Suy ra: $\widehat{ADM} + \widehat{DQC} = 90^0$

Vậy $CQ \perp DM$.



Tứ giác IJKH có $\widehat{IKH} = 90^0$ nên là hình chữ nhật.

Ta cũng có hai tam giác AID và DKC bằng nhau và cũng có K là trung điểm ID, H là trung điểm KC. Do đó IK = HK.

Hình chữ nhật IJKH có IK = HK nên là hình vuông.

BỘ ĐỀ 59

ĐỀ THI KỲ 5 GIẢI THƯỞNG LÊ QUÝ ĐÔN TRÊN BÁO KHĂN QUÀNG ĐỎ LẦN 3 – NĂM HỌC 2000 – 2001

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử:

1) $A = x^4 - 3x^3 + 8x - 24$

2) $B = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

Bài 2: Thu gọn biểu thức: $C = \left(\dfrac{x+x^3}{1-x^2} - \dfrac{x-x^3}{1+x^2}\right) : \left(\dfrac{1+x}{1-x} - \dfrac{1-x}{1+x}\right)$

Bài 3: Cho hình bình hành ABCD. Vẽ phân giác AM của góc A (M thuộc cạnh CD), vẽ phân giác CN của góc C (N thuộc cạnh AB). Các phân giác góc A và góc C cắt BD lần lượt tại E và F. Chứng minh diện tích hai tứ giác AEFN và CFEM bằng nhau.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $A = x^4 - 3x^3 + 8x - 24$

$= x^3(x-3) + 8(x-3) = (x-3)(x^3+8) = (x-3)(x+2)(x^2-2x+4)$

2) $B = x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = x^3 - 5x^2 + 2x^2 - 10x + x - 5$

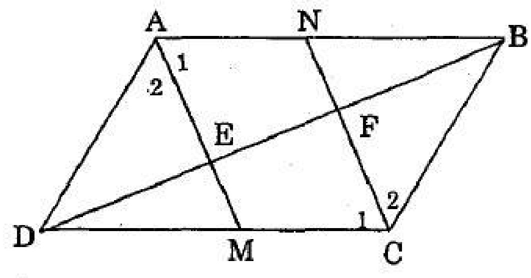
$= x^2(x-5) + 2x(x-5) + (x-5)$

$= (x-5)(x^2+2x+1) = (x-5)(x+1)^2$

Bài 2: $C = \left(\dfrac{x+x^3}{1-x^2} - \dfrac{x-x^3}{1+x^2}\right) : \left(\dfrac{1+x}{1-x} - \dfrac{1-x}{1+x}\right)$

$$= \left(\frac{x+x^3+x^3+x^5-x+x^3+x^3-x^5}{(1-x^2)(1+x^2)}\right) : \left(\frac{(1+x^2)-(1-x^2)}{1-x^2}\right) = \frac{4x^3}{4x(1+x^2)} = \frac{x^2}{x^2+1}.$$

Bài 3: ABCD là hình bình hành nên $\widehat{A} = \widehat{C}$.



Suy ra: $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$; $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$

Ta có: $\widehat{C}_1 = \widehat{BNF} = \widehat{A}_1$

Suy ra AM // CN.

Hai tam giác BNF và DME bằng nhau cho EM = NF.

Hai tam giác AED và CFB bằng nhau cho AE = CF.

Hai tứ giác ANFE và CMEF là hai hình thang có cùng chiều cao và các cạnh đáy tương ứng bằng nhau nên có diện tích bằng nhau.

BỘ ĐỀ 60

ĐỀ THI KỲ 7 GIẢI THƯỞNG LÊ QUÝ ĐÔN
TRÊN BÁO KHĂN QUÀNG ĐỎ LẦN 3 – NĂM HỌC 2000 – 2001

Bài 1: Tìm x thỏa: $\dfrac{6x^3 + 7x^2 + 5x + 2}{2x^2 + x + 1} = x - 5$

Bài 2: Thu gọn biểu thức:

$$A = \left(\frac{2}{x^2 + x - 2xy - 2y}\right).\left(1 + \frac{3x + x^2}{3 + x}\right) - \frac{x}{xy - 2y^2}$$

Bài 3: Cho hình thang ABCD (AB // CD, AB<CD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD. Gọi I là trung điểm của MN. Một đường thẳng bất kỳ qua I cắt hai cạnh đáy AB, CD lần lượt tại E và F. Chứng minh hai tứ giác AEFD và BEFC có diện tích bằng nhau.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: $6x^3 + 7x^2 + 5x + 2$ chia cho $2x^2 + x + 1$ ta được $3x + 2$, dư là 0.

