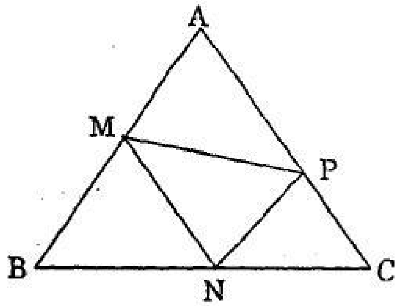
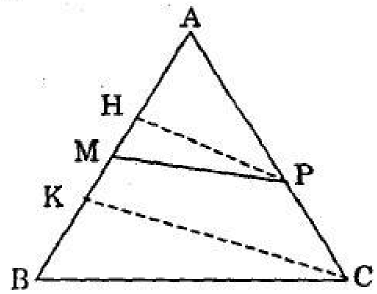
$$\frac{S_{AMP}}{S_{ABC}} = \frac{AM.AP}{AB.AC}$$

Thật vậy: Kẻ PH ⊥ AB và CK ⊥ AB ⇒ HP//CK

Áp dụng hệ quả định lý Talet, ta có: $\frac{HP}{CK} = \frac{AP}{AC}$





$$\frac{S_{AMP}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}AM.HP}{\frac{1}{2}AB.CK} = \frac{AM}{AB}.\frac{HP}{CK} = \frac{AM}{AB}.\frac{AP}{AC}$$

Vì $\frac{AM}{MB} = \frac{CP}{PA} = k\ (k > 0) \Rightarrow \begin{cases} \frac{AM}{AB} = \frac{k}{k+1} \\ \frac{AP}{CP} = \frac{1}{k} \text{nên} \frac{AP}{AC} = \frac{1}{k+1} \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{S_{AMP}}{S_{ABC}} = \frac{k}{(k+1)^2}$

Áp dụng kết quả trên và lý luận tương tự ta có:

$$\frac{S_{BMN}}{S_{ABC}} = \frac{BM.BN}{AB.AC} = \frac{k}{(k+1)^2} \text{ và } \frac{S_{CNP}}{S_{ABC}} = \frac{CN.CP}{BC.AC} = \frac{k}{(k+1)^2}$$

Suy ra $S_{MNP} = S_{ABC} - (S_{AMP} + S_{BMN} + S_{CNP})$

$$= S_{ABC} - \frac{3k}{(k+1)^2} S_{ABC} = \left[1 - \frac{3k}{(k+1)^2}\right] S_{ABC}$$

Do S_{ABC} không đổi nên S_{MNP} nhỏ nhất khi và chỉ khi $\left(1 - \frac{3k}{(k+1)^2}\right)$ nhỏ nhất.

Ta có: $(k+1)^2 \geq 4k \Rightarrow \frac{3k}{(k+1)^2} \leq \frac{3}{4} \Rightarrow 1 - \frac{3k}{(k+1)^2} \geq 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

Vậy $S_{MNP} \geq \frac{1}{4} S_{ABC}$

$S_{MNP} = \frac{1}{4} S_{ABC} \Leftrightarrow k = 1 \Leftrightarrow$ M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, AC của tam giác ABC.

Nhận xét: Ở bài toán 2 xin được giới thiệu một bất đẳng thức mà khi vận dụng nó ta nhanh chóng tìm ra lời giải.

Bất đẳng thức : $\dfrac{a_1^2}{b_1} + \dfrac{a_2^2}{b_2} + \dfrac{a_3^2}{b_3} \geq \dfrac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{b_1 + b_2 + b_3}$

Áp dụng: với x, y, z > 0

Chứng minh rằng: $\dfrac{x^4}{y + z} + \dfrac{y^4}{z + z} + \dfrac{z^4}{x + y} > \dfrac{x^3 + y^3 + z^3}{2}$

Ta có: $\dfrac{x^4}{y + z} + \dfrac{y^4}{z + z} + \dfrac{z^4}{x + y} > \dfrac{x^6}{x^2(y + z)} + \dfrac{x^6}{y^2(z + z)} + \dfrac{z^6}{z^2(x + y)}$

$$\geq \frac{(x^3 + y^3 + z^3)^2}{x^2(y + z) + z^2(x + y) + y^2(z + x)}$$

$$= \frac{(x^3 + y^3 + z^3)^2}{xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x)} > \frac{x^3 + y^3 + z^3}{2}$$

Vì $\begin{cases} x^3 + y^3 \geq xy(x + y) \\ y^3 + z^3 \geq yz(y + z) \text{ với } x, y, z > 0 \\ z^3 + x^3 \geq zx(z + x) \end{cases}$

$\Rightarrow 2(x^3 + y^3 + z^3) \geq xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x)$

Suy ra $\dfrac{1}{xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x)} > \dfrac{1}{2(x^3 + y^3 + z^3)}$

Ta có điều phải chứng minh.

BỘ ĐỀ 20

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 8 TRƯỜNG THCS NGUYỄN DU QUẬN 1, TPHCM – NĂM HỌC 1995 – 1996

(BÀI THỨ HAI)

Bài 1: Biết m + n + p = 0. Tính giá trị của biểu thức:

$$S = \left(\frac{m - n}{p} + \frac{n - p}{m} + \frac{p - m}{n}\right)\left(\frac{p}{m - n} + \frac{m}{n - p} + \frac{n}{p - m}\right)$$

Bài 2: Cho biết tích của hai số tự nhiên bằng 1985^{1986}. Hỏi tổng của hai số đó có bội là 1986 hay không?

Bài 3: Một người đi xe gắn máy từ thành phố A đến thành phố B cách nhau 200km. Cùng lúc đó có một người đi xe gắn máy khác từ B đến A. Sau 5 giờ hai xe gặp nhau. Nếu sau khi đi được 1 giờ 15 phút mà người đi từ A dừng lại 40 phút rồi đi tiếp thì phải sau 5 giờ 22 phút kể từ lúc khởi hành, hai người mới gặp nhau. Tìm vận tốc của mỗi người.

Bài 4: Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại O. Chứng minh rằng nếu các tam giác AOB, BOC, COD và DOA có chu vi bằng nhau thì tứ giác ABCD là hình thoi.

Bài 5: Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại O. Ký hiệu S là diện tích. Cho $S_{AOB} = a^2$ (cm^2) và $S_{COD} = b^2$ (cm^2) với a, b là hai số cho trước.

1) Hãy tìm giá trị bé nhất của S_{ABCD}?

2) Giả sử S_{ABCD} bé nhất. Hãy tìm đường chéo BD điểm M sao cho đường thẳng qua M song song với AB bị hai cạnh AD, BC và hai đường chéo AC, BD chia thành ba phần bằng nhau.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: *Cách 1:* Với $m + n + p = 0$

Điều kiện $mnp(m - n)(n - p)(p - m) \neq 0$

Đặt $A = \frac{m-n}{p} + \frac{n-p}{m} + \frac{p-m}{n}$

$$= \frac{1}{mnp}[mn(m-n) + np(n-p) + mp(p-m)]$$

$$= \frac{1}{mnp}[mn(m-n) + n^2p - np^2 + mp^2 - m^2p]$$

$$= \frac{1}{mnp}[mn(m-n) + p^2(m-n) - p(m^2 - n^2)]$$

$$= \frac{1}{mnp}[mn(m-n) + p(m-n) - p(m-n)(m+n)]$$

$$= \frac{1}{mnp}(m-n)(mn + p^2 - mp - np)$$

$$= \frac{1}{mnp}(m-n)[m(n-p) - p(n-p)] = \frac{(m-n)(n-p)(m-p)}{mnp}$$

$$B = \frac{p}{m-n} + \frac{m}{n-p} + \frac{n}{p-m}$$

$$= \frac{m(m-n) + n(n-m)(n-p) + p(p-n)(p-m)}{(m-n)(n-p)(m-p)}$$

Mặt khác:

$$m(m-n)(m-p) = m[m^2 - (n+p)m + np] = m^3 - (n+p)m^2 + mnp$$
$$= m^3 + m^3 + mnp \text{ (do } m + n + p = 0 \Rightarrow n + p = -m)$$
$$= 2m^3 + mnp$$

Lý luận tương tự ta có:

$n(n - m)(n - p) = 2n^3 + mnp$

$p(p - n)(p - m) = 2p^3 + mnp$

Suy ra:

$$B = \frac{2(m^3 + n^3 + p^3) + 3mnp}{(m-n)(n-p)(m-p)} = \frac{2(m^3 + n^3 + p^3 - 3mnp) + 9mnp}{(m-n)(n-p)(m-p)}$$

Do: $m + n + p = 0$

$\Rightarrow m + n = -p \Rightarrow m^3 + n^3 + 3nm(m+n) = -p^3$

$\Rightarrow m^3 + n^3 + p^3 - 3mnp = 0$ (vì $m + n = -p$) (*)

Vậy $B = \dfrac{9mnp}{(m-n)(n-p)(m-p)}$

$$AB = \frac{(m-n)(n-p)(m-p)}{mnp}\cdot\frac{9mnp}{(m-n)(n-p)(m-p)} = 9$$

Cách 2: Điều kiện $mnp(m-n)(n-p)(p-m) \neq 0$

Đặt $\dfrac{m-n}{p} = x; \dfrac{n-p}{m} = y; \dfrac{p-m}{n} = z$

Ta có: $S = (x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right) = 3 + \dfrac{x+y}{z} + \dfrac{y+z}{x} + \dfrac{z+x}{y}$

Mà: $\dfrac{y+z}{x} = \dfrac{p}{m-n}\left(\dfrac{n-p}{m} + \dfrac{p-m}{n}\right) = \dfrac{p}{m-n}\cdot\dfrac{(n^2-np+mp-m^2)}{mn}$

$= \dfrac{p}{m-n}\cdot\dfrac{(n-m)(n+m)-p(n-m)}{mn} = \dfrac{p}{m-n}\cdot\dfrac{(m-n)(m+n-p)}{mn}$

$= \dfrac{p}{mn}(-m-n+p) = \dfrac{p}{mn}(-m-n-p+2p) = \dfrac{2p^2}{mn}$ (do $m+n+p=0$)

Lý luận tương tự: $\dfrac{x+y}{z} = \dfrac{2n^2}{mp}$ và $\dfrac{x+y}{z} = \dfrac{2m^2}{np}$

Vậy $S = 3 + \dfrac{2n^2}{mp} + \dfrac{2p^2}{mn} + \dfrac{2m^2}{np} = 3 + \dfrac{2(m^3+n^3+p^3)}{mnp} = 3 + \dfrac{2.3mnp}{mnp} = 9$

Vì $m + n + p = 0 \Rightarrow m^3 + n^3 + p^3 = 3mnp$ (theo (*) ở cách 1)

Cách 3: Gọi hai số tự nhiên đó là a và b, ta có:

$ab = 1985^{1986} = [1985^{1986} - (-1)^{1986}] + 1$ chia cho 3 dư 1

vì $[1985^{1986} - (-1)^{1986}] \vdots [1985 - (-1)] \vdots 3$

$\Rightarrow$ a, b đều không chia hết cho 3.

Đặt $a = 3x + r$, $b = 3y + t$ ($x, y \in N$; $r = 1; 2$; $t = 1; 2$)

$ab = (3x + r)(3y + t) = 3xy + 3xt + 3yr + rt$ chia cho 3 dư 1

nên rt chia cho 3 dư 1

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} r = t = 1 \\ r = t = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a + b = 3(xy + xt + 3yr + rt) + 1 \\ a + b = 3(xy + xt + 3yr + rt) + 4 \end{array}\right. \Rightarrow (a+b) \vdots 3$$

$\Rightarrow (a + b) \not\vdots\ 1986$

Vậy a + b không là bội của 1986.

Bài 3: Đổi ra giờ: $5g22' = 5\dfrac{11}{30} = \dfrac{161}{30}$ (h); $40' = \dfrac{40}{60} = \dfrac{2}{3}$ h

Do khởi hành cùng một lúc ở hai thành phố A và B cách nhau 200km, gặp nhau sau 5 giờ nên tổng vận tốc của hai xe gắn máy là 200 : 5 = 40km/h

Gọi x (km/h) là vận tốc của xe gắn máy đi từ thành phố A đến B (điều kiện: $0 < x < 40$).

Vận tốc đi xe gắn máy từ thành phố B đến thành phố A là : $40 - x$ km/h

Theo đầu bài ta có phương trình:

$$\left(\frac{161}{30}-\frac{2}{3}\right)x+\frac{161}{30}(40-x)=200$$

$$\Leftrightarrow 141x + 6440 - 161x = 6000 \Leftrightarrow 20x = 440 \Leftrightarrow x = \frac{440}{20} = 22$$

Trả lời: Vận tốc người đi xe gắn máy từ thành ph A là 22km/h

Vận tốc người đi xe gắn máy từ thành phố B là 18km/h.

Bài 4: Không mất tính tổng quát, ta giả sử $OC \geq OA$, $OD \geq OB$

Trên OC đặt $OF = OA$, trên OD đặt $OE = OB$

$\Rightarrow$ Tứ giác ABEF là hình bình hành

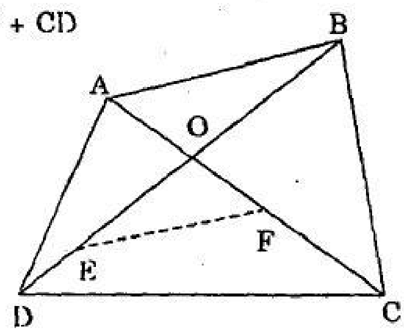
$\Rightarrow AB = EF$

Vì chu vi tam giác AOB bằng chu vi tam giác COD nên:

$AB + OA + OB = OD + OC + CD$

$\Rightarrow AB + OA + OB = OE + DE + OF + CF + CD$

$\Rightarrow AB = ED + DC + CF$



nghĩa là $EF = ED + DC + CF$. Điều này chỉ xảy ra khi $E \equiv D$ và $F \equiv C$; suy ra $AO = OC$ và $OB = OD$.

Khi ấy ABCD là hình bình hành.

Mặt khác, chu vi tam giác AOD bằng chu vi tam giác BOA nên

$AD + OA + OD = AB + OA + OB$

$\Rightarrow AD = AB$ (Do $OB = OD$)

Hình bình hành ABCD có $AB = AD$, nên ABCD là hình thoi.

Bài 5: 1) Tìm GTNN của S_{ABCD}?

Ta có: $S_{ABCD} = (S_{AOB} + S_{COD}) + (S_{BOC} + S_{AOD}) = a^2 + b^2 + (S_{BOC} + S_{AOD})$

Mặt khác:

$$\frac{S_{OAB}}{S_{OAD}}=\frac{\frac{1}{2}OB.AH}{\frac{1}{2}OD.AH}=\frac{OB}{OD} \text{ và } \frac{S_{OBC}}{S_{OCD}}=\frac{\frac{1}{2}OB.CK}{\frac{1}{2}OD.CK}=\frac{OB}{OD}$$

$$\frac{S_{OAB}}{S_{OAD}}=\frac{S_{OBC}}{S_{OCD}} \Rightarrow S_{OAD}\,.\,S_{OBC} = S_{OAB}\,.S_{ODC} = a^2b^2$$

Áp dụng bất đẳng thức: $(x + y)^2 \geq 4xy$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$

Ta có:

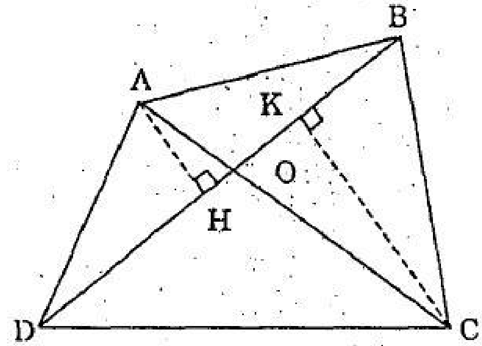
$$(S_{OBC} + S_{OAD})^2 \geq 4S_{OBC}\,.\,S_{OAD} = 4a^2b^2 \Rightarrow S_{OBC} + S_{OAD} \geq 2|ab|$$

vậy $\quad S_{ABCD} \geq a^2 + b^2 + 2|ab| = (|a| + |b|)^2$

$$S_{ABCD} = (|a| + |b|)^2 \Leftrightarrow S_{OBC} = S_{OAD}$$

$\Leftrightarrow S_{DAB} = S_{CAB} \Leftrightarrow AB \,//\, CD$

min $S_{ABCD} = (|a| + |b|)^2$ khi và chỉ khi tứ giác ABCD là hình thang (AB//CD).



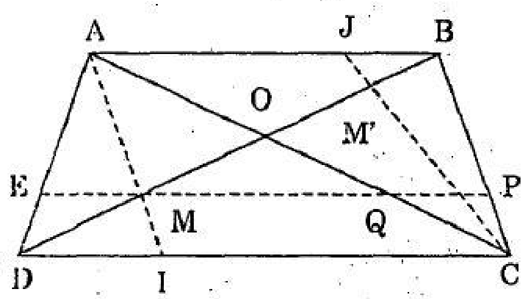
2) Trường hợp S_{ABCD} nhỏ nhất, nghĩa là tứ giác ABCD là hình thang. Giả sử có điểm $M \in OD$ thỏa mãn yêu cầu của đề bài và đường thẳng AM cắt DC ở I.

Áp dụng định lý Talet, ta có: $\dfrac{ME}{DI} = \dfrac{AM}{AI} = \dfrac{MQ}{IC}$ nếu ME = MQ

$\Rightarrow$ DI = IC.

Từ đó ta có cách dựng điểm $M \in OD$ như sau.

Gọi I là trung điểm của DC. Đoạn thẳng AI cắt OD tại M. Giả sử đường thẳng qua M và song song với AB, CD cắt AD, AC, BC lần lượt E, Q và P.



Áp dụng định lý Talet, ta có:

$$\frac{ME}{AB} = \frac{DM}{DB} = \frac{CP}{CB} = \frac{QP}{AB}$$

Suy ra ME = QP

Mặt khác : $\dfrac{ME}{DI} = \dfrac{AM}{AI} = \dfrac{MQ}{IC}$. do DI = IC (THEO cách dựng)

$\Rightarrow$ ME = MQ

Vậy điểm M thỏa yêu cầu bài toán : ME = MQ = QP

Tương tự, gọi J là trung điểm của AB Và CJ cắt OB ở M'.

Lý luận tương tự như trên. điểm M' cũng thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

BỘ ĐỀ 21

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN 1, TPHCM NĂM HỌC 1995 – 1996

Bài 1: Chứng minh rằng với x, y nguyên thì :

A = $(x + y)(x + 2y)(x + 3y)(x + 4y) + y^4$ là số chính phương.

Bài 2: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(a - x)y^3 - (a - y)x^3 + (x - y)a^3$.

Bài 3: Giải phương trình:

1) $\dfrac{1}{x^2 + 4x + 3} + \dfrac{1}{x^2 + 8x + 15} = \dfrac{1}{6}$

2) $x^4 + 2x^3 + 8x^2 + 10x + 15 = 0$

$14 - 16 + 32$

Bài 4: Cho tam giác ABC cân tại A với A là góc nhọn; CD là đường phân giác góc ACB (D thuộc AB) qua D kẻ đường vuông góc với CD; đường này cắt đường thẳng CB tại E. Chứng minh: $BD = \frac{1}{2}EC$.

Bài 5: Cho tam giác ABC (AB = AC) có góc ở đỉnh bằng 20^0; cạnh đáy là a, cạnh bên là b. Chứng minh $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: *Cách 1:* $A = (x + y)(x + 2y)(x + 3y)(x + 4y) + y^4$

$$= [(x + y)(x + 4y)][(x + 2y)(x + 3y)] + y^4$$
$$= (x^2 + 5xy + 4y^2)(x^2 + 5xy + 6y^2) + y^4$$
$$= (x^2 + 5xy + 5y^2 - y^2)(x^2 + 5xy + 5y^2 + y^2) + y^4$$
$$= (x^2 + 5xy + 5y^2)^2 - y^4 + y^4 = (x^2 + 5xy + 5y^2)^2$$

Do $x, y \in Z$ nên $x^2 + 5xy + 5y^2 \in Z \Rightarrow A$ là số chính phương.

Cách 2: $A = [(x + y)(x + 2y)][(x + 3y)(x + 4y)] + y^4$

$$= (x^2 + 3xy + 2y^2)(x^2 + 7xy + 12y^2) + y^4$$
$$= x^4 + 10x^3y + 35x^2y^2 + 50xy^3 + 25y^4$$
$$= (x^4 + 10x^3y + 25x^2y^2) + (10x^2y^2 + 50xy^3) + 25y^4$$
$$= (x^2 + 5xy)^2 + 10y^2(x^2 + 5xy)^2 + (5y^2)^2 = (x^2 + 5xy + 5y^2)^2$$

Do $x, y \in Z$ nên $x^2 + 5xy + 5y^2 \in Z \Rightarrow A$ là 1 số chính phương.

Bài 2: *Cách 1:*

Ta có: $(a - x)y^3 - (a - y)x^3 + (x - y)a^3$

$$= (a - x)y^3 + (x - y)a^3 + (y - a)x^3 = ay^3 - xy^3 + xa^3 - ya^3 + yx^3 - ax^3$$
$$= (ay^3 - ax^3) + (xa^3 - ya^3) + (yx^3 - xy^3)$$
$$= a(y^3 - x^3) + a^3(x - y) + xy(x^2 - y^2)$$
$$= (x - y)a^3 - a(x - y)(x^2 + xy + y^2) + xy(x - y)(x + y)$$
$$= (x - y)[a^3 - a(x^2 + xy + y^2) + xy(x + y)]$$
$$= (x - y)(a^3 - ax^2 - axy - ay^2 + x^2y + xy^2)$$
$$= (x - y)[(x - a)y^2 - (x^2 - a^2)a + (x - a)xy]$$
$$= (x - y)(x - a)[y^2 - a(x + a) + xy] = (x - y)(x - a)(y^2 - ax - a^2 + xy)$$
$$= (x - y)(x - a)[x(y - a) + (y + a)(y - a)]$$
$$= (x - y)(x - a)(y - a)(x + y + a)$$

Cách 2: Ta có: $(a - x)y^3 - a(a - y)x^3 + (x - y)a^3$

$$= (a - y)y^3 - [(a - x) + (x - y)]x^3 - (x - y)a^3$$
$$= (a - x)y^3 - (a - x)x^3 - (x - y)x^3 + (x - y)a^3$$
$$= (a - x)(y^3 - x^3) + (a^3 - x^3)(x - y)$$
$$= (x - a)(x - y)(x^2 + xy + y^2) - (x - a)(x^2 + ax + a^2)(x - y)$$
$$= (x - a)(x - y)(x^2 + xy + y^2 - x^2 - ax - a^2)$$
$$= (x - y)(x - a)(y^2 - ax - a^2 + xy)$$
$$= (x - y)(x - a)[x(y - a) + (y + a)(y - a)] = (x - y)(x - a)(y - a)(x + y + a)$$

Bài 3:

1) *Nhận xét:*

$x^2 + 4x + 3 = x^2 + x + 3x + 3 = x(x + 1) + 3(x + 1) = (x + 1)(x + 3)$

$x^2 + 8x + 15 = x^2 + 3x + 5x + 15 = x(x + 3) + 5(x + 3) = (x + 3)(x + 5)$

Điều kiện: $x \neq -1$, $x \neq -3$, $x \neq -5$

Phương trình đã cho được viết: $\dfrac{1}{(x+1)(x+3)} + \dfrac{1}{(x+3)(x+5)} = \dfrac{1}{6}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+3}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+3} - \dfrac{1}{x+5}\right) = \dfrac{1}{6} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+5} = \dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow 3(x + 5 - x - 1) = (x + 1)(x + 5) \Leftrightarrow x^2 + 6x + 5 = 12$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = 16 \Leftrightarrow (x + 3)^2 = 4^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+3=4 \\ x+3=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \text{ (nhận)} \\ x=-7 \text{ (nhận)} \end{array}\right.$

Kết luận $S = \{1; -7\}$

2) $x^4 + 2x^3 + 8x^2 + 10x + 15 = 0$

$\Leftrightarrow x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 5x^2 + 10x + 15 = 0$

$\Leftrightarrow (x^4 + 5x^2) + (2x^3 + 10x) + (3x^2 + 15) = 0$

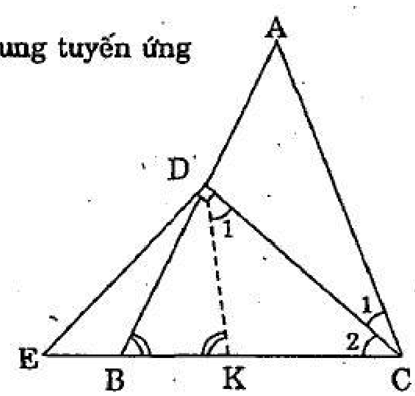
$\Leftrightarrow x^2(x^2 + 5) + 2x(x^2 + 5) + 3(x^2 + 5) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 5)(x^2 + 2x + 3) = 0$: phương trình vô nghiệm.

