đường ngắn nhất mà vẫn dò khắp được cả miền tam giác?

Bài 111.

Một con ếch nhảy từ đỉnh A đến đỉnh đối tâm E của một hình bát giác đều. Tại mỗi đỉnh của bát giác trừ đỉnh E, con ếch có thể nhảy một bước tới một trong hai đỉnh kề. Đến E thì ếch dừng lại và ở luôn tại đó. Gọi a_n là số các đường đi phân biệt của con ếch đi từ A đến E bằng đúng n bước nhảy. Chứng minh rằng:

$$a_{2n-1} = 0,\ a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}[(2+\sqrt{2})^{n-1} - (2-\sqrt{2})^{n-1}].$$

Bài 112.

Xét hình vuông S có cạnh dài 100 (đơn vị). Gọi L là một đường gấp khúc nằm trong S không tự cắt chính nó, L bao gồm các đoạn thẳng A_0A_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}A_n$, với A_0 không trùng với A_n. Giả sử với mọi điểm P nằm trên biên (tức là các cạnh) của S đều có một điểm trên L sao cho khoảng cách từ điểm này đến P không lớn hơn 1/2. Chứng minh rằng tồn tại 2 điểm X và Y trên L sao cho khoảng cách giữa X và Y không lớn hơn 1, và độ dài phần đường gấp khúc của L nằm giữa X và Y không bé hơn 198.

Bài 113.

Tại mỗi đỉnh của một ngũ giác đều, ta đặt tương ứng một số nguyên sao cho tổng của cả 5 số là một số dương. Nếu 3 đỉnh liên tiếp nhau được đặt tương ứng 3 số x, y, z và $y < 0$ thì ta thực hiện một toán tử như sau: thay các số x, y, z đó bằng các số tương ứng $x+y, -y, z+y$. Toán tử này được thực hiện lặp lại khi mà trong năm số ở đỉnh vẫn còn ít nhất một số âm.

Hãy xác định xem việc thực hiện toán tử đó có dừng sau một số hữu hạn bước hay không ?

Bài 114.

Cho n là một số nguyên lớn hơn hoặc bằng 3. Chứng minh rằng tồn tại một tập hợp gồm n điểm trong mặt phẳng sao cho khoảng cách giữa hai điểm tuỳ ý trong tập hợp này là một số vô tỉ và bất kì 3 điểm nào trong chúng cũng xác định một tam giác không suy biến (*non-degenerate*) có diện tích hữu tỉ.

Bài 115.

Cho n là số nguyên dương và $A_1, A_2, ..., A_{2n+1}$ là các tập hợp con của tập hợp B.

Giả sử rằng:

i) Mỗi tập hợp A_i ($i = 1, 2,..., 2n + 1$) chứa đúng 2n phần tử.

ii) Với mỗi cặp tập hợp khác nhau A_i và A_j , $A_i \cap A_j$ chỉ chứa đúng một phần tử.

iii) Mỗi phần tử của B thuộc ít nhất hai tập hợp A_i ($i = 1, 2,..., 2n + 1$).

Với những giá trị nào của n thì ta có thể gán cho mỗi phần tử của B giá trị 0 hoặc 1 sao cho trong mỗi tập hợp A_i có đúng n phần tử được gán giá trị 0?

Bài 116.

Gọi S là tập hợp các điểm nằm bên trong tam giác. Gọi T là tập con của S, mà T bằng tập S trừ đi một điểm.

Chứng minh rằng có thể tìm được các điểm P_i, Q_i sao cho P_i và Q_i là các điểm khác nhau và hợp tất cả các đoạn thẳng P_iQ_i (tính luôn hai đầu mút đoạn thẳng) thì bằng T, và các đoạn thẳng đó rời nhau từng đôi một.

Bài 117.

Tìm số nguyên n lớn nhất sao cho tồn tại $n + 4$ điểm $A, B, C, D, X_1, ... X_n$, với $AB \neq CD$, nằm trong cùng một mặt phẳng và thoả mãn điều kiện sau: với mọi i = 1, 2, ..., n, hai tam giác ABX_i và CDX_i bằng nhau.

Bài 118.

Tìm độ dài bé nhất của cạnh một tam giác đều, sao cho ta có thể đặt vào bên trong tam giác này ba đĩa tròn có bán kính lần lượt 2, 3, 4 mà ba đĩa tròn này từng đôi một không có phần nào chồng lên nhau (tức là phần trong của các đĩa không có điểm chung).

