

Ta tìm lại được các giá trị 72 và 12 từ $x = 4$ và $y = 2$. Vậy giá trị x, y tìm được là đúng.

- Hãy vận dụng các hằng đẳng thức đã học để làm bài toán sau đây: Cho $x - y = 4, x^2 + y^2 = 36$. Tính $x^3 - y^3$.

Ta có thể làm như sau:

$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$. Thay giá trị của các biểu thức đã biết, có:

$$x^3 - y^3 = 4.(36 + xy) \quad (1).$$

Biết $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = 4^2 = 16$. Thay giá trị của biểu thức $x^2 + y^2 = 36$, có:

$x^2 + y^2 - 2xy = 36 - 2xy = 16$, suy ra $2xy = 36 - 16 = 20$, nên $xy = 10$ (2).

Thay (2) vào (1), có:

$$x^3 - y^3 = 4.(36 + 10) = 4.46 = 184.$$

Bài 19. Rút gọn biểu thức sau:

$$A = (x + y + 3)^3 - (x + y - 3)^3 - 18(x + y)^2.$$

● **Tim hiểu đề bài**

Biểu thức A là dãy các phép trừ các lũy thừa bậc 3, bậc 2 của các đa thức mà ta phải rút gọn.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Theo định nghĩa lũy thừa thì:

$$(x + y + 3)^3 = (x + y + 3)(x + y + 3)(x + y + 3), \text{ và}$$

$$(x + y - 3)^3 = (x + y - 3)(x + y - 3)(x + y - 3)$$

Hãy làm lần lượt các phép nhân đa thức kể trên để có kết quả của hai lũy thừa bậc 3 đó. Còn số hạng thứ 3 của biểu thức A là tích của 18 với bình phương của tổng x và y .

Hãy tính riêng từng lũy thừa rồi gộp vào để tính A.

● Cách giải

$$\begin{aligned}(x + y + 3)^3 &= (x + y + 3)(x + y + 3)(x + y + 3) \\ &= (x + y + 3)(x^2 + xy + 3x + xy + y^2 + 3y + 3x + 3y + 9) \\ &= (x + y + 3)(x^2 + y^2 + 2xy + 6x + 6y + 9) \\ &= x^3 + xy^2 + 2x^2y + 6x^2 + 6xy + 9x + y^3 + 2xy^2 + x^2y + \\ &\quad + 6xy + 6y^2 + 9y + 3x^2 + 6xy + 18x + 3y^2 + 18y + 27 \\ &= x^3 + y^3 + 3xy^2 + 3x^2y + 9x^2 + 18xy + 27x + 9y^2 + 27y + 27\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x + y - 3)^3 &= (x + y - 3)(x + y - 3)(x + y - 3) \\ &= (x + y - 3)(x^2 + xy - 3x + xy + y^2 - 3y - 3x - 3y + 9) \\ &= (x + y - 3)(x^2 + y^2 + 2xy - 6x - 6y + 9) \\ &= x^3 + xy^2 + 2x^2y - 6x^2 - 6xy + 9x + y^3 + 2xy^2 + x^2y - \\ &\quad - 6xy - 6y^2 + 9y - 3x^2 - 6xy + 18x - 3y^2 + 18y - 27 \\ &= x^3 + y^3 + 3xy^2 + 3x^2y - 9x^2 - 18xy + 27x - 9y^2 + 27y - 27.\end{aligned}$$

$$18(x + y)^2 = 18(x^2 + 2xy + y^2) = 18x^2 + 36xy + 18y^2.$$

Vậy có:

$$\begin{aligned}A &= (x^3 + y^3 + 3xy^2 + 3x^2y + 9x^2 + 18xy + 27x + 9y^2 \\ &\quad + 27y + 27) - (x^3 + y^3 + 3xy^2 + 3x^2y - 9x^2 - 18xy + 27x \\ &\quad - 9y^2 + 27y - 27) - (18x^2 + 36xy + 18y^2). \\ &= x^3 + y^3 + 3xy^2 + 3x^2y + 9x^2 + 18xy + 27x + 9y^2 \\ &\quad + 27y + 27 - x^3 - y^3 - 3xy^2 - 3x^2y + 9x^2 + 18xy - 27x + \\ &\quad 9y^2 - 27y + 27 - 18x^2 - 36xy - 18y^2 = 54.\end{aligned}$$

● Khai thác bài toán

a) Cách giải bài toán như đã trình bày tuy đúng nhưng còn dài, có thể có cách giải ngắn hơn và áp dụng được hằng đẳng thức đã học, nếu đặt $x + y$ có mặt trong cả 3 số hạng của đa thức A bằng Z , ta có:

$$A = (Z + 3)^3 - (Z - 3)^3 - 18Z^2$$

Áp dụng lập phương của một tổng, một hiệu, có:

$$\begin{aligned}A &= Z^3 + 9Z^2 + 27Z + 27 - (Z^3 - 9Z^2 + 27Z - 27) - 18Z^2 \\ &= Z^3 + 9Z^2 + 27Z + 27 - Z^3 + 9Z^2 - 27Z + 27 - 18Z^2 = 54.\end{aligned}$$

b) Cách giải bài toán trên được rút gọn hơn, nếu biết:

$$\begin{aligned}(x + y + 3)(x + y + 3) &= (x + y + 3)^2 \\ &= [(x + y) + 3]^2 = (x + y)^2 + 2(x + y).3 + 3^2 \\ &= x^2 + 2xy + y^2 + 6x + 6y + 3^2 \\ &= x^2 + y^2 + 3^2 + 2xy + 2x.3 + 2y.3 \quad (1)\end{aligned}$$

Như vậy, bình phương của một tổng gồm 3 số hạng bằng tổng các bình phương của mỗi số hạng đó cộng với hai lần tích số thứ nhất với số thứ hai, cộng với hai lần tích số thứ nhất với số thứ ba, cộng với hai lần tích số thứ hai với số thứ ba.

$$\text{Do đó: } (x + y + 3)^3 =$$

$$(x + y + 3)(x^2 + y^2 + 3^2 + 2xy + 2x.3 + 2y.3)$$

$$\text{và } (x + y - 3)^3 =$$

$$(x + y - 3)[x^2 + y^2 + 3^2 + 2xy + 2x(-3) + 2y(-3)].$$

Bạn đọc hãy làm tiếp bài toán theo hướng giải này.

c) Cũng có thể áp dụng hằng đẳng thức hiệu của hai lập phương đối với 2 số hạng đầu của A, có:

$$\begin{aligned}(x + y + 3)^3 - (x + y - 3)^3 &= \\ &= (x + y + 3 - x - y + 3)[(x + y + 3)^2 + \\ &\quad (x + y + 3)(x + y - 3) + (x + y - 3)^2] \\ &= 6[(x + y + 3)^2 + (x + y + 3)(x + y - 3) + (x + y - 3)^2].\end{aligned}$$

Ta có:

$$(x + y + 3)^2 = x^2 + y^2 + 9 + 2xy + 6x + 6y$$

$$(x + y - 3)^2 = x^2 + y^2 + 9 + 2xy - 6x - 6y.$$

Đối với tích $(x + y + 3)(x + y - 3)$ có thể làm như sau:

$$\begin{aligned}(x + y + 3)(x + y - 3) &= [(x + y) + 3][(x + y) - 3] \\ &= (x + y)^2 - 3^2 = x^2 + 2xy + y^2 - 9.\end{aligned}$$

Như vậy, ta có:

$$\begin{aligned}A &= 6[x^2 + y^2 + 9 + 2xy + 6x + 6y + x^2 + y^2 + 9 + 2xy \\ &\quad - 6x - 6y + x^2 + 2xy + y^2 - 9] - 18(x^2 + 2xy + y^2) \\ &= 6(3x^2 + 3y^2 + 6xy + 9) - 18(x^2 + 2xy + y^2) \\ &= 18x^2 + 18y^2 + 36xy + 54 - 18x^2 - 36xy - 18y^2 = 54.\end{aligned}$$

Bài toán này đã giới thiệu 4 cách giải, có lẽ cách giải a ở phần khai thác bài toán là lời giải hay nhất. Bạn đọc nên suy nghĩ và tìm lời giải hay cho mỗi bài toán mình làm.

Bài 20. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử (thừa số):

- a) $x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 8x$; b) $x^3 + x^2 - 4x - 4$;
 c) $x^4 + x^3 + x^2 - 1$; d) $x^4 - x^2 + 2x - 1$;
 d) $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1$; e) $x^3 - y^3 - 3x + 3y$;
 h) $x^3 - 4x^2 + 4x - 1$; i) $(x^2 + y^2 + xy)^2 - x^2y^2 - y^2z^2 - x^2z^2$;
 k) $4x^4 - 64$; l) $x^5 + 27x^2$;
 m) $x^4 - 8x$; n) $x^8 - 1$.

● **Tim hiểu đề bài**

Đề bài đòi hỏi phải phân tích mỗi đa thức đã cho thành nhân tử tức là biến mỗi tổng đã cho thành một tích gồm hai hay nhiều thừa số.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Ta đã biết ba phương pháp phân tích một đa thức thành nhân tử là: đặt nhân tử chung, dùng hằng đẳng thức, nhóm các hạng tử. Thông thường phải phối hợp cả ba phương pháp một cách linh hoạt để phân tích một đa thức thành nhân tử.

Trong ba phương pháp kể trên thì thường thường ưu tiên số một là dùng cách đặt nhân tử chung, rồi đến dùng hằng đẳng thức

và sau đó là nhóm các hạng tử. Lưu ý rằng, ở mỗi bài cụ thể cần vận dụng ba phương pháp một cách thích hợp.

• Cách giải

$$\begin{aligned} \text{a) } x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 8x &= x(x^3 - 4x^2 - 8x + 8) = \\ &= x[(x^3 + 8) - (4x^2 + 8x)] = x[(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - 4x(x + 2)] \\ &= x(x + 2)(x^2 - 2x + 4 - 4x) = x(x + 2)(x^2 - 6x + 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x^3 + x^2 - 4x - 4 &= (x^3 + x^2) - (4x + 4) = \\ &= x^2(x + 1) - 4(x + 1) = (x + 1)(x^2 - 4) = \\ &= (x + 1)(x + 2)(x - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } x^4 + x^3 + x^2 - 1 &= (x^4 + x^3) + (x^2 - 1) = \\ &= x^3(x + 1) + (x + 1)(x - 1) = (x + 1)(x^3 + x - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } x^4 - x^2 + 2x - 1 &= x^4 - (x^2 - 2x + 1) = (x^2)^2 - (x - 1)^2 = \\ &= (x^2 + x - 1)(x^2 - x + 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 &= (x^2 + 2xy + y^2) - (2x + 2y) + 1 = \\ &= (x + y)^2 - 2(x + y) + 1 = (x + y - 1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } x^3 - y^3 - 3x + 3y &= (x^3 - y^3) - (3x - 3y) \\ &= (x - y)(x^2 + xy + y^2) - 3(x - y) \\ &= (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } x^3 - 4x^2 + 4x - 1 &= (x^3 - 1) - (4x^2 - 4x) \\ &= (x - 1)(x^2 + x + 1) - 4x(x - 1) \\ &= (x - 1)(x^2 + x + 1 - 4x) = (x - 1)(x^2 - 3x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i) } (x^2 + y^2 + xy)^2 - x^2y^2 - z^2y^2 - z^2x^2 \\ &= [(x^2 + y^2 + xy)^2 - (xy)^2] - z^2(x^2 + y^2) \\ &= (x^2 + y^2 + xy + xy)(x^2 + y^2 + xy - xy) - z^2(x^2 + y^2) \\ &= (x^2 + y^2 + 2xy)(x^2 + y^2) - z^2(x^2 + y^2) \\ &= (x^2 + y^2)[(x + y)^2 - z^2] = (x^2 + y^2)(x + y + z)(x + y - z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{k) } 4x^4 - 64 &= 4(x^4 - 16) = 4[(x^2)^2 - 4^2] \\ &= 4(x^2 + 4)(x^2 - 4) = 4(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{l) } x^5 + 27x^2 &= x^2(x^3 + 27) = x^2(x^3 + 3^3) \\ &= x^2(x + 3)(x^2 - 3x + 9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{m) } x^4 - 8x &= x(x^3 - 8) = x(x^3 - 2^3) \\ &= x(x - 2)(x^2 + 2x + 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{n) } x^8 - 1 &= (x^4)^2 - 1 = (x^4 + 1)[(x^2)^2 - 1] \\ &= (x^4 + 1)(x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x^4 + 1)(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1). \end{aligned}$$

