

Vậy viên bi thứ 100 có màu xanh.

b. Cứ một nhóm thì có 3 viên bi, muốn có 10 viên bi đỏ thì cần bỏ vào hộp $3 \times 10 = 30$ viên bi. Nhưng viên bi màu đỏ là viên thứ hai của nhóm.

Vậy cần bỏ vào ít nhất số bi là :

$$30 - 1 = 29 \text{ (viên).}$$

II. Dãy số hữu tỉ (phân số)

1. Dãy số liên quan đến cấp số nhân

Bài toán 1 : Tính

$$S = \frac{1}{a} + \frac{1}{a \times a} + \frac{1}{a \times a \times a} + \dots + \frac{1}{\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ thừa số } a}}$$

(Dãy số là một cấp số nhân công bội bằng $\frac{1}{a}$)

Giải

$$a \times S = 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a \times a} + \frac{1}{a \times a \times a} + \dots + \frac{1}{\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n-1 \text{ thừa số } a}}$$

$$= 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a \times a} + \dots + \frac{1}{\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n-1 \text{ thừa số } a}} + \frac{1}{\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ thừa số } a}} - \frac{1}{\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ thừa số } a}}$$

$$= 1 + S - \frac{1}{\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ thừa số } a}}$$

$$(a - 1) \times S = 1 - \frac{1}{\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ thừa số } a}}$$

$$\text{Vậy: } S = \frac{\overbrace{a \times a \times \dots \times a}^{n \text{ thừa số } a} - 1}{\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ thừa số } a} \times (a - 1)}$$

Ví dụ: Tính $S = 3 + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{5}{8} + \dots + \frac{5}{1024}$

$$= 3 + 5 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{1024} \right)$$

Tính $S_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{1024}$ (bạn đọc tự giải).

Từ đó tính được: $S = 3 + 5 \times S_1$.

Vận dụng bài toán trên tính tổng của một dãy số cụ thể là một cấp số nhân có công bội $\frac{1}{q}$.

Tính $S = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$

Trong đó: $\frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_2}, \dots, \frac{1}{u_n}$, là cấp số nhân có công bội là $\frac{1}{q}$.

Phân tích cách tính tổng trên tương tự như cách tính tổng có dạng cấp số nhân ở dạng số tự nhiên.

2. Tính tổng của một dãy số hữu tỉ có mẫu số là tích của hai số tự nhiên cách đều

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{k}{n(n+k)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}$$

Ví dụ 1: Tính: $S = \frac{1}{11 \times 13} + \frac{1}{13 \times 15} + \frac{1}{15 \times 17} + \dots + \frac{1}{95 \times 97} + \frac{1}{97 \times 99}$

Giải

Ta thấy, mẫu số là tích của hai số tự nhiên cách đều hai đơn vị. Nhân cả hai vế với 2 ta có:

$$\begin{aligned} 2 \times S &= \frac{2}{11 \times 13} + \frac{2}{13 \times 15} + \frac{2}{15 \times 17} + \dots + \frac{2}{95 \times 97} + \frac{2}{97 \times 99} \\ &= \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{15} - \frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{95} - \frac{1}{97} + \frac{1}{97} - \frac{1}{99} \\ &= \frac{1}{11} - \frac{1}{99} = \frac{8}{99} \end{aligned}$$

$$S = \frac{4}{99}$$

Ví dụ 2: Tính tổng: $S = \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{60} + \dots + \frac{1}{720}$

Giải

Ta có: $S = \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{60} + \dots + \frac{1}{720}$

$$S = \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \dots + \frac{1}{8 \times 9 \times 10}$$

$$S \times 2 = \frac{2}{1 \times 2 \times 3} + \frac{2}{2 \times 3 \times 4} + \frac{2}{3 \times 4 \times 5} + \dots + \frac{2}{8 \times 9 \times 10}$$

$$= \frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4} - \frac{1}{4 \times 5} + \dots + \frac{1}{8 \times 9} - \frac{1}{9 \times 10}$$

$$S \times 2 = \frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{9 \times 10} = \frac{44}{90}$$

Vậy: $S = \frac{44}{90} : 2 = \frac{22}{90} = \frac{11}{45}$.

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

Bài 1: Viết tiếp 3 số hạng của dãy số sau:

- a. 1,2,3,5,8...
- b. 0,2,4,6,12,22...

Bài 2: Tìm số hạng đầu tiên của dãy số sau:

- a. ...,24,27,30.
- b. ...,47,52,57. Biết rằng mỗi dãy đều có 10 số hạng.

Bài 3: Tìm các số còn thiếu trong dãy số sau:

- a. 3,9,27,.....,729.
- b. 3,8,23,.....,608.

Bài 4: Tìm quy luật của dãy sau và viết thêm 3 số hạng nữa vào dãy:

- a. 1,6,54,648,...
- b. 1,1,3,5,17,...