Ta có: $\dfrac{6x^3 + 7x^2 + 5x + 2}{2x^2 + x + 1} = x - 5$

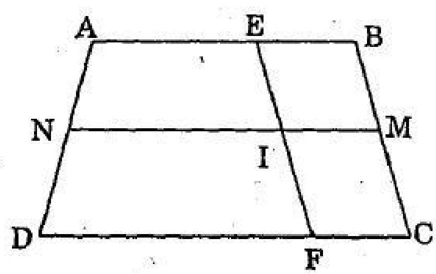
$3x + 2 = x - 5 \Leftrightarrow 2x = -7 \Leftrightarrow x = \dfrac{-7}{2}$

Bài 2: $A = \left(\dfrac{2}{x^2 + x - 2xy - 2y}\right).\left(1 + \dfrac{3x + x^2}{3 + x}\right) - \dfrac{x}{xy - 2y^2}$

$= \left(\dfrac{2}{x(x - 2y) + x - 2y}\right)\left(1 + \dfrac{(3 + x)x}{3 + x}\right) - \dfrac{x}{y(x - 2y)}$

$= \dfrac{2}{(x - 2y)(x + 1)}.(1 + x) - \dfrac{x}{y(x - 2y)}$

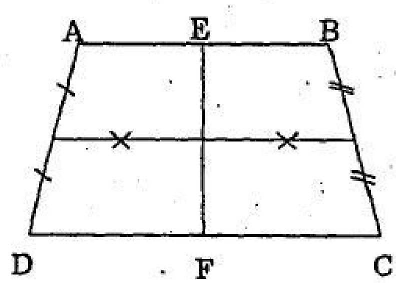
$A = \dfrac{2y - x}{y(x - 2y)} = -\dfrac{1}{y}$



Bài 3: Hai hình thang AEFD và BCFE có cùng chiều cao. Hình thang AEFD có tổng hai cạnh đáy là AE + DF = 2NI. Hình thang BEFC có tổng hai cạnh đáy là BE + FC = 2MI.

Mà NI = MI (gt)

Vậy diện tích AEFD bằng diện tích BEFC.



BỘ ĐỀ 61

ĐỀ THI KỲ 11 GIẢI THƯỞNG LÊ QUÝ ĐÔN TRÊN BÁO KHĂN QUÀNG ĐỎ LẦN 3 – NĂM HỌC 2001 – 2002

Bài 1: Giải các phương trình:

1) $(x^2 - 9)(x^2 + 4x) = 0$

2) $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{x+2}{x-3}$

Bài 2: Tìm giá trị x nguyên để cho: $A = \dfrac{2x^3 + 5x^2 - 5x + 5}{2x - 1}$ là số nguyên.

Bài 3: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và hai đường cao AA' và BB' cắt nhau tại H. Gọi D là điểm đối xứng của H qua trung điểm I của BC.

1) Tứ giác BHCD là hình gì?

2) Chứng minh $\widehat{BDC}$ và $\widehat{BAC}$ bù nhau.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $(x^2 - 9)(x^2 + 4x) = 0 \Leftrightarrow (x + 3)x(x - 3)(x + 4) = 0$

$\Leftrightarrow x = -3$ hoặc $x = 3$ hoặc $x = 0$ hoặc $x = -4$

2) $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{x+2}{x-3}$ (Điều kiện $x \neq 1$ và $x \neq 3$)

Phương trình: $x(x - 3) = (x - 1)(x + 2)$

$x^2 - 3x = x^2 + x - 2 \Rightarrow 4x = 2 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$ (nhận)

Bài 2: $A = \dfrac{2x^3 + 5x^2 - 5x + 5}{2x - 1} = x^2 + 3x - 1 + \dfrac{4}{2x - 1}$

Với x nguyên thì $x^2 + 3x - 1$ là số nguyên.

Để cho A là số nguyên thì $2x - 1$ là ước của 4 mà $2x - 1 \not\vdots\, 2$

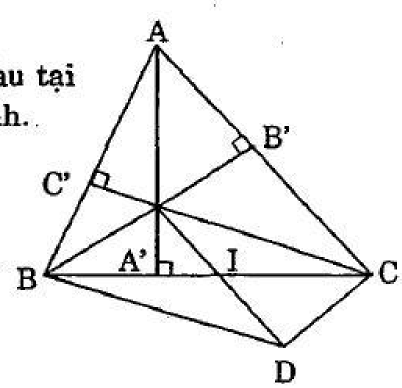
Do đó $2x - 1 = \pm 1$

$2x - 1 = 1 \Rightarrow x = 1$

$2x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0$

Vậy $x = 1$ hoặc $x = 0$

Bài 3:



1) Tứ giác BHCD có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm I của chúng nên là hình bình hành.