Vì $\begin{cases} x^2 + 5 \geq 5, \text{ với mọi } x \\ x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 \geq 2 \text{ với mọi } x \end{cases}$

$\Rightarrow (x^2 + 5)(x^2 + 2x + 3) > 0$ với mọi x

Bài 4: Gọi K là trung điểm EC.



Tam giác vuông EDC vuông tại D có KD là trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $DK = \dfrac{EC}{2}$ và DK = KC.

Vậy tam giác KDC cân tại K $\Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{C}_2$

Mà $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$ (do CD phân giác $\widehat{ACD}$)

$\Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$

Ta có: $\widehat{DKB} = \widehat{D}_1 + \widehat{C}_2 = \widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 = \widehat{ACB}$ (góc ngoài tại đỉnh K của tam giác DKC)

= DBC (do tam giác ABC cân tại A)

$\Rightarrow$ tam giác DKB cân tại D $\Rightarrow BD = DK = \dfrac{EC}{2}$

Bài 5: *Cách 1:*

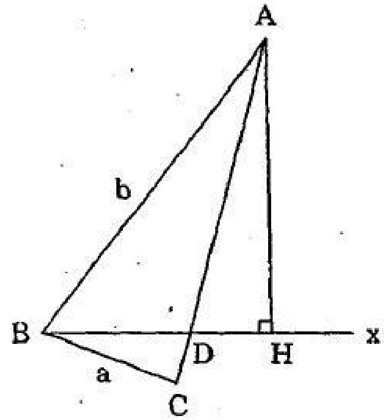
Dựng tia BX ở nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm A; $\widehat{CBx} = 20^0$, tia Bx cắt AC ở D, kẻ AH $\perp$ Bx.

Tam giác ABC cân tại A, có:

$A = 20^0 \Rightarrow B = C = 80^0 \Rightarrow \widehat{ABH} = \widehat{ABC} - \widehat{CBx} = 80^0 - 20^0 = 60^0$

Vậy tam giác ABH là nửa tam giác đều và tam giác BDC cân tại B ($\widehat{BCD} = \widehat{BDC} = 80^0$).

Suy ra $BH = \dfrac{b}{2}$



$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = b^2 - \frac{b^2}{4} = \frac{3b^2}{4}$$

$$DH = BH - BD = \frac{b}{2} - a$$

Ta có $\Delta ABC \backsim \Delta BDC$

(hai tam giác cân có góc ở đỉnh bằng nhau)

$$\Rightarrow \frac{BC}{CD} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow CD = \frac{BC^2}{AC} = \frac{a^2}{b}$$

$$AD = AC - CD = b - \frac{a^2}{b}$$

mà $AD^2 = AH^2 + DH^2 = \dfrac{3b^2}{4} + \left(\dfrac{b}{2} - a\right)^2 = b^2 - ab + a^2$

vậy $\left(b - \dfrac{a^2}{b}\right)^2 = b^2 - ab + a^2 \Rightarrow b^4 + a^4 - 2a^2b^2 = b^4 - ab^3 + a^2b^2$

$\Rightarrow a(a^3 + b^3) = 3a^2b^2 \Rightarrow a^3 + b^3 = 3ab^2$

Cách 2: Dựng ΔABE đều sao cho E và C nằm cùng phía so với AB

Dựng ΔACD cân tại A : $\widehat{CAD} = 20^0$

$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta CAD = \Delta ADE$ (c – g – c)

Gọi F và G là giao điểm của BE với AD và AC.

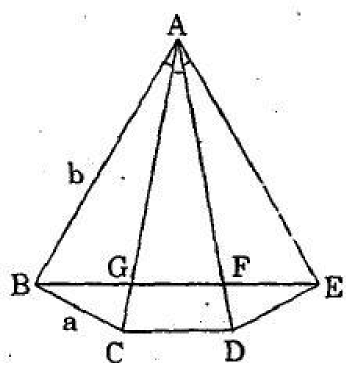
Khi đó $BG = EF = a$

Vì $\widehat{ABE} = 60^0$

nên $\widehat{ABG} = \widehat{ABC} - \widehat{ABE} = 20^0$ và ΔCBG cân tại B

$\Rightarrow \Delta BAC \backsim \Delta CBG$ (g–g) $\Rightarrow \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{CG}{BG} \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{CG}{a} \Rightarrow CG = \dfrac{a^2}{b}$

và $AG = AC - CG = b - \dfrac{a^2}{b}$



ta có FG // CD nên theo định lý Talet ta có:

$$\frac{GF}{CD} = \frac{AG}{AC} \Rightarrow \frac{GF}{a} = \frac{b - \frac{a^2}{b}}{b} \Rightarrow GF = \frac{ab^2 - a^3}{b^2}$$

Vậy $BE = BG + GF + FE$

$$\Rightarrow b = 2a + \frac{ab^2 - a^3}{b^2}$$

$\Rightarrow b^3 = 2ab^2 - ab^2 - a^3 \Rightarrow a^3 + b^3 = 3ab^2$ (đpcm)

BỘ ĐỀ 22

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN TRƯỜNG LÊ QUÝ ĐÔN QUẬN TÂN BÌNH, TPHCM – NĂM HỌC 1996 – 1997

Bài 1: Giải các phương trình:

1) $\left|2|2x - 5| - 3\right| = 7$

2) $\dfrac{315 - x}{105} + \dfrac{313 - x}{103} + \dfrac{311 - x}{101} = 3$

Bài 2: Cho biểu thức: $A = \dfrac{x^4 + x^3 + x + 1}{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1}$

1) Rút gọn A.

2) Chứng tỏ rằng A không âm với mọi giá trị của x.

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của A và giá trị tương ứng của x khi đó.

Bài 3: Cho hình vuông ABCD độ dài cạnh là a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC. Các đường thẳng DN và CM cắt nhau tại I.

1) Chứng minh tam giác CIN vuông.

2) Tính diện tích tam giác CIN theo a.

3) Chứng minh tam giác AID cân.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $\left|2|2x - 5| - 3\right| = 7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2|2x - 5| - 3 = 7 & (1) \\ 2|2x - 5| - 3 = -7 & (2) \end{array}\right.$

Giải phương trình (1):

$2|2x - 5| - 3 = 7 \Leftrightarrow 2|2x - 5| = 10 \Leftrightarrow |2x - 5| = 5$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 5 = 5 \\ 2x - 5 = -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 10 \\ 2x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = 0 \end{array}\right.$

Phương trình (1) có hai nghiệm số là $x_1 = 5$; $x_2 = 0$

Giải phương trình (2): $2|2x - 5| - 3 = -7 \Leftrightarrow 2|2x - 5| = -4$

$\Leftrightarrow |2x - 5| = -2$

Vậy phương trình (2) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x_1 = 5$; $x_2 = 0$

2) $\dfrac{315 - x}{105} + \dfrac{313 - x}{103} + \dfrac{311 - x}{101} = 3$ (1)

$\Leftrightarrow \dfrac{315 - x}{105} - 1 + \dfrac{313 - x}{103} - 1 + \dfrac{311 - x}{101} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{210 - x}{105} + \dfrac{210 - x}{103} - 1 + \dfrac{210 - x}{101} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (210 - x)\left(\frac{1}{105} + \frac{1}{103} + \frac{1}{101}\right) = 0$

$\Leftrightarrow 210 - x = 0$ (vì $\frac{1}{105} + \frac{1}{103} + \frac{1}{101} > 0$)

$\Leftrightarrow x = 210$

Vậy phương trình (1) có một nghiệm số là $x = 210$

Bài 2: 1) $A = \dfrac{x^4 + x^3 + x + 1}{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1}$

Mẫu thức của biểu thức A là:

$x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1 = x^4 - x^3 + x^2 + x^2 - x + 1$

$= x^2(x^2 - x + 1) + (x^2 - x + 1) = (x^2 + 1)(x^2 - x + 1)$

Ta có $x^2 + 1 > 0$ với mọi x

$x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$, với mọi x

Do đó: $(x^2 + 1)(x^2 - x + 1) > 0$ với mọi x.

Vậy biểu thức A luôn có nghĩa với mọi giá trị của x.

1) Ta có:

$x^4 + x^3 + x + 1 = x^3(x + 1) + (x + 1) = (x + 1)(x^3 + 1)$

$= (x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1) = (x + 1)^2(x^2 - x + 1)$

Do đó: $A = \dfrac{(x+1)^2(x^2 - x + 1)}{(x^2+1)(x^2 - x + 1)} = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$

Ta có: $\begin{cases}(x+1)^2 \geq 0 \text{ với mọi } x\\ x^2 + 1 > 0 \text{ với mọi } x\end{cases}$

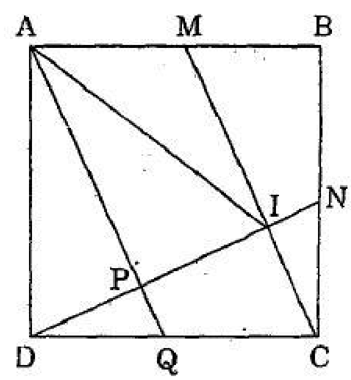
Do đó : $\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1} \geq 0$ hay $A \geq 0$ với mọi x.

2) Ta có: $\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1} \geq 0$ với mọi x.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Vậy biểu thức A đạt giá trị nhỏ nhất bằng 0 khi $x = -1$.

Bài 3:



1) Ta có : $BM = \dfrac{AB}{2}$; $CN = \dfrac{CB}{2}$

Mà AB = CB (ABCD là hình vuông)

nên BM = CN

Xét hai tam giác vuông OBM và CDN ta có:

BM = CN, BC = CD (ABCD là hình vuông)

nên $\Delta BMC = \Delta CND$ (c – g – c)

Suy ra $\widehat{BCM} = \widehat{NDC}$

mà $\widehat{NDC} + \widehat{CND} = 90^0$ (ΔCDN vuông tại C)

nên $\widehat{BCM} + \widehat{CND} = 90^0$

hay $\widehat{NCI} + \widehat{CNI} = 90^0$

Suy ra $\widehat{NIC} = 90^0$

hay ΔNIC vuông tại I.

2) Áp dụng định lý Pytago vào tam giác vuông CBM ta có:

$$CM^2 = CB^2 + BM^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$$

ΔCIN và ΔCBM có $\hat{C}$ chung, $\widehat{CIN} = \widehat{CBM} = 90^0$

nên $\Delta CIN \backsim \Delta CBM$ (g – g)

Suy ra $$\frac{S_{\Delta CIN}}{S_{\Delta CBM}} = \frac{CN^2}{CM^2} = \frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{5a^2}{4}} = \frac{1}{5}$$

Do đó $$S_{\Delta CIN} = \frac{1}{5} S_{\Delta CBM} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} CB.BM = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} .a.\frac{a}{2} = \frac{a^2}{20} \text{ (đvdt)}$$

3) Gọi Q là trung điểm của CD, AQ cắt DI tại P

Tứ giác AMCQ có AM//CQ (AB//CD) và

AM = CQ (AM = $\frac{AB}{2}$; CQ = $\frac{CD}{2}$; AB = CD)

nên tứ giác AMCQ là hình bình hành.

Suy ra AQ // CM

mà CM $\perp$ DN (kết quả câu 1) nên AQ $\perp$ DN

hay AP $\perp$ DI

Tam giác DCI có Q là trung điểm CD; QP//CI (QA//CM), nên P là trung điểm của DI.

Tam giác ADI có AP vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến nên tam giác ADI cân tại A.

BỘ ĐỀ 23

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN 3, TPHCM – NĂM HỌC 1996 – 1997

Bài 1: Cho phân thức:

$$M = \frac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 3x + 6}{x^2 + 2x - 8}$$

1) Tìm tập xác định của M.

2) Tìm các giá trị của x để M = 0

3) Rút gọn M.

Bài 2: Tính x để A có giá trị nhỏ nhất:

$$A = \frac{x^2 - 2x + 1995}{x^2} \text{ với } x > 0$$

Bài 3: Chứng minh rằng: $(10n - 9n - 1) \vdots 27$ $(n \in N^*)$

Bài 4: Cho tứ giác lồi ABCD với bốn điều kiện sau đây:

– AB // CD

– AB < CD

– AB = BC = DA

– BD ⊥ BC

1) Tứ giác ABCD là hình gì? Tại sao?

2) Tính các góc trong của tứ giác ABCD.

3) So sánh diện tích của tam giác ABD với diện tích của tứ giác ABCD.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) M có nghĩa $\Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 \neq 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 + 9 \neq 9 \Leftrightarrow (x + 1)^2 \neq 9$

$\Leftrightarrow x + 1 \neq 3, x + 1 \neq -3 \Leftrightarrow x \neq 2, x \neq -4$

TXĐ = $\{x \setminus x \neq 2; x \neq -4\}$

2) TXĐ: $x \neq 2, x \neq -4$

M = 0 nên $x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 3x + 6 = 0$

$x^4(x - 2) + 2x^2(x - 2) - 3(x - 2) = 0$

$(x - 2)(x^4 + 2x^2 - 3) = 0$

$(x - 2)[(x^4 + 2x^2 + 1) - 4] = 0$

$(x - 2)[(x^2 + 1)^2 - 4] = 0$

$(x - 2)(x^2 + 1 + 2)(x^2 + 1 - 2) = 0$

$(x - 2)(x^2 + 3)(x^2 - 1) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ x^2 + 3 = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x \in \phi \\ x^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$$

$x = 2 \notin$ TXĐ (loại)

$x = 1 \in$ TXĐ (nhận)

$x = -1 \in$ TXĐ (nhận)

Do đó để M = 0 thì x = 1 hoặc x = −1

3) $M = \dfrac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 3x + 6}{x^2 + 2x - 8}$

$$= \frac{(x-2)(x^2+3)(x^2-1)}{x^2+2x-8} = \frac{(x-2)(x^2+3)(x^2-1)}{(x^2+2x+1)-9}$$

$$= \frac{(x-2)(x^2+3)(x^2-1)}{(x+1+3)(x+1-3)} = \frac{(x^2+3)(x^2-1)}{x+4}$$

Bài 2: $A = \dfrac{x^2 - 2x + 1995}{x^2} = \dfrac{1995(x^2 - 2x + 1995)}{1995x^2}$

$= \dfrac{1995x^2 - 2x.1995 + 1995^2}{1995x^2} = \dfrac{1994x^2 + x^2 - 2x.1995 + 1995^2}{1995x^2}$

$= \dfrac{1994}{1995} + \dfrac{(x-1995)^2}{1995x^2} \geq \dfrac{1994}{1995}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x - 1995 = 0 \Leftrightarrow x = 1995$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là: $\dfrac{1994}{1995} \Leftrightarrow x = 1995$

Bài 3:

Với n = 1 ta có $10^n - 9n - 1 = 0 \,\vdots\, 27$ đúng

Giả sử bài toán đúng khi n = k.

Ta có: $(10^k - 9k - 1) \,\vdots\, 27$

Cần chứng minh bài toán đúng khi n = k + 1

Ta có: $10^{k+1} - 9(k+1) - 1 = 10^{k+1} - 9k - 9 - 1$

$= 10(10^k - 9k - 1) + 81k$

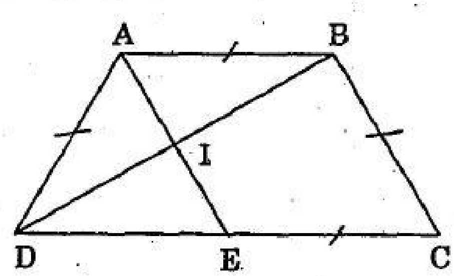
Chia hết cho 27 vì $(10^k - 9k - 1) \,\vdots\, 27$ và $81k \,\vdots\, 27$

Vậy $(10^n - 9n - 1) \,\vdots\, 27$ với n = k + 1

Do vậy $(10^n - 9n - 1) \,\vdots\, 27$ với mọi $n \in N^*$

Bài 4:

1) AB < CD. Trên cạnh CD lấy E sao cho CE = AB, nối A với E. Tứ giác ABCE có AB//EC, AB = EC nên là hình bình hành.



$\Rightarrow$ AE//BC, AE=BC

$\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{BCD}$, AE = AD

Tam giác ADE cân tại A

$\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{AED}$

Do đó $\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$

Hình thang ABCD (AB//CD)

có $\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$ nên là hình thang cân.

2) AE cắt BD tại I

AE // BC, BD $\perp$ BC (gt)

$\Rightarrow$ AE $\perp$ BD

ΔABD cân tại A (AB = AD) có AI là đường cao nên AI cũng là trung tuyến.

ΔBDC có IE//BC, I là trung điểm BD.

Do đó E là trung điểm DC.

AD = AE = AB, DE = EC = AB. Do đó: AD = AE = DC (= AB)

$\Rightarrow \Delta$ADE đều $\Rightarrow \widehat{ADC} = 60^0$

mà tứ giác ABCD là hình thang cân (AB // CD)

nên $\widehat{BCD} = \widehat{ADC} = 60^0$, $\widehat{DAB} = \widehat{CBA} = 180^0 - 60^0 = 120^0$

3) Gọi h là độ dài đường cao vẽ từ D đến AB.

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}h.AB$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}h(AB + DC) = \frac{1}{2}h(AB + 2AB) = \frac{3}{2}h.AB$$

Vậy $S_{ABCD} = 3S_{ABD}$

BỘ ĐỀ 24

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN 6, TPHCM – NĂM HỌC 1996 – 1997

Bài 1: Rút gọn rồi tính số trị của biểu thức:

$A = \dfrac{2a^3 - 12a^2 + 17a - 2}{a - 2}$ biết rằng a là nghiệm của phương trình:

$$|a^2 - 3a + 1| = 1$$

Bài 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của B và các giá trị của x tương ứng

$$B = (3x - 1)^2 - 4|3x - 1| + 5$$

Bài 3: Cho $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \geq \dfrac{1}{3}$.

Bài 4: Cho bốn điểm A, E, F, B theo thứ tự ấy trên một đường thẳng. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các hình vuông ABCD; EFGH.

1) Gọi O là giao điểm của AG và BH. Chứng minh rằng các tam giác OHE và OBC đồng dạng.

2) Chứng minh rằng các đường thẳng CE và DF cùng đi qua O.

Bài 5: Cho các điểm E và F nằm trên các cạnh AB và BC của hình bình hành ABCD sao cho AF = CE. Gọi I là giao điểm của AF và CE. Chứng minh rằng ID là đường phân giác của góc AIC.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: Giải phương trình: $|a^2 - 3a + 1| = 1$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 - 3a + 1 = 1 \\ a^2 - 3a + 1 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 - 3a = 0 \\ a^2 - 3a + 2 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a(a - 3) = 0 \\ (a - 1)(a - 2) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0; a = 3 \\ a = 1; a = 2 \end{array}\right.$$

$$A = \frac{2a^3 - 12a^2 + 17a - 2}{a - 2} \quad (a \neq 2)$$

$$= \frac{2a^3 - 4a^2 - 8a^2 + 16a + a - 2}{a - 2}$$

$$= \frac{2a^2(a-2) - 8a(a-2) + (a-2)}{a-2}$$

$$= \frac{(a-2)(2a^2 - 8a + 1)}{a-2} = 2a^2 - 8a + 1$$

- Với $a = 0$ ta có $A = 2.0^2 - 8.0 + 1 = 1$
- Với $a = 1$ ta có $A = 2.1^2 - 8.1 + 1 = -5$
- Với $a = 2$ (loại vì không thỏa điều kiện để biểu thức A có nghĩa)
- Với $a = 3$ ta có $A = 2.3^2 - 8.3 + 1 = -5$

Bài 2: Ta có: $(A)^2 = A^2$

Đặt $t = |3x - 1|$ $(t \geq 0)$ ta có $B = t^2 - 4t + 5 = (t-2)^2 + 1 \geq 1$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow |3x-1| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - 1 = 2 \\ 3x - 1 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

Vậy min $B = 1 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -\dfrac{1}{3}$

Bài 3: Ta chứng minh bất đẳng thức sau:

$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$

$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$ (bất đẳng thức đúng)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Từ bất đẳng thức $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$,

ta có: $3a^2 + 3b^2 + 3c^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

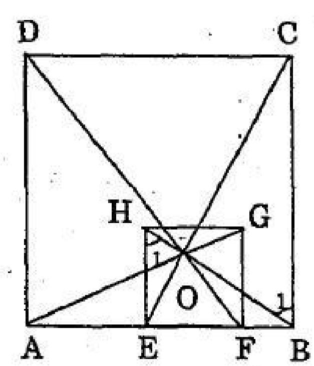
$\Leftrightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$

Do đó: $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 1$ vì $a + b + c = 1$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \dfrac{1}{3}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \dfrac{1}{3}$

Bài 4:



1) Ta có: HG // AB nên $\dfrac{OH}{OB} = \dfrac{HG}{AB}$

(hệ quả định lý Talet)

hay $\dfrac{OH}{OB} = \dfrac{HE}{BC}$ (HE = HG, AB = BC)

Xét ΔOHE và ΔOBC, ta có: $\dfrac{OH}{OB} = \dfrac{HE}{BC}$.

$\hat{H}_1 = \hat{B}_1$ (2 góc so le trong: HE // BC)

Vậy $\Delta OHE \backsim \Delta OBC$ (c–g–c)

2) Chứng minh tương tự câu a, ta có:

$\Delta AOD \backsim \Delta GOF$ (c – g – c)

cho ta $\widehat{AOD} = \widehat{GOF}$

mà $\widehat{AOD} + \widehat{DOG} = 180^0$ (hai góc kề bù)

nên $\widehat{GOF} + \widehat{DOG} = 180^0$ hay $\widehat{DOF} = 180^0$

Suy ra ba điểm D, O, F thẳng hàng.