● Khai thác bài toán

- Một bài toán phân tích đa thức thành nhân tử có thể có những cách làm khác nhau, chẳng hạn:

$$\begin{aligned} \text{Câu a) } x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 8x &= (x^4 + 8x) - (4x^3 + 8x^2) = \\ &= x(x^3 + 8) - 4x^2(x + 2) \\ &= x(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - 4x^2(x + 2) \\ &= (x + 2)[x(x^2 - 2x + 4) - 4x^2] \\ &= x(x + 2)(x^2 - 2x + 4 - 4x) \\ &= x(x + 2)(x^2 - 6x + 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Câu c) } x^4 + x^3 + x^2 - 1 &= (x^4 - 1) + (x^3 + x^2) = \\ &= [(x^2)^2 - 1] + x^2(x + 1) = (x^2 + 1)(x^2 - 1) + x^2(x + 1) \\ &= (x^2 + 1)(x - 1)(x + 1) + x^2(x + 1) \\ &= (x + 1)(x^3 - x^2 + x - 1 + x^2) = (x + 1)(x^3 + x - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Câu k) } 4x^4 - 64 &= (2x^2)^2 - 8^2 = (2x^2 + 8)(2x^2 - 8) \\ &= 2(x^2 + 4)2(x^2 - 4) = 4(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2). \end{aligned}$$

Nêu ra nhận xét này, mong rằng khi làm loại toán này, bạn đọc hãy tìm các cách giải khác nhau và khi làm bài, hãy chọn cách làm ngắn gọn nhất.

- Một chú ý khác cần lưu ý là 7 hàng đẳng thức đã học đều là

lũy thừa bậc 2 hoặc bậc 3, không có bậc 4, bậc 5, bậc 8 v.v... Để có thể áp dụng được các hằng đẳng thức đã học, cần phải hạ bậc bằng cách:

a) Đặt nhân tử chung, chẳng hạn câu l:

$$x^5 + 27x^2 = x^2(x^3 + 27) = x^2(x^3 + 3^3)$$

b) Dùng lũy thừa của một lũy thừa, chẳng hạn câu k:

$$4x^4 - 64 = (2x^2)^2 - 8^2 \text{ hoặc}$$

$$4x^4 - 64 = 4(x^4 - 16) = 4[(x^2)^2 - 4^2].$$

Câu n: $x^8 - 1 = (x^4)^2 - 1.$

Bài 21. Phân tích các đa thức thành nhân tử (bằng vài phương pháp khác):

a) $x^2 - 2x - 3;$

b) $x^2 - 4x + 3;$

c) $x^2 - 10x + 24;$

d) $x^2 - 2x - 8;$

d) $2x^2 + 7x + 3;$

e) $x^2 - 4xy + 3y^2;$

i) $x^4 + x^2 + 1;$

k) $x^4y^4 + 4.$

● **Tim hiểu đề bài**

Đề bài cho các đa thức, đòi hỏi phân tích các đa thức đó thành nhân tử. Ngoài ba phương pháp đã biết, còn phải vận dụng thêm vài phương pháp khác như:

- Tách một hạng tử thành hai hay nhiều hạng tử. Chẳng hạn:

$$x^2 + 5x + 4 = x^2 + x + 4x + 4$$

$$= (x^2 + x) + (4x + 4) = x(x + 1) + 4(x + 1) = (x + 1)(x + 4).$$

- Thêm rồi bớt cùng một hạng tử. Chẳng hạn:

$$x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2$$

$$= [(x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 2 + 2^2] - (2x)^2$$

$$= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x).$$

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Căn cứ vào từng bài, hãy làm thử rồi chọn cách tách một hạng tử thành hai hay nhiều hạng tử hoặc chọn cách thêm rồi bớt cùng một hạng tử.

Trong quá trình giải mỗi bài cũng vẫn phải vận dụng linh hoạt ba phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử đã biết.

• Cách giải

$$\begin{aligned} \text{a) } x^2 - 2x - 3 &= x^2 - 2x \cdot 2 - 1 = (x^2 - 1) - (2x + 2) \\ &= (x - 1)(x + 1) - 2(x + 1) = (x + 1)(x - 1 - 2) \\ &= (x + 1)(x - 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x^2 - 4x + 3 &= x^2 - 4x + 4 - 1 = (x^2 - 2x \cdot 2 + 2^2) - 1 \\ &= (x - 2)^2 - 1 = (x - 2 + 1)(x - 2 - 1) \\ &= (x - 1)(x - 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } x^2 - 10x + 24 &= x^2 - 4x - 6x + 24 = (x^2 - 4x) - (6x - 24) \\ &= x(x - 4) - 6(x - 4) = (x - 4)(x - 6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } x^2 - 2x - 8 &= x^2 + 2x - 4x - 8 = (x^2 + 2x) - (4x + 8) \\ &= x(x + 2) - 4(x + 2) = (x + 2)(x - 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } 2x^2 + 7x + 3 &= 2x^2 + 6x + x + 3 = (2x^2 + 6x) + (x + 3) \\ &= 2x(x + 3) + (x + 3) = (x + 3)(2x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } x^2 - 4xy + 3y^2 &= x^2 - xy - 3xy + 3y^2 = (x^2 - xy) - (3xy - 3y^2) \\ &= x(x - y) - 3y(x - y) = (x - y)(x - 3y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i) } x^4 + x^2 + 1 &= x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 \\ &= (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{k) } x^4y^4 + 4 &= x^4y^4 + 4x^2y^2 + 4 - 4x^2y^2 \\ &= (x^4y^4 + 4x^2y^2 + 4) - 4x^2y^2 = (x^2y^2 + 2)^2 - (2xy)^2 \\ &= (x^2y^2 + 2 + 2xy)(x^2y^2 + 2 - 2xy). \end{aligned}$$

● Khai thác bài toán

Nếu chịu khó suy nghĩ và tìm tòi, các câu trong bài 21 có thể có những cách giải khác nhau. Chẳng hạn:

- Với câu a) ngoài cách giải trên có thể giải theo ba cách sau:

* Cách 2. Thêm 1 và bớt 1

$$\begin{aligned}x^2 - 2x - 3 &= x^2 - 2x + 1 - 1 - 3 = x^2 - 2x + 1 - 4 = \\&= (x^2 - 2x + 1) - 4 = (x - 1)^2 - 2^2 = \\&= (x - 1 + 2)(x - 1 - 2) = (x + 1)(x - 3)\end{aligned}$$

* Cách 3. Thêm 6 và bớt 6

$$\begin{aligned}x^2 - 2x - 3 &= x^2 - 2x - 3 + 6 - 6 = x^2 - 9 - 2x + 6 = \\&= (x^2 - 9) - (2x - 6) = (x - 3)(x + 3) - 2(x - 3) \\&= (x - 3)(x + 3 - 2) = (x - 3)(x + 1)\end{aligned}$$

* Cách 4. Thêm x và bớt x

$$\begin{aligned}x^2 - 2x - 3 &= x^2 - 2x - 3 + x - x = x^2 + x - 3x - 3 = \\&= (x^2 + x) - (3x + 3) = x(x + 1) - 3(x + 1) \\&= (x + 1)(x - 3).\end{aligned}$$

- Với câu b) ngoài cách giải trên có thể giải theo ba cách sau:

* Cách 2. Thêm 1 và bớt 1

$$\begin{aligned}x^2 - 4x + 3 &= x^2 - 4x + 3 + 1 - 1 = x^2 - 1 - 4x + 4 = \\&= (x^2 - 1) - (4x - 4) = (x - 1)(x + 1) - 4(x - 1) \\&= (x - 1)(x + 1 - 4) = (x - 1)(x - 3).\end{aligned}$$

* Cách 3. Thêm 9 và bớt 9

$$\begin{aligned}x^2 - 4x + 3 &= x^2 - 4x + 3 + 9 - 9 = x^2 - 9 - 4x + 12 = \\&= (x^2 - 9) - (4x - 12) = (x - 3)(x + 3) - 4(x - 3) = \\&= (x - 3)(x + 3 - 4) = (x - 3)(x - 1)\end{aligned}$$

* Cách 4: Tách $-4x$ thành $-x$ và $-3x$

$$\begin{aligned}x^2 - 4x + 3 &= x^2 - x - 3x + 3 = (x^2 - x) - (3x - 3) = \\&= x(x - 1) - 3(x - 1) = (x - 1)(x - 3).\end{aligned}$$

Nhận thấy: Thêm và bớt cùng một hạng tử hoặc tách một hạng tử thành hai hay nhiều hạng tử nhằm làm xuất hiện hằng đẳng thức hoặc giúp cho nhóm hạng tử thuận lợi hơn trong quá trình phân tích đa thức thành nhân tử.

Bạn đọc có thể tìm thêm các cách giải khác ở bài toán này.

Bài 22

a) Rút gọn biểu thức A rồi tính giá trị của biểu thức với $x = -\frac{2}{3}$:

$$A = 3\left(\frac{2x}{3} - 1\right) + (15x^2 - 10x) : (-5x) - (3x - 1).$$

b) Rút gọn biểu thức B rồi tính giá trị của biểu thức với $x = -1$, $y = -2001$:

$$B = \frac{4x^2 - 4}{xy - y + x - 1}.$$

• Tìm hiểu đề bài

Biểu thức A là một dãy tính cộng trừ nhân chia các đơn, đa thức, phải rút gọn rồi tính giá trị.

Biểu thức B là phép chia đa thức cho đa thức, cần biến đổi, rút gọn rồi tính giá trị.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, cần thực hiện phép tính nhân chia trước, cộng trừ sau để rút gọn biểu thức đã cho, sau đó tính giá trị.

Với câu b, cần phân tích đa thức ở tử và mẫu thành nhân tử rồi rút gọn, sau đó tính giá trị.

• Cách giải

a) Rút gọn:

$$A = 3\left(\frac{2x}{3} - 1\right) + (15x^2 - 10x) : (-5x) - (3x - 1)$$

$$\begin{aligned}
 &= 2x - 3 + (-3x + 2) - (3x - 1) \\
 &= 2x - 3 - 3x + 2 - 3x + 1 = -4x.
 \end{aligned}$$

Tính giá trị

$$A = -4x = -4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

b) Rút gọn

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{4x^2 - 4}{xy - y + x - 1} \\
 &= \frac{4(x^2 - 1)}{(xy - y) + (x - 1)} = \frac{4(x + 1)(x - 1)}{y(x - 1) + (x - 1)} \\
 &= \frac{4(x + 1)(x - 1)}{(x - 1)(y + 1)} = \frac{4(x + 1)}{y + 1}
 \end{aligned}$$

(với điều kiện $x - 1 \neq 0$ hay $x \neq 1$)

Vì $x = -1$ nên $x - 1 = -1 - 1 = -2 \neq 0$.

Tính giá trị

$$B = \frac{4(x + 1)}{y + 1} = \frac{4(-1 + 1)}{-2001 + 1} = \frac{4 \cdot 0}{-2000} = \frac{0}{-2000} = 0.$$

● Khai thác bài toán

- Đối với phép chia, cần lưu ý:

a) Khi số bị chia là số 0 và số chia khác 0, phép chia bao giờ cũng thực hiện được và kết quả của phép tính luôn bằng 0:

$$\frac{0}{a} = 0 \text{ (với } a \neq 0)$$

b) Khi số bị chia là số khác 0 và số chia là 0, thì không bao giờ có phép chia này, hay đây là phép tính không có nghĩa

$$\frac{a}{0} : \text{ không có nghĩa (với } a \neq 0)$$

Ở trường hợp b, không ít bạn đọc vẫn cho đây là một phép tính và ghi kết quả bằng a hoặc bằng 0 (!)