2) Ta có: $\widehat{BDC} = \widehat{BHC}$ (do BHCD là hình bình hành)

Tứ giác HC'AB' có tổng bốn góc là 360^0

nên $\widehat{C'AB'}$ bù với $\widehat{C'HB'}$

Ta có $C'HB' = BHC$ (đối đỉnh)

Vậy $\widehat{BDC}$ bù với $\widehat{C'AB'}$ (hay $\widehat{BAC}$) (đpcm)

BỘ ĐỀ 62

ĐỀ THI KỲ 11 GIẢI THƯỞNG LÊ QUÝ ĐÔN TRÊN BÁO KHĂN QUÀNG ĐỎ LẦN 3 – NĂM HỌC 2000 – 2001

Bài 1: Rút gọn các biểu thức:

1) $A = \dfrac{3x+9}{5x+5} : \dfrac{9-x^2}{x^2+2x+1}$ $(x \neq -1)$

2) $B = \dfrac{x-y}{y-z} : \dfrac{z-x}{y-z} : \dfrac{x-y}{z-x}$ $(y \neq z, z \neq x, x \neq y)$

Bài 2: Tính giá trị của biểu thức: $C = \dfrac{x^3 - x}{(1+xy)^2 - (x+y)^2}$ với $x = 12$, $y = 99$.

Bài 3: Cho một hình thang cân có hai cạnh đáy là 3cm và 11cm, góc của cạnh bên và cạnh đáy lớn bằng 45^0. Tính diện tích hình thang ấy.

Bài 4: Một hình vuông và một hình thoi có cùng chu vi. Hỏi diện tích hình nào lớn hơn? Giải thích.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $A = \dfrac{3x+9}{5x+5} : \dfrac{9-x^2}{x^2+2x+1} = \dfrac{3x+9}{5x+5} . \dfrac{x^2+2x+1}{9-x^2}$

(điều kiện: $x \neq \pm 3, -1$)

$= \dfrac{3(x+3)}{5(x+1)} . \dfrac{(x+1)^2}{(3+x)(3-x)} = \dfrac{3(x+1)}{5(3-x)}$

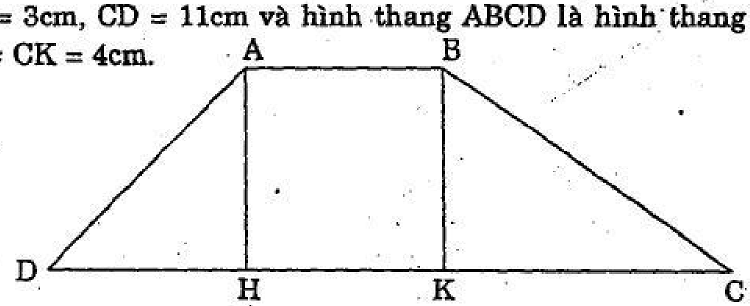
2) $B = \dfrac{x-y}{y-z} : \dfrac{z-x}{y-z} : \dfrac{x-y}{z-x} = \left(\dfrac{x-y}{y-z} . \dfrac{y-z}{z-x}\right) : \dfrac{x-y}{z-x} = \left(\dfrac{x-y}{z-x}\right) . \left(\dfrac{z-x}{x-y}\right) = 1$

Bài 2: $C = \dfrac{x^3 - x}{(1+xy)^2 - (x+y)^2} = \dfrac{x(x^2-1)}{(1+xy+x+y)(1+xy-x-y)}$

$= \dfrac{x(x+1)(x-1)}{[(1+x)+y(1+x)][(1-x)-y(1-x)]} = \dfrac{x(x+1)(x-1)}{(1+x)(1+y)(1-x)(1-y)}$

$= \dfrac{-x}{(1+y)(1-y)} = \dfrac{12}{(1+99)(1-99)} = \dfrac{-12}{9800} = \dfrac{-3}{2450}$