Bài 5: Tìm số hạng thứ 10 của dãy số sau:

- a. 1,5,9,13,...
- b. ...,54,57,60. (Biết rằng dãy này có 20 số hạng).

Bài 6: Cho dãy số: 2,4,6,8...

- a. Dãy số được viết theo quy luật nào?
- b. Số 2009 có phải là số hạng của dãy hay không? Vì sao?

Bài 7: Hãy cho biết:

- a. Các số 50 và 133 có thuộc dãy số: 90,95,100... hay không?
- b. Số 1996 có thuộc dãy số: 2,5,8,11,... hay không?
- c. Số nào trong các số 666,1000 và 9999 thuộc dãy số 3,6,12,24,... Giải thích tại sao?

Bài 8: Cho dãy số: 1; 2,2; 3,4;...; 13; 14,2.

Nếu viết tiếp thì số 34,6 có thuộc dãy số trên không?

Bài 9: Cho dãy số: 3,8,13,18... Có số tự nhiên nào có chữ số tận cùng là 6 mà thuộc dãy số trên không? Vì sao?

Bài 10: Cho dãy số : 11,14,17,20,....,65,68. Dãy số có bao nhiêu số hạng?

Bài 11: Cho dãy số: $1, 3, 5, 7, \dots$. Là dãy số lẻ liên tiếp đầu tiên. Hỏi đến số 1981 thì dãy số có bao nhiêu số hạng?

Bài 12: Trong các số có 3 chữ số, có bao nhiêu số chia hết cho 4.

Bài 13: Cho dãy số: $2, 4, 6, 8, \dots$. Là dãy số chẵn liên tiếp đầu tiên. Hỏi

a. Số 2010 là số hạng thứ bao nhiêu trong dãy số này? Giải thích cách tìm ?

b. Nếu viết tiếp vào dãy số từ số 2010 đến số 2050 thì cần bao nhiêu số hạng nữa?

Bài 14: Cho dãy số $11, 14, 17, 20, \dots$. Tìm số hạng thứ 2007 của dãy số.

Bài 15: Tìm số hạng thứ 100 của dãy:

a. $3, 8, 15, 24, 35, \dots$

b. $1, 3, 6, 10, 15, \dots$

Bài 16: Cho dãy số: $1, 2, 3, \dots, 1994, 1995$.

Hỏi có bao nhiêu chữ số trong dãy số này?

Bài 17: Một người viết liên tiếp các số tự nhiên từ 1 đến 2007. Hỏi người đó đã viết bao nhiêu lượt chữ số?

Bài 18: Một quyển sách có 234 trang. Hỏi để đánh số trang của quyển sách đó người ta phải dùng bao nhiêu chữ số?

Bài 19: Để đánh số trang một quyển sách người ta dùng hết 222 chữ số. Hỏi quyển sách đó có bao nhiêu trang?

Bài 20: Để ghi thứ tự các nhà trên một đường phố, người ta dùng các số chẵn $2, 4, 6, 8, \dots$ để ghi các nhà ở dãy phải và các số lẻ $1, 3, 5, 7, \dots$ để ghi các nhà ở dãy trái của đường phố đó. Hỏi số nhà cuối cùng của dãy chẵn trên đường phố đó là bao nhiêu, biết rằng khi đánh số thứ tự các nhà của dãy này người ta đã dùng 367 lượt chữ số cả thảy.

Bài 21: Cho dãy số: $1, 3, 5, 7, \dots, n$. Hãy tìm số n để số chữ số của dãy gấp 3 lần số các số hạng của dãy.

Bài 22: Cho dãy số: $1, 2, 3, 4, \dots, 1994, 1995$.

Tìm chữ số thứ 3000 của dãy số.

Bài 23: Cho dãy số $2, 4, 6, 8, \dots$. Hỏi chữ số thứ 2010 của dãy là chữ số nào?

Bài 24: Hãy tìm chữ số thứ 2010 ở phần thập phân của số thập phân bằng phân số $\frac{1}{7}$.

Bài 25: Cho số tự nhiên $a = 1234567891011\dots$ lập bởi viết liên tiếp dãy số tự nhiên. Hỏi chữ số thứ 1650 của số tự nhiên a là chữ số mấy.

Bài 26: Tính $A = 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$.

Bài 27: Tính tổng của 19 số lẻ liên tiếp đầu tiên.

Bài 28: Tính $E = 10,11 + 11,12 + 12,13 + \dots + 98,99 + 100$.

Bài 29: Cho dãy số: $1, 2, 3, \dots, 195$. Tính tổng các chữ số trong dãy.