Vậy DF đi qua O.

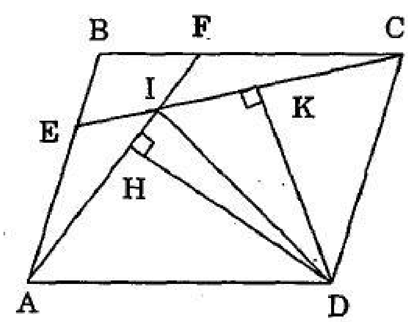
Chứng minh tương tự cũng có CE đi qua O.

Bài 5: Vẽ $FQ \perp AD$; $DH \perp AF$; $DK \perp CE$ ($Q \in AD$, $H \in AF$, $K \in CE$)

$S_{ABCD} = FQ.AD$

$S_{AFD} = \frac{1}{2} FQ.AD = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ (1)

Chứng minh tương tự ta có: $S_{DEC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ (2)



Từ (1) và (2) suy ra $S_{AFD} + S_{DEC}$

Mà $S_{AFD} = \frac{1}{2}$ DH.AF.$S_{DEC} = \frac{1}{2}$ DK.EC

Suy ra: $\frac{1}{2}$ DH.AF = $\frac{1}{2}$ DK.EC

mà AF = EC (gt)

nên DH = DK

Vậy D nằm trên tia phân giác của $\widehat{AIC}$.

Suy ra ID là tia phân giác của góc $\widehat{AIC}$.

BỘ ĐỀ 25

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 8 TRƯỜNG THCS NGUYỄN DU QUẬN 1, TPHCM – NĂM HỌC 1996 – 1997

(ĐỀ THỨ NHẤT)

Bài 1: Tìm số có hai chữ số mà bình phương của nó bằng lập phương của tổng các chữ số của nó.

Bài 2: Cho a, b, c là số đo ba cạnh của một tam giác.

Xác định hình dạng của tam giác để biểu thức sau:

$$A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{b+a-c}$$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 3:

Cho ba số x, y, z thỏa điều kiện $x + y + z = 0$ và $xy + yz + zx = 0$

Hãy tính giá trị của biểu thức : $S = (x-1)^{1995} + y^{1996} + (z+1)^{1997}$

Bài 4: Cho hình vuông ABCD cạnh a. Điểm M di động trên cạnh AB, N di động trên cạnh AD sao cho chu vi tam giác AMN luôn luôn không đổi và bằng 2a. Xác định vị trí của MN để diện tích tam giác CMN đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.

Bài 5: Cho tam giác ABC có $3\widehat{A} + 2\widehat{B} = 180^0$

Tính số đo các cạnh tam giác biết số đo ấy là ba số tự nhiên liên tiếp.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: Số cần tìm có dạng $\overline{ab}$, với a, b $\in$ N; $1 \le a \le 9; 0 \le b \le 9$

Theo đề bài ta có: $\overline{ab}^2 = (a+b)^3 \Leftrightarrow (10a+b)^2 = (a+b)^3$ (1)

Hệ thức (1) chứng tỏ $\overline{ab}$ là một số lập phương và (a + b) là số chính phương.

Do $10 \le \overline{ab} \le 99 \Rightarrow \overline{ab} = 27$ hoặc $\overline{ab} = 64$

Nếu $\overline{ab} = 27 \Leftrightarrow a + b = 9$, chính phương

Nếu $\overline{ab} = 64 \Leftrightarrow a + b = 10$, không chính phương (loại).

Vậy số phải tìm là $\overline{ab} = 27$.

Bài 2: *Cách 1:*

Đặt x = b + c – a, y = a + c – b và z = a + b – c

(x, y, z > 0 do a, b, c là độ dài ba cạnh tam giác)

Khi đó x + y + z = a + b + c

và $a = \dfrac{y+z}{2}$; $b = \dfrac{x+z}{2}$; $c = \dfrac{x+y}{2}$

Vậy $A = \dfrac{y+z}{2x} + \dfrac{x+z}{2y} + \dfrac{x+y}{2z} = \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)+\left(\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x}\right)+\left(\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}\right)\right]$

Mà $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x} \ge 2 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+y^2}{xy} \ge 2 \Leftrightarrow x^2+y^2 \ge 2xy$ (vì x, y > 0)

$\Leftrightarrow (x-y)^2 \ge 0$ (đúng)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$

Lý luận tương tự: $\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x} \ge 2$ và $\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y} \ge 2$

Suy ra $A \ge \dfrac{1}{2}(2+2+2) = 3$

$A = 3 \Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow b + c - a = a + b - c \Leftrightarrow a = b = c$

Vậy min A = 3 $\Leftrightarrow$ Tam giác ABC đều.

Cách 2:

Ta có: $A = \dfrac{a}{b+c-a} + \dfrac{b}{a+c-b} + \dfrac{c}{a+b-c}$

$= \left(\dfrac{a}{b+c-a}+\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{b}{a+c-b}+\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{c}{a+b-c}+\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{3}{2}$

$$= \frac{a+b+c}{2(b+c-a)} + \frac{a+b+c}{2(a+c-b)} + \frac{a+b+c}{2(a+b-c)} - \frac{3}{2}$$

$$= \frac{a+b+c}{2}.\left(\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{a+c-b} + \frac{1}{a+b-c}\right) - \frac{3}{2}$$

Với x, y, z > 0 ta có bất đẳng thức : $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9$

Thật vậy:

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9 \Leftrightarrow 3 + \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right) + \left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right) \geq 9$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right) + \left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}-2\right) + \left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}-2\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{xy} + \frac{(y-z)^2}{yz} + \frac{(x-z)^2}{xz} \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Vì x, y, z > 0 nên $\frac{(x-y)^2}{xy} \geq 0$; $\frac{(y-z)^2}{yz} \geq 0$; $\frac{(x-z)^2}{xz} \geq 0$

Đặt $x = b + c - a$; $y = a + c - b$ và $z = a + b - c$ (x, y, z > 0)

$\Leftrightarrow x + y + z = a + b + c$

thì $A = \frac{x+y+z}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) - \frac{3}{2} \geq \frac{9}{2} - \frac{3}{2} = 3$

$A = 3 \Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow a = b = c$

min $A = 3 \Leftrightarrow$ Tam giác ABC đều.

Bài 3:

Ta có: $x + y + z = 0 \Leftrightarrow (x + y + z)^2 = 0$

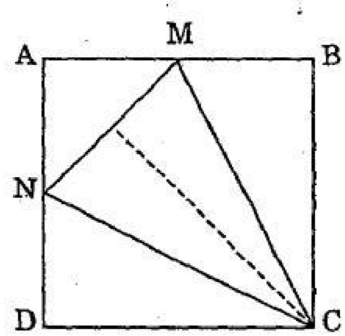
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 0$

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ (vì $xy + yz + zx = 0$)

$\Leftrightarrow x = y = z = 0$

Lúc đó: $S = (-1)^{1995} + 0^{1996} + 1^{1997} = -1 + 0 + 1 = 0$

Bài 4:



Ta có: CH = BC = DC = a

Và $\Delta CBM = \Delta CHM = \Delta CHN$

(xem lời giải bài 3, bộ đề 14)

Ta có $S_{BMC} = S_{CMH}$, $S_{CDN} = S_{CHN}$

$\Rightarrow S_{BMC} + S_{CDN} = S_{CMN}$

Suy ra: $2S_{CMN} = S_{ABCD} - S_{AMN}$

$\Rightarrow S_{CMN} = \frac{1}{2}(a^2 - S_{AMN}) \leq \frac{1}{2}a^2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} M \equiv A \\ N \equiv D \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} M \equiv B \\ N \equiv A \end{cases}$ thì max $S_{CMN} = \frac{a^2}{2}$

Bài 5:

Trên AB lấy điểm D : AD = AC

Vì $3\widehat{A} + 2\widehat{B} = 180^0 = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} \Rightarrow \widehat{C} = 2\widehat{A} + \widehat{B}$

$\Rightarrow \widehat{C} > \widehat{A}$ và $\widehat{C} > \widehat{B} \Rightarrow AB > BC$ và $AB > AC$

Vậy D nằm giữa A và B

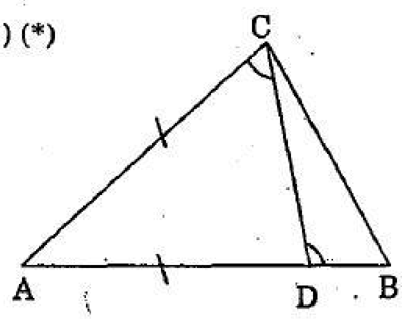
Ta có: ΔACD cân tại A nên $ADC = \dfrac{180^0 - \widehat{A}}{2}$

Mà $180^0 - \widehat{A} = 2(\widehat{A} + \widehat{B})$ (do $3\widehat{A} + 2\widehat{B} = 180^0$)

Suy ra $\widehat{ADC} = \widehat{A} + \widehat{B} \Rightarrow \widehat{CDB} = 180^0 - (\widehat{A} + \widehat{B}) = \widehat{C}$

Vậy $\Delta ABC \backsim \Delta CBD$ (g–g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BC}{BD} \Rightarrow BC^2 = AB.BD = AB(AB - AC)$ (*)



Do AB, BC, AC là ba số nguyên liên tiếp và AB = max {AB, BC, AC}

nên AB = BC + 1 hoặc AB = BC + 2

1) Nếu AB = BC + 1 thì

AC = BC − 1 thay vào (*) ta có;

$BC^2 - 2BC - 1 = 0$ phương trình này không có nghiệm nguyên.

2) Nếu AB = BC + 2 thì AC = BC + 1

Thay vào (*) ta có:

$BC^2 - BC - 2 = 0 \Leftrightarrow (BC - 2)(BC + 1) = 0 \Leftrightarrow BC = 2$ (do BC > 0)

Vậy BC = 2. AC = 3 và AB = 4

BỘ ĐỀ 26

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 8 TRƯỜNG THCS NGUYỄN DU QUẬN 1, TPHCM – NĂM HỌC 1996 – 1997

(ĐỀ THỨ HAI)

Bài 1: Chứng minh rằng nếu:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a + b + c} \text{ thì } (a + b)(b + c)c + a) = 0$$

Bài 2: Giải phương trình:

1) $x^4 + 7x^2 - 12x + 5 = 0$

2) $3|x - 1| - 2|x - 2| + |x - 1| = 4$

Bài 3: Hai đội bóng bàn của hai trường A và B thi đấu giao hữu. Biết rằng mỗi đối thủ của đội A phải lần lượt gặp các đối thủ của đội B một lần và số trận đấu gấp đôi tổng số đấu thủ của hai đội. Tính số đấu thủ của mỗi đội.

Bài 4: Cho hình bình hành ABCD. Trên cạnh CD và BC lấy điểm M, N, sao cho BM = DN. Gọi I là giao điểm của BM và DN. Chứng minh IA là phân giác của góc $\widehat{DIB}$.

Bài 5: Cho hình bình hành ABCD, với AC > DB. Gọi E và F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ C đến các đường thẳng AB và AD. Chứng minh rằng: $AB.AE + AD.AF = AC^2$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: Với a, b, c khác không và $a + b + c \neq 0$ ta có

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=0$$

(Xem lời giải bài 1, bộ đề 14)

Bài 2:

1) $x^4 + 7x^2 - 12x + 5 = 0$

$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 + 9x^2 - 12x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 + (3x - 2)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1=0 \\ 3x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ x=\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right. \\ x=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Phương trình vô nghiệm.

2) Ta lập bảng xét dấu:

x		1		2		3	
$3\lvert x-3\rvert$	$-3x+9$		$-3x+9$		$-3x+9$	0	$3x+9$
$-2\lvert x-2\rvert$	$2x-4$		$2x-4$	0	$-2x+4$		$-2x+4$
$\lvert x-1\rvert$	$1-x$	0	$x-1$		$x-1$		$x-1$

- Với $x < 1$: phương trình có dạng $-2x + 6 = 4 \Leftrightarrow x = 1$ (loại)
- Với $1 \leq x < 2$: phương trình có dạng: $0x + 4 = 4 \Leftrightarrow 0x = 0$ phương trình có nghiệm $1 \leq x < 2$
- Với $2 \leq x < 3$: phương trình có dạng $-4x + 12 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ (nhận)
- Với $x \geq 3$: phương trình có dạng: $2x - 6 = 4 \Leftrightarrow x = 5$ (nhận)

Vậy phương trình có nghiệm : $1 \leq x \leq 2$; $x = 5$

Bài 3: Gọi a và b là số đối thủ ở đội trường A và trường B, với $a, b \in N^*$

Theo đề bài ta có: $ab = 2(a + b) \Leftrightarrow (a - 2)(b - 2) = 4$

Nhận xét: Do a, b $\in$ N $\Rightarrow$ a – 2 $\in$ Z; b – 2 $\in$ Z

a – 2	– 1	– 2	2	4
b – 2	– 4	– 2	2	1
a	1	0	4	6
b	– 2	0	4	3
		loại		nhận

Suy ra (a – 2)|4 vai trò a, b bình đẳng nên không mất tính tổng quát, giả sử a $\geq$ b.

Vậy (a;b) = (4; 4); (6; 3); 3; 6)

Trả lời: số đấu thủ của hai đội A, B có thể là (3,6) ; (4,4) hoặc (6,3).

Bài 4: Sử dụng tính chất hai tam giác có chung đáy còn hai đỉnh còn lại nằm trên đường thẳng song song với đáy chung thì có diện tích bằng nhau.

Thật vậy, xét ΔABC và $\Delta A'BC$ có AA'//BC

Kẻ AH $\perp$ BC và A'K $\perp$ BC

$\Rightarrow$ AH // A'K, do AA'//BC nên AH = A'K

Ta có: $\begin{cases} S_{ABC} = \dfrac{1}{2} BC.AH \\ S_{A'BC} = \dfrac{1}{2} BC.A'K \end{cases} \Rightarrow S_{ABC} = S_{A'BC}$

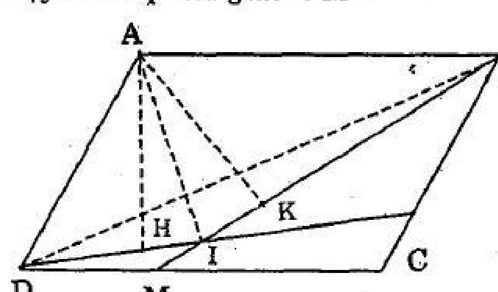
Kẻ AH $\perp$ DN, AK $\perp$ BM

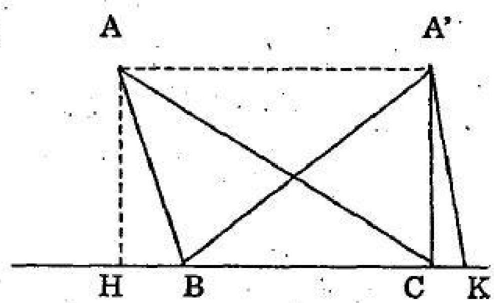
Ta có: $\begin{cases} S_{MAB} = S_{ABD} \text{ (chung AB, DM//AB)} \\ S_{NAC} = S_{ABD} \text{ (chung AD, BN//AD)} \end{cases} \Rightarrow S_{MAB} = S_{NAD}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}AK.MB = \frac{1}{2}AH.ND \Rightarrow AK = AH \text{ (do MB = ND (gt))}$$

nên A ở trên đường phân giác của DIB.

Vậy IA là phân giác $\widehat{DIB}$.





Nhận xét: Khi cho M, N di động trên DC và BC của ΔBCD saó cho MB = ND thì IA là phân giác của $\widehat{DIB}$ luôn đi qua A.

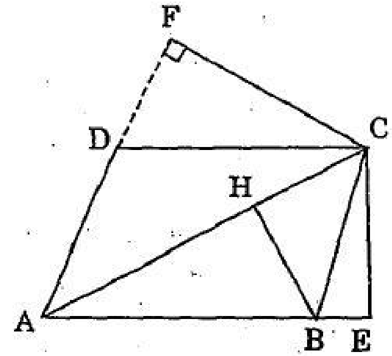
Từ đó ta có bài toán: Cho ΔABC, hai điểm M và N theo thứ tự di động trên hai cạnh AB và AC sao cho BN = CM. Gọi I là giao điểm của BN và CM. Chứng minh rằng đường phân giác trong của BIC luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 5: Kẻ BH ⊥ AC, do AC > AB nên H nằm giữa A, C

Xét ΔACE và ΔABH có $\widehat{AHB} = \widehat{AEC} = 90^0$, $\widehat{CAE}$ chung

$\Rightarrow \Delta ACE \backsim \Delta ABH$ (g–g)

$\Rightarrow \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AE}{AH} \Rightarrow AE.AB = AH.AC$ (1)



Vì AF // BC nên $\widehat{HCB} = \widehat{CAF}$ (so le trong)

Xét ΔACB và ΔACF có:

$\widehat{AFC} = \widehat{CHB} = 90^0$, $\widehat{HCB} = \widehat{CAF}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta CBH \backsim \Delta ACF$ (g–g)

$\Rightarrow \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AF}{CH} \Rightarrow \dfrac{AC}{AD} = \dfrac{AF}{CH}$

(Vì AD = BC – cạnh đối hình bình hành)

$\Rightarrow AD.AF = AC.CH$ (2)

Từ (1) và (2) có: $AE.AB + AD.AF$

$= AH.AC + CH.AC = (AH + CH)AC = AC^2$

BỘ ĐỀ 27

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUẬN 1, TPHCM NĂM HỌC 1996 – 1997

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử:

1) $2a^2b + 4ab^2 - a^2c + ac^2 - 4b^2c + 2bc^2 - 4abc$

2) $x^2 + x - 6$

Bài 2: Cho a, b, c là ba số đôi một khác nhau, chứng minh rằng:

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-a)(b-c)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a}$$

Bài 3: Giải phương trình : $3|x-3| - 2|x-2| + |x-1| = 4$

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông cân tại đỉnh A. Lấy điểm M tùy ý trên cạnh AC. kẻ tia Ax vuông góc với BM. Gọi H là giao điểm của Ax với BC và K là điểm đối xứng với C qua H. Kẻ tia Ky vuông góc với BM. Gọi I là giao điểm của Ky với AB. Tính góc AIM.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $2a^2b + 4ab^2 - a^2c + ac^2 - 4b^2c + 2bc^2 - 4abc$

$= 2a^2b + 4ab^2 - a^2c - 2abc + ac^2 + 2bc^2 - 4b^2c - 2abc$

$= 2ab(a + 2b) - ac(a + 2b) + c^2(a + 2b) - 2bc(a + 2b)$

$= (a + b)(2ab - ac + c^2 - 2bc) = (a + 2b)[a(2b - c) - c(2b - c)]$

$= (a + 2b)(2b - c)(a - c)$

2) $x^2 + x - 6 = x^2 - 2x + 3x - 6 = x(x - 2) + 3(x - 2) = (x + 3)(x - 2)$

Bài 2: Với a, b, c là ba số khác nhau đôi một.

Ta có:

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}=\frac{(a-c)-(a-b)}{(a-b)(a-c)}=\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a-c}=\frac{1}{a-b}+\frac{1}{c-a}$$

$$\frac{c-a}{(b-a)(b-c)}=\frac{(b-a)-(b-c)}{(b-a)(b-c)}=\frac{1}{b-c}-\frac{1}{b-a}=\frac{1}{b-c}+\frac{1}{a-b}$$

$$\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{(c-b)-(c-a)}{(c-a)(c-b)}=\frac{1}{c-a}-\frac{1}{c-b}=\frac{1}{c-a}+\frac{1}{b-c}$$

Cộng vế với vế các đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-a)(b-c)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}$$

Bài 3: (Xem lời giải bài 2, bộ đề 26)

Bài 4:

Cách 1: Gọi D là giao điểm của tia KI và đường AC.

Ta có: $IK \perp BM$, $AH \perp BM$ (gt) nên $IK // AH$

$K = S_H(C)$ nên $HK = HC$

$\Rightarrow AD = AB = AC$

$\Rightarrow \Delta BDC$ vuông tại B, nghĩa là $BC \perp BD$

Trong ΔBDM có:

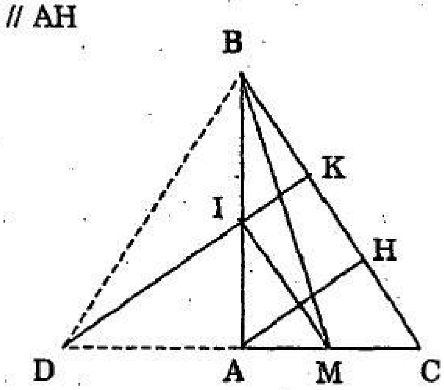
$AB \perp DM$, $DK \perp BM$ và $AB \cap DK = \{I\}$

nên là I trực tâm của tam giác

$\Rightarrow IM \perp BD$

Suy ra $IM // BC$ (vì IM, BC cùng vuông góc BD)

$\Rightarrow \widehat{AIM} = \widehat{ABC} = 45^0$ (đồng vị)



Cách 2: Ta có $IK \perp MB$; $AH \perp MB$ (gt) nên $IK//AH$

Trên tia đối của tia AB lấy F sao cho $AF = AI$

Mà $K = S_H(C) \Rightarrow HK = HC$

Vậy $CF//HA//KI$ (Định lý Talet)

Vì $BM \perp AH$ (gt) $\Rightarrow BM \perp CF$

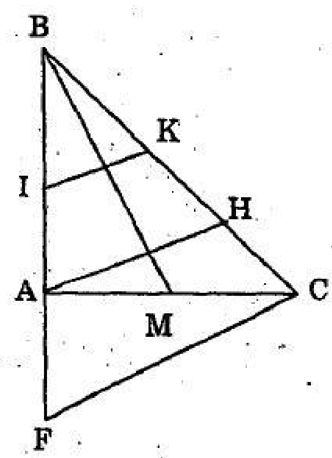
Xét ΔABM và ΔACF có: $AB = AC$ (do ΔABC vuông cân tại A)

$\widehat{BAC} = \widehat{CAF} = 90^0$; $\widehat{ABM} = \widehat{ACF}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$\Rightarrow \Delta ABM = \Delta ACF$ (g–c–g)

$\Rightarrow AM = AF = AI$

Vậy ΔIAM vuông cân tại A, nên $\widehat{AIM} = 45^0$.



BỘ ĐỀ 28

ĐỀ THI HỌC BỔNG TRƯỜNG THCS NGUYỄN DU
QUẬN I TPHCM – THÁNG 11 NĂM HỌC 1996 – 1997

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử:

1) $x^4 + 1997x^2 + 1996x + 1997$

2) $bc(b + c) + ca(c + a) + ba(a + b) + 2abc$

Bài 2: Tính giá trị của biểu thức $A = yz + zx + xy + 2xyz$ với

$$x = \frac{a}{b+c}; y = \frac{b}{a+c}; z = \frac{c}{b+a}$$

Bài 3: Tìm bốn số tự nhiên liên tiếp, biết tích của chúng là 57120.

Bài 4: Cho hình vuông ABCD. Trên các tia đối CB và DC, lấy các điểm M, N sao cho DN = BM. Các đường thẳng song song kẻ từ M với AN và từ N với AM cắt nhau tại F. Chứng minh:

1) Tứ giác ANFM là hình vuông.