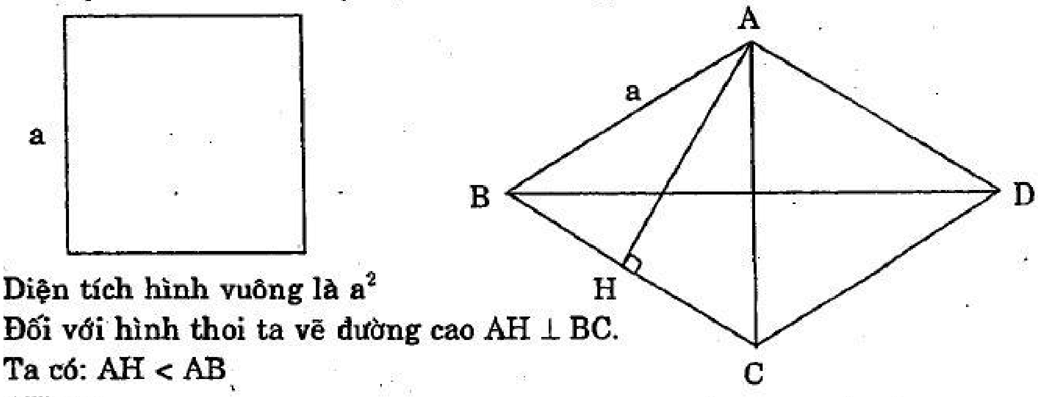
Bài 3: Ta có AB = 3cm, CD = 11cm và hình thang ABCD là hình thang cân nên DH = CK = 4cm.



Tam giác AHD vuông cân cho AH = 4cm.

Diện tích hình thang ABCD: $\dfrac{(3+11)4}{2} = 28cm^2$

Bài 4: Hình vuông và hình thoi có cùng chu vi nên có cạnh bằng nhau. Ta đặt a là chiều dài cạnh của hình vuông và hình thoi.



Diện tích hình vuông là a^2

Đối với hình thoi ta vẽ đường cao $AH \perp BC$.

Ta có: AH < AB

AH < a.

Diện tích hình thoi ABCD xem như là diện tích hình bình hành ABCD cạnh đáy là BC, chiều cao là AH. Ta có diện tích hình thoi: $BC.AH < a^2$

Vậy diện tích hình thoi nhỏ hơn diện tích hình vuông có cùng chu vi.

BỘ ĐỀ 63

ĐỀ THI KỲ 12 GIẢI THƯỞNG LÊ QUÝ ĐÔN TRÊN BÁO KHĂN QUÀNG ĐỎ LẦN 3 – NĂM HỌC 2000 – 2001

Bài 1: Giải các phương trình:

1) $\dfrac{x^2+2x}{x^2+1} - 2x = 0$ 2) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2x^2-5}{x^3-1} = \dfrac{4}{x^2+x+1}$

Bài 2: Giải các phương trình (x là ẩn số)

1) $\dfrac{a-x}{10} = \dfrac{a}{2} + 5$ 2) $\dfrac{x+a}{b} - \dfrac{b}{a} = \dfrac{x-b}{a} + \dfrac{a}{b}$ $(a \neq 0, b \neq 0)$

Bài 3: Cho hình thang cân ABCD với AB // CD. Gọi I, J, K, L lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

1) Tứ giác IJKL là hình gì?

2) Cho biết diện tích ABCD bằng $20cm^2$. Tính diện tích tứ giác IJKL.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $\dfrac{x^2+2x}{x^2+1} - 2x = 0$ (vì $x^2 + 1 > 0$ nên không có điều kiện)

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 2x(x^2+1) = 0$

$\Leftrightarrow 2x^3 + x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(-2x + 1) = 0 \Leftrightarrow 0$ hay $x = \dfrac{1}{2}$

Vậy phương trình có nghiệm $x \in \{0; \dfrac{1}{2}\}$

2) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2x^2-5}{x^3-1} = \dfrac{4}{x^2+x+1}$

Điều kiện: $x \neq 1$

Phương trình được biến đổi: $(x^3 - 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

$x^2 + x + 1 + 2x^2 - 5 = 4(x - 1)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ (nhận)} \\ x = 1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Vậy $x = 0$ là nghiệm.

Bài 2:

1) $\dfrac{a-x}{10} = \dfrac{a}{2} + 5 \Leftrightarrow a - x = 5a + 50 \Leftrightarrow x = 4a - 50$

2) $\dfrac{x+a}{b} - \dfrac{b}{a} = \dfrac{x-b}{a} + \dfrac{a}{b}$ ($a \neq 0, b \neq 0$)

$\Leftrightarrow a(x + a) - b^2 = (x - b)b + a^2 \Leftrightarrow (a - b)x = 0$

Nếu $a \neq b$ thì nghiệm là $x = 0$.

Nếu $a = b$ thì nghiệm là mọi $x \in Q$

Bài 3:

1) IJ // AC (đường trung bình trong ΔABC)

KL // AC (đường trung bình trong ΔADC)

Suy ra: IJ // KL.