Bài 30: Tính tổng:

a) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{132}$

b) $1 + \frac{9}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{3}{44}$

c) $\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \dots + \frac{1}{37 \times 38 \times 39}$

Bài 31: Tính tổng :

a) $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{256}$

b) $S = 7 + \frac{5}{3} + \frac{5}{9} + \frac{5}{27} + \frac{5}{81} + \frac{5}{243} + \frac{5}{729}$

c) $B = \frac{5}{2} + \frac{5}{6} + \frac{5}{18} + \frac{5}{54} + \frac{5}{162} + \frac{5}{486}$

Bài 32: Tính tổng

$$A = \frac{3}{2 \times 5} + \frac{3}{5 \times 8} + \frac{3}{8 \times 11} + \frac{3}{11 \times 14}$$

Chương 3: TOÁN CHUYỂN ĐỘNG ĐỀU

I. Hai phương pháp cơ bản để giải bài toán chuyển động đều

1. Phương pháp sử dụng tỉ số

Hai vật chuyển động trên cùng một quãng đường S , và vận tốc v_1, v_2 . Khi đi hết quãng đường đó với thời gian tương ứng t_1, t_2 thì:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{t_2}{t_1}.$$

Ví dụ 1: Một ca nô xuôi khúc sông AB hết 4 giờ và ngược khúc sông hết 6 giờ. Tính chiều dài khúc sông đó, biết rằng vận tốc dòng nước là 50km/h?

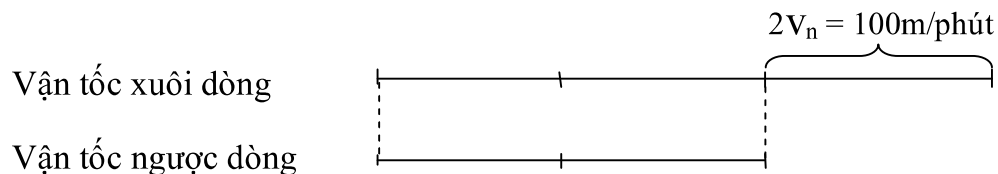
Giải

Trên cùng một khúc sông AB, thời gian và vận tốc tỉ lệ nghịch với nhau.

Tỉ số của thời gian xuôi dòng và ngược dòng là: $\frac{4}{6}$.

Do đó tỉ số giữa vận tốc xuôi dòng và vận tốc ngược dòng là: $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

Vì hiệu vận tốc xuôi dòng và vận tốc ngược dòng bằng hai lần vận tốc dòng nước nên ta có sơ đồ:



Vận tốc xuôi dòng là: $100 \times 3 = 300$ (m/phút)
 $= 18$ (km/h)

Khúc sông AB dài là: $18 \times 4 = 72$ (km).

Đáp số: 72 km.

Ví dụ 2: Xe thứ nhất đi từ A đến B hết 3 giờ 20 phút. Xe thứ hai đi từ B đến A hết 2 giờ 48 phút. Biết rằng, hai xe cùng khởi hành và sau 1 giờ 15 phút thì chúng còn cách nhau 25km. Tính vận tốc mỗi xe?

Giải

Đổi đơn vị: 3 giờ 20 phút = 200 phút = $\frac{10}{3}$ giờ.

$$2 \text{ giờ } 48 \text{ phút} = 168 \text{ phút} = \frac{14}{5} \text{ giờ.}$$

$$1 \text{ giờ } 15 \text{ phút} = 75 \text{ phút} = \frac{5}{4} \text{ giờ.}$$

Tỉ số thời gian chuyển động của hai xe đi hết quãng đường AB là:

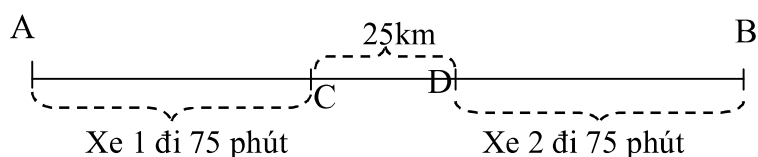
$$\frac{200}{168} = \frac{25}{21}$$

Vì $75 : 25 = 3$ nên ta có thể viết:

$$\frac{25}{21} = 25 \times \frac{3}{21} = \frac{75}{63}.$$

Tỉ số $\frac{75}{63}$ cho biết: Nếu trên một đoạn đường mà xe thứ nhất đi hết 75 phút

thì xe thứ hai đi hết 63 phút. Sơ đồ minh họa:



Nếu xe thứ nhất đi từ A đến C mất 75 phút thì xe thứ hai đi từ C đến A mất 63 phút. Vậy xe thứ hai đi từ B đến D và đi từ C đến A mất:

$$75 + 63 = 138 \text{ phút.}$$

Vì xe thứ hai đi từ B đến A mất 168 phút nên xe đó đi từ D đến C mất:

$$168 - 138 = 30 \text{ (phút)} = 0,5 \text{ (giờ).}$$

Xe thứ hai đi hết 25 km mất 0,5 giờ vận tốc của xe là:

$$25 : 0,5 = 50 \text{ (km/h)}$$

Vận tốc của xe thứ nhất là:

$$50 \times \frac{21}{25} = 42 \text{ (km/h)}$$

Đáp số: Vận tốc xe thứ nhất là: 42 km/h.