Bài 119.

Cho tam giác ABC không tù (tức là vuông hoặc nhọn), về phía ngoài của tam giác này, ta lần lượt dựng trên ba cạnh một hình vuông, một đa giác đều n cạnh (n-giác đều) và một m-giác đều (n, m > 5), sao cho tâm của ba hình vừa dựng tạo thành ba đỉnh của một tam giác đều.

Chứng minh rằng m = n = 6 và hãy xác định các góc của tam giác ABC.

Bài 120.

Cho tam giác ABC và số nguyên dương n > 1. Gọi S là tập gồm n – 1 đường thẳng cùng song song AB và chia tam giác ABC thành n phần có diện tích bằng nhau; gọi S' là tập gồm n – 1 đường thẳng cùng song song AB và chia tam giác ABC thành n phần có chu vi bằng nhau. Chứng minh rằng S và S' có giao bằng rỗng.

Bài 121.

Cho hình hộp chữ nhật có độ dài ba kích thước là các số tự nhiên. Các mặt của hình hộp được sơn màu xanh. Chia hình hộp này thành các khối lập phương đơn vị bằng các mặt phẳng song song với các mặt của hình hộp. Tìm các kích thước của hình hộp, biết rằng số các khối lập phương đơn vị không có mặt nào màu xanh bằng một phần ba tổng số các khối lập phương đơn vị.

Bài 122.

Tìm tất cả các tập hợp S gồm bốn điểm trong mặt phẳng thỏa mãn điều kiện: với bất kì hai đường tròn (k_1), (k_2) nhận hai điểm thuộc S làm đầu mút của đường kính, luôn tồn tại một điểm A sao cho $A \in S \cap (k_1) \cap (k_2)$.

Bài 123.

Trong hệ tọa độ trực chuẩn xOy, một tập hợp gồm 2000 điểm $M_i(x_i, y_i)$ được gọi là "*tốt*" nếu $0 \le x_i \le 83$, $0 \le y_i \le 1$, $i = 1, 2, ..., 2000$ và $x_i \ne x_j$ khi $i \ne j$. Tìm tất cả các số tự nhiên n thỏa mãn các tính chất sau:

a) Với mọi tập "tốt", ta đều có thể tìm được n điểm của tập hợp này sao cho n điểm đó nằm trong một hình vuông có cạnh bằng 1.

b) Tồn tại một tập hợp "tốt" sao cho trong tập hợp này, bất cứ n + 1 điểm nào cũng không thể nằm trong một hình vuông có cạnh bằng 1.

(Điểm nằm trên cạnh hình vuông cũng được xem như nằm bên trong hình vuông).

Bài 124.

Cho trước số nguyên $n \geq 2$.Tại mỗi điểm (i, j) có thành phần tọa độ nguyên, ta viết số i + j modulo n (số dư của i + j khi chia cho n). Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) sao cho hình chữ nhật gồm bốn đỉnh (0, 0), (a, 0), (a, b), (0, b) có các tính chất sau:

1) Các số dư 0, 1, ..., n – 1 được viết tại các điểm bên trong hình chữ nhật đúng bằng số lần xuất hiện của các điểm đó (điều này có nghĩa, điểm (i, j) có i + j = 0 (mod n) xuất hiện 0 lần ở bên trong hình chữ nhật, điểm (i, j) có i + j = 1 (mod n) xuất hiện 1 lần, v. v...) ;

2) Các số dư 0, 1, ..., n – 1 được viết tại các điểm trên biên (tức là trên chu vi) của hình chữ nhật đúng bằng số lần xuất hiện của các điểm đó.

Bài 125.

Cho số nguyên $n \geq 3$ và số nguyên tố p, với

$$p \geq 2n - 3.$$

Gọi Ω là tập gồm n điểm trong mặt phẳng sao cho không có bất cứ ba điểm nào thẳng hàng. Gọi $f : \Omega \to \{0, 1, \dots, p-1\}$ là hàm thoả mãn hai điều kiện sau:

(i) Tồn tại duy nhất một điểm của Ω có ảnh bằng 0 ;

(ii) Nếu A, B, C là ba điểm phân biệt thuộc Ω và (k) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì

$$\sum_{P \in \Omega \cap (k)} f(P) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Bài 126.