Tương tự: IL // JK (cùng song song với BD)

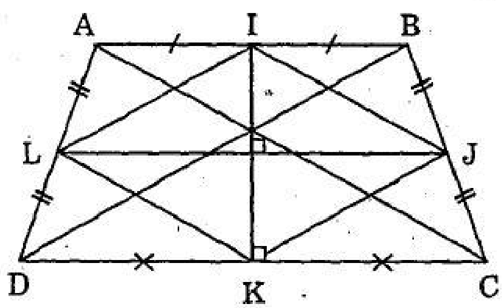
Vậy IJKL là hình bình hành.

Hơn nữa, do ABCD là hình thang cân nên $IK \perp AB$.

Ta lại có: LJ // AB (đường trung bình của hình thang).

nên $IK \perp JL$.

Vậy IJKL là hình thoi.



2) $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}$AB + CD).IK

$S_{IJKL} = \dfrac{1}{2}JL.IK$

mà: $JL = \dfrac{AB + CD}{2}$

(đường trung bình của hình thang)

Suy ra: $S_{IJKL} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD} = \dfrac{20}{2} = 10cm^2$

BỘ ĐỀ 64

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI GIẢI THƯỞNG LÊ QUÝ ĐÔN – TRƯỜNG THCS LÊ QUÝ ĐÔN – QUẬN 3, TPHCM – NĂM HỌC 2001 – 2002

Bài 1: Giải các phương trình sau:

1) $2x^3 + 5x^2 = 7x$

2) $\frac{x-11}{89} + \frac{x-12}{88} + \frac{x-33}{67} = \frac{x-67}{33} + \frac{x-88}{12} + \frac{x-89}{11}$

3) $\frac{2}{4-x^2} + \frac{1}{x^2-2x} = \frac{x-4}{x^2+2x}$

Bài 2:

1) Cho x, y thỏa mãn $x > y > 0$ và $x^2 + 3y^2 = 4xy$. Tính $\frac{2x+5y}{x-2y}$

2) Cho a, b, c, d thỏa mãn: $a + b = c + d$, $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.

Chứng minh rằng: $a^{2002} + b^{2002} = c^{2002} + d^{2002}$

Bài 3: Cho $x \neq 0$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \frac{2002x^2 - 2x + 1}{x^2}$$

Bài 4: Cho tam giác ABC ($\widehat{A} = 90^0$), D là điểm di động trên cạnh BC. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm D lên AB, AC.

1) Xác định vị trí của điểm D để tứ giác AEDF là hình vuông.

2) Xác định vị trí của điểm D để tổng 3AD + 4EF đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 5: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, BD và CE là hai đường cao cắt nhau tại H. Chứng minh rằng:

1) HD.HB = HE.HC   2) $\Delta HDE \backsim \Delta HCB$

3) $BH.BD + CH.CE = BC^2$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $2x^3 + 5x^2 = 7x$

$\Leftrightarrow 2x^3 + 5x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow x(2x^2 + 5x - 7) = 0$

$\Leftrightarrow x(2x^2 - 2x + 7x - 7) = 0 \Leftrightarrow x[2x(x-1) + 7(x-1)] = 0$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(2x+7) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x - 1 = 0 \\ 2x + 7 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -\frac{7}{2} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm số là: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -\frac{7}{2}$

2) $\frac{x-11}{89}+\frac{x-12}{88}+\frac{x-33}{67}=\frac{x-67}{33}+\frac{x-88}{12}+\frac{x-89}{11}$

$\Leftrightarrow \frac{x-11}{89}-1+\frac{x-12}{88}-1+\frac{x-33}{67}-1=\frac{x-67}{33}-1+\frac{x-88}{12}-1+\frac{x-89}{11}-1$

$\Leftrightarrow \frac{x-100}{89}+\frac{x-100}{88}+\frac{x-100}{67}=\frac{x-100}{33}+\frac{x-100}{12}+\frac{x-100}{11}$

$\Leftrightarrow (x-100)\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{33}-\frac{1}{67}-\frac{1}{88}-\frac{1}{89}\right)=0$

$\Leftrightarrow x-100=0$ (vì $\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{33}-\frac{1}{67}-\frac{1}{88}-\frac{1}{89}>0$)

$\Leftrightarrow x=100.$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm số là $x = 100$.