Vận tốc của xe thứ hai là: 50 km/h.

2. Phương pháp rút về đơn vị

Thông thường khi giải các bài toán rút về đơn vị thì quãng đường được chọn là một đơn vị đo.

Ví dụ 1: Một người đi từ A đến B với vận tốc 4km/giờ và dự định đến B lúc 11 giờ 45 phút. Đi được $\frac{4}{5}$ quãng đường AB thì người đó đi tiếp đến B với vận tốc 3km/giờ nên đến B lúc 12 giờ cùng ngày. Tính quãng đường AB?

Giải

Thời gian thực tế đi nhiều hơn dự định là:

$$12 \text{ giờ} - 11 \text{ giờ } 45 \text{ phút} = \frac{1}{4} \text{ giờ.}$$

Vận tốc 3km/ giờ thì mỗi km đi hết thời gian:

$$1 : 3 = \frac{1}{3} \text{ (giờ)}$$

Vận tốc 4km/giờ thì mỗi km đi hết thời gian:

$$1 : 4 = \frac{1}{4} \text{ (giờ).}$$

Thời gian đi mỗi km và vận tốc 3km/giờ nhiều hơn thời gian đi mỗi km vận tốc 4km/giờ là:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \text{ (giờ).}$$

Đoạn đường còn lại đi với vận tốc 3km/giờ là:

$$\frac{1}{4} : \frac{1}{12} = 3 \text{ (km).}$$

Đoạn đường còn lại là:

$$1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} \text{ quãng đường AB.}$$

Vậy quãng đường AB dài là: $3 : \frac{1}{5} = 15 \text{ (km).}$

Đáp số: AB = 15 km.

Ví dụ 2: Xe thứ nhất đi từ A đến B hết 3 giờ 20 phút. Xe thứ hai đi từ B đến A hết 2 giờ 48 phút. Hai xe cùng khởi hành và sau 1 giờ 15 phút thì chúng còn cách nhau 35km. Tính vận tốc của mỗi xe?

Giải

Sau 1 giờ 15 phút = 75 phút xe thứ nhất đi được:

$$75 : 200 = \frac{3}{8} \text{ (quãng đường AB).}$$

Sau 75 phút xe thứ hai đi được:

$$75:168 = \frac{25}{56} \text{ (quãng đường AB)}$$

Sau 75 phút hai xe đi được:

$$\frac{3}{8} + \frac{25}{56} = \frac{23}{28} \text{ (quãng đường AB).}$$

Phần đường còn lại:

$$1 - \frac{23}{28} = \frac{5}{28} \text{ (quãng đường AB)}$$

$\frac{5}{28}$ quãng đường AB bằng 25km.

Vậy quãng đường AB là:

$$25 : \frac{5}{28} = 140 \text{ (km).}$$

Vận tốc xe thứ nhất là:

$$140 : \frac{10}{3} = 42 \text{ (km/giờ).}$$

Vận tốc xe thứ hai là:

$$140 : \frac{14}{5} = 50 \text{ (km/giờ).}$$

Đáp số: Vận tốc xe thứ nhất là: 42 km/giờ

Vận tốc xe thứ hai là: 50km/giờ.

II. Một số dạng bài toán chuyển động đều

1. Chuyển động cùng chiều

a. Bài toán hai vật chuyển động cùng chiều, tính thời gian hai vật đuổi kịp nhau.

Hai vật cùng xuất phát một lúc với vận tốc v_1 và v_2 ($v_1 > v_2$) ở cách xa nhau

một đoạn đường S thì thời gian hai vật đuổi kịp nhau là: $t = \frac{S}{v_1 - v_2}$.

Vi du: Một người đi xe máy từ A đến C với vận tốc 36km/h. Cùng lúc đó một người đi xe đạp từ B đến C với vận tốc 12km/h và điểm B cách A 48km. Hỏi sau bao lâu người đi xe máy đuổi kịp người đi xe đạp?

Giải

Hai người cùng xuất phát và chuyển động cùng chiều. Sau khoảng thời gian t cách nhau một quãng đường S cũng như một vật chuyển động với vận tốc $v_1 - v_2$, sau khoảng thời gian t đi được quãng đường S . Khi hai người gặp nhau, tức là quãng đường $S = 48\text{km}$. Vậy, người đi xe máy đuổi kịp người đi xe đạp mất một khoảng thời gian là:

$$t = \frac{S}{v_1 - v_2} = \frac{48}{36 - 12} = 2 \text{ (giờ)}.$$

Đáp số: 2 giờ.

b. Bài toán hai vật chuyển động cùng chiều, tính thời gian hai vật đó đuổi nhau và sau một thời gian t cách nhau một quãng đường: $t = \frac{S_1 - S_2}{v_1 - v_2}$.

S_1 là quãng đường hai vật cách nhau khi bắt đầu cùng chuyển động.