2) Điểm F nằm trên tia phân giác của MCN và $\widehat{ACF} = 90^0$.

3) Ba điểm B, O, D thẳng hàng và tứ giác BOFC là hình thang (O là trung điểm AF).

Bài 5: Cho đoạn thẳng PQ = a. Dựng một hình vuông PABC sao cho P là đỉnh, Q là trung điểm của AB.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

Cách 1: $x^4 + 1997x^2 + 1996x + 1997$

$= (x^4 - x) + 1997x^2 + 1997x + 1997 = x(x^3 - 1) + 1997(x^2 + x + 1)$

$= x(x - 1)(x^2 + x + 1) + 1997(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x - 1997)$

Cách 2: $x^4 + 1997x^2 + 1996x + 1997$

$= (x^4 + x^2 + 1) + (1996x^2 + 1996x + 1996)$

$= [(x^4 + 2x^2 + 1) - x^2] + 1996(x^2 + x + 1)$

$= [(x^2 + 1)^2 - x^2] + 1996(x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + 1996(x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1997)$

2) *Cách 1:* $bc(b + c) + ac(a + c) + ab(a + b) + 2abc$

$= bc(b + c) + ac(a + c) + abc + ab(a + b) + abc$

$= bc(b + c) + ac(a + b + c) + ab(a + b + c)$

$= bc(b + c) + a(a + b + c)(b + c)$

$= (b + c)(bc + a^2 + ab + ac) = (b + c)[b(a - c) + a(a + c)]$

$= (a + b(b + c)(a + c)$

Cách 2: $bc(b + c) + ac(a + c) + ab(a + b) + 2abc$

$= bc(b + c) + a^2c + ac^2 + a^2b + ab^2 + 2abc$

$= bc(b + c) + (a^2c + a^2b) + (ac^2 + ab^2 + 2abc)$

$= bc(b + c) + a^2(b + c) + a(c^2 + b^2 + 2bc)$

$= bc(b + c) + a^2(b + c) + a(b + c)^2 = (b + c)(bc + a^2 + ab + ac)$

$= (b + c)[b(a + c) + a(a + c)] = (a + b)(b + c)(a + c)$

Bài 2: $A = xy + yz + zx + 2xyz$, với $(a + b)(b + c)(a + c) \neq 0$

Thế các giá trị x, y, z vào:

$$A = \frac{ab}{(b+c)(c+a)} + \frac{bc}{(c+a)(a+b)} + \frac{ac}{(b+c)(c+a)} + \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$= \frac{ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c) + 2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$= \frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{(a+b)(b+c)(a+c)} = 1 \text{ (dựa vào kết quả bài 1)}$$

Bài 3: Gọi n, n + 1, n + 2 và (n + 3) là bốn số tự nhiên liên tiếp.

Theo đề bài, ta có: $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) = 57120$

$\Leftrightarrow (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) = 57120$

$\Leftrightarrow (n^2 + 3n + 1 - 1)(n^2 + 3n + 1 + 1) = 57120$

$\Leftrightarrow (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) = 57120$

$\Leftrightarrow (n^2 + 3n + 1 - 1)(n^2 + 3n + 1 + 1) = 57120$

$\Leftrightarrow (n^2 + 3n + 1)^2 - 1 = 57120$

$\Leftrightarrow (n^2 + 3n + 1)^2 = 57121 = 239^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n^2 + 3n + 1 = 239 \\ n^2 + 3n + 1 = -239 \end{array}\right.$$

(vô nghiệm vì $n \in N$ nên $n^2 + 3n + 1 > 0$)

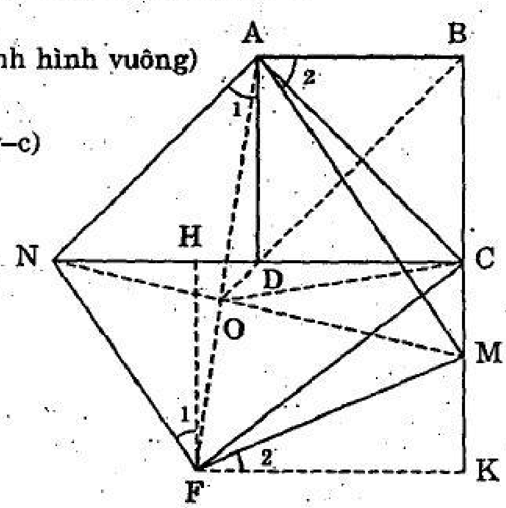
$\Leftrightarrow n^2 + 3n - 238 = 0 \Leftrightarrow n^2 + 17n - 14n - 238 = 0$

$\Leftrightarrow n(n + 17) - 14(n + 17) = 0\ (n + 17)(n - 14) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = -17 \text{ (loại)} \\ n = 14 \text{ (nhận)} \end{array}\right.$$

Vậy bốn số tự nhiên liên tiếp cần tìm là 14, 15, 16 và 17.

Bài 4: 1) Tứ giác ANFM là hình vuông



Xét ΔDAN và ΔBAM có AD = AB (cạnh hình vuông)

$\widehat{ADN} = \widehat{ABM} = 90^0$

BM = DN (gt) $\Rightarrow \Delta DAN = \Delta BAM$ (c–g–c)

Suy ra AN = AM và $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

Ta có: $\widehat{NAM} = \hat{A}_1 + DAM$

$= \hat{A}_2 + \widehat{DAM} = \widehat{DAB} = 90^0$

Tứ giác ANFM có: MF//AN, AM//NF (gt), $\widehat{NAM} = 90^0$

nên tứ giác ANFM là hình chữ nhật, mặt khác AN = AM

$\Rightarrow$ ANFM là hình vuông

2) F $\in$ là tia phân giác $\widehat{MCN}$; $\widehat{ACF} = 90^0$ kẻ FH $\perp$ CN và FK $\perp$ BM

Suy ra tứ giác CHFK là hình chữ nhật ($\widehat{H} = \widehat{C} = \widehat{K} = 90^0$)

nên FH $\perp$ FK

Vậy $\widehat{F}_1 = \widehat{F}_2$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)

Xét ΔHFN và ΔKFM có: $\widehat{NHF} = \widehat{MKF} = 90^0$

NF = MF (cạnh hình vuông)

$\widehat{F}_1 = \widehat{F}_2$ (chứng minh trên)

Do đó: $\Delta HFN = \Delta KFM$ suy ra FH = FK

Vậy CF là phân giác $\widehat{NCM}$, nghĩa là F thuộc tia phân giác của $\widehat{MCN}$.

Do tứ giác ABCD là hình vuông nên CA là phân giác $\widehat{NCB}$.

Suy ra $\widehat{ACF} = 90^0$ (hai tia phân giác của hai góc kề bù).

3) Ba điểm B, O, D thẳng hàng và tứ giác BOFC hình thang?

Hình vuông ANFM có hai đường chéo AF và MN cắt nhau tại trung điểm mỗi đường mà O là trung điểm AF nên O cũng là trung điểm điểm của MN.

ΔCMN có $\widehat{C} = 90^0$, ON = OM $\Rightarrow$ OC = $\dfrac{MN}{2}$ = OA $\Rightarrow$ O $\in$ trung trực của AC,

suy ra O $\in$ BD là trung trực của AC, nghĩa là ba điểm O, B, D thẳng hàng.

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \text{ (tính chất đường chéo hình vuông)} \\ CF \perp AC \text{ (chứng minh trên)} \end{cases} \Rightarrow OB \parallel CF$

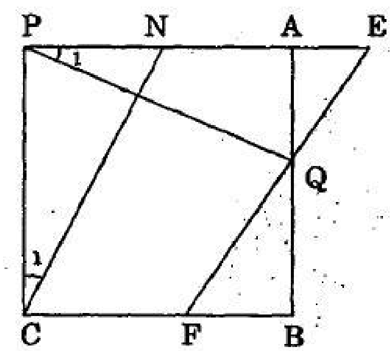
Vậy tứ giác BOFC là hình thang.

Bài 5:

– Qua Q dựng một đoạn thẳng EF $\perp$ PQ, sao cho EQ = QF = $\dfrac{PQ}{2} = \dfrac{a}{2}$

– Dựng QA $\perp$ PE, từng F dựng FB $\perp$ AQ.

– Dựng PC $\perp$ FB



PABC là hình vuông cần dựng.

Thật vậy, theo cách dựng PABC là hình chữ nhật.

Từ C kẻ CN // EF

suy ra CN = EF = 2QE = a = PQ

Do PQ $\perp$ EF

nên $\widehat{C}_1 = \widehat{P}_1$

(góc có cạnh tương ứng vuông góc)

Suy ra $\Delta PNC = \Delta AQP$

($\widehat{P} = \widehat{A} = 90^0$, CN = PQ – a; $\widehat{C}_1 = \widehat{P}_1$)

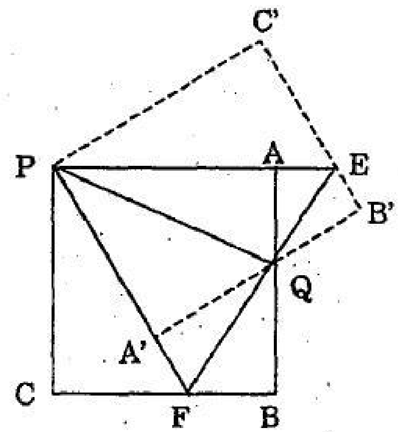
$\Rightarrow$ PA = PC

Vậy hình chữ nhật PABC có hai cạnh kề PA = PC nên PABC là hình vuông.

Mặt khác $\Delta BQF = \Delta AQE$

($\widehat{A} = \widehat{B} = 90^0$, QF = QE = $\frac{a}{2}$, $\widehat{FQB} = \widehat{AQE}$).

Suy ra QA = QB, nghĩa là Q là trung điểm AB. Bài toán có hai nghiệm, hình đối xứng nhau qua PQ.



BỘ ĐỀ 29

ĐỀ THI HỌC BỔNG TRƯỜNG THCS NGUYỄN DU QUẬN 1, TP.HCM THÁNG 11 NĂM HỌC 1996–1997

(ĐỀ DỰ TRỮ)

Bài 1: Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa điều kiện $a^2 - b^2 = c^2 - d^2$. Chứng minh S = a + b + c + d là hợp số.

Bài 2: Chứng minh rằng nếu a, b là hai số dương thỏa điều kiện: a + b = 1 thì:

$$\frac{a}{b^3 - 1} - \frac{b}{a^3 - 1} = \frac{2(b - a)}{a^2b^2 + 3}$$

Bài 3: Phân tích đa thức thành phân tử: $x^4 + 1996x^2 + 1995x + 1996$

Bài 4: Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh CD lấy một điểm M bất kỳ. Các tia phân giác của các góc BAM và DAM lần lượt cắt cạnh BC tại E và cắt cạnh CD tại F. Chứng minh AM vuông góc với EF.

Bài 5: Cho tam giác ABC (AB khác AC). Trên tia đối BA lấy điểm D, trên tia đối của tia CA lấy điểm E sao cho BD = CE. Gọi N là trung điểm của cạnh BC. Vẽ hình bình hành ECNK. Gọi M là giao điểm của DE và FK. Tìm quỹ tích điểm M khi D và E di động.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

Từ $a^2 - b^2 = c^2 - d^2 \Leftrightarrow a^2 + d^2 = b^2 + c^2$

Xét hiệu: $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (a + b + c + d)$

$= (a^2 - a) + (b^2 - b) + (c^2 - c) + (d^2 - d) \vdots 2$ vì $\forall x \in Z$

Ta có: $x^2 - x = x(x - 1) \vdots 2$

Thay $a^2 + d^2 = b^2 + c^2$, ta có: $2(a^2 + d^2) - (a + b + c + d) \vdots 2$

mà $2(a^2 + d^2) \vdots 2 \Rightarrow (a + b + c + d) \vdots 2$

Vì a + b + c + d > 2 suy ra a + b + c + d là hợp số.

Bài 2: Với a, b > 0 : a + b = 1

Biến đổi:

$$\frac{a}{b^3-1}-\frac{b}{a^3-1}=\frac{a(a^3-1)-b(b^3-1)}{(b^3-1)(a^3-1)}$$

$$=\frac{(a^4-b^4)-(a-b)}{(b-1)(b^2+b+1)(a-1)(a^2+a+1)}$$

$$=\frac{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)-(a-b)}{ab(b^2+b+1)(a^2+a+1)} \text{ (do } a+b=1)$$

$$\frac{(a-b)(a^2+b^2-1)}{ab[a^2b^2+ab(a+b)+a^2+b^2+ab+(a+b+1]}$$

$$=\frac{(a-b)(a^2-a+b^2-b)}{ab[a^2b^2+(a+b)^2+2]}$$

$$=\frac{(a-b)[a(a-1)+b(b-1)]}{ab(a^2b^2+3)}=\frac{(a-b)[a(-b)+b(-a)]}{ab(a^2b^2+3)}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}$$

Bài 3:

$x^4+1996x^2+1995x+1996$

$=x^4+x^3+x^2+1995(x^2+x+1)-(x^3-1)$

$=x^2(x^2+x+1)+1995(x^2+x+1)-(x-1)(x^2+x+1)$

$=(x^2+x+1)(x^2-x+1996)$

Bài 4: *Cách 1:* Bằng phương pháp phản chứng

Giả sử ngược lại EF không vuông góc với AM vẽ EP ⊥ AM và FQ ⊥ AM

Xét ΔABE và ΔAPE có: $\widehat{A}_1=\widehat{A}_2$; AE chung: $\widehat{B}=\widehat{P}=90^0$

⇒ ΔABE = ΔAPE (trường hợp đặc biệt)

Suy ra AB = AP (1)

Tương tự ta có: ΔADF = ΔAQF

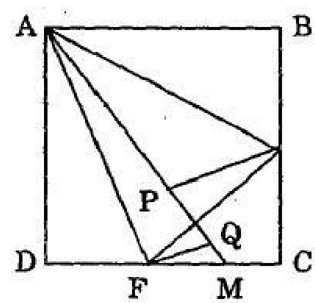
(trường hợp đặc biệt)

Suy ra AD = AQ (2)

Từ (1) và (2) cho: AP = AQ ⇒ P ≡ Q ⇒ AM ⊥ EF (vô lý)

vì trái với giả sử EF không vuông góc AM.

Chứng tỏ EF ⊥ AM.



Cách 2: Trên tia đối của tia DC lấy điểm K sao cho DK = BE.

Xét ΔABE và ΔADK có: AB = AD

$\widehat{ABE}=\widehat{ADK}$ $(=90^0)$

BE = DK

Do đó ΔABE = ΔADK (c–g–c)

Suy ra AE = AK, $\widehat{ABE}=\widehat{DAK}$

Ta có: $\widehat{BAE}=\widehat{DAK}$, $\widehat{BAE}=\widehat{EAM}$

(AE là tia phân giác BAM)

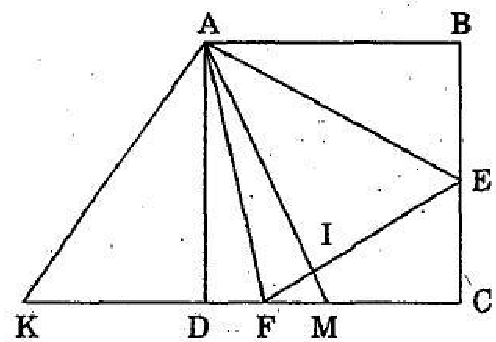
Do đó $\widehat{DAK} = \widehat{MAE}$

$\widehat{DAF} = \widehat{FAM}$

(AF là tia phân giác DAM)

Suy ra: $\widehat{KAF} = \widehat{EAF}$

và $\widehat{AFD} = \widehat{AFI}$



Xét ΔAFK và ΔAFE có:

$AK = AE$, $\widehat{KAF} = \widehat{EAF}$, AF chung

Do đó: $\Delta AFK = \Delta AFE$

Suy ra $\widehat{AFD} = \widehat{AFI}$ (AM cắt EF tại I)

Xét ΔAFD và ΔAFI có $\widehat{DAF} = \widehat{FAM}$, AF chung, $\widehat{AFD} = \widehat{AFL}$

Do đó $\Delta AFD = \Delta AFI$ (g–c–g)

Suy ra: $\widehat{ADF} = \widehat{AIF}$

Mà $\widehat{ADF} = 90^0$

Do đó $\widehat{AIF} = 90^0$

Suy ra $EF \perp AM$

Bài 5: ***Thuận:***

DBNF là hình bình hành nên BN // DF, BN = DF

ECNK là hình bình hành nên CN // EK; CN = EK.

Vì NB = NC, DF // EK; DF = EK.

Suy ra DFEK là hình bình hành.

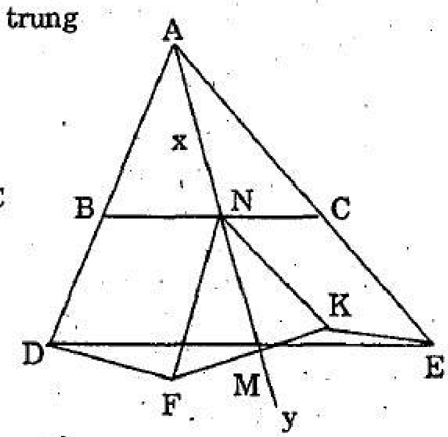
Suy ra hai đường chéo DE và KF cắt nhau tại trung điểm M của mỗi đường. Vậy M là trung điểm KF. Dễ thấy ΔKNF cân (NK = NF),

suy ra NM là phân giác $\widehat{FNK}$ của ΔFNK.

Dễ thấy $\widehat{BAC} = \widehat{FNK}$

Suy ra NM // Ax là tia phân giác của $\widehat{BAC}$

Do N cố định suy ra M $\in$ tia Ny // Ax.



Giới hạn:

Khi $D \equiv B$ thì $E \equiv C$, do đó $M \equiv N$

Khi D chạy trên tia đối của tia BA thì M chạy trên tia Ny.

Vậy M thuộc tia Ny cố định.

Đảo: Lấy M thuộc tia Ny. Qua M vẽ $d \perp MN$, d cắt đường thẳng song song với AB tại F, d cắt đường thẳng song song với AC tại K.

Vẽ FD // BN ($D \in AB$), vẽ KE // NC cắt AC tại E, dễ thấy BDFN và CEKN là các hình bình hành, DB = EC và M là giao điểm của DE và FK.

Kết luận: Quỹ tích là tia Ny.

BỘ ĐỀ 30

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI GIẢI THƯỞNG LÊ QUÝ ĐÔN QUẬN TÂN BÌNH, TPHCM – NĂM HỌC 1997–1998

Bài 1: Giải các phương trình và các bất phương trình sau:

1) $\dfrac{3}{4x-3}+\dfrac{3}{1-3x}=\dfrac{-3}{(3-4x)(3x-1)}$

2) $\dfrac{x-1}{2}\ge\dfrac{4+x}{2}-2$

3) $\dfrac{x-a+1}{x-a}-\dfrac{x-b+1}{x-b}=\dfrac{a}{(x-a)(x-b)}$ với a, b là hằng số.

Bài 2:

1) Cho biểu thức: $B=\dfrac{|x+10|}{x^4+9x^3-9x^2+9x-10}$

a/ Tìm điều kiện có nghĩa của B

b/ Rút gọn B.

2) Chứng minh rằng $A = n^8 + 4n^7 + 6n^6 + 4n^5 + n^4$ chia hết cho 16; với mọi n là số nguyên.

Bài 3: Cho hình thang vuông ABCD có đáy CD = 9 (cm); đáy AB = 4 (cm); cạnh xiên BC = 13 (cm). Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho BM = BA. Đường thẳng vuông góc với BC tại M cắt AD tại N.

1) Chứng minh: Điểm N nằm trên tia phân giác của góc ABM.

2) Chứng minh rằng: $BC^2 = BN^2 + ND^2 + DC^2$

3) Tính diện tích hình thang ABCD.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $\dfrac{3}{4x-3}+\dfrac{3}{1-3x}=\dfrac{-3}{(3-4x)(3x-1)}$ (1)

Phương trình (1) có nghĩa khi: $\begin{cases}4x-3\ne0\\1-3x\ne0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x\ne3\\3x\ne1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne\dfrac{3}{4}\\x\ne\dfrac{1}{3}\end{cases}$

Với điều kiện trên phương trình (1) tương đương với:

$3(1-3x)+3(4x-3)=-3 \Leftrightarrow 3-9x+12x-9=-3$

$\Leftrightarrow 3x=3 \Leftrightarrow x=1$ (nhận)

Vậy phương trình (1) có nghiệm là $x = 1$.

2) $\dfrac{x-1}{2}\ge\dfrac{4+x}{2}-2 \Leftrightarrow x-1\ge4+x-4 \Leftrightarrow 0x\ge1 \Leftrightarrow x\in\varnothing$

Vậy bất phương trình vô nghiệm.

3) $\dfrac{x-a+1}{x-a}-\dfrac{x-b+1}{x-b}=\dfrac{a}{(x-a)(x-b)}$ (1) (a, b là hằng số).

Phương trình (1) có nghĩa khi: $\begin{cases} x-a\neq 0 \\ x-b\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq a \\ x\neq b\end{cases}$

Với điều kiện trên phương trình (1) tương đương với:

$$1+\frac{1}{x-a}-1-\frac{1}{x-b}=\frac{a}{(x-a)(x-b)} \Leftrightarrow \frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}=\frac{a}{(x-a)(x-b)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-b-x+a}{(x-a)(x-b)}=\frac{a}{(x-a)(x-b)} \Leftrightarrow \frac{0x+a-b}{(x-a)(x-b)}=\frac{a}{(x-a)(x-b)}$$

$\Leftrightarrow 0x = b$

- Nếu $b = 0$, ta có x tùy ý và $x \neq a$, $x \neq b$
- Nếu $b \neq 0$, ta có $x \in \varnothing$

  Vậy nếu $b = 0$, phương trình (1) nghiệm đúng với mọi giá trị x khác a và x khác b.
- Nếu $b \neq 0$, phương trình (1) vô nghiệm.

Bài 2:

1) $B=\dfrac{|x+10|}{x^4+9x^3-9x^2+9x-10}$

a/ Giải phương trình: $x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 9x - 10 = 0$

$\Leftrightarrow x^4 - 1 + 9x^3 - 9x^2 + 9x - 9 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 1) + 9x^2(x - 1) + 9(x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) + 9x^2(x - 1) + 9(x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1 + 9x^2 + 9) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x^3 + 10x^2 + x + 10) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)[x^2(x + 10) + (x + 10)] = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 10)(x^2 + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x+10=0 \\ x^2+1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-10 \\ x\in\phi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-10\end{array}\right.$$

Vậy biểu thức B có nghĩa khi $x \neq 1$ và $x \neq -10$.

b/ Ta có: $B=\dfrac{|x+10|}{x^4+9x^3-9x^2+9x-10}$ ($x \neq 1$ và $x \neq -10$)

$$=\begin{cases} \dfrac{x+10}{(x-1)(x+10)(x^2+1)} & \text{với } x>-10 \text{ và } x\neq 1 \\ \dfrac{-(x+10)}{(x-1)(x+10)(x^2+1)} & \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{1}{(x-1)(x^2+1)} & \text{với } x>-10 \text{ và } x\neq 1 \\ \dfrac{-1}{(x-1)(x^2+1)} & \text{với } x<-10\end{cases}$$

2) $A = n^8 + 4n^7 + 6n^6 + 4n^5 + n^4 = n^4(n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1)$

$= n^4(n^4 + n^3 + 3n^3 + 3n^2 + 3n^2 + 3n + n + 1)$

$= n^4[n^3(n + 1) + 3n^2(n + 1) + 3n(n + 1) + (n + 1)]$

$= n^4(n + 1)(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) = n^4(n + 1)(n + 1)^3$

$= n^4 (n + 1)^4 = [n(n + 1)]^4$

Vì n(n + 1) là tích của hai số nguyên liên tiếp, nên phải có một thừa số chia hết cho 2.