3) $\frac{2}{4-x^2}+\frac{1}{x^2-2x}=\frac{x-4}{x^2+2x}$ (1)

$4-x^2=(2-x)(2+x)$

$x^2-2x=x(x-2)$

$x^2+2x=x(x+2)$

Mẫu thức chung $x(x-2)(x+2)$

Điều kiện để phương trình có nghĩa là: $x \neq 0;\ x \neq \pm 2$

Với điều kiện trên phương trình (1) tương đương với:

$\frac{2}{(2-x)(2+x)}+\frac{1}{x(x-2)}=\frac{x-4}{x(x+2)}$

$\Leftrightarrow \frac{-2x+(x+2)}{x(x-2)(x+2)}=\frac{(x-4)(x-2)}{x(x-2)(x+2)}$

$\Leftrightarrow -2x+x+2=x^2-6x+8$

$\Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x^2-2x-3x+6=0 \Leftrightarrow x(x-2)-3(x-2)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-2=0\\x-3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\text{(loại)}\\x=3\text{(nhận)}\end{array}\right. \Leftrightarrow x=3$

Vậy phương trình (1) có một nghiệm số là $x = 3$.

Bài 2:

1) $x^2+3y^2=4xy \Leftrightarrow x^2-4xy+3y^2=0 \Leftrightarrow x^2-xy-3xy+3y^2=0$

$\Leftrightarrow x(x-y)-3y(x-y)=0 \Leftrightarrow (x-y)(x-3y)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-y=0\\x-3y=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y\text{ (loại vì } x>y)\\x=3y\end{array}\right.$

Với $x = 3y$ ta có: $\frac{2x+5y}{x-2y}=\frac{6y+5y}{3y-2y}=\frac{11y}{y}=11=11$ (do $y>0$)

2) *Cách 1:* Từ $a + b = c + d$

$\Rightarrow (a+b)^2=(c+d)^2 \Rightarrow a^2+2ab+b^2=c^2+2cd+d^2$

$\Rightarrow 2ab=2cd$ (do $a^2+b^2=c^2+d^2$)

Mặt khác $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ và $2ab = 2cd$, ta suy ra:
$a^2 - 2ab + b^2 = c^2 - 2cd + d^2$ hay $(a - b)^2 = (c - d)^2$
Cho ta $a - b = c - d$ hay $a - b = d - c$.
Phối hợp với giả thiết $a + b = c + d$, ta có các trường hợp sau:

$$\begin{cases} a + b = c + d \\ a - b = c - d \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} a + b = c + d \\ a - b = d - c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} a = d \\ b = c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^{2002} = c^{2002} \\ b^{2002} = d^{2002} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} a^{2002} = d^{2002} \\ b^{2002} = c^{2002} \end{cases} \Rightarrow a^{2002} + b^{2002} = c^{2002} + d^{2002}$$

Cách 2: $a + b = c + d$ (1)

$\Rightarrow a - c = d - b$

$a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ (2)

$\Rightarrow a^2 - c^2 = d^2 - b^2 \quad \Rightarrow (a + c)(a - c) = (d + b)(d - b)$

$\Rightarrow (a + c)(a - c) = (d + b)(a - c) \Rightarrow (a - c)(a + c - d - b) = 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a - c = 0 \\ a + c - d - b = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} a = c & (3) \\ a + c = d + b & (4) \end{array}\right.$$

(3) $a = c$ từ (1) có $b = d \Rightarrow a^{2002} + b^{2002} = c^{2002} + d^{2002}$

(4) kết hợp với (1) có $a + b + a + c = c + d + d + b$

$\Rightarrow 2a = 2d \Rightarrow a = d$. Do đó $b = c$.

$\Rightarrow a^{2002} + b^{2002} = c^{2002} + d^{2002}$

Bài 3: $A = \dfrac{2001x^2 - 2x + 1}{x^2}$ $(x \neq 0)$

Cách 1: $A = 2002 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 2001 + 1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 2001 + (1 - \dfrac{1}{x})^2 \geq 2001$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 1 - \dfrac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy min $A = 2001 \Leftrightarrow x = 1$.

Cách 2: $A = \dfrac{2002x^2 + x^2 - 2x + 1}{x^2} = 2001 + \dfrac{(x - 1)^2}{x^2} \geq 2001$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

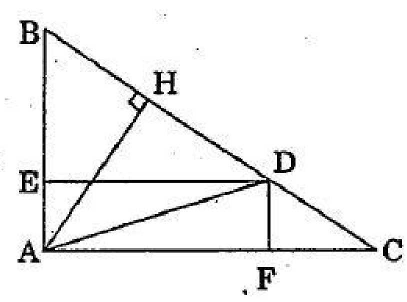
Vậy min $A = 2001 \Leftrightarrow x = 1$.