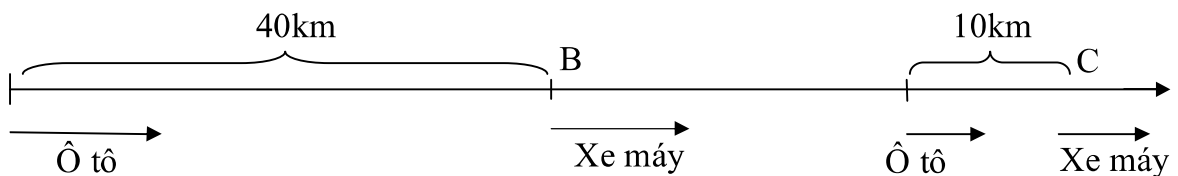
S_2 là quãng đường hai vật cách nhau sau khi chuyển động một khoảng thời gian t .

Vận tốc vật sau là v_1 , vận tốc vật trước là v_2 .

t là thời gian để vật sau vượt qua vật trước khoảng cách n km.

Ví dụ: Một ô tô đi từ A với vận tốc 50km/h, cùng lúc đó một xe máy đi từ B cách A 40km với vận tốc 30km/h và cùng đến điểm C. Hỏi sau bao lâu, ô tô còn cách xe máy 10 km?

Giải



Sau mỗi giờ ô tô đến gần xe máy là:

$$50 - 30 = 20 \text{ (km)}$$

Thời gian để ô tô đuổi kịp xe máy và còn cách xe máy 10 km là:

$$(40 - 10) : 20 = 1,5 \text{ (giờ)}$$

Đáp số: 1,5 giờ.

c. Bài toán chuyển động cùng chiều, tính thời gian hai vật đuổi nhau và vật sau vượt qua vật trước một khoảng n km.

$$t = \frac{S_1 + S_2}{v_1 - v_2}$$

S_1 là khoảng cách lúc đầu giữa hai vật.

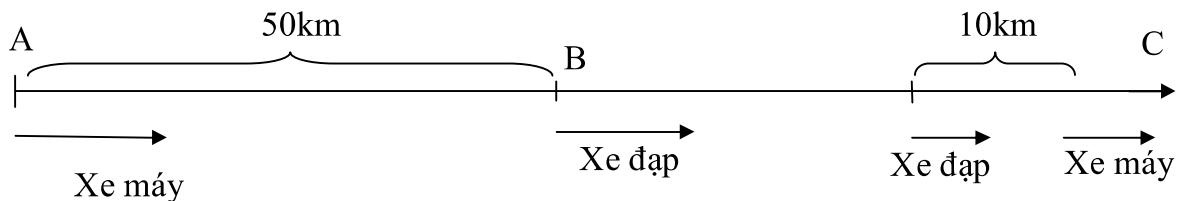
S_2 là khoảng cách khi vật sau đã vượt qua vật trước.

Vận tốc vật sau là v_1 , vận tốc vật trước là v_2 .

t là thời gian để vật sau vượt qua vật trước khoảng cách n km.

Ví dụ: Một người đi xe máy từ điểm A đi đến điểm B rồi đến điểm C với vận tốc 45km/h. Cùng lúc đó một người đi xe đạp từ điểm B cách điểm A 50km với vận tốc 15km/h để đến điểm C. Hỏi sau bao lâu người đi xe máy vượt qua người đi xe đạp 10 km.

Giải



Hiệu vận tốc giữa xe máy và xe đạp là:

$$45 - 15 = 25 \text{ (km/giờ)}$$

Thời gian để xe máy vượt qua xe đạp là:

$$(50 + 10) : 25 = 2 \text{ (giờ)}$$

Đáp số: 2 giờ.

2. Vận dụng bài toán chuyển động cùng chiều vào bài toán chuyển động của kim đồng hồ

a. Vận dụng bài toán hai vật chuyển động cùng chiều; tính thời gian hai vật đuổi kịp nhau.

Ví dụ 1: Bây giờ là 3 giờ đúng. Hỏi sau bao lâu thì kim giờ và kim phút trùng nhau?

Giải

Ta thấy mỗi giờ kim phút chạy được 1 vòng, còn kim giờ chạy được $\frac{1}{12}$ vòng.

Vận tốc giữa kim phút và kim giờ là:

$$1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} \text{ (vòng).}$$

Khoảng cách giữa kim phút và kim giờ là:

$$3 : 12 = \frac{1}{4} \text{ (vòng)}$$

Thời gian ngắn nhất để kim phút và kim giờ trùng nhau là:

$$\frac{1}{4} : \frac{11}{12} = \frac{3}{11} \text{ (giờ).}$$

$$\text{Đáp số: } \frac{3}{11}.$$

Ví dụ 2: Bây giờ là 9 giờ. Hỏi sau ít nhất bao lâu kim phút và kim giờ trùng nhau?