- Với câu a, ta đã:

a) thực hiện phép nhân đơn thức với đa thức $3.\left(\frac{2x}{3} - 1\right)$

b) thực hiện phép chia đa thức cho đơn thức

$$(15x^2 - 10x) : (-5x)$$

c) thực hiện phép cộng, trừ.

Như vậy, với một dãy tính gồm dấu ngoặc rồi cộng trừ nhân chia thì phải làm phép tính trong dấu ngoặc trước, rồi làm tính nhân, chia, sau đó làm cộng trừ từ trái sang phải.

- Với câu b, để thực hiện được việc rút gọn, phải phân tích tử và mẫu thành nhân tử rồi rút gọn các nhân tử chung. Nhân tử được rút gọn phải đảm bảo là khác 0.

CHIA ĐA THỨC

Bài 23. Sắp xếp các đa thức sau theo lũy thừa giảm dần và theo một biến chính rồi làm phép chia:

a) $(5x^3 + 6x - 3x^4 - 10) : (5 - 3x)$;

b) $(x^4 + 2x - 2x^3 - 1) : (x^2 + 1 - 2x)$;

c) $(13x^4y^2 - 7x^5y + 2x^3y^3 - 5x^6 - xy^5) : (y^2 - 2xy - x^2)$;

d) $(20x^3y^2 - 20xy^4 - 6x^5 + 7x^4y - 13x^2y^3) : (2x^2y - 3x^3 + 5xy^2)$;

e) $(3x^4 + 9x - 8x^3 - 7 - 10x^2) : (1 - 2x + 3x^2)$.

• Tìm hiểu đề bài

Đề bài đòi hỏi phải sắp xếp đa thức bị chia, đa thức chia theo lũy thừa giảm dần của một biến chính rồi làm phép chia.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Chia hai đa thức đã sắp xếp theo lũy thừa giảm dần của một biến chính thực hiện tương tự như chia hai số tự nhiên. Cụ thể là:

- Chia hạng tử cao nhất của đa thức bị chia cho hạng tử cao nhất của đa thức chia, ta được hạng tử cao nhất của thương.

- Chia hạng tử cao nhất của dư thứ nhất cho hạng tử cao nhất

của đa thức chia, ta được hạng tử thứ hai của thương.

- Quá trình trên được tiếp tục đến khi ta được dư cuối cùng bằng 0 (phép chia hết) hoặc dư cuối cùng khác 0 có bậc thấp hơn bậc của đa thức chia (phép chia có dư).

● Cách giải

a) Sắp xếp đa thức theo lũy thừa giảm dần đối với biến x:

$$5x^3 + 6x - 3x^4 - 10 = -3x^4 + 5x^3 + 6x - 10$$

$$5 - 3x = -3x + 5$$

$$\begin{array}{r} -3x^4 + 5x^3 + 6x - 10 \\ -3x^4 + 5x^3 \\ \hline 6x - 10 \\ 6x - 10 \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} -3x + 5 \\ \hline x^3 - 2 \end{array} \right.$$

b) Sắp xếp đa thức theo lũy thừa giảm dần đối với biến x:

$$x^4 + 2x - 2x^3 - 1 = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$$

$$x^2 + 1 - 2x = x^2 - 2x + 1$$

$$\begin{array}{r} x^4 - 2x^3 + 2x - 1 \\ x^4 - 2x^3 \\ \hline -x^2 + 2x - 1 \\ -x^2 + 2x - 1 \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - 2x + 1 \\ \hline x^2 - 1 \end{array} \right.$$

c) Sắp xếp đa thức theo lũy thừa giảm dần đối với biến x:

$$13x^4y^2 - 7x^5y + 2x^3y^3 - 5x^6 - xy^5 =$$

$$-5x^6 - 7x^5y + 13x^4y^2 + 2x^3y^3 - xy^5$$

$$y^2 - 2xy - x^2 = -x^2 - 2xy + y^2$$

$$\begin{array}{r} -5x^6 - 7x^5y + 13x^4y^2 + 2x^3y^3 - xy^5 \\ -5x^6 - 10x^5y + 5x^4y^2 \\ \hline \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} -x^2 - 2xy + y^2 \\ \hline 5x^4 - 3x^3y - 2x^2y^2 - xy^3 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r}
3x^5y + 8x^4y^2 + 2x^3y^3 - xy^5 \\
3x^5y + 6x^4y^2 - 3x^3y^3 \\
\hline
2x^4y^2 + 5x^3y^3 - xy^5 \\
2x^4y^2 + 4x^3y^3 - 2x^2y^4 \\
\hline
x^3y^3 + 2x^2y^4 - xy^5 \\
x^3y^3 + 2x^2y^4 - xy^5 \\
\hline
0
\end{array}$$

d) Sắp xếp đa thức theo lũy thừa giảm dần đối với biến x:

$$\begin{array}{r}
20x^3y^2 - 20xy^4 - 6x^5 + 7x^4y - 13x^2y^3 = \\
-6x^5 + 7x^4y + 20x^3y^2 - 13x^2y^3 - 20xy^4 \\
2x^2y - 3x^3 + 5xy^2 = -3x^3 + 2x^2y + 5xy^2 \\
-6x^5 + 7x^4y + 20x^3y^2 - 13x^2y^3 - 20xy^4 \quad \left| \begin{array}{l} -3x^3 + 2x^2y + 5xy^2 \\ \hline 2x^2 - xy - 4y^2 \end{array} \right. \\
-6x^5 + 4x^4y + 10x^3y^2 \\
\hline
3x^4y + 10x^3y^2 - 13x^2y^3 - 20xy^4 \\
3x^4y - 2x^3y^2 - 5x^2y^3 \\
\hline
12x^3y^2 - 8x^2y^3 - 20xy^4 \\
12x^3y^2 - 8x^2y^3 - 20xy^4 \\
\hline
0
\end{array}$$

e) Sắp xếp đa thức theo lũy thừa giảm dần đối với biến x:

$$\begin{array}{r}
3x^4 + 9x - 8x^3 - 7 - 10x^2 = 3x^4 - 8x^3 - 10x^2 + 9x - 7 \\
1 - 2x + 3x^2 = 3x^2 - 2x + 1 \\
3x^4 - 8x^3 - 10x^2 + 9x - 7 \quad \left| \begin{array}{l} 3x^2 - 2x + 1 \\ \hline x^2 - 2x - 5 \end{array} \right. \\
3x^4 - 2x^3 + x^2 \\
\hline
-6x^3 - 11x^2 + 9x - 7 \\
-6x^3 + 4x^2 - 2x \\
\hline
-15x^2 + 11x - 7 \\
-15x^2 + 10x - 5 \\
\hline
x - 2
\end{array}$$

Đây là phép chia có dư.

Bài 24

a) Tìm các giá trị nguyên của n để giá trị của biểu thức $2n^2 - n + 2$ chia hết cho giá trị của biểu thức $2n + 1$.

b) Tìm giá trị của a và b để đa thức $x^3 + ax + b$ chia hết cho $(x - 1)^2$.

• Tìm hiểu đề bài

Với câu a, đề bài đòi hỏi phải tìm các giá trị nguyên của n để giá trị của biểu thức $2n^2 - n + 2$ chia hết cho giá trị của biểu thức $2n + 1$.

Với câu b, phải tìm giá trị của a và b để đa thức $x^3 + ax + b$ chia hết cho $(x - 1)^2$.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, trước hết hãy tìm số dư của phép chia đa thức $2n^2 - n + 2$ cho đa thức $2n + 1$. Để tìm các giá trị nguyên của n thì số dư của phép chia này phải là bội của $2n + 1$ tức $2n + 1$ là ước của số dư. Từ đó, bằng lập luận sẽ suy ra n .

Với câu b, trước hết hãy làm phép chia đa thức $x^3 + ax + b$ cho đa thức $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$ để có hạng tử thứ nhất ở thương. Sau đó cần biến đổi đa thức dư cho gọn hơn, rồi tiếp tục làm phép chia để có hạng tử thứ hai ở thương. Để có phép chia hết thì tích của hạng tử thứ hai với số chia phải bằng đa thức dư sau lần chia thứ nhất. Từ đó suy ra giá trị của a, b .

• Cách giải

a) Ta làm phép chia

$$\begin{array}{r} 2n^2 - n + 2 \\ - 2n^2 + n \\ \hline -2n + 2 \\ - 2n - 1 \\ \hline 3 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} 2n + 1 \\ \hline n - 1 \end{array} \right.$$

Nhận thấy đa thức $2n^2 - n + 2$ không chia hết cho đa thức $2n + 1$, nhưng có thể tìm được các giá trị nguyên của n để giá trị của $2n^2 - n + 2$ chia hết cho giá trị của $2n + 1$. Muốn vậy thì $2n + 1$ phải là ước của 3.

Các ước của 3 là $\pm 1; \pm 3$. Do đó, với:

$$2n + 1 = 1 \text{ thì } n = 0$$

$$2n + 1 = -1 \text{ thì } n = -1$$

$$2n + 1 = 3 \text{ thì } n = 1$$

$$2n + 1 = -3 \text{ thì } n = -2.$$

Vậy với $n \in \{-2; -1; 0; 1\}$ thì giá trị của đa thức $2n^2 - n + 2$ chia hết cho giá trị của đa thức $2n + 1$.

b) Ta làm phép chia

$$\begin{array}{r|l} x^3 + ax + b & x^2 - 2x + 1 \\ - x^3 + x - 2x^2 & \hline \hline 2x^2 + ax - x + b & \text{hay} \\ 2x^2 + (a - 1)x + b & \\ \hline 2x^2 - 4x + 2 & \end{array}$$

Để có phép chia hết thì $2x^2 + (a - 1)x + b$ trừ đi đa thức $2x^2 - 4x + 2$ phải bằng 0, tức là:

$$2x^2 + (a - 1)x + b = 2x^2 - 4x + 2$$

Từ đó suy ra:

$$a - 1 = -4 \Rightarrow a = -3$$

và $b = 2$

Vậy, với $a = -3$ và $b = 2$ thì $(x^3 + ax + b) : (x^2 - 2x + 1)$.

● Khai thác bài toán

- Dễ dàng thử lại để kiểm tra kết quả câu b, bằng cách thay

$a = -3$ và $b = 2$ vào đa thức dư $2x^2 + (a - 1)x + b$ được đa thức $2x^2 - 4x + 2$. Rõ ràng $2x^2 - 4x + 2 - (2x^2 - 4x + 2) = 0$. Ta có phép chia hết.

- Bạn đọc hãy tự thử kết quả tìm được trong câu a.

B. CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

ĐỀ BÀI

Bài 25. Sắp xếp đa thức theo biến chính rồi làm tính nhân:

a) $(-xy^2 + x^2y + x^3 - y^3)(2x + y)$;

b) $(x^3 - 4xy^2 + 3x^2y - 5y^3)(3x - 7y)$.

Bài 26. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2 - 10x + 21$;

b) $3x^2 - 7x + 2$;

c) $324x^4 + 1$;

d) $x^3 + y^3 + z^3 - x(y - z)^2 - y(z - x)^2 - z(x - y)^2 - 4xyz$.

Bài 27. Rút gọn biểu thức:

a) $[(x^3 - y^3) + 2(x^2 - y^2) - 2(x - y)^2] : (x - y)$;

b) $\frac{125 \cdot 5^5 \cdot 64 - 25^3 \cdot 10 \cdot 4}{5^7 \cdot 8}$;

c*) $\frac{x^4 + y^4 + (x + y)^4}{x^2 + y^2 + (x + y)^2}$ biết $x^2 + y^2 + xy = 7$.

