

**Bài 27.** Tìm giá trị:

a) nhỏ nhất của biểu thức  $A = \left| x - \frac{2}{3} \right| + 1$ ;

b) lớn nhất của biểu thức  $B = 5 - \left| \frac{3}{4} - x \right|$ .

● **Tìm hiểu đề bài**

Câu a của đề bài đòi hỏi tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A và khi đó giá trị của x bằng bao nhiêu?

Câu b đòi hỏi tìm giá trị lớn nhất của biểu thức B và khi đó giá trị của x bằng bao nhiêu?

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Trước hết hãy làm quen với khái niệm: giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của một biểu thức.

Chẳng hạn, có:

1)  $x \geq 2$ , thì hiểu rằng x luôn nhận mọi giá trị lớn hơn hoặc bằng 2 và khi x bằng 2 thì đó là giá trị nhỏ nhất của x.

2)  $x \leq 3$ , thì hiểu rằng x luôn nhận mọi giá trị nhỏ hơn hoặc bằng 3 và khi x bằng 3 thì đó là giá trị lớn nhất của x.

Ở đề bài này cần lưu ý sử dụng định nghĩa về giá trị tuyệt đối của một biểu thức:  $|a| \geq 0$ . Cũng cần chú ý đến việc đặt dấu trừ trước một số dương, chẳng hạn, nếu có  $a \geq 0$  thì  $-a \leq 0$ .

● **Cách giải**

a) Ta đã biết rằng, với mọi giá trị của x thì  $\left| x - \frac{2}{3} \right| \geq 0^{(*)}$ . Thêm vào hai vế của bất đẳng thức (\*) số 1, ta có:

$$A = \left| x - \frac{2}{3} \right| + 1 \geq 1$$

Nhận thấy biểu thức A luôn luôn lớn hơn hoặc bằng 1, vậy khi A bằng 1 thì biểu thức A có giá trị nhỏ nhất:

$$|x - \frac{2}{3}| + 1 = 1 \Rightarrow |x - \frac{2}{3}| = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

Vậy khi  $x = \frac{2}{3}$  thì biểu thức A có giá trị nhỏ nhất bằng 1.

b) Ta đã biết rằng, với mọi giá trị của x thì  $|\frac{3}{4} - x| \geq 0$ , từ đó có  $|\frac{3}{4} - x| \leq 0^{(**)}$ .

Thêm vào hai vế của bất đẳng thức (\*\*) số 5, ta có:

$$B = 5 - |\frac{3}{4} - x| \leq 5.$$

Nhận thấy biểu thức B luôn luôn nhỏ hơn hoặc bằng 5, vậy khi B bằng 5 thì biểu thức B có giá trị lớn nhất:

$$5 - |\frac{3}{4} - x| = 5 \Rightarrow |\frac{3}{4} - x| = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

Vậy khi  $x = \frac{3}{4}$  thì biểu thức B có giá trị lớn nhất bằng 5.

#### ● Khai thác bài toán

Ở bài toán trên, người ta đã khẳng định một biểu thức nào đó là có giá trị nhỏ nhất hay có giá trị lớn nhất. Bây giờ có hai biểu thức:

$$a) C = |x + \frac{1}{4}| \quad b) D = |x - \frac{1}{2}| + 1$$

thì mỗi biểu thức này có giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất?

Ta có thể lập luận như sau:

a) Biết rằng  $C = |x + \frac{1}{4}| \geq 0$ , chứng tỏ rằng C luôn nhận mọi giá trị lớn hơn hoặc bằng 0 và khi  $C = 0$  thì đó là giá trị nhỏ nhất của C;  $C = 0$  hay  $|x + \frac{1}{4}| = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$ .

Vậy khi  $x = -\frac{1}{4}$  thì biểu thức C có giá trị nhỏ nhất bằng 0.

b) Tương tự có  $|x - \frac{1}{2}| \geq 0$ . Thêm vào hai vế của bất đẳng thức số 1, có

$$D = |x - \frac{1}{2}| + 1 \geq 1,$$

chứng tỏ rằng D luôn nhận mọi giá trị lớn hơn hoặc bằng 1 và khi  $D = 1$  thì đó là giá trị nhỏ nhất của D.

$$D = 1 \text{ suy ra } |x - \frac{1}{2}| = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Vậy khi  $x = \frac{1}{2}$  thì biểu thức D có giá trị nhỏ nhất bằng 1.