Giải

Hiệu vận tốc giữa kim phút và kim giờ là:

$$1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} \text{ (vòng).}$$

Khoảng cách giữa kim phút và kim giờ là:

$$9 : 12 = \frac{3}{4} \text{ (vòng)}$$

Thời gian ngắn nhất để kim phút và kim giờ trùng nhau là:

$$\frac{3}{4} : \frac{11}{12} = \frac{9}{11} \text{ (giờ).}$$

$$\text{Đáp số: } \frac{9}{11} \text{ giờ.}$$

Ví dụ 3: Bây giờ là 12 giờ trưa nên kim giờ và kim phút đã trùng nhau. Hỏi sau bao lâu nữa hai kim ấy lại gặp nhau một lần nữa?

Giải

Hiệu vận tốc giữa kim phút và kim giờ là:

$$1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} \text{ (vòng).}$$

Khoảng cách giữa kim phút và kim giờ là:

$$12 : 12 = 1 \text{ (vòng)}$$

Thời gian ngắn nhất để kim giờ và kim phút trùng nhau lần nữa là:

$$1 : \frac{11}{12} = \frac{12}{11} = 1 \frac{1}{11} \text{ (giờ).}$$

$$\text{Đáp số: } 1 \frac{1}{11} \text{ giờ.}$$

b. Vận dụng bài toán hai vật chuyển động cùng chiều: tính thời gian hai vật đuổi nhau và còn cách xa nhau một khoảng m.

Ví dụ 1: Bây giờ là 6 giờ. Hỏi ít nhất bao lâu thì kim giờ và kim phút vuông góc với nhau.

Giải

Ta có: Khoảng cách giữa hai kim lúc đầu, khi hai kim thẳng hàng là $\frac{1}{2}$ vòng.

Khoảng cách giữa hai kim lúc sau khi hai kim vuông góc là $\frac{1}{4}$ vòng.

Hiệu vận tốc giữa hai kim là:

$$1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} \text{ (vòng).}$$

Thời gian ngắn nhất để hai kim vuông góc với nhau là:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) : \frac{11}{12} = \frac{3}{11} \text{ (giờ)}$$

$$\text{Đáp số: } \frac{3}{11} \text{ giờ.}$$

Ví dụ 2: Bây giờ là 7 giờ. Hỏi sau ít nhất bao lâu thì kim giờ và kim phút thẳng hàng với nhau?

Giải

Khoảng cách giữa hai kim lúc đầu là $\frac{7}{12}$ vòng.

Khoảng cách giữa hai kim lúc hai kim thẳng hàng nhau là $\frac{1}{2}$.

Hiệu vận tốc giữa hai kim là:

$$1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} \text{ (vòng)}.$$

Thời gian ngắn nhất để kim giờ và kim phút thẳng hàng nhau là:

$$\left(\frac{7}{12} - \frac{1}{2}\right) : \frac{11}{12} = \frac{1}{11} \text{ (giờ)}$$

$$\text{Đáp số: } \frac{1}{11} \text{ giờ.}$$

Vi dụ 3: Bây giờ là 9 giờ. Hỏi ít nhất bao lâu nữa, kim giờ và kim phút lại vuông góc với nhau?

Giải

Khoảng cách lúc đầu giữa hai kim là: $\frac{3}{4}$ vòng.

Khoảng cách khi kim giờ và kim phút vuông góc với nhau lần nữa là: $\frac{1}{4}$ vòng.

Hiệu vận tốc giữa hai kim là:

$$1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} \text{ (vòng)}.$$

Thời gian ngắn nhất để kim giờ và kim phút vuông góc với nhau lần nữa là:

$$\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) : \frac{11}{12} = \frac{6}{11} \text{ (giờ)}$$

$$\text{Đáp số: } \frac{6}{11} \text{ giờ.}$$

c. Vận dụng bài toán hai vật chuyển động cùng chiều, tính thời gian hai vật đuổi nhau và vật sau vượt qua vật trước một khoảng n.

Vi dụ 1: Bây giờ là 3 giờ. Hỏi sau ít nhất bao lâu nữa thì kim giờ và kim phút lại vuông góc với nhau?

Giải

Ta có: Khoảng cách lúc đầu giữa hai kim là:

$$3 : 12 = \frac{1}{4} \text{ (vòng)}$$

Khi kim phút vượt qua kim giờ lần nữa thì kim phút đã vượt qua kim giờ một khoảng thời gian bằng $\frac{1}{4}$ vòng.

$$\text{Hiệu vận tốc giữa hai kim là: } 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} \text{ (vòng).}$$

Thời gian ngắn nhất để kim giờ và kim phút vuông góc với nhau lần nữa là:

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) : \frac{11}{12} = \frac{6}{11} \text{ (giờ)}$$

$$\text{Đáp số: } \frac{6}{11} \text{ giờ.}$$

Ví dụ 2: Bây giờ là 1 giờ. Hỏi sau ít nhất bao lâu nữa thì kim phút và kim giờ thẳng hàng với nhau?