Bài 4:

1) Tứ giác AEDF có $\widehat{A} = \widehat{E} = \widehat{F} = 90^0$ nên là hình chữ nhật.

Tứ giác AEDF là hình vuông thì AD là tia phân giác của EAF hay là tia phân giác của BAC.

Vậy khi D là giao điểm của tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$ với cạnh BC thì tứ giác AEDF là hình vuông.



2) Ta có: AD = EF (tính chất đường chéo hình chữ nhật)

Do đó: 3AD + 4EF = 3AD + 4AD = 7AD.

Vẽ: $AH \perp BC$ ($H \in BC$)

Ta có: $AD \geq AH$ (vì $AH \perp DH$)

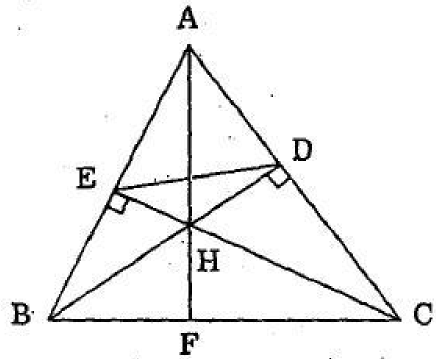
Do đó: $3AD + 4EF \geq 7AH$, AH không đổi.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow D \equiv H$.

Vậy tổng 3AD + 4EF đạt giá trị nhỏ nhất bằng 7AH $\Leftrightarrow D \equiv H$

(với H là chân đường cao hạ từ A xuống BC)

Bài 5:



1) Xét hai tam giác HEB và HDC ta có:

$\widehat{BEH} = \widehat{CDH} = 90^0$ (gt)

$\widehat{BHE} = \widehat{CHD}$ (hai góc đối đỉnh)

Vậy $\Delta HEB \backsim \Delta HDC$ (g–g)

Cho ta: $\dfrac{HE}{HD} = \dfrac{HB}{HC}$

hay HD.HB = HE.HC

2) ΔHED và ΔHBC có:

$\dfrac{HE}{HD} = \dfrac{HB}{HC}$ (chứng minh trên) và $\widehat{EHD} = \widehat{BHC}$ (hai góc đối đỉnh)

Vậy $\Delta HDE \backsim \Delta HCB$ (c–g–c)

3) Vì H là giao điểm của hai đường cao BD và CE của Δ ABC nên H là trực tâm của ΔABC. Suy ra AH là đường cao của ΔABC. Gọi F là giao điểm của AH và BC.

Ta có $AF \perp BC$.

Xét hai tam giác BHF và BCD ta có:

$\widehat{BFH} = \widehat{BDC}$ ($= 90^0$), $\widehat{DBC}$ (chung)

Vậy $\Delta BHF \backsim \Delta BCD$ (g–g)

Cho ta $\dfrac{BH}{BC} = \dfrac{BF}{BD}$ hay BH.BD = BF.BC (1)

Chứng minh tương tự ta có: $\Delta CHF \backsim \Delta CBE$ (g–g)

Cho ta $\dfrac{CH}{CB} = \dfrac{CF}{CE}$ hay CH.CE = CF.BC (2)

Cộng vế theo vế (1) và (2) ta được:

$BH.BD + CH.CE = BF.BC + CF.BC = (BF + CF).BC = BC^2$

BỘ ĐỀ 65

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 8 TRƯỜNG THCS NGUYỄN GIA THIỀU – QUẬN TÂN BÌNH, TPHCM – NĂM HỌC 2001 – 2002

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử:

1) $a^3 - b^3 + c^3 + 3abc$.

2) $(a + 2)(a + 3)(a^2 + a + 6) + 4a^2$

Bài 2: Giải phương trình:

1) $x^8 - 2x^4 + x^2 - 2x + 2 = 0$

2) $\dfrac{1}{x^2 - 5x + 6} + \dfrac{2}{x^2 - 8x + 15} + \dfrac{3}{x^2 - 13x + 40} = \dfrac{6}{5}$

Bài 3:

1) Chứng minh bất đẳng thức: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq ab + ac + ad + ae$

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x^2 + x$ và giá trị tương ứng của x.

3) Tìm giá trị lớn nhất của $B = \dfrac{3x^2 + 4x}{x^2 + 1}$ và giá trị tương ứng của x.

Bài 4: Cho tam giác ABC cân tại C. Kẻ đường phân giác AA_1 của góc $\widehat{A}$ và đường trung tuyến CC_1 của tam giác. Biết rằng $AA_1 = 2CC_1$. Tính số đo góc $\widehat{ACB}$.