Bài 28

a) Rút gọn rồi tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A = 3x^2 - (-20x^3 + 15x^2 - 5x) : (-5x) - 3(x - 1).$$

b) Rút gọn rồi tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$B = 8x^2 + 6x - (x^3 - x^2 - x + 1) : (x - 1) - 3x(x + 2).$$

Bài 29. Sắp xếp các đa thức theo một biến chính rồi làm phép chia:

$$\begin{aligned} \text{a) } & 24x^4y^2 + 9x^3y^3 - 12x^6 - 10x^5y + 3x^2y^4 - 2xy^5 : \\ & \qquad \qquad \qquad : (6x^4 - 3x^2y^2 - 2xy^3 - 4x^3y); \end{aligned}$$

$$\text{b) } 10x^4y - 9x^3y^2 - 8x^5 + 6x^2y^3 + 9xy^4 : (2x^2 + 3y^2 - xy).$$

Bài 30

a*) Tính giá trị của biểu thức

$$(x^3 + y^3) - (x^2 + y^2) + 4xy \text{ biết } x + y = 2.$$

b*) Cho $ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2) = ab$, trong đó x và y là các số khác 0 nhưng có tổng bằng 1. Chứng minh rằng $a = b$.

HƯỚNG DẪN - CÁCH GIẢI

Bài 25. ● **Hướng dẫn.** Chú ý viết các đơn thức đồng dạng dưới cùng một cột khi làm tính.

● **Cách giải**

a) Sắp xếp đa thức theo lũy thừa giảm dần của biến x :

$$-xy^2 + x^2y + x^3 - y^3 = x^3 + x^2y - xy^2 - y^3$$

$$\begin{array}{r} x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 \\ \quad \quad \quad \times \quad 2x + y \\ \hline 2x^4 + 2x^3y - 2x^2y^2 - 2xy^3 \\ + \quad \quad \quad x^3y + x^2y^2 - xy^3 - y^4 \\ \hline 2x^4 + 3x^3y - x^2y^2 - 3xy^3 - y^4 \end{array}$$

b) Sắp xếp đa thức theo lũy thừa giảm dần của biến x :

$$x^3 - 4xy^2 + 3x^2y - 5y^3 = x^3 + 3x^2y - 4xy^2 - 5y^3$$

$$\begin{array}{r}
 x^3 + 3x^2y - 4xy^2 - 5y^3 \\
 \quad \quad \quad x \quad \quad 3x - 7y \\
 \hline
 3x^4 + 9x^3y - 12x^2y^2 - 15xy^3 \\
 + \quad \quad \quad - 7x^3y - 21x^2y^2 + 28xy^3 + 35y^4 \\
 \hline
 3x^4 + 2x^3y - 33x^2y^2 + 13xy^3 + 35y^4
 \end{array}$$

Bài 26. • **Hướng dẫn.** Vận dụng các điều hướng dẫn ở bài 20 và bài 21.

• **Cách giải**

$$\begin{aligned}
 \text{a) } x^2 - 10x + 21 &= x^2 - 3x - 7x + 21 = (x^2 - 3x) - (7x - 21) = \\
 &= x(x - 3) - 7(x - 3) = (x - 3)(x - 7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } 3x^2 - 7x + 2 &= 3x^2 - 6x - x + 2 = (3x^2 - 6x) - (x - 2) = \\
 &= 3x(x - 2) - (x - 2) = (x - 2)(3x - 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } 324x^4 + 1 &= 324x^4 + 36x^2 + 1 - 36x^2 \\
 &= [(18x^2)^2 + 2 \cdot 18x^2 \cdot 1 + 1] - (6x)^2 \\
 &= (18x^2 + 1)^2 - (6x)^2 \\
 &= (18x^2 + 6x + 1)(18x^2 - 6x + 1).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } x^3 + y^3 + z^3 - x(y - z)^2 - y(z - x)^2 - z(x - y)^2 - 4xyz \\
 &= [x^3 - x(y - z)^2] + [y^3 - y(z - x)^2] + [z^3 - z(x - y)^2 - 4xyz] \\
 &= x[x^2 - (y - z)^2] + y[y^2 - (z - x)^2] + z[z^2 - (x^2 - 2xy + y^2) - 4xy] \\
 &= x[x^2 - (y - z)^2] + y[y^2 - (z - x)^2] + z[z^2 - x^2 + 2xy - y^2 - 4xy] \\
 &= x[x^2 - (y - z)^2] + y[y^2 - (z - x)^2] + z[z^2 - (x + y)^2] \\
 &= x(x + y - z)(x - y + z) + y(y + z - x)(y - z + x) + \\
 &\quad \quad \quad + z(z + x + y)(z - x - y) \\
 &= (x + y - z)[x(x - y + z) + y(y + z - x) - z(x + y + z)] \\
 &= (x + y - z)(x^2 - xy + xz + y^2 + yz - xy - xz - yz - z^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x + y - z)(x^2 - 2xy + y^2 - z^2) \\
&= (x + y - z)[(x - y)^2 - z^2] \\
&= (x + y - z)(x - y + z)(x - y - z).
\end{aligned}$$

Bài 27. • Hướng dẫn. Với câu a, hãy thực hiện phép chia đa thức cho đa thức, sau đó làm phép cộng, trừ. Chú ý đến hàng đẳng thức.

Với câu b, hãy viết các số đã cho thành lũy thừa của 2 và 5.

Với câu c, hãy biến đổi tử và mẫu theo điều kiện đã cho là $x^2 + y^2 + xy = 7$. Đặc biệt lưu ý đến lũy thừa của một đa thức, chẳng hạn như: $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$.

• Cách giải

$$\begin{aligned}
\text{a) } & [(x^3 - y^3) + 2(x^2 - y^2) - 2(x - y)^2] : (x - y) \\
&= [(x - y)(x^2 + xy + y^2) + 2(x - y)(x + y) - 2(x - y)^2] : (x - y) \\
&= (x^2 + xy + y^2) + 2(x + y) - 2(x - y) \\
&= x^2 + xy + y^2 + 2x + 2y - 2x + 2y \\
&= x^2 + xy + y^2 + 4y.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } & \frac{125 \cdot 5^5 \cdot 64 - 25^3 \cdot 10 \cdot 4}{5^7 \cdot 8} = \frac{5^3 \cdot 5^5 \cdot 2^6 - 5^6 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2^2}{5^7 \cdot 2^3} \\
&= \frac{5^8 \cdot 2^6 - 5^7 \cdot 2^3}{5^7 \cdot 2^3} = \frac{5^8 \cdot 2^6}{5^7 \cdot 2^3} - \frac{5^7 \cdot 2^3}{5^7 \cdot 2^3} = 5 \cdot 2^3 - 1 \\
&= 40 - 1 = 39
\end{aligned}$$

c*) Biến đổi mẫu và tính toán theo điều kiện bài toán

$$\begin{aligned}
&x^2 + y^2 + xy = 7 \quad (1) \\
&x^2 + y^2 + (x + y)^2 = x^2 + y^2 + x^2 + 2xy + y^2 \\
&= 2(x^2 + y^2 + xy) = 2 \cdot 7 = 14
\end{aligned}$$

Biến đổi tử và tính toán:

$$\begin{aligned}x^4 + y^4 + (x + y)^4 &= x^4 + y^4 + [(x + y)^2]^2 \\&= x^4 + y^4 + (x^2 + 2xy + y^2)^2 = \\&= x^4 + y^4 + x^4 + 4x^2y^2 + y^4 + 4x^3y + 2x^2y^2 + 4xy^3 \\&= 2(x^4 + y^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3) \quad (2)\end{aligned}$$

Bình phương hai vế của (1) có:

$$\begin{aligned}x^4 + y^4 + x^2y^2 + 2x^2y^2 + 2x^3y + 2xy^3 &= 49 \\ \text{hay } x^4 + y^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 &= 49 \quad (3)\end{aligned}$$

Từ (2) và (3) có:

$$x^4 + y^4 + (x + y)^4 = 2 \cdot 49 = 98$$

$$\text{Vậy } \frac{x^4 + y^4 + (x + y)^4}{x^2 + y^2 + (x + y)^2} = \frac{98}{14} = 7.$$

Bài 28. • Hướng dẫn

Với câu a, hãy thực hiện phép nhân, phép chia trước, rồi rút gọn biểu thức. Căn cứ vào biểu thức đã được rút gọn để suy luận tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A.

Với câu b, làm tương tự như câu a để có biểu thức gọn, từ đó suy luận tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức B.

• Cách giải

$$\begin{aligned}A &= 3x^2 - (-20x^3 + 15x^2 - 5x) : (-5x) - 3(x - 1) \\&= 3x^2 - (4x^2 - 3x + 1) - (3x - 3) \\&= 3x^2 - 4x^2 + 3x - 1 - 3x + 3 \\&= -x^2 + 2.\end{aligned}$$

Biết rằng bình phương của bất kì số nào cũng không âm, do đó $x^2 \geq 0$, suy ra $-x^2 \leq 0$.

Thêm vào hai vế của bất đẳng thức số 2, ta có:

$$-x^2 + 2 \leq 2.$$

Biểu thức $-x^2 + 2$ luôn luôn nhỏ hơn hay bằng 2 nên $-x^2 + 2$ hay biểu thức A đã cho có giá trị lớn nhất bằng 2 khi $x = 0$.

Vậy biểu thức A có giá trị lớn nhất bằng 2 khi $x = 0$.

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= 8x^2 + 6x - (x^3 - x^2 - x + 1) : (x - 1) - 3x(x + 2) \\ &= 8x^2 + 6x - (x^2 - 1) - (3x^2 + 6x) \\ &= 8x^2 + 6x - x^2 + 1 - 3x^2 - 6x \\ &= 4x^2 + 1 \end{aligned}$$

Biết rằng $x^2 \geq 0$, nên $4x^2 + 1 \geq 1$.

Biểu thức $4x^2 + 1$ luôn luôn lớn hơn hay bằng 1 nên $4x^2 + 1$ hay biểu thức B đã cho có giá trị nhỏ nhất bằng 1 khi $x = 0$.

Vậy biểu thức B có giá trị nhỏ nhất bằng 1 khi $x = 0$.

Bài 29. • Hướng dẫn. Sau khi đã sắp xếp các đa thức theo lũy thừa giảm dần của biến x , hãy lấy hạng tử bậc cao nhất của đa thức bị chia chia cho hạng tử bậc cao nhất của đa thức chia, rồi làm tiếp theo hướng dẫn bài 23.

a)

$$\begin{array}{r|l} -12x^6 - 10x^5y + 24x^4y^2 + 9x^3y^3 + 3x^2y^4 - 2xy^5 & 6x^4 - 4x^3y - 3x^2y^2 - 2xy^3 \\ -12x^6 + 8x^5y + 6x^4y^2 + 4x^3y^3 & \hline \end{array}$$

$$-18x^5y + 18x^4y^2 + 5x^3y^3 + 3x^2y^4 - 2xy^5$$

$$-18x^5y + 12x^4y^2 + 9x^3y^3 + 6x^2y^4$$

$$6x^4y^2 - 4x^3y^3 - 3x^2y^4 - 2xy^5$$

$$6x^4y^2 - 4x^3y^3 - 3x^2y^4 - 2xy^5$$

0

$$\begin{array}{r}
 \text{b)} \\
 \begin{array}{r}
 -8x^5 + 10x^4y - 9x^3y^2 + 6x^2y^3 + 9xy^4 \\
 -8x^5 + 4x^4y - 12x^3y^2 \\
 \hline
 6x^4y + 3x^3y^2 + 6x^2y^3 + 9xy^4 \\
 6x^4y - 3x^3y^2 + 9x^2y^3 \\
 \hline
 6x^3y^2 - 3x^2y^3 + 9xy^4 \\
 6x^3y^2 - 3x^2y^3 + 9xy^4 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 2x^2 - xy + 3y^2 \\
 -4x^3 + 3x^2y + 3xy^2
 \end{array} \right.$$

Bài 30. • Hướng dẫn

Với câu a, hãy áp dụng hằng đẳng thức dạng tổng hai lập phương, lưu ý sử dụng $x + y = 2$ sẽ có được kết quả bài toán.