Giải

Khoảng cách giữa hai kim lúc này là:

$$2 : 12 = \frac{1}{6} \text{ (vòng)}$$

Khi hai kim thẳng hàng thì khoảng cách giữa hai kim bằng $\frac{1}{2}$ vòng.

Hiệu vận tốc giữa hai kim là:

$$1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} \text{ (vòng).}$$

Thời gian ngắn nhất để hai kim thẳng hàng là:

$$\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right) : \frac{11}{12} = \frac{8}{11} \text{ (giờ).}$$

$$\text{Đáp số: } \frac{8}{11} \text{ giờ.}$$

3. Chuyển động ngược chiều

Hai vật chuyển động với vận tốc v_1, v_2 trên cùng một quãng đường có độ dài S , khởi hành cùng một lúc và chuyển động ngược chiều, thời gian chuyển động đến khi hai vật gặp nhau là:

$$t = \frac{S}{v_1 + v_2}$$

Ví dụ 1: Trên quãng đường AB dài 276km. Hai ô tô khởi hành cùng một lúc, một xe đi từ A đến B với vận tốc 42km/giờ. Một xe đi từ B đến A với vận tốc 50km/giờ. Hỏi từ lúc bắt đầu đi, sau mấy giờ thì ô tô gặp nhau?

Giải

Sau mỗi giờ cả hai ô tô đi được quãng đường là:

$$42 + 50 = 92 \text{ (km)}$$

Thời gian để hai ô tô gặp nhau là:

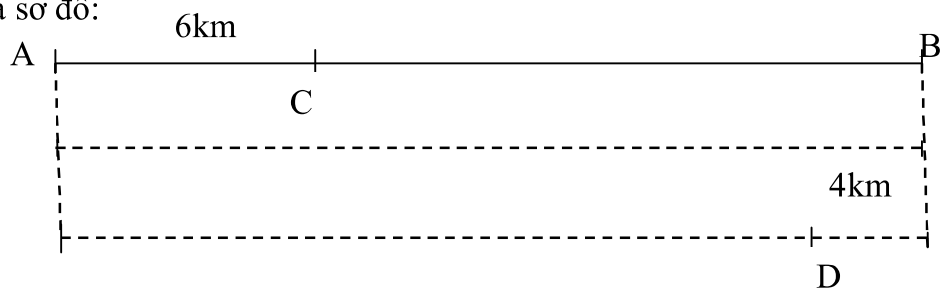
$$276 : 92 = 3 \text{ (giờ).}$$

Đáp số: Sau 3 giờ.

Ví dụ 2: Hai người đi xe đạp ngược chiều nhau cùng khởi hành cùng một lúc. Người thứ nhất đi từ A, người thứ hai đi từ B và đi nhanh hơn người thứ nhất. Họ gặp nhau cách A 6km. Sau khi gặp nhau người thứ nhất đến B thì quay trở lại và người thứ hai đến A cũng quay trở lại. Họ gặp nhau cách B 4 km. Tính xem quãng đường AB dài bao nhiêu km?

Giải

Biểu thị quãng đường người thứ nhất đi bằng nét liền, quãng đường người thứ hai đi bằng nét đứt, ta có quãng đường hai người đi cho tới khi họ gặp nhau lần thứ hai qua sơ đồ:



Cho đến khi gặp nhau lần thứ hai tại D thì hai người đã đi được 3 lần quãng đường AB. Cứ mỗi lần hai người đi được một quãng đường AB thì người thứ nhất đi được 6km.

Vậy khi hai người đi được quãng đường AB thì người thứ nhất đi được:

$$6 \times 3 = 18 \text{ (km)}$$

Quãng đường AB dài là:

$$18 - 4 = 14 \text{ (km)}$$

Đáp số: 14km.

4. Vật chuyển động gồm một đoạn lên dốc, một đoạn xuống dốc:

Nếu vật chuyển động cả đi và về trên đoạn đường đó thì quãng đường lên dốc bằng quãng đường xuống dốc và bằng quãng đường S.

Vi dụ: Một người đi xe máy từ A đến B gồm một đoạn lên dốc và một đoạn xuống dốc. Khi đi từ A đến B mất 3,5 giờ, khi trở về mất 4 giờ. Vận tốc khi lên dốc là 25km/giờ, vận tốc khi xuống dốc gấp đôi. Tính quãng đường AB?

Giải

Người đó cả đi và về mất thời gian là:

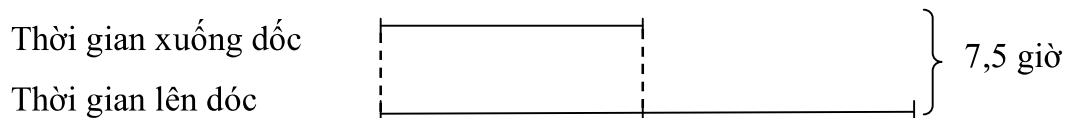
$$3,5 + 4 = 7,5 \text{ (giờ)}$$

Cả đi và về thì quãng đường lên dốc bằng quãng đường xuống dốc và bằng quãng đường AB.