Cho số nguyên dương $n \geq 4$ và gọi M là tập gồm n điểm trong mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng và n điểm đó không cùng nằm trên một đường tròn. Tìm tất cả các hàm $f : M \to R$ sao cho với mọi đường tròn C chứa ít nhất ba điểm của M, ta có

$$\sum_{P \in M \cap C} f(P) = 0. \qquad (*)$$

Bài 127.

Gọi $\mathcal{P}$ là tập hợp các điểm trong mặt phẳng và $\mathcal{D}$ là tập tất cả các đường thẳng trong mặt phẳng đó. Hãy xét xem có tồn tại hay không một song ánh

$$f : \mathcal{P} \to \mathcal{D}$$

sao cho với mọi ba điểm thẳng hàng A, B, C, ba đường thẳng f (A), f (B), f (C) song song hoặc đồng quy.

Bài 128.

Bạn có thể tìm được hay không vô số điểm trong mặt phẳng sao cho khoảng cách giữa hai điểm bất kì là một số hữu tỉ và không có ba điểm nào trong chúng thẳng hàng ?

Bài 129.

Cho 997 điểm khác nhau trên một mặt phẳng. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 1991 trung điểm khác nhau từ các cặp điểm này. Khi nào thì có đúng 1991 trung điểm khác nhau ?

Bài 130.

Cho đa giác lồi $P_1P_2...P_n$ trong mặt phẳng thoả mãn điều kiện : với mọi cặp đỉnh P_i , P_j, tồn tại một đỉnh V của đa giác sao cho

$$\widehat{P_i V P_j} = \frac{\pi}{3}.$$

Chứng minh rằng n = 3.

Bài 131.

Hãy xác định (và chứng minh) xem có tồn tại hay không một hình cầu có phần trong S, một đường tròn có phần trong C, và một hàm $f: S \to C$ sao cho khoảng cách giữa hai điểm f(A) và f(B) lớn hơn hoặc bằng AB với mọi điểm A, B thuộc S.

Bài 132.

Trong mặt phẳng tọa độ, ta nói một *điểm nguyên* là điểm mà các thành phần tọa độ đều là những số nguyên. Một điểm nguyên được gọi là *thu gọn được* nếu trên đoạn thẳng nối nó và gốc tọa độ còn có thêm một điểm nguyên nữa (khác nó và khác điểm gốc tọa độ). Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, tồn tại một hình vuông có cạnh bằng n sao cho các điểm nguyên bên trong hình vuông này đều là các điểm thu gọn được.

Bài 133.

Hãy xác định tất cả các cặp các số nguyên dương (h, s) có tính chất sau: Nếu kẻ h đường thẳng nằm ngang và s đường thẳng khác thoả mãn các tính chất:

(i) không có đường nào nằm ngang,

(ii) không có 2 đường thẳng nào trong chúng song song nhau,

(iii) không có bất cứ 3 đường nào trong $(h+s)$ đường thẳng trên thẳng hàng, thì số các miền tạo thành bởi $(h+s)$ đường thẳng này là 1992.

Bài 134.

Gọi C là một đa giác gồm 1993 đỉnh là các điểm trong mặt phẳng có toạ độ nguyên (*nghĩa là toạ độ với hai thành phần đều là hai số nguyên*), không nhất thiết là đa giác lồi. Mỗi cạnh của C không chứa điểm có toạ độ nguyên nào cả ngoại trừ hai điểm, đó là hai đỉnh của đa giác.

Chứng minh rằng có ít nhất một cạnh chứa một điểm có toạ độ (x, y) với $2x$ và $2y$ đều là những số nguyên lẻ.

Bài 135.

Tam giác $A_1A_2A_3$ vuông tại A_3. Ta định nghĩa một dãy các điểm theo quá trình lặp lại như sau, ở đây n là số nguyên dương. Với $n \geq 3$, ta gọi A_{n+1} là chân đường vuông góc hạ từ A_n xuống cạnh $A_{n-1}A_{n-2}$.

Chứng minh rằng nếu qúa trình này được tiếp tục vô hạn thì sẽ tồn tại duy nhất một điểm P nằm bên trong tất cả các tam giác $A_{n-1}A_{n-2}A_n$ với mọi $n \geq 3$.

Bài 136.