Với câu b, từ $x + y = 1$ suy ra $x^2 + 2xy + y^2 = 1$ hay $x^2 + y^2 = 1 - 2xy$. Hãy vận dụng kết quả này vào biểu thức đã cho, rồi biến đổi sẽ có được kết quả bài toán.

• Cách giải

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & (x^3 + y^3) - (x^2 + y^2) + 4xy \\
 & = (x + y)(x^2 - xy + y^2) - (x^2 + y^2) + 4xy
 \end{aligned}$$

Biết $x + y = 2$, nên có:

$$\begin{aligned}
 & = 2(x^2 - xy + y^2) - x^2 - y^2 + 4xy \\
 & = 2x^2 - 2xy + 2y^2 - x^2 - y^2 + 4xy \\
 & = x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2.
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } (x + y)^2 = 2^2 = 4.$$

b) Từ $x + y = 1$ suy ra $x^2 + y^2 + 2xy = 1$ do đó $x^2 + y^2 = 1 - 2xy$. Từ đó có:

$$ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2) = ab$$

$$ab(1 - 2xy) + xy(a^2 + b^2) = ab;$$

$$ab(1 - 2xy) + xy(a^2 + b^2) - ab = 0;$$

$$ab - 2abxy + xy(a^2 + b^2) - ab = 0;$$

$$-2abxy + xy(a^2 + b^2) = 0;$$

$$xy(a^2 + b^2 - 2ab) = 0;$$

$$xy(a - b)^2 = 0. \text{ Do } x \neq 0; y \neq 0 \text{ nên } a - b = 0 \text{ hay } a = b.$$

Đó là điều phải chứng minh.

III. PHÂN THỨC ĐẠI SỐ VÀ CÁC PHÉP TÍNH

A. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

PHÂN THỨC. TẬP XÁC ĐỊNH

Bài 1. Tìm tập xác định của các phân thức:

$$\text{a) } A = \frac{x + 5}{x^2 - x - 2};$$

$$\text{b) } B = \frac{5x + 2}{x^2 - x};$$

$$\text{c) } C = \frac{4x}{x - 2y};$$

$$\text{d) } D = \frac{x + y}{xy - 2x - y + 2}.$$

- **Tìm hiểu đề bài**

Tìm tập xác định (TXĐ) của phân thức là tìm các giá trị của biến sao cho giá trị tương ứng của mẫu thức khác 0.

- **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Nói chung, để tìm tập xác định của một phân thức, trước hết cho mẫu bằng 0 rồi giải phương trình để tìm ra các giá trị của biến làm cho mẫu bằng 0; sau đó để phân thức có nghĩa thì mẫu phải khác không, muốn vậy thì giá trị của biến phải khác giá trị vừa tìm được ở trên. Chẳng hạn:

$$M = 2x - 2; M = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy $M \neq 0$ khi $x \neq 1$.

Để giải phương trình mà mẫu của phân thức là vế trái còn vế phải là 0 thường phải phân tích mẫu thành nhân tử.

• Cách giải

$$a) x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x) - (2x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x + 1) - 2(x + 1) = 0; (x + 1)(x - 2) = 0$$

khi $x = -1; x = 2$.

Ta thấy $x^2 - x - 2 \neq 0$ khi $x \neq -1; x \neq 2$.

Phân thức $A = \frac{x + 5}{x^2 - x - 2}$ có tập xác định là:

$$\text{TXĐ} = \{x | x \in \mathbf{Q}, x \neq -1; x \neq 2\}$$

hoặc TXĐ: $x \neq -1; x \neq 2$.

$$b) x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \text{ khi } x = 0; x = 1$$

Ta thấy $x^2 - x \neq 0$ khi $x \neq 0; x \neq 1$.

Phân thức $B = \frac{5x + 2}{x^2 - x}$ có tập xác định là

$$\text{TXĐ} = \{x | x \in \mathbf{Q}, x \neq 0; x \neq 1\}$$

hoặc TXĐ: $x \neq 0; x \neq 1$.

$$c) x - 2y = 0 \text{ khi } x = 2y$$

Ta thấy $x - 2y \neq 0$ khi $x \neq 2y$.

Phân thức $C = \frac{4x}{x - 2y}$ có tập xác định là:

$$\text{TXĐ: } \{(x, y) | x \in \mathbf{Q}, y \in \mathbf{Q}, x \neq 2y\}$$

hoặc TXĐ: $x \neq 2y$.

$$d) xy - 2x - y + 2 = 0 \Leftrightarrow (xy - 2x) - (y - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(y - 2) - (y - 2) = 0; (y - 2)(x - 1) = 0$$

khi $y = 2; x = 1$.

Phân thức $D = \frac{x + y}{xy - 2x - y + 2}$ có tập xác định

$$\text{TXD: } \{(x, y) \mid x \in \mathbf{Q}, y \in \mathbf{Q}, x \neq 1; y \neq 2\}$$

hoặc TXD: $x \neq 1; y \neq 2$.

● Khai thác bài toán

- Trong cách ghi tập xác định của một phân thức ở cách giải trên đã trình bày hai cách:

a) Cách viết trực tiếp (viết tập xác định dưới dạng tập hợp, chẳng hạn với câu d), đã viết:

$$\text{TXD} = \{(x, y) \mid x \in \mathbf{Q}, y \in \mathbf{Q}, x \neq 1; y \neq 2\}$$

hoặc TXD = $\{(x, y) \mid x \neq 1; y \neq 2\}$ (gọn hơn nhưng phải hiểu rằng $x \in \mathbf{Q}, y \in \mathbf{Q}$).

b) Cách viết gián tiếp

$$\text{TXD: } x \neq 1; y \neq 2$$

Trong hai cách viết này, ta chọn cách viết nào cũng được. Cần chú ý rằng, cũng có những phân thức có mẫu luôn khác 0, chẳng hạn:

a) Phân thức $\frac{-2x^2}{x^2 + 1}$ có $x^2 + 1 \neq 0$ với mọi giá trị của $x \in \mathbf{Q}$.

Vậy phân thức có TXD: mọi $x \in \mathbf{Q}$.

b) Phân thức $\frac{x(x + 3)}{x^2 - 2x + 2}$ có $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 \neq 0$

với mọi giá trị của $x \in \mathbf{Q}$.

Vậy phân thức có TXD: mọi $x \in \mathbf{Q}$.

- Sở dĩ có loại toán "tìm tập xác định của một phân thức" vì đối với mọi phân thức mà ta xem xét, trước hết phải thỏa mãn định nghĩa: "Một phân thức đại số là một biểu thức có dạng $\frac{A}{B}$, trong đó A, B là những đơn hoặc đa thức và $B \neq 0$ ".

Do vậy, trước khi thực hiện các biến đổi về phân thức phải tìm

tập xác định của nó. Cần đặc biệt lưu ý điều này khi xem xét các phân thức.

Bài 2. Với giá trị nào của biến thì phân thức sau có giá trị bằng 0?

a) $\frac{(x + 2)(x - 3)}{2x - 5}$;

b) $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 1}$;

c) $\frac{xy - x - y + 1}{x^2 + y^2 + 4}$;

d) $\frac{-15xyz}{x^2 + y^2 + z^2 + 8}$.

● **Tim hiểu đề bài**

Đề bài cho các phân thức, đòi hỏi xét xem với giá trị nào của biến thì các phân thức bằng 0.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Biết rằng, $\frac{0}{a} = 0$ khi $a \neq 0$. Như vậy, phân thức $\frac{A}{B} = 0$ khi nào? Rõ ràng là nếu $A = 0$ và $B \neq 0$ thì $\frac{A}{B} = 0$.

Do vậy, để có $\frac{A}{B} = 0$ thì trước hết phải tìm tập xác định của phân thức, sau đó giải phương trình $A = 0$, nếu các giá trị của biến tìm được đều thuộc tập xác định của phân thức, thì đó là các giá trị của biến làm cho phân thức bằng 0.

● **Cách giải:**

a) TXD = $\{x \mid x \in \mathbf{Q}, x \neq \frac{5}{2}\}$

Tử $(x + 2)(x - 3)$ bằng 0 khi $x = -2$ hoặc $x = 3$. Các giá trị này của biến đều thuộc tập xác định của phân thức đã cho.

Vậy phân thức $\frac{(x + 2)(x - 3)}{2x - 5}$ bằng 0 khi $x = -2$ hoặc $x = 3$.

b) TXD: mọi $x \in \mathbf{Q}$

Tử $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$ bằng 0 khi $x = 3$. Giá trị này của biến thuộc tập xác định của phân thức đã cho.

Vậy phân thức $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 1}$ bằng 0 khi $x = 3$.

c) TXĐ: mọi $x, y \in \mathbb{Q}$

Tử $xy - x - y + 1 = x(y - 1) - (y - 1) = (x - 1)(y - 1)$ bằng 0 khi $x = 1$; $y = 1$. Các giá trị này của biến thuộc tập xác định của phân thức đã cho.

Vậy phân thức $\frac{xy - x - y + 1}{x^2 + y^2 + 4}$ bằng 0 khi $x = 1$, y bất kì, hoặc x bất kì, $y = 1$.

d) TXĐ: mọi $x, y, z \in \mathbb{Q}$

Tử $-15xyz$ bằng 0 khi $x = 0$ hoặc $y = 0$ hoặc $z = 0$. Các giá trị này thuộc tập xác định của phân thức đã cho.

Vậy phân thức $\frac{-15xyz}{x^2 + y^2 + z^2 + 8}$ bằng 0 khi ít nhất một trong các biến x, y, z bằng 0.

• Khai thác bài toán

- Do việc tìm giá trị của biến để mẫu khác 0 nhiều khi không dễ dàng, vì thế để xét xem với giá trị nào của biến thì phân thức bằng 0, trong nhiều trường hợp ta có thể làm như sau:

- Tìm các giá trị của biến để tử bằng 0
- Trong các giá trị tìm được đó của biến, sẽ chọn (bằng cách thử) các giá trị làm cho mẫu khác 0.

Ví dụ:

1) Tìm các giá trị của biến để phân thức $\frac{x-3}{x^2-2x-7}$ có giá trị bằng 0.

Ta thấy, tử bằng 0 khi $x = 3$. Với $x = 3$ thì mẫu khác 0 (vì $3^2 - 2 \cdot 3 - 7 = 9 - 6 - 7 = -4 \neq 0$)

Vậy với $x = 3$ thì phân thức $\frac{x-3}{x^2-2x-7}$ có giá trị bằng 0.

2) Tìm các giá trị của biến để phân thức $\frac{x^2-4x+3}{x^3-2x-4}$ có giá trị bằng 0.

Ta thấy tử $x^2 - 4x + 3 = x^2 - x - 3x + 3 = (x^2 - x) - (3x - 3) = x(x - 1) - 3(x - 1) = (x - 1)(x - 3)$ bằng 0 khi $x = 1$ hoặc $x = 3$.

Với $x = 1$ hoặc $x = 3$ thì mẫu khác 0 (vì $1^3 - 2 \cdot 1 - 4 = -5 \neq 0$ hoặc $3^3 - 2 \cdot 3 - 4 = 17 \neq 0$).

Vậy với $x = 1$ hoặc $x = 3$ thì phân thức $\frac{x^2-4x+3}{x^3-2x-4}$ có giá trị bằng 0.

- Cũng có thể trình bày lời giải bài 2 theo cách khác, chẳng hạn với câu a :

Phân thức có giá trị bằng 0 khi tử bằng 0 và mẫu khác 0, tức là có:

$$\begin{cases} (x + 2)(x - 3) = 0 \\ 2x - 5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \text{ hoặc } x = 3 \\ x \neq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Vậy với $x = -2$ hoặc $x = 3$ thì phân thức $\frac{(x+2)(x-3)}{2x-5} = 0$

Bài 3. Tính giá trị các phân thức sau:

a) $A = \frac{5xy - 7y^2 + 2}{2y^3 + 3x^2y - y + 5}$, với $x = -\frac{2}{5}$, $y = 0$;

b) $B = \frac{2x^2 - 8x + 5}{x^2 - 3}$, với $x = 0,25$;

c) $C = \frac{5|x| - 1}{x - 2}$, với $|x| = \frac{1}{2}$.