Tỉ số vận tốc khi lên dốc và xuống dốc là: $\frac{1}{2}$.

Tỉ số thời gian khi lên dốc và khi xuống dốc là: $\frac{2}{1}$.

Ta có sơ đồ:



Thời gian lên dốc cả đi và về là:

$$(7,5 : 3) \times 2 = 5 \text{ (giờ)}$$

Đoạn đường AB dài là:

$$25 \times 5 = 125 \text{ (km)}$$

Đáp số: 125 km.

5. Tính vận tốc trung bình

Một vật đi hết quãng đường S_1 với vận tốc v_1 mất thời gian t_1 , đi hết quãng đường S_2 với vận tốc v_2 mất thời gian t_2 thì vận tốc trung bình là:

$$v_{tb} = \frac{S_1 + S_2}{t_1 + t_2} = \frac{v_1 \cdot t_1 + v_2 \cdot t_2}{t_1 + t_2}.$$

Sai lầm: $v_{tb} = \frac{v_1 + v_2}{2}.$

Ví dụ 1: Một ô tô đi trên quãng đường AB dài 168km. Nửa quãng đường đầu với vận tốc 40km/giờ. Nửa quãng đường sau với vận tốc 60km/giờ.

Tính vận tốc trung bình khi ô tô đi trên quãng đường đó?

Giải

Nửa quãng đường đầu ô tô đi mất thời gian:

$$(168 : 2) : 40 = 2,1 \text{ (giờ)}$$

Nửa quãng đường sau ô tô đi hết thời gian là:

$$(168 : 2) : 60 = 1,4 \text{ (giờ)}$$

Vận tốc trung bình của ô tô là:

$$168 : (2,1 + 1,4) = 48 \text{ (km/giờ)}$$

Đáp số: 48km/giờ.

Ví dụ 2: Một ô tô đi từ A đến B với vận tốc 60km/giờ. Khi về do trời mưa đường khó đi nên ô tô đi với vận tốc 40km/giờ. Tính vận tốc trung bình của chuyến đi và về của ô tô?

Giải

Trung bình 1km lúc đi ô tô đi hết thời gian là:

$$1 : 60 = \frac{1}{60} \text{ (giờ)}$$

Trung bình 1km lúc trở về ô tô đi hết thời gian là:

$$1 : 40 = \frac{1}{40} \text{ (giờ)}$$

Vậy trên quãng đường 1km cả đi và về đi hết thời gian là:

$$\frac{1}{60} + \frac{1}{40} = \frac{1}{24} \text{ (giờ)}.$$

Vận tốc trung bình của ô tô đi 1km và về 1km cũng là vận tốc trung bình của ô tô trên cả quãng đường đi và về là:

$$(1 + 1) : \frac{1}{24} = 48 \text{ (km/giờ)}.$$

Đáp số: 48 km/giờ.

6. Chuyển động trên dòng nước

Một vật chuyển động trên dòng nước thì vận tốc xuôi dòng (v_{xd}) trừ vận tốc ngược dòng (v_{nd}) bằng hai lần vận tốc dòng nước (v_n):

$$v_{xd} - v_{nd} = 2v_n.$$

Ví dụ 1: Một thuyền đi xuôi dòng từ A đến B mất 32 phút, ngược dòng từ B về A hết 48 phút. Hỏi một cụm bè trôi từ A đến B mất thời gian bao lâu:

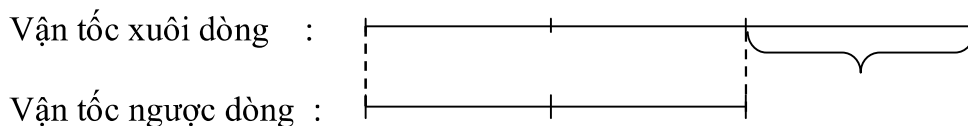
Giải

Tỉ số thời gian đi xuôi dòng và thời gian đi ngược dòng trên AB là:

$$32 : 48 = \frac{2}{3}$$

Trên cùng một đoạn đường thì thời gian và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

Tỉ số vận tốc xuôi dòng và vận tốc ngược dòng là $\frac{3}{2}$.



Vận tốc xuôi dòng – vận tốc ngược dòng = 2 x vận tốc dòng nước.

Vận tốc dòng nước chính là vận tốc của cánh bè.

Vậy ta có vận tốc thuyền xuôi dòng gấp 6 lần vận tốc cụm bè. Nên thời gian cụm bè trôi từ A về B gấp 6 lần thời gian khi thuyền xuôi dòng từ A đến B.

Thời gian cụm bè trôi từ A đến B là:

$$32 \times 6 = 192 \text{ (phút)}$$

Đáp số: 192 phút.