Do đó $[n(n + 1)]^4 \vdots 2^4$; $2^4 = 16$. Vậy $A \vdots 16$

Bài 3:

1) Xét hai tam giác vuông ABN và MBN ta có: AB = BM, BN chung

Vậy $\Delta ABN = \Delta MBN$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

Suy ra $\widehat{ABN} = \widehat{MBN}$

hay BN là tia phân giác của góc ABM.

2) Ta có: MC = CB – BM = 13 – 4 = 9 (cm)

Xét hai tam giác vuông CDN và CMN ta có:

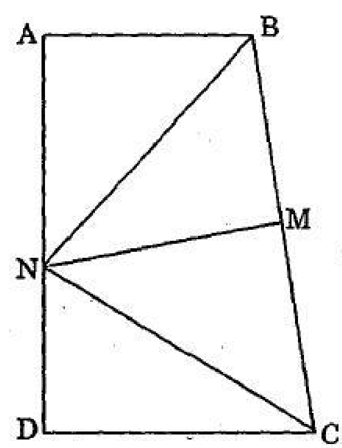
CM = CD (= 9 cm)

CN = CN

Vậy $\Delta CDN = \Delta CMN$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

Suy ra $\widehat{MNC} = \widehat{DNC}$, cho ta NC là tia phân giác của góc $\widehat{DNM}$.

Mặt khác $\widehat{ANB} = \widehat{MNB}$ ($\Delta ABN = \Delta MBN$), cho ta NB là tia phân giác của góc ANM.



Suy ra NB ⊥ NC (tính chất hai tia phân giác của hai góc kề bù) hay ΔBNC vuông tại N.

Áp dụng định lý Pytagó vào các tam giác vuông BNC và DNC, ta có:

$BC^2 = BN^2 + NC^2 = BN^2 + ND^2 + DC^2$

3) $\Delta MNB \backsim \Delta MCN$

$\Rightarrow \dfrac{MN}{MC} = \dfrac{MB}{MN}$

$\Rightarrow MN^2 = MB.MC = 4.9 = 36 = 6^2$

Suy ra MN = 6 cm

Mà ta có: AN = MN ($\Delta ABN = \Delta MBN$)

và ND = MN ($\Delta MNC = \Delta DNC$)

Suy ra AN + ND = 2MN

hay AD = 12cm

$S_{ABCD} = \dfrac{(AB + CD).AD}{2} = \dfrac{(4 + 9).12}{2} = 78\ (cm^2)$

BỘ ĐỀ 31

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN 6, TPHCM – NĂM HỌC 1997–1998

Bài 1:

1) Giải phương trình:

$$(2x^2 + x - 1998)^2 + 4(x^2 - 3x - 950)^2 = 4(2x^2 + x - 1998)(x^2 - 3x - 950)$$

2) Tổng tất cả các góc trong và một trong các góc ngoài của một đa giác có số đo là 47058.5^0. Hỏi đa giác đó có bao nhiêu cạnh ?

Bài 2:

1) Tính giá trị của đa thức: $f(x) = 6x^4 - 7x^3 - 22x^2 + 7x + 2004$ với x là nghiệm của phương trình $6x^2 + 5x = 6$

2) Chứng minh bất đẳng thức: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$

Bài 3: Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a}$$

Bài 4: Cho tam giác ABC có AB = 4cm, BC = 6cm, CA = 8cm. Các đường phân giác trong AD và BE cắt nhau tại I.

1) Tính độ dài các đoạn thẳng BD và CD.

2) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.
Chứng minh IG // BC và suy ra độ dài của đoạn thẳng IG.

Bài 5: Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 30^0$. Dựng bên ngoài tam giác đều BCD. Chứng minh $AD^2 = AB^2 + AC^2$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $(x^2 + x - 1998)^2 + 4(x^2 - 3x - 950)^2$
$= 4(2x^2 + x - 1998)(x^2 - 3x - 950)$
$\Leftrightarrow (2x^2 + x - 1998)^2 - 4(2x^2 + x - 1998)$
$(x^2 - 3x - 950) + 4(x^2 - 3x - 950)^2 = 0$
$\Leftrightarrow [(2x^2 + x - 1998) - 2(x^2 - 3x - 950)]^2 = 0 \Leftrightarrow (7x - 98)^2 = 0$
$\Leftrightarrow 7x - 98 = 0 \Leftrightarrow 7x = 98 \Leftrightarrow x = 14$

Vậy phương trình có một nghiệm là x = 14

2) Gọi n là số cạnh của đa giác.

Tổng số đo các góc trong của đa giác bằng $(n - 2).180^0$

Vì tổng các góc trong và một trong các góc ngoài của đa giác có số đo là $47058,5^0$ nên ta có: $(n - 2).180^0 + \alpha = 47058,5^0$

(α là số đo một góc ngoài của đa giác với $0^0 < \alpha < 180^0$)

$(n - 2).180^0 + \alpha = 261.180^0 + 78,5^0$

$\Rightarrow n - 2 = 261 \Rightarrow n = 263$

Vậy số cạnh của đa giác là 263.

Bài 2:

1) Giải phương trình: $6x^2 + 5x = 6$ (1)

$(1) \Leftrightarrow 6x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 9x - 4x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow 3x(2x + 3) - 2(2x + 3) = 0$

$$\Leftrightarrow (2x + 3)(3x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + 3 = 0 \\ 3x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{3}{2} \\ x = \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = 6.\left(-\frac{3}{2}\right)^4 - 7.\left(-\frac{3}{2}\right)^3 - 22.\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 7.\left(-\frac{3}{2}\right) + 2004$$

$$= 6.\frac{81}{16} - 7.\left(\frac{-27}{8}\right) - 22.\frac{9}{4} - \frac{21}{2} + 2004$$

$$= \frac{243}{8} + \frac{189}{8} - \frac{99}{2} - \frac{21}{2} + 2004 = \frac{432}{8} - \frac{480}{8} + 2004$$

$$= -6 + 2004 = 1998$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 6.\left(\frac{2}{3}\right)^4 - 7.\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 22.\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 7.\left(\frac{2}{3}\right) + 2004$$

$$= 6.\frac{16}{81} - 7.\frac{8}{27} - 22.\frac{4}{9} + \frac{14}{3} + 2004$$

$$= \frac{32}{27} - \frac{56}{27} - \frac{88}{9} + \frac{14}{3} + 2004 = \frac{32}{27} - \frac{56}{27} - \frac{264}{27} + \frac{126}{27} + 2004$$

$$= -6 + 2004 = 1998$$

2) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$

$\Leftrightarrow 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 4d^2 + 4e^2 \geq 4a(b + c + d + e)$

$\Leftrightarrow a^2 - 4ab + 4b^2 + a^2 - 4ac + 4c^2 + a^2 - 4ad + 4d^2 + a^2 - 4ae + 4e^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - 2b)^2 + (a - 2c)^2 + (a - 2d)^2 + (a - 2e)^2 \geq 0$

(bất đẳng thức đúng)

Dấu "=" xảy ra $a = 2b = 2c = 2d = 2e$

Bài 3: Xét vế trái của đẳng thức:

$$\frac{b - c}{(a - b)(a - c)} + \frac{c - a}{(b - c)(b - a)} + \frac{a - b}{(c - a)(c - b)} =$$

$$= \frac{b - a + a - c}{(a - b)(a - c)} + \frac{c - b + b - a}{(b - c)(b - a)} + \frac{a - c + c - b}{(c - a)(c - b)}$$

$$= \frac{1}{c - a} + \frac{1}{a - b} + \frac{1}{a - b} + \frac{1}{b - c} + \frac{1}{b - c} + \frac{1}{c - a}$$

$$= \frac{2}{a - b} + \frac{2}{b - c} + \frac{2}{c - a} \quad (a \neq b;\ b \neq c;\ c \neq a)$$

Vậy đẳng thức đã được chứng minh.

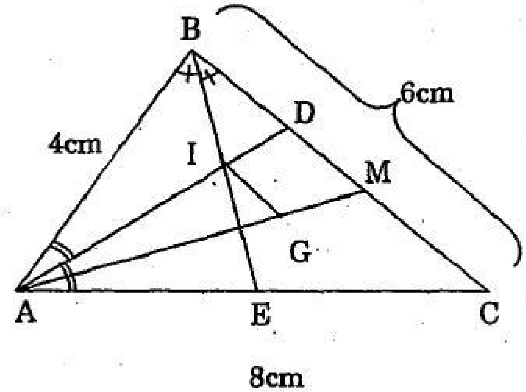
Bài 4:

1) AG cắt BC tại M, G là trọng tâm ΔABC (gt)

$\Rightarrow MB = MC = \dfrac{BC}{2} = 3cm$

Theo tính chất đường phân giác của tam giác ta có:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$$



hay $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

Do đó: $\dfrac{DB}{DC + DB} = \dfrac{1}{2+1}$

$\Rightarrow \dfrac{DB}{BC} = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow DB = \dfrac{1}{3}\ BC = \dfrac{1}{3}.6 = 2\ (cm)$

$\Rightarrow DC = BC - DB = 6 - 2 = 4\ (cm)$

2) BI là phân giác của ΔABD nên ta có:

$$\frac{ID}{IA} = \frac{BD}{BA} = \frac{2}{4} \Rightarrow \frac{ID}{IA} = \frac{1}{2}$$

mà $\dfrac{GM}{GA} = \dfrac{1}{2}$ (tính chất trọng tâm của tam giác)

ΔADM có: $\dfrac{ID}{IA} = \dfrac{GM}{GA}\left(= \dfrac{1}{2}\right)$

nên IG // DM (Định lý đảo Talet) hay IG // BC

Ta có: $MD = MB - BD = 3 - 2 = 1\ (cm)$

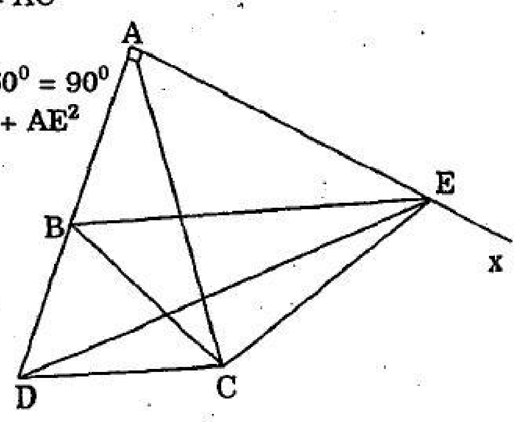
$$\frac{IG}{DM} = \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3} \Rightarrow IG = \frac{2}{3}MD = \frac{2}{3}.1 = \frac{2}{3}(cm)$$

Bài 5:

Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B vẽ tia Ax sao cho $\widehat{xAC} = 60^0$

Trên tia Ax lấy điểm E sao cho AE = AC

Suy ra ΔAEC đều.



Ta có: $\widehat{BAE} = \widehat{BAC} + \widehat{CAE} = 30^0 + 60^0 = 90^0$

ΔABE vuông tại A cho ta $BE^2 = BA^2 + AE^2$

hay $BE^2 = AB^2 + AC^2$ (1)

Ta có: $\widehat{BCE} = \widehat{BCA} + \widehat{ACE} = \widehat{BCA} + 60^0$

$\widehat{ACD} = \widehat{BCA} + \widehat{BCD} = \widehat{BCA} + 60^0$.

Suy ra $\widehat{BCE} = \widehat{ACD}$

ΔACD và ΔECB có: $\widehat{ACD} = \widehat{BCE}$

$AC = CE$

$CD = CB$

Do đó $\Delta ACD = \Delta ECB$ (c–g–c)

Cho ta $DA = BE$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $DA^2 = AB^2 + AC^2$

BỘ ĐỀ 32

ĐỀ THI HỌC BỔNG TRƯỜNG THCS NGUYỄN DU QUẬN 1 – TP.HCM THÁNG 10 NĂM HỌC 1997–1998

Bài 1:

1) Chứng minh rằng với mọi $n \in Z$, n chẵn, ta có số $n^3 + 20n$ luôn luôn chia hết cho 48.

2) Tìm ước chung lớn nhất của hai số: $A = 2^{63} - 1$ và $B = 2^{77} - 1$

Bài 2:

1) Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x - a)b^3 - (x - b)a^3 + (a - b)x^3$

2) Chứng minh rằng với mọi a, b, c ta đều có:

$$a^2 + 9b^2 + c^2 + \frac{19}{2} > 2a + 12b + 4c$$

Bài 3: Cho x, y, z là ba số thỏa mãn đồng thời: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1 \end{cases}$

Hãy tính giá trị của biểu thức: $P = (x - 1)^{17} + (y - 1)^9 + (z - 1)^{1997}$

Bài 4: Cho tam giác ABC cân tại A có H là trung điểm cạnh BC. Gọi I là hình chiếu vuông góc của H lên cạnh AC và O là trung điểm của HI. Chứng minh $AO \perp BI$.

Bài 5: Cho tam giác ABC cân tại A, lấy các điểm E và K lần lượt trên các tia AB và AC sao cho $AE + AK = AB + AC$. Chứng minh: $BC < EK$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) $n \in Z$, n chẵn nên n có dạng $n = 2k$, $k \in Z$

Ta có:

$$n^3 + 20n = 8k^3 + 40k = 8k(k^2 + 5) = 8k[(k^2 - 1) + 6]$$
$$= 8k(k - 1)(k + 1) + 48k \;\vdots\; 48$$

vì $(k - 1)k(k + 1) \;\vdots\; 6 \Rightarrow 8k(k - 1)(k + 1) \;\vdots\; 48$

2) Xét bài toán:

Với $1 \le m < n$; $m, n \in N$

Tìm $(2^m - 1; 2^n - 1)$

Đặt $(m, n) = d$, khi đó luôn tồn tại $r, s \in N : rn - sm = d$

Đặt $d_1 = (2^m - 1; 2^n - 1) \Rightarrow d_1$ lẻ

Ta có: $\begin{cases}(2^n - 1) \vdots (2^d - 1)(\text{do } n \vdots d) \\ (2^m - 1) \vdots (2^d - 1)(\text{do } m \vdots d)\end{cases} \Rightarrow d_1 \vdots (2^d - 1)$

Mặt khác: $\begin{cases}(2^n - 1) \vdots d_1 \text{ nên } (2^{rn} - 1) \vdots d_1 \\ (2^m - 1) \vdots d_1 \text{ nên } (2^{sm} - 1) \vdots d_1\end{cases}$

$\Rightarrow 2^{rn} - 2^{sm} = 2^{sm}(2^{rn-sm} - 1) = 2^{sm}(2^d - 1) \vdots d_1$

mà $(2; d_1) = 1$ nên $(2^d - 1) \vdots d_1$

Vậy $d_1 = 2^d - 1$, nghĩa là $(2^m - 1; 2^n - 1) = 2^{(m,n)} - 1$

Áp dụng: $(2^{63} - 1; 2^{77} - 1) = 2^{(63,77)} - 1 = 2^7 - 1 = 127$

Nhận xét: Ta có thể xét bài toán tổng quát sau:

Với $a \in N$, $a > 1$ ta có $(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1$

Thật vậy, đặt $d_1 = (a^m - 1; a^n - 1)$; $d_2 = (m, n)$

Ta cần chứng minh $d_1 = a^{d_2} - 1$

Do $d_2 \mid m$ và $d_2 \mid n$ ta có $(a^{d_2} - 1) \Rightarrow a^{d_2} - 1$

Ngược lại từ $(m, n) = d_2 > 0$

Suy ra ắt có hai số nguyên dương x_0; y_0 sao cho $mx_0 - ny_0 = d_2$

Từ $d_1 \mid a^m - 1$ và $d_1 \mid a^n - 1$ ta có d_1

nghĩa là $d_1 \mid a^{ny_0}(a^{mx_0 - ny_0} - 1) = a^{ny_0}(a^{d_2} - 1)$

Nhưng $d_1 \mid a^m - 1$ nên hiển nhiên $(d_1 ; a) = 1$

Do đó $(d_1; a^{ny_0}) = 1$ và vì vậy $d_1 = a^{d_2} - 1$

Bài 2:

1) $(x - a)b^3 - (x - b)a^3 + (a - b)x^3$

$= (x - a)b^3 - [(x - a) + (a - b)]a^3 + (a - b)x^3$

$= (x - a)b^3 - (x - a)a^3 - (a - b)a^3 + (a - b)x^3$

$= (x - a)(b^3 - a^3) + (x^3 - a^3)(a - b)$

$= (x - a)(b - a)(b^2 + ab + a^2) + (x - a)(x^2 + ax + a^2)(a - b)$

$= (x - a)(a - b)(x^2 + ax + a^2 - b^2 - ab - a^2)$

$= (x - a)(a - b)(x^2 - b^2 + ax - ab)$

$= (x - a)(a - b)[(x - b)(x + b) + a(x - b)]$

$= (x - a)(a - b)(x - b)(x + a + b)$

2) Với mọi a, b, c ta có:

$$a^2 + 9b^2 + c^2 + \frac{19}{2} > 2a + 12b + 4c$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 9b^2 + c^2 + \frac{19}{2} - 2a - 12b - 4c > 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 2a + 1) + (9b^2 - 12b + 4) + (c^2 - 4c + 4) + \frac{1}{2} > 0$$

$\Leftrightarrow (a-1)^2 + (3b-2)^2 + (c-2)^2 + \dfrac{1}{2} > 0$ (đúng)

Vì $(a-1)^2 \ge 0$, $(3b-2)^2 \ge 0$ và $(c-2)^2 \ge 0$

Vậy $a^2 + 9b^2 + c^2 + \dfrac{19}{2} > 2a + 12b + 4c$

Bài 3: Ta có: $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$

$= (x+y)^3 + z^3 + 3(x+y)z(x+y+z) - x^3 - y^3 - z^3$

$= x^3 + y^3 + 3xy(x+y) + 3(x+y)(xz+yz+z^2) - x^3 - y^3$

$= 3(x+y)(xy+xz+yz+z^2)$

$= 3(x+y)[x(y+z) + z(y+z)] = 3(x+y)(y+z)(z+x)$

Vậy $(x+y+z)^3 = 3(x+y)(y+z)(z+x) + x^3 + y^3 + z^3$

$\Leftrightarrow 1 = 3(x+y)(y+z)(z+x) + 1$

$$\Leftrightarrow 3(x+y)(y+z)(z+x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=0 \\ y+z=0 \\ z+x=0 \end{array}\right.$$

Nếu $x+y=0$, do $x+y+z=1 \Leftrightarrow z=1$

Mặt khác: $x^2+y^2+z^2=1 \Leftrightarrow x^2+y^2=0 \Rightarrow x=y=0$

Khi ấy: $P = (-1)^{17} + (-1)^9 + 0^{1997} = -2$

Lý luận tương tự:

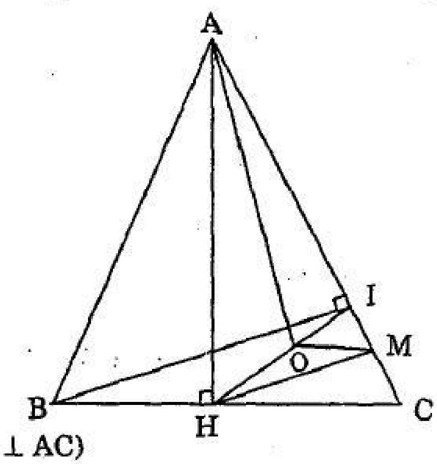
$y+z=0 \Rightarrow x=1$ và $y=z=0$: $P=-2$

$z+x=0 \Rightarrow y=1$ và $z=x=0$: $P=-2$

Kết luận: Với x, y, z thoả mãn hệ đã cho thì $P = -2$.

Bài 4:

Cách 1: Gọi M là trung điểm IC, do O là trung điểm HI nên OM là đường trung bình trong ΔHIC, $OM \parallel BC$



ΔABC cân tại A có AH là trung tuyến nên $AH \perp BC$

Vậy $OM \perp AH$

Vì M, H là trung điểm IC, BC nên HM là đường trung bình ΔBIC

Suy ra $HM \parallel BI$

Trong ΔAHM có $MO \perp AH$

$HI \perp AM$ và $OM \cap HI = \{O\}$ nên O là trực tâm ΔAHM

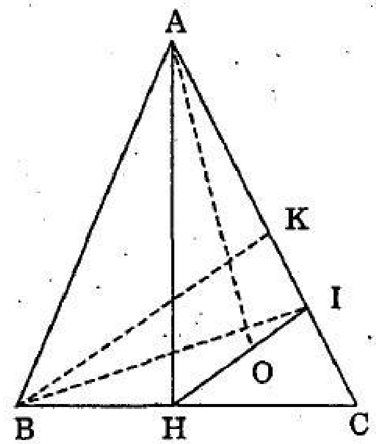
$AO \perp HM$, $AO \perp BI$ (vì $HM \parallel BI$)

Cách 2: Dựng $BK \perp AC$, $BK \parallel HI$ (vì cùng $\perp AC$)

Suy ra HI là đường trung bình của ΔBCK suy ra $KI = IC$

$\Delta AIH \backsim \Delta BKC$ ($\widehat{HAI} = \widehat{CBK}$, $\widehat{AIH} = \widehat{BKC} = 90^0$)

$$\Rightarrow \frac{AI}{BK} = \frac{HI}{KC} = \frac{\frac{HI}{2}}{\frac{KC}{2}} \Rightarrow \frac{AI}{BK} = \frac{OI}{KI}$$



Vậy $\Delta AIO \backsim \Delta BKI$ (c–g–c)

Suy ra $\widehat{IAO} = \widehat{KBI}$

Ta có: $\widehat{IAO} + \widehat{AIM} = \widehat{KBI} + \widehat{AIM} = 90^0$

(Do tam giác BKI vuông tại K)

Suy ra $\widehat{AMI} = 90^0$ nghĩa là $AO \perp BI$

Bài 5:

Cách 1: Dựng EM // BC ($M \in AC$) và KN // BC ($N \in AB$)

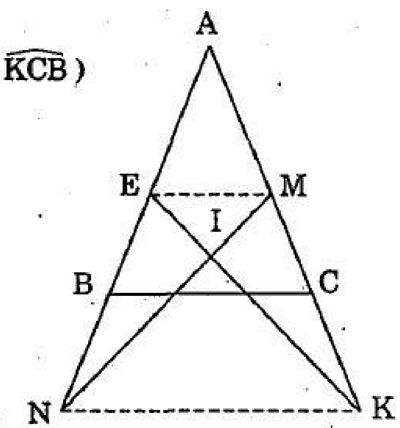
Ta được AN = AK

Ta có: AE + AK = AB + AC

Suy ra: AB – BE + AC + CK = AB + AC

Suy ra: CK – BE = 0

Suy ra: CK = BE



BCKN là hình thang cân (BC // NK, $\widehat{NBC} = \widehat{KCB}$)

NB = CK. Vậy BE = NB

Ta có: BC // EM // NK và BC đi qua trung điểm NE suy ra BC là đường trung bình của hình thang EMKN.