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài cho các phân thức hai biến hoặc một biến và giá trị của các biến, đòi hỏi tính giá trị của phân thức.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, khi $y = 0$, biểu thức không phụ thuộc giá trị của x .

Với câu b, thay $x = 0,25 = \frac{1}{4}$ vào biểu thức rồi thực hiện các phép tính.

Với câu c, khi $|x| = \frac{1}{2}$ phải xét hai trường hợp $x = \frac{1}{2}$ và $x = -\frac{1}{2}$ vì $|x| = \frac{1}{2} = |-\frac{1}{2}| = |\frac{1}{2}|$.

• Cách giải

a) Với $y = 0$ phân thức A có giá trị bằng $\frac{2}{5}$ (không phụ thuộc vào giá trị của x).

b) Với $x = 0,25 = \frac{1}{4}$, ta có:

$$B = \frac{2 \cdot (\frac{1}{4})^2 - 8 \cdot \frac{1}{4} + 5}{(\frac{1}{4})^2 - 3} = \frac{2 \cdot \frac{1}{16} - 2 + 5}{\frac{1}{16} - 3} = \frac{\frac{1}{8} + 3}{-2\frac{15}{16}}$$

$$= \frac{25}{8} : (-\frac{47}{16}) = -\frac{25 \cdot 16}{8 \cdot 47} = -\frac{50}{47} = -1\frac{3}{47}$$

c) Cần phải xét hai trường hợp:

- Với $x = \frac{1}{2}$ có:

$$C = \frac{5 \cdot \frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} - 2} = \frac{\frac{5}{2} - 1}{-1\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \cdot (-\frac{2}{3}) = -1$$

- Với $x = -\frac{1}{2}$ có:

$$C = \frac{5 \cdot \frac{1}{2} - 1}{-\frac{1}{2} - 2} = \frac{\frac{5}{2} - 1}{-2\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{5} = -\frac{3}{5}$$

● Khai thác bài toán

Tính giá trị một phân thức là bài toán mà ta đã làm quen từ lâu. Thật vậy, với phân thức $\frac{2x^2-8x+5}{x^2-3}$ có thể viết thành

$$(2x^2 - 8x + 5) : (x^2 - 3)$$

Thay giá trị $x = 0,25 = \frac{1}{4}$, ta có dãy tính sau:

$$[2 \cdot (\frac{1}{4})^2 - 8 \cdot \frac{1}{4} + 5] : [(\frac{1}{4})^2 - 3] = (2 \cdot \frac{1}{16} - 2 + 5) : (\frac{1}{16} - 3)$$

$$= (\frac{1}{8} + 3) : (-2\frac{15}{16}) = \frac{25}{8} : (-\frac{47}{16}) = -\frac{25}{8} \cdot \frac{16}{47} = -\frac{50}{47} = -1\frac{3}{47}$$

Như vậy, bài toán này không có gì xa lạ, điều cần lưu ý là phải làm thật đúng các phép tính và phải thực hiện theo thứ tự các phép tính đối với một dãy tính.

TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA PHÂN THỨC

Bài 4. Các phân thức sau có bằng nhau không? Vì sao?

a) $A = \frac{-x}{x-2}$ và $B = \frac{x}{2-x}$;

b) $A = \frac{-x}{x-4}$ và $B = \frac{-x(x-4)}{(x-4)^2}$;

c) $A = \frac{-x}{(x-5)^2}$ và $B = \frac{x}{(5-x)^2}$;

d) $A = \frac{x(x-2)}{x-2}$ và $B = x$.

● Tìm hiểu đề bài

Đề bài cho các cặp phân thức A và B, đòi hỏi xét xem cặp nào bằng nhau, cặp nào không bằng nhau, vì sao?

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Cần dựa vào tính chất cơ bản của phân thức có dạng tổng quát là:

$$\frac{A}{B} = \frac{A.C}{B.C}; \frac{A}{B} = \frac{A:C}{B:C} \text{ với } B \neq 0, C \neq 0, \text{ và dựa vào quy tắc}$$

đổi dấu của một phân thức theo dạng tổng quát là: $\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}$ để xét xem cặp phân thức nào bằng nhau, cặp nào không bằng nhau.

● **Cách giải**

a) Hai phân thức A và B bằng nhau vì nếu biến đổi dấu tử và mẫu của phân thức A thì được phân thức B:

$$\frac{-(-x)}{-(x-2)} = \frac{x}{2-x}$$

b) Hai phân thức A và B bằng nhau vì nếu nhân tử và mẫu của phân thức A với $x-4$ ta được phân thức B:

$$\frac{-x(x-4)}{(x-4)(x-4)} = \frac{-x(x-4)}{(x-4)^2}$$

c) Hai phân thức A và B có mẫu bằng nhau nhưng tử của chúng đối nhau nên chúng không bằng nhau.

d) Hai phân thức A và B bằng nhau vì nếu chia tử và mẫu của phân thức A cho $x-2$ (với $x \neq 2$) ta được phân thức B:

$$\frac{x(x-2):(x-2)}{(x-2):(x-2)} = x \text{ (với } x \neq 2).$$

● **Khai thác bài toán**

- Quy tắc đổi dấu của một phân thức được suy ra từ việc áp dụng tính chất cơ bản của phân thức là nhân tử và mẫu với -1 :

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot (-1)}{B \cdot (-1)} = \frac{-A}{-B}$$

- Ở câu c dùng vôi kết luận hai phân thức A và B bằng nhau do áp dụng quy tắc đổi dấu phân thức.

Khi đổi dấu cơ số của lũy thừa bậc chẵn thì lũy thừa không đổi, chẳng hạn $(7 - 5)^2 = (5 - 7)^2$ vì cùng bằng 4. Các biểu thức $(x - 5)^2$ và $(5 - x)^2$ là bằng nhau chứ không phải đối nhau.

Bài 5. Giải thích rằng các đẳng thức sau là đúng:

$$a) \frac{-x - 2}{x - 1} = \frac{x^3 + 8}{(1 - x)(x^2 - 2x + 4)} ;$$

$$b) \frac{3 - x}{x - 4} = \frac{x^3 - 27}{(4 - x)(x^2 + 3x + 9)} .$$

• **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài yêu cầu giải thích rằng các đẳng thức đã cho là đúng, nghĩa là có thể biến đổi được vế trái thành vế phải hay ngược lại.

• **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, trước hết ta đổi dấu phân thức ở vế trái đẳng thức, sau đó vận dụng hằng đẳng thức $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$ để chọn được đa thức để nhân với tử và mẫu của phân thức đã được đổi dấu. Lưu ý lập luận đa thức trên khác 0.

- Với câu b, làm tương tự như câu a và dùng hằng đẳng thức $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$.

• **Cách giải**

a) Theo quy tắc đổi dấu một phân thức, ta có:

$$\frac{-x - 2}{x - 1} = \frac{-(-x - 2)}{-(x - 1)} = \frac{x + 2}{1 - x} \quad (1)$$

Biết rằng $x^2 - 2x + 4 = x^2 - 2x + 1 + 3 = (x - 1)^2 + 3 \neq 0$ với mọi x nên áp dụng tính chất cơ bản của phân thức ta được:

$$\frac{x + 2}{1 - x} = \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{(1 - x)(x^2 - 2x + 4)} = \frac{x^3 + 8}{(1 - x)(x^2 - 2x + 4)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{-x - 2}{x - 1} = \frac{x^3 + 8}{(1 - x)(x^2 - 2x + 4)}$$

b) Theo quy tắc đổi dấu một phân thức, ta có:

$$\frac{3 - x}{x - 4} = \frac{-(3 - x)}{-(x - 4)} = \frac{x - 3}{4 - x} \quad (1)$$

Biết rằng $x^2 + 3x + 9 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + (\frac{3}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2 + 9 = (x + \frac{3}{2})^2 + 6\frac{3}{4} \neq 0$ với mọi x , nên áp dụng tính chất cơ bản của phân thức ta được:

$$\frac{x - 3}{4 - x} = \frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}{(4 - x)(x^2 + 3x + 9)} = \frac{x^3 - 27}{(4 - x)(x^2 + 3x + 9)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{3 - x}{x - 4} = \frac{x^3 - 27}{(4 - x)(x^2 + 3x + 9)}$$

● Khai thác bài toán

Trong cách giải, ta chỉ trình bày cách biến đổi phân thức ở vế trái bằng phân thức ở vế phải. Ở phần này, ta biến đổi ngược lại.

$$a) \frac{x^3 + 8}{(1 - x)(x^2 - 2x + 4)} = \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{(1 - x)(x^2 - 2x + 4)} = \frac{x + 2}{1 - x} \quad (1)$$

vì đã thực hiện chia tử và mẫu cho phân thức $x^2 - 2x + 4 = x^2 - 2x + 1 + 3 = (x - 1)^2 + 3 \neq 0$.

Theo quy tắc đổi dấu một phân thức, ta có:

$$\frac{x + 2}{1 - x} = \frac{-(x + 2)}{-(1 - x)} = \frac{-x - 2}{x - 1} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{-x - 2}{x - 1} = \frac{x^3 + 8}{(1 - x)(x^2 - 2x + 4)}$$
$$\text{b) } \frac{x^3 - 27}{(4 - x)(x^2 + 3x + 9)} = \frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}{(4 - x)(x^2 + 3x + 9)} = \frac{x - 3}{4 - x} \quad (1),$$

vì đã thực hiện chia tử và mẫu cho đa thức

$$x^2 + 3x + 9 = x^2 + 2x \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 6 \cdot \frac{3}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 6 \cdot \frac{3}{4} \neq 0.$$

Theo quy tắc đổi dấu một phân thức, ta có:

$$\frac{x - 3}{4 - x} = \frac{-(x - 3)}{-(4 - x)} = \frac{3 - x}{x - 4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{3 - x}{x - 4} = \frac{x^3 - 27}{(4 - x)(x^2 + 3x + 9)}$$

Bài 6. Rút gọn các phân thức sau:

$$\text{a) } \frac{-3x + 3y}{x - y} \quad ;$$

$$\text{b) } \frac{x^2 + 3x - y^2 - 3y}{x^2 - y^2} \quad ;$$

$$\text{c) } \frac{25 - 10x + x^2}{xy - 5y} \quad ;$$

$$\text{d) } \frac{2xy - x^2 + z^2 - y^2}{x^2 + z^2 - y^2 + 2xz}$$

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài cho các phân thức, đòi hỏi phải rút gọn các phân thức đó tức là chia tử và mẫu cho cùng một đơn thức hoặc đa thức khác không nào đó.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Dựa vào tính chất cơ bản của phân thức mà ta có thể chia cả tử và mẫu cho cùng một đa thức khác 0. Muốn vậy trước hết phải

phân tích tử và mẫu thành nhân tử, sau đó chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung.