**Bài 28.** Thực hiện các phép tính sau:

a)  $[6 \cdot (-\frac{1}{3})^2 - 3(-\frac{1}{3}) + 1] : (-\frac{1}{3} - 1);$

b)  $6 \cdot (-\frac{2}{3})^3 - 3 \cdot (-\frac{2}{3})^2 - 2 \cdot (-\frac{2}{3}) + 8;$

c)  $\frac{(\frac{2}{3})^3 \cdot (-\frac{3}{4})^2 \cdot (-1)^5}{(\frac{2}{5})^2 \cdot (-\frac{5}{12})^3};$

d)  $16^{16} : 8^7.$

• **Tim hiểu đề bài**

Câu a là một dãy tính có dấu móc vuông gồm các phép tính: nhân, lũy thừa, chia và cộng trừ.

Câu b là một dãy tính gồm các phép tính lũy thừa, nhân và cộng trừ.

Câu c là một dãy tính gồm các phép tính lũy thừa, nhân và chia.

Câu d là chia hai lũy thừa.

• **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a cần làm các phép tính trong dấu móc vuông trước. Trong móc vuông làm phép tính lũy thừa, phép nhân rồi làm cộng, trừ. Cuối cùng làm phép chia.

Với câu b cần làm phép tính lũy thừa, nhân rồi cộng trừ.

Với câu c cần làm phép tính lũy thừa, nhân và cuối cùng là phép chia.

Với câu d là phép chia hai lũy thừa, cần biến đổi để hai lũy thừa có cùng một cơ số rồi áp dụng quy tắc chia hai lũy thừa của cùng một số.

• **Cách giải**

$$\text{a) } [6.\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 3\left(-\frac{1}{3}\right) + 1] : \left(-\frac{1}{3} - 1\right)$$

$$= [6.\frac{1}{9} + 1 + 1] : \left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$= \left[\frac{2}{3} + 2\right] : \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -2.$$

$$\text{b) } 6.\left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 3.\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 2\left(-\frac{2}{3}\right) + 8$$

$$= 6.\left(-\frac{8}{27}\right) - 3 \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{3} + 8$$

$$= -\frac{16}{9} - \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + 8 = \frac{-16+72}{9} = \frac{56}{9} = 6\frac{2}{9}.$$

$$\text{c) } \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^2 \cdot (-1)^5}{\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(-\frac{5}{12}\right)^3} = \frac{\frac{8}{27} \cdot \frac{9}{16} \cdot (-1)}{\frac{4}{25} \cdot \frac{-125}{144 \cdot 12}} = \frac{-\frac{1}{6}}{-\frac{5}{144 \cdot 3}}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{144 \cdot 3}{5} = \frac{72}{5} = 14,4.$$

$$d) 16^{16} : 8^7 = (2^4)^{16} : (2^3)^7 = 2^{64} : 2^{21} = 2^{43}.$$

**Bài 29.** Tìm x biết rằng:

$$a) (2x - 3)^2 = 9; \quad b) \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} = \frac{1}{8};$$

$$c) \left(-\frac{1}{3}\right)^{x-3} = \frac{1}{81}; \quad d) 3^{x-1} = \frac{1}{243};$$

$$e) 2^x + 2^{x+3} = 144; \quad f) 81^{2x} \cdot 27^x = 9^{10}.$$

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài yêu cầu tìm giá trị của x trong các đẳng thức có chứa biểu thức lũy thừa.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a cần lưu ý rằng, lũy thừa bậc chẵn của một số âm hoặc số dương luôn là số dương.

Với câu b, hãy biến đổi để đẳng thức có cùng một cơ số.

Với câu c, lưu ý đến lũy thừa bậc chẵn và cần biến đổi để đẳng thức có cùng một cơ số.

Với câu d, cần biến đổi 243 thành một lũy thừa có cơ số là 3 và lưu ý lũy thừa  $a^0 = 1$ .

Với câu e, lưu ý sử dụng quy tắc về tích 2 lũy thừa của cùng một số, tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng, rồi chia 2 vế của đẳng thức cho cùng một số và cuối cùng xem xét hai lũy thừa có cùng cơ số từ đó có x.