Gọi S là tập hợp gồm $2n+1$ điểm trong mặt phẳng sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng và cũng không có 4 điểm nào cùng nằm trên một đường tròn. Ta nói một đường tròn là *tốt* nếu đường tròn này chứa 3 điểm của S, $n-1$ điểm của S thì nằm bên trong đường tròn, còn $n-1$ điểm còn lại của S thì nằm bên ngoài đường tròn đó. Chứng minh rằng số các đường tròn *tốt* có cùng tính chẵn lẻ với số n.

Bài 137.

Trong mặt phẳng với hệ trục vuông góc, một điểm được gọi là *điểm hỗn hợp* (mixed point) nếu một trong 2 thành phần toạ độ của điểm đó là số hữu tỉ, thành phần kia là số vô tỉ. Tìm tất cả các đa thức có hệ số thực sao cho đồ thị của mỗi đa thức đó không chứa bất kì điểm hỗn hợp nào cả.

3 MỘT SỐ BÀI TOÁN TÔ MÀU

Bài 138.

Trong mặt phẳng, mỗi điểm được tô bằng một trong hai màu đen hoặc trắng. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng 2 và một góc nhọn bằng 60^0, sao cho cả ba đỉnh của tam giác này có cùng màu.

Bài 139.

Ta nối mỗi đỉnh của một thập giác đều với một điểm nằm bên trong nó để tạo thành 10 tam giác. Tô màu các tam giác này bằng hai màu đỏ và xanh đan nhau. Chứng minh rằng tổng diện tích các tam giác màu xanh bằng tổng diện tích các tam giác màu đỏ.

Bài 140.

Giả sử một đội dự thi Olympic Toán học Quốc tế có 6 thành viên. Chứng minh rằng trong số 6 thành viên này luôn tồn tại 3 thành viên mà hoặc là cả ba biết lẫn nhau hoặc không ai biết ai cả.

Bài 141.

Cho các số nguyên dương n, r và một tập A gồm các điểm nguyên trong mặt phẳng, sao cho mọi đĩa mở bán kính r đều có chứa một điểm của A. Chứng minh rằng với mọi cách tô màu các điểm của A bằng n màu, đều tồn tại 4 điểm cùng màu mà 4 điểm này là 4 đỉnh của một hình chữ nhật.

Chú ý:

a) Một điểm nguyên là một điểm có tọa độ (x, y), với x và y là các số nguyên.

b) Ở đây, ta hiểu *đĩa mở* bán kính r chính là tập hợp

$$\left\{(x, y) \in R^2 : \sqrt{x^2 + y^2} < r\right\}.$$

Nếu thay dấu < bằng dấu ≤, ta có *đĩa đóng*. Các bạn có thể hình dung khái niệm này trong không gian nhiều chiều hơn.

Bài 142.

Gọi X là một tập hữu hạn nào đó, xét 6 tập con của X, mỗi tập gồm 3 phần tử. Chứng minh rằng có thể tô bằng 2 màu cho các phần tử của X sao cho không một tập con nào trong 6 tập con nói trên có cả ba phần tử cùng màu.

Bài 143.

Cho tam giác ABC. Nếu ta sơn các điểm của mặt phẳng bằng hai màu xanh và đỏ, hãy chứng minh rằng hoặc là tồn tại hai điểm màu đỏ có khoảng cách bằng một đơn vị, hoặc là tồn tại ba điểm màu xanh tạo thành một tam giác bằng tam giác ABC.

Bài 144.

Gọi n, k, p là các số nguyên dương sao cho $k \geq 2$ và $k(p + 1) \leq n$. Hãy xác định số các cách tô thành hai màu xanh đỏ cho n điểm được đánh dấu trên một đường tròn sao cho: có đúng k điểm được tô màu xanh, và bất kì đoạn cung nào có hai điểm đầu mút màu xanh nhưng không chứa điểm màu xanh nào khác bên trong cũng phải chứa ít nhất k điểm màu đỏ.

Bài 145.

Một kim tự tháp có đáy là một đa giác lồi 9 cạnh. Mỗi đường chéo của đáy và mỗi một trong các cạnh của các mặt bên được tô bằng màu đen hoặc trắng. Cả hai màu đều được sử dụng. (Các cạnh của mặt đáy không được tô màu.) Chứng minh rằng có 3 đoạn cùng màu tạo thành một tam giác.