● Cách giải

$$a) \frac{-3x + 3y}{x - y} = \frac{-3(x - y)}{x - y} = -3 \text{ (với } x \neq y)$$

$$b) \frac{x^2 + 3x - y^2 - 3y}{x^2 - y^2} = \frac{(x^2 - y^2) + (3x - 3y)}{x^2 - y^2} =$$

$$= \frac{(x - y)(x + y) + 3(x - y)}{(x - y)(x + y)} = \frac{(x - y)(x + y + 3)}{(x - y)(x + y)} = \frac{x + y + 3}{x + y}$$

(với $x \neq y$)

$$c) \frac{25 - 10x + x^2}{xy - 5y} = \frac{x^2 - 10x + 25}{y(x - 5)} = \frac{(x - 5)^2}{y(x - 5)} = \frac{x - 5}{y}$$

(với $x \neq 5$; $y \neq 0$)

$$d) \frac{2xy - x^2 + z^2 - y^2}{x^2 + z^2 - y^2 + 2xz} = \frac{z^2 - (x^2 - 2xy + y^2)}{(x^2 + 2xz + z^2) - y^2} =$$

$$= \frac{z^2 - (x - y)^2}{(x + z)^2 - y^2} = \frac{(z + x - y)(z - x + y)}{(x + z + y)(x + z - y)} = \frac{z - x + y}{x + z + y}$$

● Khai thác bài toán

- Ở câu a nếu đặt 3 làm nhân tử chung ở tử thì để rút gọn phân thức, ta cần:

+ đổi dấu cả tử và mẫu:

$$\frac{-3x + 3y}{x - y} = \frac{3(y - x)}{x - y} = \frac{-3(y - x)}{y - x} = -3$$

+ hoặc đổi dấu hai nhân tử ở tử:

$$\frac{-3x + 3y}{x - y} = \frac{3(y - x)}{x - y} = \frac{-3(x - y)}{x - y} = -3.$$

- Cũng có thể phải rút gọn một phân thức mà ở tử có dấu giá trị tuyệt đối. Chẳng hạn:

$$\text{Rút gọn phân thức } \frac{3|x - 4|}{3x^2 - 3x - 36}$$

$$\text{Ta có } \frac{3|x - 4|}{3x^2 - 3x - 36} = \frac{3|x - 4|}{3(x^2 - x - 12)} = \frac{|x - 4|}{x^2 - x - 12} \text{ và mẫu}$$

$$x^2 - x - 12 = x^2 - 9 - x + 3 = (x - 3)(x + 3) - (x + 3) = (x + 3)(x - 4)$$

a) Nếu $x > 4$ tức là $x - 4 > 0$ thì $|x - 4| = x - 4$. Do đó:

$$\frac{|x - 4|}{x^2 - x - 12} = \frac{x - 4}{(x + 3)(x - 4)} = \frac{1}{x + 3}$$

b) Nếu $x < 4$ tức là $x - 4 < 0$ thì $|x - 4| = -(x - 4)$. Do đó:

$$\frac{|x - 4|}{x^2 - x - 12} = \frac{-(x - 4)}{(x + 3)(x - 4)} = -\frac{1}{x + 3}$$

Bài 7. Chứng minh các đẳng thức sau:

$$\text{a) } \frac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^2 + 14a - 8} = \frac{a + 1}{a - 2};$$

$$\text{b) } \frac{a^4 + a^3 + a + 1}{a^4 - a^3 + 2a^2 - a + 1} = \frac{(a + 1)^2}{a^2 + 1}$$

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài yêu cầu phải chứng minh các đẳng thức trên, muốn vậy phải biến đổi phân thức ở vế trái sao cho bằng phân thức ở vế phải.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, trước hết phải phân tích tử và mẫu thành nhân tử,

sau đó áp dụng tính chất cơ bản của phân thức.

Với câu b, làm tương tự câu a.

• Cách giải

a) Biến đổi vế trái:

$$\begin{aligned} \frac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^2 + 14a - 8} &= \frac{(a^3 - a) - (4a^2 - 4)}{(a^3 - 8) - (7a^2 - 14a)} = \\ &= \frac{a(a^2 - 1) - 4(a^2 - 1)}{(a - 2)(a^2 + 2a + 4) - 7a(a - 2)} = \frac{(a - 1)(a + 1)(a - 4)}{(a - 2)(a^2 - 5a + 4)} \\ &= \frac{(a - 1)(a + 1)(a - 4)}{(a - 2)[(a^2 - a) - (4a - 4)]} = \frac{(a - 1)(a + 1)(a - 4)}{(a - 2)(a - 1)(a - 4)} = \\ &= \frac{a + 1}{a - 2} \end{aligned}$$

Vế phải bằng vế trái, đẳng thức được chứng minh.

b) Biến đổi vế trái:

$$\begin{aligned} \frac{a^4 + a^3 + a + 1}{a^4 - a^3 + 2a^2 - a + 1} &= \frac{(a^4 + a^3) + (a + 1)}{(a^4 - a^3 + a^2) + (a^2 - a + 1)} = \\ &= \frac{a^3(a + 1) + (a + 1)}{a^2(a^2 - a + 1) + (a^2 - a + 1)} = \frac{(a + 1)(a^3 + 1)}{(a^2 - a + 1)(a^2 + 1)} \\ &= \frac{(a + 1)(a + 1)(a^2 - a + 1)}{(a^2 - a + 1)(a^2 + 1)} = \frac{(a + 1)^2}{a^2 + 1} \end{aligned}$$

Vế phải bằng vế trái, đẳng thức được chứng minh.

• Khai thác bài toán

- Trong quá trình biến đổi vế trái, ta đã coi phân thức ở vế trái luôn có mẫu khác 0 và ngầm hiểu rằng:

+ Câu a có TXĐ: $a \neq 1$; $a \neq 2$; $a \neq 4$.

+ Câu b có TXĐ: với mọi a vì

$a^2 + 1$ luôn khác 0 và

$$\begin{aligned} a^2 - a + 1 &= a^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \\ &= \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \text{ cũng luôn khác } 0. \end{aligned}$$

- Vấn đề đặt ra là: có thể biến đổi sao cho vế phải bằng vế trái được không? Hoàn toàn được.

Thường là viết lại chẳng hạn với câu b, từ

$$\frac{(a+1)^2}{a^2+1} = \dots = \frac{a^4 + a^3 + a + 1}{a^4 - a^3 + 2a^2 - a + 1},$$

tức là viết theo thứ tự ngược lại với cách giải bài này. Nhưng không ai lại làm như vậy, vì phải làm từ trái sang phải rồi viết lại từ phải sang trái.

Bài 8. Tính giá trị của các phân thức sau:

a) $A = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^3 - x}$ với $x = -2,75$;

b) $B = \frac{x^3 - y^3 - 3xy(x - y)}{x^2 + y^2 - 2xy}$ với $x = -6,75$; $y = -3,25$.

● **Tim hiểu đề bài**

Đề bài cho phân thức và giá trị của biến, đòi hỏi phải tính giá trị của phân thức bằng cách ngắn gọn, hợp lí nhất.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, trước hết cần phân tích tử và mẫu thành nhân tử, rồi rút gọn, sau cùng là tính giá trị của phân thức theo giá trị của biến đã cho.

Với câu b, làm tương tự câu a.

• Cách giải

a) Rút gọn

$$\begin{aligned} A &= \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^3 - x} = \frac{x^3 - x^2 - x^2 + x}{x(x^2 - 1)} = \frac{x^2(x - 1) - x(x - 1)}{x(x^2 - 1)} \\ &= \frac{(x - 1)(x^2 - x)}{x(x - 1)(x + 1)} = \frac{(x - 1)x(x - 1)}{x(x - 1)(x + 1)} = \frac{x - 1}{x + 1} \end{aligned}$$

Tính giá trị :

$$A = \frac{x - 1}{x + 1} = \frac{-2,75 - 1}{-2,75 + 1} = \frac{-3,75}{-1,75} = \frac{375}{175} = \frac{15}{7} = 2\frac{1}{7}$$

b) Rút gọn

$$\begin{aligned} B &= \frac{x^3 - y^3 - 3xy(x - y)}{x^2 + y^2 - 2xy} = \frac{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}{x^2 - 2xy + y^2} = \frac{(x - y)^3}{(x - y)^2} = \\ &= x - y. \end{aligned}$$

Tính giá trị:

$$B = x - y = -6,75 - (-3,25) = -6,75 + 3,25 = -3,5.$$

• Khai thác bài toán

Ở loại bài toán này, đã cho giá trị của biến để tính giá trị của phân thức, nên mẫu của phân thức đã cho là khác không nên không cần tìm TXĐ của phân thức nữa.

Xét thêm bài toán rút gọn, chẳng hạn:

$$\text{a) Rút gọn phân thức } A = \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 8x + 15}$$

Ta có thể làm như sau:

$$\begin{aligned} A &= \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 8x + 15} = \frac{(x - 3)^2}{x^2 - 3x - 5x + 15} = \\ &= \frac{(x - 3)^2}{x(x - 3) - 5(x - 3)} = \frac{(x - 3)^2}{(x - 3)(x - 5)} \end{aligned}$$

TXĐ: $x \neq 3; x \neq 5$

Vậy $A = \frac{x - 3}{x - 5}$.

b) Rút gọn phân thức $B = \frac{|x| - 3}{x^2 - 9}$.

Trước hết, tìm TXĐ: $x \neq \pm 3$

Nếu $x \geq 0$ thì $|x| - 3 = x - 3$, do đó $B = \frac{x - 3}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{1}{x + 3}$

Nếu $x < 0$ thì $|x| - 3 = -(x + 3)$, do đó $B = \frac{-(x + 3)}{(x - 3)(x + 3)} =$
 $= \frac{-1}{x - 3} = \frac{1}{3 - x}$.

Như vậy, bài toán tính giá trị phân thức tuy cũng phải rút gọn nhưng không cần xét TXĐ, còn với bài toán rút gọn phân thức thường phải tìm TXĐ của phân thức, điều kiện cần có của biến.

Bài 9. Giải các phương trình:

a) $2ax + 1 = 4a^2 + x \quad (a \neq \frac{1}{2});$

b) $ax - b^2 + 2ab = a^2 + bx \quad (a \neq b).$

● **Tim hiểu đề bài**

Các phương trình đã cho có ẩn là x , còn a và b là các chữ. Giải các phương trình này chính là tìm giá trị của x phụ thuộc vào a và b .

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, dựa vào mối quan hệ giữa phép cộng và phép trừ để đưa x từ vế phải sang vế trái, đưa 1 từ vế trái sang vế phải. Sau đó biến đa thức thành tích rồi tìm x .

Với câu b, làm tương tự câu a.

● Cách giải

$$a) 2ax + 1 = 4a^2 + x$$

$$2ax - x = 4a^2 - 1$$

$$(2a - 1)x = (2a - 1)(2a + 1).$$

Vì $a \neq \frac{1}{2}$ nên $2a - 1 \neq 0$, do đó có:

$$x = \frac{(2a - 1)(2a + 1)}{2a - 1} = 2a + 1.$$

$$b) ax - b^2 + 2ab = a^2 + bx$$

$$ax - bx = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)x = (a - b)^2$$

Vì $a \neq b$ nên $a - b \neq 0$, do đó có:

$$x = \frac{(a - b)^2}{a - b} = a - b.$$

● Khai thác bài toán

- Sau này khi học về phương trình, việc đưa x từ vế phải sang vế trái, cũng như đưa 1 từ vế trái sang vế phải ở câu a, được gọi là chuyển vế số hạng từ vế này sang vế kia nhưng phải đổi dấu số hạng đó. Ở đây do chưa học nên dựa vào mối quan hệ giữa hai phép tính cộng và trừ như đã nói ở phần hướng dẫn cách tìm lời giải.

- Nên thử lại nghiệm x đã tìm được khi làm toán giải phương trình. Dưới đây, trình bày cách thử lại với câu a:

$$2ax + 1 = 2a.(2a + 1) + 1 = 4a^2 + 2a + 1$$

$$4a^2 + x = 4a^2 + 2a + 1$$

Hai vế cùng bằng $4a^2 + 2a + 1$, chứng tỏ rằng $x = 2a + 1$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Bài 10. Quy đồng mẫu các phân thức:

$$a) \frac{3x}{9y^2z^2}, \frac{-3y}{15xz}, \frac{14z}{63x^2y^5};$$

$$b) \frac{30}{4x^3 - x}, \frac{8}{x - 2x^2}, \frac{12}{2x^2 + x};$$

$$c) \frac{x}{x^3 - 27}, \frac{2x}{x^2 - 6x + 9}, \frac{1}{x^2 + 3x + 9}.$$

● **Tim hiểu đề bài**

Đề bài cho các phân thức không cùng mẫu, đòi hỏi phải quy đồng mẫu các phân thức đó.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Để quy đồng mẫu ta phải:

- Tìm mẫu chung
- Nhân tử và mẫu của mỗi phân thức với nhân tử phụ của nó (nhân tử phụ là thương của mẫu chung với từng mẫu).