Bài 5: Cho tứ giác ABCD có AC = 10cm, BD = 12cm. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O, biết góc $\widehat{AOB} = 30^0$. Tính diện tích tứ giác ABCD.

Bài 6: Trên hai cạnh AB và BC của hình vuông ABCD lấy hai điểm P và Q theo thứ tự sao cho BP = BQ. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ B xuống CP. Chứng minh rằng $\widehat{DHQ} = 90^0$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1. $a^3 - b^3 + c^3 + 3abc = (a - b)^3 + 3ab(a - b) + c^3 + 3abc$

$= (a - b + c)[(a - b)^2 - c(a - b) + c^2] + 3ab(a - b + c)$

$= (a - b + c)(a^2 - 2ab + b^2 - ac + bc + c^2 + 3ab)$

$= (a - b + c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc - ac)$

2. $(a + 2)(a + 3)(a^2 + a + 6) + 4a^2 = (a^2 + 5a + 6)(a^2 + a + 6) + 4a^2$

$= [(a^2 + 3a + 6) + 2a[(a^2 + 3a + 6) - 2a] + 4a^2$

$= (a^2 + 3a + 6)^2 - 4a^2 + 4a^2 = (a^2 + 3a + 6)^2$

Bài 2:

1) $x^8 - 2x^4 + x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^8 - 2x^4 + 1 + x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x^4 - 1)^2 + (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2(x^2 + 1)^2 + (x - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2(x + 1)^2 (x^2 + 1)^2 + (x - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2[(x + 1)^2(x^2 + 1)^2 + 1] = 0$

$\Leftrightarrow x - 1 = 0$ (Vì $(x + 1)^2 (x^2 + 1)^2 + 1 \geq 1 > 0$) $\Leftrightarrow x = 1$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$.

2) $\dfrac{1}{x^2 - 5x + 6} + \dfrac{2}{x^2 - 8x + 15} + \dfrac{3}{x^2 - 13x + 40} = \dfrac{6}{5}$ (1)

Phân tích các mẫu thức thành nhân tử:

$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2x - 3x + 6 = x(x - 2) - 3(x - 2) = (x - 2)(x - 3)$

$x^2 - 8x + 15 = x^2 - 3x - 5x + 15 = x(x - 3) - 5(x - 3) = (x - 3)(x - 5)$

$x^2 - 13x + 40 = x^2 - 5x - 8x + 40 = x(x - 5) - 8(x - 5) = (x - 5)(x - 8)$

Điều kiện để phương trình (1) có nghĩa là: $x \neq 2$, $x \neq 3$, $x \neq 5$, $x \neq 8$.

Với điều kiện trên phương trình (1) tương đương với:

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)} + \frac{2}{(x-3)(x-5)} + \frac{3}{(x-5)(x-8)} = -\frac{6}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-8} - \frac{1}{x-5} = -\frac{6}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-8} - \frac{1}{x-2} = -\frac{6}{5} \Leftrightarrow \frac{x-2-x+8}{(x-8)(x-2)} = -\frac{6}{5} \Leftrightarrow \frac{6}{(x-8)(x-2)} = -\frac{6}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x-8)(x-2)} = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow (x - 8)(x - 2) = -5$$

$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 16 + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 21 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 7x + 21 = 0$

$\Leftrightarrow x(x - 3) - 7(x - 3) = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(x - 7) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 3 = 0 \\ x - 7 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \text{ (loại)} \\ x = 7 \text{ (nhận)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 7$$

Vậy phương trình (1) có một nghiệm là $x = 7$.

Bài 3:

1) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq ab + ac + ad + ae$

$\Leftrightarrow 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 4d^2 + 4e^2 \geq 4ab + 4ac + 4ad + 4ae$

$\Leftrightarrow a^2 - 4ab + 4b^2 + a^2 - 4ac + 4c^2 + a^2 - 4ad + 4d^2 + a^2 - 4ac + 4e^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - 2b)^2 + (a - 2c)^2 + (a - 2d)^2 + (a - 2e)^2 \geq 0$ (bất đẳng thức đúng)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = 2b = 2c = 2d = 2e$.

2) $A = x^2 + x = x^2 + x + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4} = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} \geq -\dfrac{1}{4}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x + \dfrac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

Vậy min $A = -\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

3) $B = \dfrac{3x^2 + 4x}{x^2 + 1} = \dfrac{4x^2 + 4 - x^2 + 4x - 4}{x^2 + 1} = 4 - \dfrac{(x-2)^2}{x^2 + 1} \leq 4$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy max $B = 4 \Leftrightarrow x = 2$.