Ta có $\begin{cases} IE + IM > ME \\ IN + IK > NK \end{cases}$

$\Rightarrow (IE + IK) + (IM + IN) > ME + NK$

$\Rightarrow EK + MN > ME + NK \Rightarrow 2EK > ME + NK$

(Do EMRN là hình thang cân)

Vậy: $EK > \dfrac{ME + NK}{2} = BC$

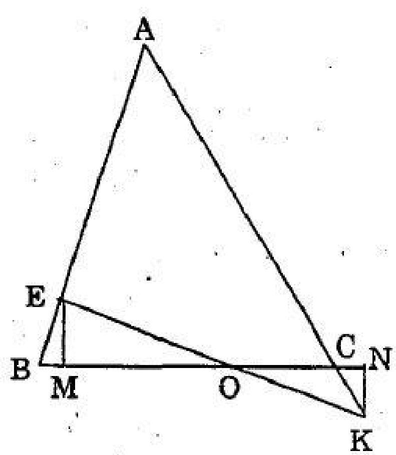
Cách 2: Từ giả thiết AE + AK = AB + AC

$\Rightarrow$ CK = BE (chứng minh trong cách 1)

$\Rightarrow$ Kẻ EM và KN cùng vuông góc đường BC (M, N thuộc đường BC). EM // NK

Ta có: $\Delta MBE = \Delta NCK$ (đặc biệt) nên BM = CN và EM = NK

Tứ giác EMKN là hình bình hành (vì EM // NK, EM = NK) nên hai đường chéo MN và EK cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường, nghĩa là EK = 2OE và MN = 2 OM



Mà OE > OM nên EK > MN = BC

(vì MN = CM + CN = CM + BM = BC)

Cách 3: AE + AK = AB + AC

Suy ra AB + BE + AC − KC = AB + AC

Suy ra BE = KC

Trên tia đối của tia CA lấy D sao cho CD = CK

Vẽ CI // AB (I ∈ ED)

AE = AB + BE = AC + CD = AD

ΔAED cân tại A

Các tam giác ABC và AED cân có đỉnh chung A

⇒ $\widehat{ABC} = \widehat{AED}$

⇒ BC // ED và BE // CI

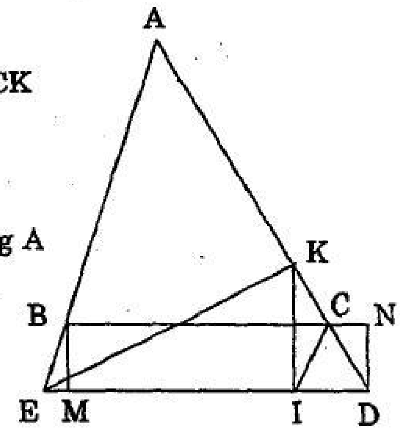
⇒ BC = EI, BE = CI

CI = CK = CD (= BE)

⇒ ΔIDK vuông tại I

ΔIEK có $\hat{I} = 90^0 \Rightarrow$ EK > EI

Do đó EK > BC



BỘ ĐỀ 33

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI GIẢI THƯỞNG LƯƠNG THẾ VINH QUẬN 9 TP HCM – NĂM HỌC 1997 – 1998

Bài 1: Dùng hai cách để phân tích đa thức thành nhân tử: $A = x^2 - 4x + 3$

Bài 2: Cho $A(x) = 8x^2 - 26x + m$ và $B(x) = 2x - 3$

Tìm m để A(x) chia hết cho B(x).

Bài 3: Với giá trị nào của a thì bất phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$(x - a)(x - 5) \le 0$?

Bài 4: Giải phương trình: $|x^2 - 1| + |a(x - 1)| = 0$

Bài 5: Cho hình vuông ABCD trên C lấy điểm M sao cho BM = $\frac{1}{3}$BC. Trên tia đối của tia CD lấy điểm N sao cho CN = $\frac{1}{2}$BC. Cạnh AM cắt BN tại I và CI cắt AB tại K. Gọi H là hình chiếu của M trên AC. Chứng minh K, M, H thẳng hàng.

Bài 6: Cho hình thang cân ABCD (AB // CD) có AC = 6cm, $\widehat{BDC} = 45^0$. Gọi O là giao điểm hai đường chéo. Tính diện tích hình thang ABCD bằng hai cách.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: *Cách 1:*

$A = x^2 - 4x + 3 = x^2 - x - 3x + 3 = x(x - 1) - 3(x - 1) = (x - 1)(x - 3)$

Cách 2:

$A = x^2 - 4x + 3 = x^2 - 4x + 4 - 1$

$= (x-2)^2 - 1^2 = (x - 2 + 1)(x - 2 - 1) = (x-1)(x-3)$

Bài 2: Với $x \neq \dfrac{3}{2}$ ta có:

$A(x) = 8x^2 - 26x + m = 4x(2x - 3) - 14x + m$

$= 4x(2x - 3) - 7(2x - 3x) + m - 21$

$= (2x - 3)(4x - 7) + m - 21 = (4x - 7).B(x) + m - 21$

Vậy $A(x) \vdots B(x) \Leftrightarrow m - 21 = 0 \Leftrightarrow m = 21$

Bài 3: Xét bất phương trình: $(x - a)(x - 5) \leq 0$ (1)

Nếu $a = 5$ (1) $\Leftrightarrow (x-5)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 5$

Nếu $a < 5$: (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x - a \geq 0 \\ x - 5 \leq 0 \end{cases}$

(vì $x - a > x - 5$ nếu $x - a \leq 0$ thì $(x - a)(x - 5) \geq 0$ không thỏa)

$\Leftrightarrow a \leq x \leq 5$

Trong trường hợp này bất phương trình không có nghiệm duy nhất (loại)

Nếu $a > 5$, lý luận tương tự: $5 \leq x \leq a$ (loại)

Kết luận: Với $a = 5$ bất phương trình (1) có nghiệm duy nhất.

Bài 4: $|x^2 - 1| + |a(x-1)| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ a(x-1) = 0 \end{cases}$ (*)

Xét các trường hợp sau:

a/ Với $a = 0$: (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x \text{ tùy ý} \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 1$

b/ Với $a \neq 0$: (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

Kết luận: $a = 0$ phương trình có nghiệm: $x = \pm 1$

$a \neq 0$ phương trình có nghiệm $x = 1$.

Bài 5: Gọi E là giao điểm của đường AM và đường DC.

Do AB // CE nên $\dfrac{AB}{CE} = \dfrac{BM}{CM} = \dfrac{1}{2}$ (vì $\dfrac{BM}{BC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{BM}{CM} = \dfrac{1}{2}$)

$\Leftrightarrow CE = 2AB$

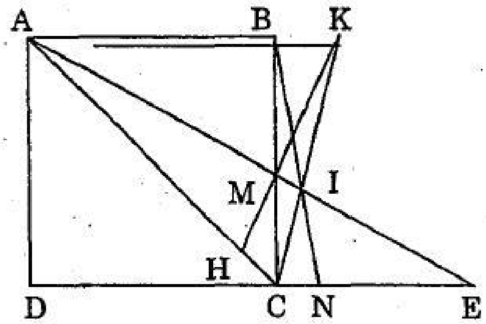
Ta có: $NE = CE - CN = 2AB - \dfrac{BC}{2} = 2AB - \dfrac{AB}{2} = \dfrac{3}{2}AB$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{NE} = \dfrac{2}{3}$

Ta có: $\dfrac{BK}{CN} = \dfrac{IB}{IN} = \dfrac{AB}{NE} = \dfrac{2}{3}$ (vì AB // DE)

Suy ra: $BK = \dfrac{2}{3}CN = \dfrac{2}{3}.\dfrac{AB}{2} = \dfrac{AB}{3}$

Mà $BM = \dfrac{BC}{3} = \dfrac{AB}{3}$



nên $BK = BM$

Vậy $\Delta ABM = \Delta CBK$ ($AB = BC$; $\widehat{ABM} = \widehat{CBK} = 90^0$, $BK = BM$)

$\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{BCK}$

$\Rightarrow \widehat{BAM} + \widehat{BMA} = \widehat{BCK} + \widehat{CMI}$

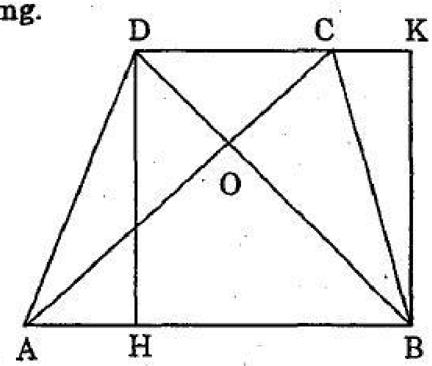
($\widehat{BMA} = \widehat{CMI}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{BCK} + \widehat{CMI} = 90^0$, nghĩa là $AI \perp CK$

Trong tam giác ACK có $AI \perp CK$, $CB \perp AK$ và $AI \cap CB = \{M\} \Rightarrow$ M là trực tâm, tức $MK \perp AC$.

Mặt khác $MH \perp AC$ nên M, H, K thẳng hàng.

Bài 6: *Cách 1:*



Xét ΔADC vạ ΔBCD có DC chung, $AD = BC$ và $AC = BD$ (tính chất hình thang cân)

Suy ra $\Delta ADC = \Delta BCD$ (c–c–c)

Suy ra $\widehat{ACD} = \widehat{BDC} = 45^0$

Vậy $\widehat{DOC} = 90^0$

nên $AC \perp BD$

Khi ấy $S_{ABCD} = \dfrac{AC.BD}{2} = \dfrac{AC^2}{2} = \dfrac{36}{2} = 18$ (cm^2).

Cách 2: Kẻ $DH \perp AB$, $CK \perp CD$

Do AB // CD, nên $\widehat{HDK} = 90^0$, mà DB là phân giác HDK (vì $\widehat{BDK} = 45^0$)

$\Rightarrow$ HDKB là hình vuông

Ta có: $\Delta HAD = \Delta KCB$ (đặc biệt)

Suy ra: $S_{HAD} = S_{BCK}$

$$S_{ABCD} = S_{ADH} + S_{DHBC} = S_{CBK} + S_{CHBC} = S_{DHBK}$$

$$= BK^2 = \frac{BD^2}{2} = \frac{AC^2}{2} = 18 \text{ (cm}^2\text{)}$$

BỘ ĐỀ 34

ĐỀ THI HỌC BỔNG TRƯỜNG THCS NGUYỄN DU QUẬN 1, TPHCM – THÁNG 2 NĂM HỌC 1998 – 1999

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử:

1) $x^8 + 3x^4 + 4$

2) $x^6 - x^4 - 2x^3 + 2x^2$

Bài 2:

1) Tính giá trị của biểu thức: $\dfrac{a^5+a^6+a^7+a^8}{a^{-5}+a^{-6}+a^{-7}+a^{-8}}$ với a = 1997

2) Rút gọn biểu thức:

$$A=\frac{2x+3y}{xy+2x-3y-6}-\frac{6-xy}{xy+2x+3y+6}-\frac{x^2+9}{x^2-9}$$

Bài 3: Cho a, b, c thoả: $a^3-b^2-b=b^3-c^2-c=c^3-a^2-a=\dfrac{1}{3}$

Chứng minh a = b = c

Bài 4: Cho tứ giác lồi ABCD. Qua trung điểm K của đường chéo BD D dựng đường song song với đường chéo AC, đường này cắt AD tại E. Chứng minh CE chia tứ giác thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Bài 5: Dựng hình bình hành khi biết trung điểm ba cạnh của nó.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: Phân tích:

1) $x^8+3x^4+4=x^8+4x^4+4-x^4=(x^4+2)^2-x^4=(x^4+x^2+2)(x^4-x^2+2)$

2) $x^6-x^4-2x^3+2x^2=x^2(x^4-x^2-2x+2)$

$=x^2[(x^4-2x^2+1)+(x^2-2x+1)]$

$=x^2[(x^2-1)^2+(x-1)^2]=x^2(x-1)^2(x^2+2x+2)$

Bài 2: 1) Biến đổi:

$$A=\frac{a^5(1+a+a^2+a^3)}{a^{-8}(a^3+a^2+a+1)}=\frac{a^5}{a^{-8}}=\frac{a^5}{\left(\frac{1}{a}\right)^8}=\frac{a^5}{\frac{1}{a^8}}=a^{13}$$

Với a = 1997 thì $A=1997^{13}$

2) Dưới điều kiện $x\neq\pm 3$; $y\neq -2$, ta có:

$$A=\frac{2x+3y}{x(y+2)-3(y+2)}-\frac{6-xy}{x(y+2)+3(y+2}-\frac{x^2+9}{(x-3)(x+3)}$$

$$=\frac{2x+3y}{(y+2)(x-3)}-\frac{6-xy}{(y+2)(x+3)}-\frac{x^2+9}{(x-3)(x+3)}$$

$$=\frac{(2x+3y)(x+3)-(6-xy)(x-3)-(x^2+9)(y+2)}{(x-3)(x+3)(y+2)}$$

$$=\frac{2x^2+6x+3xy+9y-6x+18+x^2y-3xy-x^2y-2x^2-9y-18}{(x-3)(x+3)(y+2)}$$

$$=\frac{0}{(x-3)(x+3)(y+2)}=0$$

Bài 3: Theo đề bài ta có:

$$a^3-b^2-b=\frac{1}{3}\Rightarrow a^3=b^3+b+\frac{1}{3}=\left(b+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}>0\Rightarrow a>0$$

$$b^3 - c^2 - c = \frac{1}{3} \Rightarrow b^3 = \left(c + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} \Rightarrow b > 0$$

$$c^3 - a^2 - a = \frac{1}{3} \Rightarrow c^3 = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} \Rightarrow c > 0$$

Vai trò a, b, c hoán vị vòng quanh.

Giả sử: a là số lớn nhất trong ba số a, b, c.

Với a, b, c > 0: $a \geq b \Rightarrow a^3 \geq b^3 \Rightarrow \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} \geq \left(c + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}$

$$\Rightarrow \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 \geq \left(c + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow b \geq c$$

$$b \geq c \Rightarrow b^3 \geq c^3 \Rightarrow \left(c + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} \geq \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow \left(c + \frac{1}{2}\right)^2 \geq \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow c \geq a$$

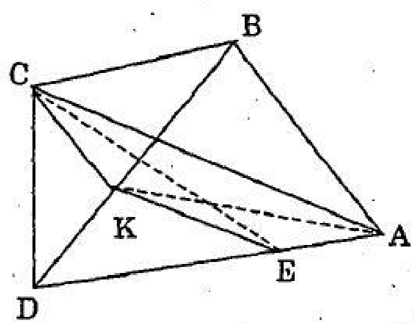
Vậy $a \geq b \geq c \geq a \Rightarrow a = b = c$

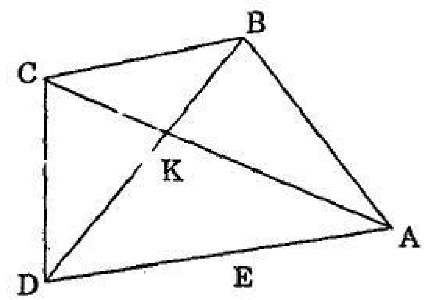
Bài 4: Xét: Nếu $E \in [AD]$, do KE // CA $\Rightarrow S_{CEA} = S_{CAK}$

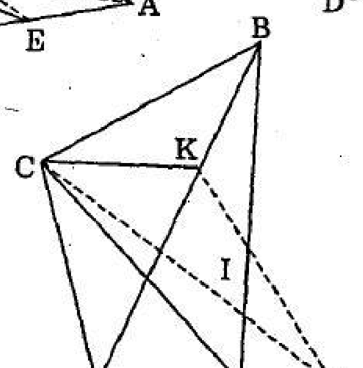
(hai tam giác này có chung đáy AC, EK // AC)

Vậy: $S_{CBAE} = S_{ABC} + S_{CEA} = S_{ABC} + S_{CKA} = S_{ABCK} = S_{CKB} + S_{KBA}$

$$= \frac{1}{2} S_{BDC} + \frac{1}{2} S_{BDA} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$







Đặc biệt đường chéo AC đi qua trung điểm K của BD thì $E \equiv A$

$\Rightarrow CE \equiv CA$ thì kết quả vẫn đúng.

Thật vậy $\begin{cases} S_{CDK} = S_{CKB} \\ S_{AKD} = S_{KBA} \end{cases}$

(vì K trung điểm BD) $\Rightarrow S_{ABC} = S_{ACD}$

Nếu E $\notin$ [AD]

Rõ ràng: $S_{ACE} > S_{ACI}$

Do KE // AC $\Rightarrow S_{ACE} > S_{ACK}$

Vậy $S_{ACD} + S_{ACI} < S_{ACE} + S_{ACD}$

$\Rightarrow S_{CDAI} < S_{ACD} + S_{ACK} = S_{ADCK} = S_{DCK} + S_{ADK} = \frac{1}{2}(S_{BCD} + S_{ADB}) = \frac{1}{2}S_{ABCD}$

Trong trường hợp này kết quả không còn đúng.

Bài 5:

- Dựng O là trung điểm NQ.
- Dựng P đối xứng với M qua O, qua M và P, dựng hai đường thẳng a và c cùng song song với NQ.

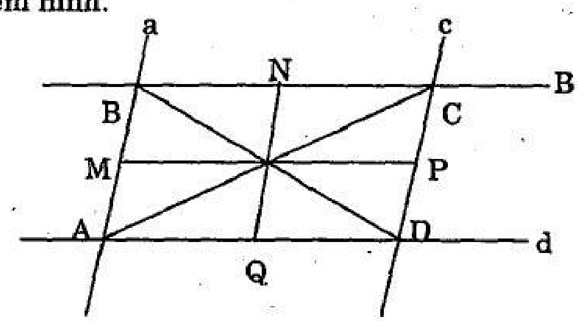
Qua N và Q dựng hai đường thẳng b và d cùng song song với MP.

Suy ra các đường a, b, c, d cắt nhau tạo thành hình bình hành ABCD cần dựng.

Chứng minh: Dựa vào cách dựng ta dễ dàng chứng minh M, N, Q là trung điểm của AB, BC và AD.

Với M, N, Q không thẳng hàng nên ta xác định được ba điểm P_1, P_2, P_3

$\Rightarrow$ Bài toán có ba nghiệm hình.



BỘ ĐỀ 35

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 8 TRƯỜNG THCS NGUYỄN DU QUẬN 1, TPHCM – NĂM HỌC 1997 – 1998

Bài 1:

1) Chứng minh rằng: $8351^{634} + 8241^{142}$ chia hết cho 26

2) Cho $A = \underbrace{11......1}_{1998 \text{ chữ số } 1} + \underbrace{11......1}_{1000 \text{ chữ số } 1} + \underbrace{66......6}_{999 \text{ chữ số } 1} + 8$

Chứng minh rằng A là số chính phương.

Bài 2: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$$B = \frac{x^4 + 1}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

Bài 3: Cho ba số a, b, c khác 0 thoả mãn đẳng thức:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{a+c-b}{b} = \frac{b+c-a}{a}$$

Tính giá trị của biểu thức: $P = \dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$

Bài 4: Các đường chéo của tứ giác lồi ABCD vuông góc với nhau. Qua trung điểm các cạnh AB và AD kẻ những đường vuông góc theo thứ tự với các cạnh CD và CB. Chứng minh rằng hai đường thẳng vuông góc này và đường thẳng AC đồng quy.

Bài 5: Cho hình thang ABCD có hai đáy là AB = 2a; CD = a. Hãy xác định vị trí điểm M trên đường thẳng CD sao cho:

1) Đường thẳng AM chia hình thang thành hai phần có diện tích bằng nhau.
2) Đường thẳng AM chia hình thang thành hai phần mà phần có chứa đỉnh D có diện tích bằng (n – 1) lần diện tích phần kia (n – là số tự nhiên lớn hơn 2).

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: 8351 là số lẻ $\Rightarrow 8351^{634}$ là số lẻ.

8241 là số lẻ $\Rightarrow 8241^{142}$ là số lẻ

Do đó: $8351^{634} + 8241^{142}$ là số chẵn $\Rightarrow (8351^{634} + 8241^{142}) \vdots 2$

Mặt khác $(8351^2 + 1) \vdots 13; (8241 + 1) \vdots 13$

Áp dụng: $(a^n - b^n) \vdots (a - b)$

$8351^{634} + 8241^{142} = [(8352^2)^{317} - (-1)^{317}] + [8242^{142} - (-1)^{142}]$

chia hết cho 13 vì $[(8352^2)^{317} - (-1)^{317}] \vdots [8352^2 - (-1)]$

và $[8242^{142} - (-1)^{142}] \vdots [8242 - (-1)]$

2 và 13 là số nguyên tố cùng nhau, 2 . 13 = 26

Do đó: $8351^{634} + 8241^{142}$ chia hết cho 26.

2) Đặt $a = \underbrace{11....1}_{999 \text{ số } 1}$ thì

$A = a \cdot 10^{999} + a + 10a + 1 + 6a + 8$

$= a(9a + 1) + 17a + 9 = 9a^2 + 18a + 9$

$= (3a + 3)^2 = \underbrace{33.....3}_{998 \text{ số } 3}6^2$ (đpcm)

Bài 2: $B = \dfrac{x^4 + 1}{(x^2 + 1)^2} > 0 \forall x$

nên B – lớn nhất $\Leftrightarrow \dfrac{1}{B}$ nhỏ nhất

B – nhỏ nhất $\Leftrightarrow \dfrac{1}{B}$ lớn nhất

Ta có : $\frac{1}{B} = \frac{x^4 + 1 + 2x^2}{x^4 + 1} = 1 + \frac{2x^2}{x^4 + 1}$

1) Ta luôn luôn có $x^2 \geq 0$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$

Do đó: $\frac{1}{B} \geq 1$ (và $\frac{1}{B} = 1 \Leftrightarrow x = 0$)

suy ra max B = 1 $\Leftrightarrow x = 0$

2) Ta có: $(x^2 - 1)^2 \geq 0, \forall x \Leftrightarrow 2x^2 \leq 1 + x^4$

Vậy $\frac{2x^2}{1 + x^4} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{B} = 1 + \frac{2x^2}{1 + x^4} \leq 2$

$\frac{1}{B} = 2 \quad \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Suy ra min B = $\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm 1$

Bài 3: Từ giả thiết suy ra:

$$2 + \frac{a + b - c}{c} = 2 + \frac{a + c - b}{b} = 2 + \frac{b + c - a}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{a + b + c}{c} = \frac{a + b + c}{b} = \frac{a + b + c}{a}$$

Suy ra hoặc a + b + c = 0 hoặc a = b = c.

Xét:

1) Trường hợp $a + b + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} a + b = -c \\ a + c = -b \\ b + c = -a \end{cases}$ thay vào P ta được P = –1

2) Trường hợp a = b = c, ta được P = 8.

Bài 4: Gọi E, F, G lần lượt là các trung điểm của AB, AD và AC.