● **Cách giải**

$$a) \text{BCNN}(9; 15; 63) = 315$$

$$\text{Mẫu chung: } 315x^2y^5z^2$$

$$\text{Nhân tử phụ của 3 mẫu: } 35x^2y^3, 21xy^5z, 5z^2.$$

$$\text{Ta có: } \frac{3x}{9y^2z^2} = \frac{3x \cdot 35x^2y^3}{9y^2z^2 \cdot 35x^2y^3} = \frac{105x^3y^3}{315x^2y^5z^2}$$

$$\frac{-3y}{15xz} = \frac{-3y \cdot 21xy^5z}{15xz \cdot 21xy^5z} = \frac{-63xy^6z}{315x^2y^5z^2}$$

$$\frac{14z}{63x^2y^5} = \frac{14z \cdot 5z^2}{63x^2y^5 \cdot 5z^2} = \frac{70z^3}{315x^2y^5z^2}.$$

b) Phân tích các mẫu thành nhân tử:

$$4x^3 - x = x(4x^2 - 1) = x(2x + 1)(2x - 1)$$

$$2x^2 - x = x(2x - 1)$$

$$2x^2 + x = x(2x + 1)$$

Mẫu chung: $x(2x + 1)(2x - 1)$

Nhân tử phụ của 3 mẫu: 1; $2x + 1$; $2x - 1$

Ta có:

$$\frac{30}{4x^3 - x} = \frac{30}{x(2x + 1)(2x - 1)}$$

$$\frac{8}{x - 2x^2} = \frac{-8}{2x^2 - x} = \frac{-8}{x(2x - 1)} = \frac{-8(2x + 1)}{x(2x - 1)(2x + 1)}$$

$$\frac{12}{2x^2 + x} = \frac{12}{x(2x + 1)} = \frac{12 \cdot (2x - 1)}{x(2x + 1)(2x - 1)}$$

c) Phân tích các mẫu thành nhân tử:

$$x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$$

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

Mẫu chung: $(x - 3)^2(x^2 + 3x + 9)$

Nhân tử phụ của ba mẫu: $x - 3$; $x^2 + 3x + 9$; $(x - 3)^2$

Ta có:

$$\frac{x}{x^3 - 27} = \frac{x}{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)} = \frac{x(x - 3)}{(x - 3)^2(x^2 + 3x + 9)}$$

$$\frac{2x}{x^2 - 6x + 9} = \frac{2x}{(x - 3)^2} = \frac{2x(x^2 + 3x + 9)}{(x - 3)^2(x^2 + 3x + 9)}$$

$$\frac{1}{x^2 + 3x + 9} = \frac{(x - 3)^2}{(x - 3)^2(x^2 + 3x + 9)}$$

● Khai thác bài toán

Trong việc quy đồng mẫu các phân thức, cần lưu ý đến việc đổi dấu phân thức, chẳng hạn:

- Trong câu b của bài toán trên ta thấy:

Mẫu của phân thức thứ nhất là $x(2x + 1)(2x - 1)$

Mẫu của phân thức thứ ba là $x(2x + 1)$

Do đó phải đổi dấu phân thức thứ hai thành $\frac{-8}{2x^2-x}$, để có mẫu

là $x(2x - 1)$.

Từ đó có mẫu chung là $x(2x + 1)(2x - 1)$

- Bạn đọc hãy làm tương tự đối với ví dụ sau:

Quy đồng mẫu các phân thức: $\frac{x-1}{2x+2}$, $\frac{x+1}{2x-2}$, $\frac{1}{1-x^2}$.

BỐN PHÉP TÍNH VỀ PHÂN THỨC

Bài 11. Cộng các phân thức sau:

a) $\frac{1}{y^3 - x^2y} + \frac{1}{x^3 - xy^2}$;

b) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$;

c) $\frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{2}{(2-x)(3-x)} + \frac{3}{(1-x)(x-3)}$.

● Tìm hiểu đề bài

Đề bài cho các phân thức không cùng mẫu, yêu cầu phải làm tính cộng các phân thức, muốn vậy phải quy đồng các mẫu rồi làm phép cộng giống như cộng các phân thức có cùng mẫu.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, trước hết phải phân tích mẫu thành nhân tử, rồi tìm mẫu chung; sau đó tìm nhân tử phụ của mỗi phân thức, nhân tử và mẫu của phân thức với nhân tử phụ tương ứng rồi làm tính cộng.

Với câu b, làm tương tự câu a.

Với câu c, các mẫu đã cho ở dạng một tích cần lựa chọn tích của 3 nhân tử nào đó làm mẫu chung và đổi dấu các phân thức có thừa số ở mẫu phải đổi dấu.

• Cách giải

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{1}{y^3 - x^2y} + \frac{1}{x^3 - xy^2} &= \frac{1}{y(y^2 - x^2)} + \frac{1}{x(x^2 - y^2)} = \\ &= \frac{-1}{y(x^2 - y^2)} + \frac{1}{x(x^2 - y^2)} = \frac{-x + y}{xy(x^2 - y^2)} = \frac{-(x - y)}{xy(x - y)(x + y)} \\ &= \frac{-1}{xy(x + y)} \end{aligned}$$

TXĐ: $x \neq 0; y \neq 0; x \neq \pm y$

$$\text{b) } \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$$

Trước hết, phân tích mẫu thành nhân tử:

$$x^2 - 3x + 2 = x^2 - x - 2x + 2 = x(x - 1) - 2(x - 1) = (x - 1)(x - 2)$$

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2x - 3x + 6 = x(x - 2) - 3(x - 2) = (x - 2)(x - 3)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)(x - 2)} + \frac{1}{(x - 2)(x - 3)} \\ &= \frac{(x - 2)(x - 3) + (x - 3) + (x - 1)}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x^2 - 2x - 3x + 6 + x - 3 + x - 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x-1)(x-2)(x-3)} \\
 &= \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3}
 \end{aligned}$$

TXĐ: $x \neq 1$; $x \neq 2$; $x \neq 3$.

$$\begin{aligned}
 \text{c) } & \frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{2}{(2-x)(3-x)} + \frac{3}{(1-x)(x-3)} \\
 &= \frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{2}{(x-2)(x-3)} + \frac{-3}{(x-1)(x-3)} \\
 &= \frac{(x-3) + 2(x-1) - 3(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} \\
 &= \frac{x-3 + 2x-2 - 3x+6}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}
 \end{aligned}$$

● Khai thác bài toán

Sau khi cộng các phân thức, ở câu a được phân thức $\frac{-(x-y)}{xy(x-y)(x+y)}$, ở câu b được phân thức $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$, cần lưu ý rút gọn phân thức theo TXĐ của mỗi phân thức đó và ta có kết quả $\frac{-1}{xy(x+y)}$ và $\frac{1}{x-3}$.

Hãy theo dõi thêm ví dụ sau: cộng các phân thức

$$\begin{aligned}
 & \frac{x^2}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} + \frac{2}{2-x} \\
 &= \frac{x^2}{(x+2)(x-2)} + \frac{1}{x+2} - \frac{2}{x-2} \\
 &= \frac{x^2 + (x-2) - 2(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2 + x - 2 - 2x - 4}{(x+2)(x-2)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x^2 - 4 - x - 2}{(x + 2)(x - 2)} = \frac{(x^2 - 4) - (x + 2)}{(x + 2)(x - 2)} = \frac{(x + 2)(x - 2) - (x + 2)}{(x + 2)(x - 2)} \\
 &= \frac{(x + 2)(x - 2 - 1)}{(x + 2)(x - 2)} = \frac{x - 3}{x - 2}
 \end{aligned}$$

TXĐ: $x \neq \pm 2$.

Bài 12. Trừ các phân thức sau:

a) $\frac{x^2 - 1}{3x^2 - 6x + 3} - \frac{x + 3}{3x + 3}$;

b) $\frac{1}{2x - 2y} - \frac{1}{2x + 2y} + \frac{1}{y^2 - x^2}$;

c) $\frac{3}{(x - 1)(x - 2)} - \frac{2}{(x - 2)(x - 3)} - \frac{1}{(x - 3)(x - 1)}$.

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài cho các phân thức không cùng mẫu, để trừ các phân thức phải quy đồng mẫu.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a và b, cần phân tích mẫu thành nhân tử để quy đồng mẫu và làm phép trừ.

Với câu c mẫu là tích của ba nhân tử mà ta cần xác định từ các mẫu đã cho.

● **Cách giải**

a) $\frac{x^2 - 1}{3x^2 - 6x + 3} - \frac{x + 3}{3x + 3} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{3(x^2 - 2x + 1)} - \frac{x + 3}{3(x + 1)}$
 $= \frac{(x - 1)(x + 1)}{3(x - 1)^2} - \frac{x + 3}{3(x + 1)}$ TXĐ: $x \neq \pm 1$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x+1}{3(x-1)} - \frac{x+3}{3(x+1)} = \frac{(x+1)^2 - (x+3)(x-1)}{3(x-1)(x+1)} = \\
&= \frac{x^2 + 2x + 1 - (x^2 - x + 3x - 3)}{3(x-1)(x+1)} = \\
&= \frac{x^2 + 2x + 1 - x^2 + x - 3x + 3}{3(x^2 - 1)} = \frac{4}{3(x^2 - 1)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } &\frac{1}{2x-2y} - \frac{1}{2x+2y} + \frac{1}{y^2-x^2} \\
&= \frac{1}{2(x-y)} - \frac{1}{2(x+y)} - \frac{1}{x^2-y^2} \\
&= \frac{(x+y) - (x-y) - 2}{2(x-y)(x+y)} = \frac{x+y-x+y-2}{2(x^2-y^2)} = \frac{2(y-1)}{2(x^2-y^2)} \\
&= \frac{y-1}{x^2-y^2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c) } &\frac{3}{(x-1)(x-2)} - \frac{2}{(x-2)(x-3)} - \frac{1}{(x-3)(x-1)} \\
&= \frac{3(x-3) - 2(x-1) - (x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} \\
&= \frac{3x-9-2x+2-x+2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{-5}{(x-1)(x-2)(x-3)}.
\end{aligned}$$

● Khai thác bài toán

Cần lưu ý rút gọn phân thức trước khi thực hiện phép tính chẳng hạn ở câu a bài toán trên, ta có $\frac{(x-1)(x+1)}{3(x-1)^2} = \frac{x+1}{3(x-1)}$. Nhờ rút gọn phân thức này nên mẫu chung chỉ là $3(x-1)(x+1)$, nếu không rút gọn thì mẫu chung sẽ là $3(x-1)^2(x+1)$, khi đó tính toán sẽ phức tạp hơn có khi còn gây ra nhầm lẫn.

Ta làm thêm bài sau đây, để thấy nhờ rút gọn phân thức và

nhóm các phân thức mà không phải quy đồng các mẫu. Ví dụ phải thực hiện phép tính sau:

$$\begin{aligned} & \frac{x^3}{x-1} - \frac{x^2}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \\ &= \left(\frac{x^3}{x-1} - \frac{1}{x-1} \right) - \left(\frac{x^2}{x+1} - \frac{1}{x+1} \right) \\ &= \frac{x^3-1}{x-1} - \frac{x^2-1}{x+1} \quad \text{TXĐ: } x \neq \pm 1 \\ &= \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} - \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} \\ &= x^2 + x + 1 - (x-1) = x^2 + 2. \end{aligned}$$

Bài 13

a) Chứng minh đẳng thức:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

b) Áp dụng kết quả trên để tính tổng:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{x^2+3x+2} + \frac{1}{x^2+5x+6} + \frac{1}{x+3}; \\ B &= \frac{2}{x(x+2)} + \frac{2}{(x+2)(x+4)} + \frac{2}{(x+4)(x+6)} + \frac{1}{x+6}. \end{aligned}$$

• Tìm hiểu đề bài

Đề bài yêu cầu chứng minh đẳng thức đã cho, sau đó áp dụng kết quả để tính tổng các phân thức A và B đã cho.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, ta biến đổi vế phải, chính là làm phép trừ hai phân thức không cùng mẫu, để có kết quả bằng vế trái.