Bài 146.

Phát biểu sau đây đúng hay sai?

"Trong không gian, cho n điểm màu đỏ, khi đó, ta luôn có thể đặt vào không gian đó $3n$ điểm màu xanh để cho bên trong mỗi tứ diện tạo thành bởi các điểm màu đỏ có ít nhất một điểm màu xanh."

Bài 147.

Trong hệ trục trực chuẩn của mặt phẳng, xét tất cả những điểm có toạ độ nguyên (x, y) thỏa mãn

$$1 \leq x \leq 19, 1 \leq y \leq 4.$$

Mỗi điểm được đánh dấu bằng một trong ba màu xanh lục, đỏ và xanh nước biển. Chứng minh rằng tồn tại một hình chữ nhật có hai cạnh song song với hai trục toạ độ sao cho bốn đỉnh của nó có cùng màu.

Bài 148.

Mỗi điểm trong mặt phẳng được tô màu đen hoặc đỏ. Chứng minh rằng ta có thể tìm được ba điểm cùng màu mà mỗi cặp điểm có khoảng cách bằng 1.hoặc có thể tìm được ba điểm cùng màu mà mỗi cặp điểm có khoảng cách bằng $\sqrt{3}$.

Bài 149.

Mỗi đỉnh của một đa diện có 3 cạnh. Có thể tô màu các cạnh bằng 3 màu, sao cho ba cạnh tại mỗi đỉnh có 3 màu khác nhau. Chứng minh rằng ta có thể gán cho mỗi đỉnh một số phức $z_i \neq 1$ để cho tích các số quanh mỗi mặt là bằng 1.

Bài 150.

Trong không gian, cho 9 điểm sao cho không có bất cứ hệ 4 điểm nào trong số đó đồng phẳng. Cứ hai điểm thì được nối một đoạn thẳng (cạnh), mỗi cạnh được tô màu xanh hoặc đỏ, hoặc không tô gì cả.

Tìm giá trị n nhỏ nhất sao cho hễ có đúng n cạnh được tô màu thì tập hợp các cạnh được tô đó phải chứa một tam giác có cả 3 cạnh cùng màu.

Bài 151.

Trên một đường thẳng, có n điểm màu xanh và n điểm màu đỏ. Chứng minh rằng tổng tất cả các khoảng cách giữa các cặp điểm cùng màu bé hơn hoặc bằng tổng tất cả các khoảng cách giữa các cặp điểm khác màu.

Bài 152.

Có bao nhiêu cách tô màu đỏ cho 16 khối lập phương đơn vị của khối lập phương $4 \times 4 \times 4$, sao cho mỗi khối $1 \times 1 \times 4$

(và mỗi khối $1 \times 4 \times 1$ hay $4 \times 1 \times 1$) có chứa đúng một khối lập phương đơn vị màu đỏ ?

Bài 153.

Cho hình lăng trụ có đáy trên và đáy dưới là các ngũ giác $A_1A_2A_3A_4A_5$ và $B_1B_2B_3B_4B_5$. Mỗi cạnh của hai ngũ giác này cũng như mỗi cạnh trong 25 cạnh A_iB_j (i, j = 1,...,5) đều được tô màu đỏ hoặc xanh. Biết rằng bất kì tam giác nào tạo thành từ 3 đỉnh của lăng trụ mà cả 3 cạnh đều được tô màu thì phải có 2 cạnh có màu khác nhau. Chứng minh rằng tất cả 10 cạnh của hai ngũ giác (ở đáy trên và đáy dưới) đều có cùng một màu.

Bài 154.

Trong mặt phẳng, cho 2 điểm phân biệt O và A. Với mọi điểm X (khác O) trong mặt phẳng này, ta kí hiệu a(X) là số đo của góc giữa OA và OX, tính từ OA, theo chiều ngược kim đồng hồ, $0 \le a(X) \le 2\pi$. Gọi C(X) là đường tròn tâm O bán kính $OX + \dfrac{a(X)}{OX}$.

Mỗi điểm trên mặt phẳng được tô bằng một trong một số hữu hạn các màu sắc khác nhau. Chứng minh rằng tồn tại một điểm Y mà $a(Y) > 0$ sao cho tồn tại một điểm trên biên (trên chu vi) của đường tròn C(Y) có cùng màu với Y.