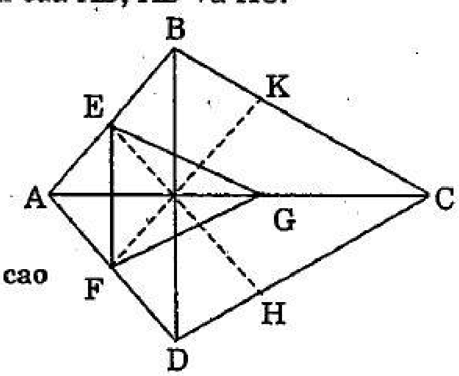
Các đoạn thẳng EF, EG, FG lần lượt là các đường trung bình của ΔABD, ΔABC và ΔACD.

⇒ EF // BD, EG // BC, FG // CD

mà BD ⊥ AC, FK ⊥ BC và EH ⊥ DC.

⇒ AC ⊥ EF, FK ⊥ EG và EH và FG.

Từ đó suy ra AC, EH, FK chứa ba đường cao của ΔEFG nên chúng đồng quy.



Bài 5:

Trước hết ta có nhận xét rằng đường chéo AC chia hình thang thành hai tam giác thì $S_{ADC} < S_{ABC}$

⇒ M nằm ngoài đoạn DC và thuộc tia Cx.

1) Đường thẳng AM chia hình thang thành hai phần có diện tích bằng nhau. Gọi N là giao điểm của AM và BC. Gọi H, K là chân đường vuông góc kẻ từ N đến AB và CD.

Đặt $S_{ADCN} = S_1$; $S_{ANB} = S_2$; $S_{ABCD} = S$

Ta có $\begin{cases} S_1 + S_2 = S \\ S_1 = S_2 \end{cases} \Rightarrow S_2 = \dfrac{1}{2}S$

Gọi h là đường cao của hình thang, đặt NH = x thì:

$$S = \frac{1}{2}(2a + a)\,h = \frac{3ah}{2};\ S_2 = \frac{1}{2}2ax = ax$$

$$S = \frac{1}{2}S \Rightarrow ax = \frac{1}{2}.\frac{3ah}{2} \Rightarrow x = \frac{3h}{4}$$

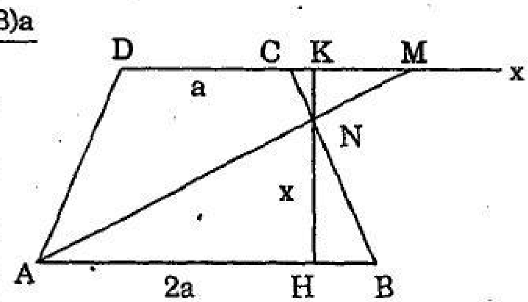
Áp dụng định lý Talet : $\dfrac{NC}{NB} = \dfrac{CM}{AB} = \dfrac{NK}{NH} = \dfrac{1}{3}$

2) Trường hợp $S_1 = (n - 1)\,S_2$ với $n > 2 \Leftrightarrow n - 1 > 1$

$$\begin{cases} S_1 = (n-1)S_2 \\ S_1 + S_2 = S \end{cases} \Rightarrow S_2 = \frac{1}{n}S$$

Vậy $\quad ax = \dfrac{1}{n}.\dfrac{3ah}{2} \Rightarrow x = \dfrac{3h}{2n}$

Suy ra : $CM = \dfrac{(2n-3)2a}{3} = \dfrac{2(2n-3)a}{3}$



Vậy M nằm trên tia đối của tia CD sao cho $CM = \dfrac{2(2n-3)a}{3}$ thì AM cắt hình thang ABCD thành hai phần mà phần có chứa đỉnh D có diện tích bằng n – 1 lần diện tích phần kia (với $n \in N$, $n > 2$)

BỘ ĐỀ 36

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
QUẬN 1, TPHCM – NĂM HỌC 1997 – 1998

Bài 1: Thực hiện phép tính: $\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4^2}\right)...\left(1-\dfrac{1}{1998^2}\right)$

Bài 2: Phân tích đa thức thành nhân tử:

1) $x^2 - x - 12$

2) $x^2 + 8x + 15$

Bài 3: Chứng minh rằng: $(x - 1)(x - 3)(x - 4)(x - 6) + 10 \geq 1$

Bài 4: Giải phương trình: $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6 = 0$

Bài 5: Cho tam giác ABC (BC < AB). Từ C vẽ đường vuông góc với phân giác BE tại F và cắt AB tại K; vẽ trung tuyến BD cắt CK tại G. Chứng minh rằng DF đi qua trung điểm của GE.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: Ta có $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)...\left(1-\frac{1}{1998^2}\right)$

$$= \frac{2^2-1}{2^2}.\frac{3^2-1}{3^2}.\frac{4^2-1}{4^2}...\frac{1998^2-1}{1998^2}$$

$$= \frac{(2+1).(2-1)}{2^2}.\frac{(3-1).(3+1)}{3^2}...\frac{(1998-1).(1998+1)}{1998^2}$$

$$= \frac{3.1}{2.2}.\frac{2.4}{3.3}.\frac{3.5}{4.4}...\frac{1997.1999}{1998.1998} = \frac{1.2.3...1997}{2.3.4...1997.1998}.\frac{3.4.5...1998.1999}{2.3.4...1998}$$

$$= \frac{1}{1998}.\frac{1999}{2} = \frac{1999}{3996}$$

Bài 2:

1) $x^2 - x - 12 = x^2 - 16 - x + 4 = (x-4)(x+4) - (x-4) = (x-4)(x+3)$

2) $x^2 + 8x + 15 = x^2 + 3x + 5x + 15 = x(x+3) + 5(x+3) = (x+3)(x+5)$

Bài 3: Ta có:

$(x-1)(x-3)(x-4)(x-6) + 10 = (x-1)(x-6)(x-3)(x-4) + 10$

$= (x^2 - 7x + 6)(x^2 - 7x + 12) + 10$

$= (x^2 - 7x + 9 - 3)(x^2 - 7x + 9 + 3) + 10$

$= (x^2 - 7x + 9)^2 - 9 + 10 = (x^2 - 7x + 9)^2 + 1 \geq 1$ với mọi x.

Vì $(x^2 - 7x + 9)^2 \geq 0$ với mọi x.

Do đó $(x^2 - 7x + 9)^2 + 1 \geq 1$ với mọi x.

Bài 4: $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x^4 + 3x^3 - x^3 - 3x^2 - x^2 - 3x - 2x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x^3(x+3) - x^2(x+3) - x(x+3) - 2(x+3) = 0$

$\Leftrightarrow (x+3)(x^3 - x^2 - x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x+3)(x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x + x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x+3)[x^2(x-2) + x(x-2) + (x-2)] = 0$

$\Leftrightarrow (x+3)(x-2)(x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-2) = 0$

(vì $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0\ \forall x$)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 2 \end{array}\right.$. Nghiệm của phương trình là –3, 2.

Bài 5: *Cách 1:*

Do BE là đường phân giác của ΔABC nên:

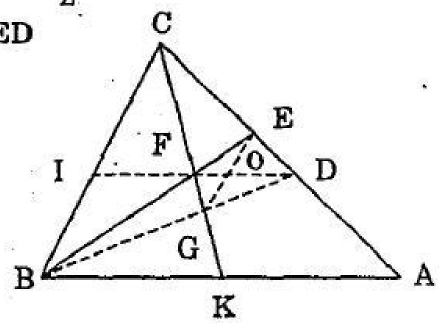
$$\frac{CE}{EA} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{CE}{EA - CE} = \frac{BC}{AB - BC}$$

ΔBCK có BF vừa là đường cao vừa là đường phân giác, ΔBCK cân tại B nên BC = BK.

Suy ra: $\frac{CE}{EA - CE} = \frac{BC}{AB - BK} = \frac{BK}{KA} = \frac{BK}{2FD}$

(Vì FD là đường trung bình ΔCKA nên $FD = \dfrac{KA}{2}$)

Mà $EA - CE = ED + DA - (CD - ED) = 2ED$



Suy ra: $\dfrac{CE}{2ED} = \dfrac{BK}{2FD} \Rightarrow \dfrac{CE}{ED} = \dfrac{BK}{FD} = \dfrac{BG}{GD}$

(do ΔBGK và ΔDGF có FD // BK)

Theo định lý Talet đảo, ta có: GE // BC.

Gọi I là giao điểm của DF với BC, ID // AB và CD = DA suy ra IB = IC

FD cắt GE tại O vì GE // BC nên $\dfrac{OE}{IC} = \dfrac{DO}{DI} = \dfrac{OG}{IB} \Rightarrow OE = OG$

(Vì IB = IC)

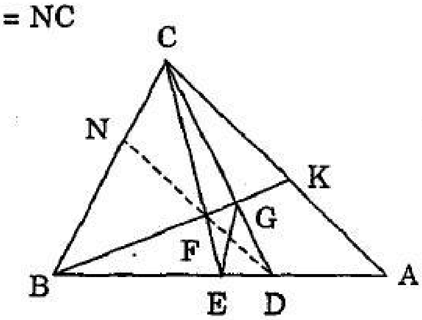
Điều này chứng tỏ DF đi qua trung điểm của EG.

Cách 2: Gọi DF cắt BC tại N.

ΔBCK cân tại B nên FC = FK suy ra FD // AB.

ΔABC có DC = DA và ND // AB suy ra NB = NC

Dùng định lý Menalus, trong ΔCBD



$\dfrac{ED}{EC} \cdot \dfrac{CN}{NB} \cdot \dfrac{BG}{GD} = 1 \Rightarrow \dfrac{ED}{EC} = \dfrac{GB}{GD} = 1$

$\Rightarrow \dfrac{ED}{EC} = \dfrac{GD}{GB}$

Suy ra: GE // BC, mà NB = NC do đó DF đi qua trung điểm EG.

BỘ ĐỀ 37

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI GIẢI THƯỞNG LÊ QUÝ ĐÔN QUẬN TÂN BÌNH, TPHCM – NĂM HỌC 1998 – 1999

Bài 1: Cho biểu thức: $A = \left(\dfrac{2+x}{2-x} - \dfrac{4x^2}{x^2-4} - \dfrac{2-x}{2+x}\right) : \left(\dfrac{x^2-3x}{2x-x^3}\right)$

1) Tìm điều kiện có nghĩa và rút gọn biểu thức A.
2) Tìm giá trị của x để A dương.
3) Tìm giá trị của A trong trường hợp $|x-7| = 4$

Bài 2: Cho tam giác ABC có BC = 15 cm, AC = 20 cm, AB = 25 cm.

1) Tính độ dài đường cao CH của tam giác ABC
2) Gọi CD là đường phân giác của tam giác ACH. Chứng minh tam giác BCD cân.
3) Chứng minh rằng: $BC^2 + CD^2 + BD^2 = 3CH^2 + 2BH^2 + DH^2$

Bài 3: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và M là điểm nằm trên cạnh BC. Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của B và C xuống đường thẳng AM. Xác định vị trí của điểm M trên BC để tổng BE + CF lớn nhất.

Bài 4: Có 10 chiếc nhẫn giống y hệt nhau trong đó có 9 chiếc là nhẫn thật, cân nặng bằng nhau và 1 chiếc nhẫn giả có khối lượng khác với nhẫn thật. Chỉ bằng 3 lần cân bằng cân đĩa (loại cân có 2 đĩa) là tìm ra chiếc nhẫn giả. Em hãy chỉ ra cách cân và giải thích.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: $A = \left(\dfrac{2+x}{2-x} - \dfrac{4x^2}{x^2-4} - \dfrac{2-x}{2+x}\right) : \left(\dfrac{x^2-3x}{2x-x^3}\right)$

1) Biểu thức A có nghĩa:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \neq 0 \\ x^2-4 \neq 0 \\ 2+x \neq 0 \\ x^2-3x \neq 0 \\ 2x^2-x^3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \neq 0 \\ (x-2)(x+2) \neq 0 \\ 2+x \neq 0 \\ x(x-3) \neq 0 \\ x^2(2-x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \neq 0 \\ x+2 \neq 0 \\ x \neq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -2 \\ x \neq 0 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

$$A = \left(\frac{2+x}{2-x} - \frac{4x^2}{x^2-4} - \frac{2-x}{2+x}\right) : \frac{x^2-3x}{2x-x^3} \left(\begin{matrix} x \neq \pm 2 \\ x \neq 0 \\ x \neq 3 \end{matrix}\right)$$

$$= \frac{(2+x)^2 + 4x^2 - (2-x)^2}{(2-x)(x+2)} : \frac{x(x-3)}{x^3(2-x)}$$

$$= \frac{4+4x+x^2+4x^2-4+4x-x^2}{(2-x)(2+x)} \cdot \frac{x^2(2-x)}{x(x-3)}$$

$$= \frac{4x^2+8x}{(2-x)(2+x)} \cdot \frac{x^2(2-x)}{x(x-3)} = \frac{4x(x+2).x^2(2-x)}{(2-x)(2+x)x(x-3)} = \frac{4x^2}{x-3}.$$

2) $A > 0 \Leftrightarrow \dfrac{4x^2}{x-3} > 0$ (vì $x \neq \pm 2, x \neq 0, x \neq 3$)

$\Leftrightarrow x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$

3) $|x-7| = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} x-7=4 \\ x-7=-4 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} x=11 \\ x=3 \end{matrix}\right.$

Với x = 11, ta có $A = \dfrac{4.11^2}{11-3} = \dfrac{4.121}{8} = \dfrac{121}{2}$

Với x = 3, biểu thức A vô nghĩa.

Bài 2: *Cách 1:*

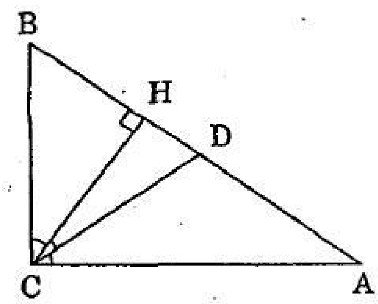
1) Ta có: $AB^2 = 25^2 = 625$

$AC^2 + CB^2 = 20^2 + 15^2 = 400 + 225 = 625$

nên tam giác ABC vuông tại C (định lý Py–ta–go đảo)

Ta có: CH.AB = CB.CA = ($2S_{ABC}$)

$\Rightarrow CH = \dfrac{CB.CA}{AB} = \dfrac{15.20}{25} = 12$ (cm)



2) Ta có: $\widehat{DCA} + \widehat{DCB} = \widehat{ACB} = 90^0$

$\widehat{DCH} + \widehat{CDH} = 90^0$

mà $\widehat{DCA} = \widehat{DCH}$ (CD là phân giác)

nên $\widehat{DCB} = \widehat{CDH}$ hay $\widehat{DCB} = \widehat{BDC}$

Suy ra tam giác BCD cân tại B.

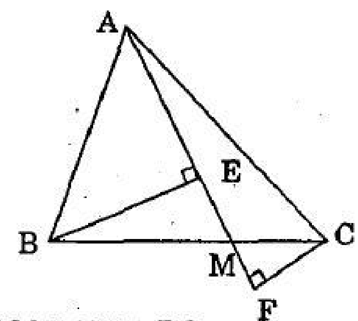
3) Áp dụng định lý Pytago vào các tam giác vuông BCH và CDH, ta có:

$\Leftrightarrow BC^2 = BH^2 + CH^2$, $CD^2 = CH^2 + HD^2$; $BD^2 = BC^2 = BH^2 + CH^2$

Suy ra: $BC^2 + CD^2 + BD^2 = BH^2 + CH^2 + CH^2 + HD^2 + BH^2 + CH^2$

$= 3CH^2 + 2\,BH^2 + DH^2$

Bài 3: Ta có:



BE ≤ BM, CF ≤ CM (quan hệ giữa đường vuông góc với đường xiên)

Do đó: BE + CF ≤ BM + CM

BE + CF ≤ BC, BC không đổi

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi E ≡ F ≡ M

$\Leftrightarrow AM \perp BC$

Vậy tổng BE + CF đạt giá trị lớn nhất bằng BC khi $AM \perp BC$.

Bài 4: Chia 10 chiếc nhẫn thành bốn nhóm, gọi là nhóm A, B, C, D với số chiếc nhẫn lần lượt ở mỗi nhóm là 3, 3, 3, 1.

Đặt hai nhóm A và B lên hai đĩa cân.

Trường hợp 1: Nếu cân thăng bằng có nghĩa là chiếc nhẫn giả nằm ở nhóm C hoặc nhóm D.

Trong lần cân thứ hai đặt nhóm A (hoặc B) lên 1 đĩa cân, nhóm C lên đĩa kia, nếu cân thăng bằng thì chiếc nhẫn ở nhóm D là giả. Nếu cân lệch qua nhóm A thì chiếc nhẫn giả ở nhóm C và nhẹ hơn so với chiếc nhẫn thật. Trong lần cân thứ ba chỉ việc lấy 2 chiếc nhẫn ở nhóm C đặt lên mỗi đĩa 1 chiếc nhẫn, nếu cân thăng bằng thì chiếc nhẫn giả là chiếc còn lại của nhóm C nếu cân không thăng bằng thì dễ dàng xác định chiếc nhẫn giả.

Trường hợp 2: Nếu cân không thăng bằng có nghĩa là chiếc nhẫn giả nằm ở nhóm A hoặc nhóm B.

Trong lần cân thứ hai, đặt nhóm A lên 1 đĩa cân, nhóm C lên đĩa kia. Nếu cân thăng bằng thì chiếc nhẫn giả ở nhóm B và dựa vào lần cân thứ nhất ta biết được chiếc nhẫn giả nặng hơn hay nhẹ hơn chiếc nhẫn thật.

Trong lần cân thứ ba ta thực hiện giống như lần cân thứ ba của trường hợp 1 đối với nhóm B sẽ xác định được chiếc nhẫn giả.

Trong lần cân thứ hai nếu cân không thăng bằng thì chiếc nhẫn giả ở nhóm A, và ta xác định được chiếc nhẫn giả nặng hơn hay nhẹ hơn chiếc nhẫn thật.

Trong lần cân thứ ba thực hiện giống như lần cân thứ ba của trường hợp 1 (đối với nhóm A) sẽ xác định được chiếc nhẫn giả.

BỘ ĐỀ 38

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN 6, TPHCM – NĂM HỌC 1998 – 1999

Bài 1:

1) Định m để bất phương trình sau vô nghiệm:
$(m^2 - 3m + 2)x \le 3 - 2m$

2) Giải và biện luận phương trình ẩn x sau: $\frac{x-2}{x-m} = \frac{x-1}{x+2}$

Bài 2: Cho $a \ge b \ge c > 0$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \le \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b}$$

Bài 3: Cho ΔABC vuông tại A. Từ một điểm D bất kỳ trên cạnh BC kẻ DE, DF vuông góc với AB, AC ($E \in AB$, $F \in AC$).

Chứng minh $EA \cdot EB + FA \cdot FC = DB \cdot DC$

Bài 4: Giải phương trình:

$$\frac{12x^2 + 12x + 11}{4x^2 + 4x + 3} = \frac{5y^2 - 10y + 9}{y^2 - 2y + 2}$$

Bài 5: Cho hình thoi ABCD có $\widehat{A} = 60^0$. Gọi M là một điểm thuộc cạnh AD. Đường thẳng CM cắt đường thẳng AB tại N.

1) Chứng minh: $AB^2 = DM \cdot BN$

2) BM cắt DN tại P. Tính góc $\widehat{BPD}$.

Bài 6: Cho ba số a, b, c sao cho $0 \le a \le 2$, $0 \le b \le 2$, $0 \le c \le 2$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 \le 5$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: 1) *Cách 1:* $(m^2 - 3m + 2)x \le 3 - 2m$

$\Leftrightarrow (m^2 - 2m - m + 2)x \le 3 - 2m$

$\Leftrightarrow [m(m-2) - (m-2)]x \le 3 - 2m \Leftrightarrow (m-1)(m-2)x \le 3 - 2m$ (1)

- Nếu $m = 1$, bất phương trình (1) trở thành $0x \le 1 \Leftrightarrow$ x tùy ý.
- Nếu $m = 2$, bất phương trình (1) trở thành $0x \le -1 \Leftrightarrow x \in \varnothing$
- Nếu $m \ne 1$ và $m \ne 2$ bất phương trình (1) có nghiệm

$$x \le \frac{3-2m}{(m-1)(m-2)}$$

(nếu $(m-1)(m-2) > 0$); $x \ge \frac{3-2m}{(m-1)(m-2)}$

(nếu $(m-1)(m-2) < 0$)

Vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm khi $m = 2$.

Cách 2: Ta có $(m^2 - 3m + 2)x \le 3 - 2m$ vô nghiệm.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 = 0 \\ 3 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2m + 2 = 0 \\ 2m > 3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m(m-1)-2(m-1)=0 \\ m > \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)(m-2)=0 \\ m > \dfrac{3}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \text{ hoặc } m = 2 \\ m > \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$

2) $\dfrac{x-2}{x-m} = \dfrac{x-1}{x+2}$ (1)

Điều kiện để phương trình có nghĩa là $\begin{cases} x \neq m \\ x \neq -2 \end{cases}$

Với điều kiện trên phương trình (1) tương đương với:

$(x - 2)(x + 2) = (x - 1)(x - m) \Leftrightarrow x^2 - (m + 1)x + m = x^2 - 4$

$\Leftrightarrow (m + 1)x = m + 4$ (2)

- Nếu $m = -1$ phương trình (2) trở thành $0x = 3 \Rightarrow x \in \varnothing$
- Nếu $m \neq -1$ phương trình (2) có nghiệm $x = \dfrac{m+4}{m+1}$

Giá trị $x = \dfrac{m+4}{m+1}$ là nghiệm của phương trình (1) khi m thỏa điều kiện

$\begin{cases} \dfrac{m+4}{m+1} \neq m \\ \dfrac{m+4}{m+1} \neq -2 \\ m+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m \neq m + 4 \\ m + 4 \neq -2m - 2 \\ m \neq -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 \neq 4 \\ 3m \neq -6 \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \pm 2 \\ m \neq -2 \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq \pm 2 \text{ và } m \neq -1$

Kết luận:

- Nếu $m = -1$ phương trình (1) vô nghiệm
- Nếu $m \neq -1$, $m \neq \pm 2$ phương trình (1) có nghiệm $x = \dfrac{m+4}{m+1}$

Bài 2: $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} \leq \dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{c} + \dfrac{c}{b}$ $(a \geq b \geq c > 0)$

$\Leftrightarrow a^2c + b^2a + c^2b \leq b^2c + a^2b + c^2a$

$\Leftrightarrow ac(c - a) - ab(b - a) + bc(b - c) \geq 0$

$\Leftrightarrow ac(c - a) - ab(b - c + c - a) + bc(b - c) \geq 0$

$\Leftrightarrow ac(c - a) - ab(b - c) - ab(c - a) + bc(b - c) \geq 0$

$\Leftrightarrow a(c - a)(c - b) - b(c - b)(c - a) \geq 0 \Leftrightarrow (c - a)(c - b)(a - b) \geq 0$

(bất đẳng thức đúng vì $c - a \leq 0$, $c - b \leq 0$, $a - b \geq 0$ do $a \geq b \geq c$)

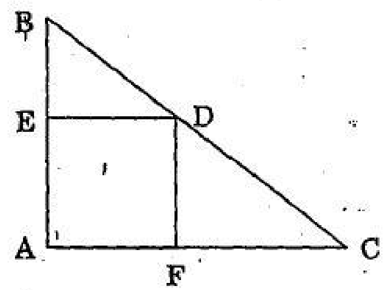
Vậy $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\le\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}$ $(a \ge b \ge c > 0)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ a = c hoặc b = c hoặc a = b.