Bài 155.

Cho n là một số tự nhiên, k là một số nguyên nguyên tố với n; $1 \le k \le n-1$, M là tập hợp $\{1,2,\dots,n-1\}$. Mỗi phần tử của M được tô bằng một trong hai màu trắng hoặc xanh.

Ta giả sử :

a) với mọi i thuộc M, i và n - i có cùng màu ;

b) với mọi i thuộc M, $i \neq k$, i và $|i-k|$ có cùng màu.

Chứng minh rằng tất cả các phần tử của M đều có cùng màu.

Bài 156.

Trong mặt phẳng tọa độ, cho một tập hữu hạn các điểm có tọa độ nguyên. Hỏi rằng, có phải ta luôn luôn có thể tô màu đỏ một số điểm của tập hợp này, và số còn lại được tô màu xanh, sao cho với bất kì đường thẳng L nào song song với một trong hai trục tọa độ thì sự khác nhau (về giá trị tuyệt đối) của số điểm màu xanh và số điểm màu đỏ trên L sẽ không lớn hơn 1 ? Hãy chứng minh cho câu trả lời của bạn.

Bài 157.

Cho trong mặt phẳng các điểm có toạ độ nguyên, sao cho chúng là các đỉnh của những hình vuông đơn vị. Các hình vuông này được tô màu đen, trắng xen nhau như bàn cờ. Với mỗi cặp số nguyên dương (m, n), ta xét tam giác vuông có toạ độ 3 đỉnh là toạ độ nguyên, có hai cạnh góc vuông mà độ dài là m, n tương ứng nằm dọc theo cạnh của những cạnh hình vuông. Gọi S_1 là diện tích của phần được tô đen, S_2 là diện tích của phần được tô trắng của tam giác đó. Đặt $f(m,n) = |S_1 - S_2|$.

a) Với mọi cặp số nguyên dương m, n cùng chẵn hoặc cùng lẻ, hãy tính $f(m,n)$.

b) Chứng minh rằng $f(m,n) \leq \dfrac{\max(m,n)}{2}, \forall m,n$.

c) Chứng minh rằng không có hằng số C nào để

$$f(m,n) < C, \forall m,n.$$

Bài 158.

Tìm số nguyên dương bé nhất n ($n \geq 3$) thỏa mãn tính chất sau: với mọi cách tô thành hai màu cho n điểm khác nhau $A_1, A_2, \dots, A_n$ trên một đường thẳng thỏa mãn $A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = \dots A_{n-1}A_n$, luôn tồn tại ba điểm A_i, A_j, A_{2j-i} ($1 \leq i \leq 2j - i \leq n$) có cùng một màu.

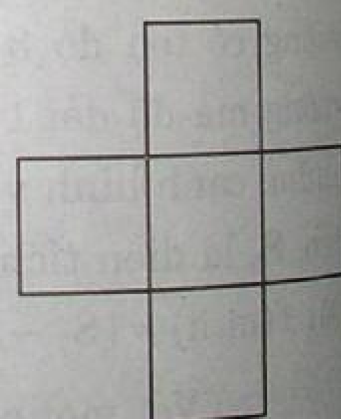
Bài 159.

Chia hình chữ nhật kích thước $m \times n$ ($m > 1, n > 1$) thành mn ô vuông 1×1 bằng những đường thẳng song song với các cạnh. Ta tìm cách huỷ đi hai ô vuông, sau đó lấp đầy các ô còn lại của hình chữ nhật bằng các quân cờ domino 2×1. Hỏi có bao nhiêu cách như thế? (Ta hiểu quân cờ domino 2×1 là hình gồm hai ô trắng và đen.)

Bài 160.

Cho bảng vuông cỡ 7×7 có bốn ô vuông ở bốn góc của bảng bị xoá đi.

a) Hỏi số bé nhất các ô vuông cần tô màu đen là bao nhiêu để cho ta không thể nào thấy được bất cứ một hình chữ thập nào (gồm 5 ô vuông không màu - xem hình) trên bảng vuông đã cho?



b) Chứng minh rằng ta có thể viết các số nguyên lên các ô của bảng theo một cách nào đó để cho tổng các số nguyên trên mỗi hình chữ thập là một số âm, còn tổng tất cả các số nguyên trên toàn bộ bảng là một số dương.