Bài 3: *Cách 1:*

Tứ giác AEDF là hình chữ nhật và có $\widehat{EAF} = \widehat{AED} = \widehat{AFD} = 90^0$

ΔBED và ΔDFC có:



$\widehat{BED} = \widehat{DFC} = 90^0$

$\widehat{BDE} = \widehat{C}$ (đồng vị)

Vậy $\Delta BED \backsim \Delta DFC$ (g–g)

Cho ta: $\frac{BE}{DB}=\frac{FD}{CD}$ và $\frac{DE}{DB}=\frac{FC}{CD}=\frac{FA}{DB}$

Hệ thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{EA.EB+FA.FC}{DB.DC}=1 \Rightarrow \frac{EA}{DC}.\frac{EB}{DB}+\frac{FA}{DB}.\frac{FC}{DC}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{FD}{DC}.\frac{FD}{DC}+\frac{FC}{CD}.\frac{FC}{CD}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{FD^2+FC^2}{DC^2}=1 \Leftrightarrow \frac{DC^2}{DC^2}=1 \text{ (đúng)}$$

Cách 2: ΔABC có ED // AC

$$\frac{EA}{AB}=\frac{DC}{BC},\frac{EB}{AB}=\frac{DB}{BC}$$

Do đó $\frac{EA}{AB}.\frac{EB}{AB}=\frac{DC}{BC}.\frac{DB}{BC} \Rightarrow EA\,.\,EB = DC\,.\,DB\,.\,\frac{AB^2}{BC^2}$

Chứng minh tương tự ta có: $FC\,.\,FA = DC\,.\,DB\,.\,\frac{AB^2}{BC^2}$

Do đó: $EA\,.\,EB + FC\,.\,FA = DC\,.\,DB\left(\frac{AB^2}{BC^2}+\frac{AC^2}{BC^2}\right)$

$$= DC\,.\,DB\left(\frac{AB^2+AC^2}{BC^2}\right) = DC.\,DB$$

(vì ΔABC vuông tại A nên $AB^2 + AC^2 = BC^2$)

Cách 3: Lần lượt áp dụng định lý Pitago vào các tam giác vuông

BED và DFC, ta có: $\begin{cases} BD^2 = BE^2 + ED^2 \\ DC^2 = DF^2 + FC^2 \end{cases}$

Do tứ giác AEDF là hình chữ nhật (vì có $\widehat{A} = \widehat{E} = \widehat{F} = 90^0$)

nên ED = AF và DF = EA $\Rightarrow \begin{cases} BD^2 = BE^2 + AF^2 \\ DC^2 = EA^2 + FC^2 \end{cases}$ (1)

Lại áp dụng định lý Pitago vào tam giác vuông ABC, ta được:

$BC^2 = BA^2 + AC^2$

$\Leftrightarrow (BD + DC)^2 = (BE + EA)^2 + (AF + FC)^2$

$\Leftrightarrow BD^2 + DC^2 + 2BD.DC$

$= BE^2 + EA^2 + 2BE.EA + AF^2 + FC^2 + 2AF.FC$

$\Leftrightarrow BD^2 + DC^2 + 2BD.DC$

$= BE^2 + AF^2 + EA^2 + FC^2 + 2BE.EA + 2AF.FC$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra:

$BD^2 + DC^2 + 2BD.DC = BD^2 + DC^2 + 2(BE.EA + AF.FC)$

$\Leftrightarrow BD.DC = EA.EB + AF.FC$

Bài 4: $\dfrac{12x^2+12x+11}{4x^2+4x+3} = \dfrac{5y^2-10y+9}{y^2-2y+2}$ (1)

Ta có: $4x^2 + 4x + 3 = (2x+1)^2 + 2$

$y^2 - 2y + 2 = (y-1)^2 + 1$

Vậy phương trình (1) có nghĩa với mọi giá trị của x, y.

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{3(4x^2+4x+3)+2}{4x^2+4x+3} = \dfrac{5(y^2-2y+2)-1}{y^2-2y+2}$

$\Leftrightarrow 3 + \dfrac{2}{(2x+1)^2} = \dfrac{1}{(y-1)^2+1} \Leftrightarrow \dfrac{2}{(2x+1)^2+2} + \dfrac{1}{(y-1)^2+1} = 2$ (2).

Ta có $(2x+1)^2 + 2 \geq 2$

Do đó: $\dfrac{2}{(2x+1)^2+2} \leq 1$

$(y-1)^2 + 1 \geq 1$

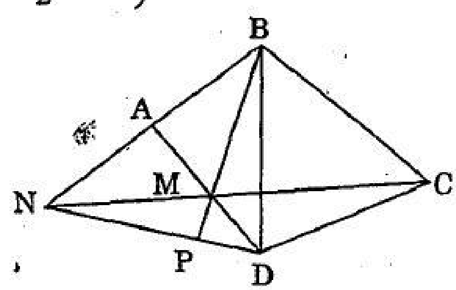
Do đó: $\dfrac{1}{(y-1)^2+1} \leq 1$

Ta có: $\dfrac{2}{(2x+1)^2+2} + \dfrac{1}{(y-1)^2+1} \leq 2$

Dấu "=" xảy ra: $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \\ y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy phương trình (1) có nghiệm là: $\left(x = -\dfrac{1}{2}; y = 1\right)$

Bài 5: 1) Ta có: AM // BC (do AD // BC)



Suy ra $\Delta NAM \backsim \Delta NBC$

Cho ta: $\dfrac{NA}{AM} = \dfrac{NB}{BC}$

hay $\dfrac{NA}{AM} = \dfrac{NB}{AB}$ (1) (vì BC = AB)

Ta có: NA // DC (do AB // DC)

Suy ra $\Delta NAM \backsim \Delta CDM$

Cho ta $\frac{NA}{AM} = \frac{CD}{DM}$,

hay $\frac{NA}{AM} = \frac{AB}{DM}$ (2) (vì CD = AB)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{NB}{AB} = \frac{AB}{DM}$ hay $AB^2 = DM \cdot BN$

2) Từ $\frac{NB}{AB} = \frac{AB}{DM} \Rightarrow \frac{NB}{BD} = \frac{BD}{DM}$

Xét ΔBND và ΔDBM có $\frac{NB}{BD} = \frac{BD}{DM}$ và $\widehat{NBD} = \widehat{BDM} = 60^0$

Vậy $\Delta BND \backsim \Delta DBM$ (c–g–c)

Cho ta: $\widehat{MBD} = \widehat{BND}$ suy ra $\widehat{MBD} + \widehat{MBN} = \widehat{BND} + \widehat{MBN} = 60^0$.

Mà $\widehat{BPD} = \widehat{BND} + \widehat{MBN}$ nên $\widehat{BPD} = 60^0$

Khai thác bài toán: giải bài toán sau.

Cho hình thoi ABCD có góc $\widehat{A}$ bằng 60^0. Vẽ đường thẳng qua C cắt tia đối của tia BA tại M và cắt tia đối của tia DA tại N, DM cắt BN tại K. Tính số đo góc $\widehat{MKB}$.

Bài 6: *Cách 1:*

Do vai trò a, b như nhau nên không mất tính tổng quát, ta giả sử

$0 \le a \le b \le c \le 2$

$3 = a + b + c \le 3c \Rightarrow 1 \le c \le 2$

ta có: $a + b + c = 3 \Rightarrow a + b = 3 - c$

suy ra: $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b)^2 - 2ab + c^2 \le (a+b)^2 + c^2$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \le (3-c)^2 + c^2 = 2c^2 - 6c + 9$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = \le 2\left(c - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}$

với $1 \le c \le 2; -\frac{1}{2} \le c - \frac{3}{2} \le \frac{1}{2}$

Do đó $\left(c - \frac{3}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}$

Ta có: $2\left(c - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} \le \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 5$

Vậy $a^2 + b^2 + c^2 \le 5$

Cách 2: Vì $a, b, c \in [0; 2]$ nên $2 - a \ge 0; 2 - b \ge 0; 2 - c \ge 0$

Suy ra: $(2-a)(2-b)(2-c) \ge 0$

hay: $8 + 2(ab + bc + ca) - 4(a + b + c) - abc \ge 0$

- Thay $a + b + c = 3$ ta được $2(ab + bc + ca) \ge abc + 4$
- Cộng hai vế với $a^2 + b^2 + c^2$ ta được

$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \ge a^2 + b^2 + c^2 + abc + 4$

$a^2 + b^2 + c^2 \le 5$

$\Leftrightarrow (a + b + c)^2 \ge a^2 + b^2 + c^2 + abc + 4 \Leftrightarrow 9 \ge a^2 + b^2 + c^2 + abc + 4$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + abc \le 5$

Cách 3: Đặt $\begin{cases} a = 1+\alpha \\ b = 1+\beta \\ c = 1+\gamma \end{cases}$ với $\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \alpha,\beta,\gamma \in [-1;1] \end{cases}$

$a^2 + b^2 + c^2 \le 5 \Leftrightarrow (1 + \alpha)^2 + (1 + \beta)^2 + (1 + \gamma)^2 \le 5$

$\Leftrightarrow 3 + 2(\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \le 5 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \le 2$

Trong ba số α, β, γ luôn tồn tại hai số hoặc cùng lớn hơn hoặc bằng 0 hoặc cùng nhỏ hơn hoặc bằng 0, giả sử hai số đó là α, β.

Khi đó $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \le \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta + \gamma^2 = (\alpha + \beta)^2 + \gamma^2 = 2\gamma^2 \le 2$

Vậy bất đẳng thức $a^2 + b^2 + c^2 \le 5$ (đúng)

Cách 4: Do vai trò của a, b, c như nhau, nên không mất tính tổng quát, ta giả sử $0 \le a \le b \le c \le 2$.

Ta có: $3 = a + b + c \le 3c \Rightarrow c \ge 1$

Do đó: $(c - 1)(c - 2) \le 0 \Leftrightarrow c^2 - 2c - c + 2 \le 0$

$\Leftrightarrow c^2 - 3c + 2 \le 0$

Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 \le a^2 + b^2 + 2ab + c^2 = (a + b)^2 + c^2$

$= (3 - c)^2 + c^2 = 9 - 6c + c^2 + c^2 = 5 + 2c^2 - 6c + 4$

$= 5 + 2(c^2 - 3c + 2) \le 4$

Dấu "=" xảy ra $(a; b; c) \in \{(0, 1, 2); (0, 2; 1); (1, 0, 2); (1, 2, 0); (2, 1, 0), (2, 0, 1)\}$

BỘ ĐỀ 39

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN 9, TPHCM – NĂM HỌC 1998 – 1999

Bài 1:

1) Thực hiện phép tính:

$$A = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}}$$

2) Viết phân thức sau đây thành tổng hai phân số khác mẫu số với phân thức đã cho $B = \dfrac{48-2p}{16-p^2}$

3) Thu gọn: $C = \dfrac{\dfrac{1}{a^2-9} - \dfrac{1}{a^2+9}}{\dfrac{1}{a^2-9} + \dfrac{1}{a^2+9}} - \dfrac{a^2+9}{a^2}$

Bài 2:

1) Giải phương trình $x^3 + 3x^2 + 2x + 6 = 0$

2) Giải phương trình: $|x^2 - 1| + |a(x-1)| = 0$ (a tham số)

3) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$

Bài 3: Cho tam giác ABC. Trên AB lấy điểm D sao cho BD = 3DA. Trên CB lấy điểm E sao cho BE = 4 EC. Gọi F là giao điểm của AE và CD. Chứng minh rằng FD = FC.

Bài 4: Cho tam giác ABC, M là điểm nằm trên cạnh BC, chứng minh: MA . BC < MC . AB + MB . AC.

Bài 5: Trong tất cả các hình chữ nhật có chiều dài đường chéo không đổi là d. Hãy tìm diện tích hình có diện tích lớn nhất?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) Với $x \neq \pm 1$, ta có:

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}}$$

$$= \frac{2}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}}$$

$$= \frac{4}{1-x^4} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}} = \frac{8}{1-x^8} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}}$$

$$= \frac{16}{1-x^{16}} + \frac{16}{1+x^{16}} = \frac{32}{1-x^{32}}$$

2) Với $p^2 - 16 \neq 0 \Leftrightarrow p \neq \pm 4$, ta có:

$$B = \frac{48-2p}{(4-p)(4+p)} = \frac{20+5p+28-7p}{(4-p)(4+p)} = \frac{5(4+p)+7(4-p)}{(4-p)(4+p)} = \frac{5}{4-p} + \frac{7}{4+p}$$

3) Với $a \neq 0$, $a \neq \pm 3$

$$\frac{\frac{1}{a^2-9} - \frac{1}{a^2+9}}{\frac{1}{a^2-9} + \frac{1}{a^2+9}} - \frac{a^2+9}{a^2} = \frac{a^2+9-(a^2-9)}{a^2+9+a^2-9} - \frac{a^2+9}{a^2} = \frac{9-a^2-9}{a^2} = -1$$

Bài 2:

1) $x^3 + 3x^2 + 2x + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow x^2(x+3) + 2(x+3) = 0$

$\Leftrightarrow (x+3)(x^2+2) = 0 \quad \Leftrightarrow x + 3 = 0$ (vì $x^2 + 2 > 0$)

$\Leftrightarrow x = -3$

2) Xem lời giải bài 4, bộ đề 33.

3) Ta biết, nếu $\frac{x}{y} < 1 \Rightarrow \frac{x}{y} < \frac{x+n}{y+n}$ (với x, y, n > 0)

Thật vậy, vì $\frac{x}{y} < 1$ $(y > 0) \Rightarrow x < y \Rightarrow xn < yn$ (vì $n > 0$)

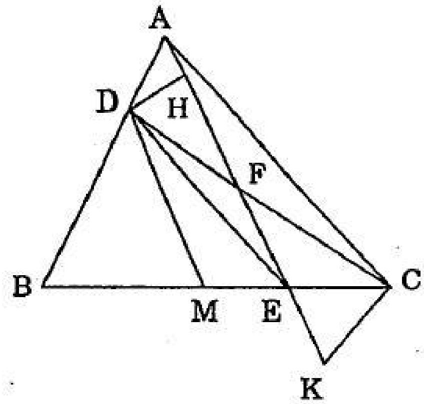
$\Rightarrow xy + xn < xy + yn \Rightarrow x(y+n) < y(x+n)$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} < \frac{x+n}{y+n}$$

Vì a, b, c, là độ dài ba cạnh của tam giác nên a < b + c, b < a + c và c < a + b

$$\Rightarrow \frac{a}{b+c} < 1; \frac{b}{a+c} < 1; \frac{c}{a+b} < 1$$

$$\text{Vậy} \begin{cases} \dfrac{a}{b+c} < \dfrac{2a}{a+b+c} \\ \dfrac{b}{a+c} < \dfrac{2b}{a+b+c} \\ \dfrac{c}{a+b} < \dfrac{2c}{a+b+c} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2$$



Bài 3: *Cách 1:* Ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{S_{AEC}}{S_{ABE}} = \dfrac{EC}{BE} = \dfrac{1}{4} \text{ (vì BE = 4EC)} \\ \dfrac{S_{ADE}}{S_{ABE}} = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{1}{4} \text{ (vì BD = 3DA)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{AEC}}{S_{ABE}} = \frac{S_{ADE}}{S_{ABE}} \Rightarrow S_{AEC} = S_{ADE}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} AE \cdot CK = \frac{1}{2} DH \cdot AE \Rightarrow CK = DH$$

Vậy: $\Delta HFD = \Delta KFC$ ($\hat{H} = \hat{K} = 90^0$; $\widehat{FDH} = \widehat{FCK}$; CK = AH)

$\Rightarrow$ FD = FC

Cách 2: Từ BD = 3DA $\Rightarrow \dfrac{BD}{AB} = \dfrac{3}{4}$

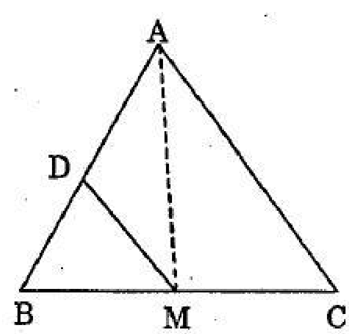
Gọi M = $S_E(C) \Rightarrow ME = \dfrac{BE}{4}$

Suy ra: $\dfrac{BD}{AB} = \dfrac{3}{4}$ (vì $\dfrac{ME}{BE} = \dfrac{1}{4}$ nên $\dfrac{MB}{BE} = \dfrac{3}{4}$) $\Rightarrow$ MD // AE

Trong tam giác DMC có DM // EF và EM = EC suy ra FD = FC.

Bài 4: Kẻ MD // AC (D $\in$ AB)

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{MB}{BC} = \dfrac{MD}{AC} \\ \dfrac{MC}{BC} = \dfrac{AD}{AB} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MB.AC = MD.BC \\ MC.AB = AD.BC \end{cases}$$



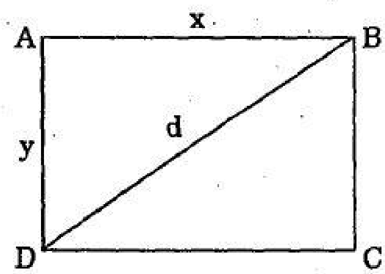
suy ra:

MB.AC + MC.AB = MD.BC + AD.BC

= (MD + AD) BC > MA.BC

(Vì tam giác ADM có: MD + AD > MA)

Bài 5: Gọi x, y là kích thước của hình chữ nhật $(x, y > 0)$



Ta có: $x^2 + y^2 = d^2$

Mà $x^2 + y^2 \ge 2xy$

$\Rightarrow xy \le \dfrac{d^2}{2}$ (không đổi)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$

$\Leftrightarrow$ ABCD hình vuông.

Nghĩa là trong tất cả các hình chữ nhật có chiều dài đường chéo là d không đổi thì hình vuông có diện tích lớn nhất và bằng $\dfrac{d^2}{2}$

BỘ ĐỀ 40

ĐỀ THI HỌC BỔNG TRƯỜNG THCS NGUYỄN DU QUẬN 1, TPHCM – NĂM HỌC 1998 – 1999

Bài 1:

1) Tính: $S = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + 99^2 - 100^2 + 101^2$

2) Cho $a + b + c = 9$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 53$. Tính $ab + bc + ca$

Bài 2: Cho $a + b + c + d = 0$

Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(c + d)(ab - cd)$

Bài 3: Chứng minh rằng: $\forall a, b, c$: $a^2 + 4b^2 + 3c^2 > 2a + 12b + 6c - 14$

Bài 4: Cho góc $\widehat{xOy} = 60^0$. Trên hai tia Ox, Oy lần lượt lấy các điểm tùy ý B và C. Chứng minh rằng: $OB + OC \le 2\,BC$.

Bài 5: Cho tứ giác ABCD (AB không song song với CD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD thỏa mãn: $MN = \dfrac{BC + AD}{2}$

Chứng minh ABCD là hình thang.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

1) *Cách 1:* $S = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + 99^2 - 100^2 + 101^2$

$= -(2^2 - 1^2 + 4^2 - 3^2 + ... + 100^2 - 99^2 - 101^2)$

$= -[(2 - 1)(2 + 1) + (4 - 3)(4 + 3) + ... + (100 - 99)(100 + 99) - 101^2]$

$= -(3 + 7 + 11 + ... + 199 - 101^2)$

$= -(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + ... + 99 + 100 - 101^2)$

$= -\left[\dfrac{100(100+1)}{2} - 101^2\right] = -\left(\dfrac{100.101 - 2.101^2}{2}\right) = \dfrac{101.102}{2}$

$= 101 . 51 = 5151$

Cách 2: $S = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + 99^2 - 100^2 + 101^2$

$= 1^2 + (3^2 - 2^2) + (5^2 - 4^2) + ... + (101^2 - 100^2)$

$= 1 + (3 + 2)(3 - 2) + (5 + 4)(5 - 4) + ... + (101^2 - 100^2)$

$= 1 + (3 + 2)(3 - 2) + (5 + 4)(5 - 4) + ... + (101 + 100)(101 - 100)$

$= 1 + (3 + 2) + (5 + 4) + ... + (101 + 100) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + 100 + 101$

$= (1 + 101) . 101 : 2 = 5151$

2) Ta có: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$

mà $a + b + c = 9$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 53$

Suy ra: $81 = 53 + 2(ab + bc + ac) \Rightarrow ab + bc + ac = \dfrac{81 - 53}{2} = 14$

Bài 2: Ta có: $a + b + c + d = 0$ nên $a + b = -(c + d)$

Suy ra: $(a + b)^3 = -(c + d)^3 \Rightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

$= -c^3 - d^3 - 3cd(c + d)$

$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = -3ab(a + b) - 3cd(c + d)$

$= 3ab(c + d) - 3cd(c + d) = 3(c + d)(ab - cd)$ (đpcm)

Bài 3: Ta có: $a^2 + 4b^2 + 3c^2 > 2a + 12b + 6c - 14$

$\Leftrightarrow (a^2 - 2a) + (4b^2 - 12b) + 3(c^2 - 2c) + 14 > 0$

$\Leftrightarrow (a^2 - 2a + 1) + (4b^2 - 12b + 9) + 3(c^2 - 2c + 1) + 1 > 0$

$\Leftrightarrow (a - 1)^2 + (2b - 3)^2 + 3(c - 1)^2 + 1 > 0$ (đúng)

Vì: $\begin{cases} (a-1)^2 \ge 0, \text{ với mọi } a \\ (2b-3)^2 \ge 0, \text{ với mọi } b \\ 3(c-1)^2 \ge 0, \text{ với mọi } c \end{cases}$

$\Rightarrow (a - 1)^2 + (2b - 3)^2 + 3(c - 1)^2 + 1 > 0$, với mọi a, b, c.

Bài 4:

Xét OB = OC. Ta có ΔOBC đều nên OB = OC = BC.

Do đó OB + OC = 2 BC.

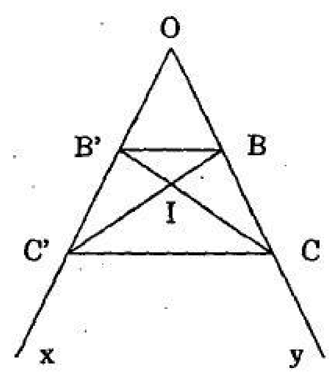
Xét OB < OC

Trên tia Ox lấy C', trên tia Oy lấy E sao cho OB' = OB, OC' = OC.

Ta được tam giác OBB' và tam giác OCC' là các tam giác đều.

(vì là tam giác cân có một góc 60^0)

Suy ra BB'CC' là hình thang cân.



Ta có: $\begin{cases} BI + B'I \ge BB' \\ IC + IC' \ge CC' \end{cases}$

$\Rightarrow (BI + IC) + (B'I + IC') \ge BB' + CC'$

$\Rightarrow BC + B'C' \ge BB' + CC' \Rightarrow OB + OC \le 2 BC$

Xét OB > OC

Tương tự OB < OC cũng chứng minh được

OB + OC $\le$ 2 BC

Tóm lại OB + OC $\le$ 2 BC