Với câu f, biến đổi các lũy thừa về cùng cơ số 3, áp dụng các quy tắc về lũy thừa để tìm x.

● **Cách giải**

$$a) (2x - 3)^2 = (\pm 3)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 3 \\ 2x - 3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 6 \\ 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 0. \end{cases}$$

$$b) \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow 2x - 1 = 3 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2.$$

$$c) \left(-\frac{1}{3}\right)^{x-3} = \frac{1}{81} \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{3}\right)^{x-3} = \left(-\frac{1}{3}\right)^4 \Leftrightarrow x - 3 = 4 \Leftrightarrow x = 7.$$

$$d) 3^{x-1} = \frac{1}{243} \Leftrightarrow 3^{x-1} = \frac{1}{3^5}$$

$$3^{x-1} \cdot 3^5 = 1 \Leftrightarrow 3^{x+4} = 1 = 3^0 \Leftrightarrow x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4.$$

$$e) 2^x + 2^{x+3} = 144 \Leftrightarrow 2^x + 2^x \cdot 2^3 = 144 \Leftrightarrow$$

$$2^x(1 + 2^3) = 144 \Leftrightarrow 9 \cdot 2^x = 144 \Leftrightarrow 2^x = 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^x = 2^4 \Leftrightarrow x = 4.$$

$$f) 81^{-2x} \cdot 27^x = 9^{10} \Leftrightarrow (3^4)^{-2x} \cdot (3^3)^x = (3^2)^{10}$$

$$\Leftrightarrow 3^{-8x} \cdot 3^{3x} = 3^{20} \Leftrightarrow 3^{-5x} = 3^{20}$$

$$\Leftrightarrow -5x = 20 \Leftrightarrow x = -4.$$

#### • Khai thác bài toán

Sau khi tìm được giá trị của  $x$ , cần thử lại để kiểm tra kết quả. Chẳng hạn với câu a, ta có  $x = 3$  thì  $(2x - 3)^2 = 3^2 = 9$ ;  $x = 0$  thì  $(2x - 3)^2 = (-3)^2 = 9$ .

Tương tự như trên, bạn đọc có thể tự thử lại.

**Bài 30.** So sánh các cặp số sau:

a)  $(-32)^9$  và  $(-16)^{13}$ ;

b)  $10^{20}$  và  $90^{10}$ ;

c)  $(-5)^{30}$  và  $(-3)^{50}$ ;

d)  $\left(\frac{1}{16}\right)^{10}$  và  $\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$ .

#### • Tìm hiểu đề bài

Đề bài ở mỗi câu cho hai lũy thừa, yêu cầu so sánh xem trong hai lũy thừa đó thì số nào lớn hơn.

#### • Hướng dẫn cách tìm lời giải

Cách làm chung cho các bài toán so sánh hai lũy thừa là tìm cách đưa hai lũy thừa đã cho về hai lũy thừa có cùng số mũ hoặc có cùng cơ số, từ đó dễ dàng so sánh chúng với nhau. Cụ thể:

Với câu a, trước hết hãy biến đổi  $32^9$  và  $16^{13}$  về cùng cơ số 2 và

cần lưu ý như sau: biết  $4 < 8$  hay  $2^2 < 2^3$ , nhưng nếu nhân 4 và 8 với  $-1$  ta sẽ có  $-4 > -8$  hay  $-2^2 > -2^3$ .

Với câu b, hãy biến đổi để có cùng số mũ là 10 và với lưu ý rằng, lũy thừa nào có cơ số lớn hơn sẽ lớn hơn, chẳng hạn như  $5^{10} > 4^{10}$ .

Với câu c, vì 30 và 50 đều là các số chẵn, nên các lũy thừa đã cho là lũy thừa với cơ số dương, hãy tìm cách biến đổi để hai lũy thừa có cùng số mũ là 10.

Với câu d, hãy biến đổi hai lũy thừa để có cùng cơ số là  $\frac{1}{2}$  và chú ý như sau: với cơ số nhỏ hơn 1, lũy thừa nào có số mũ nhỏ hơn sẽ lớn hơn, chẳng hạn  $(\frac{1}{2})^2 > (\frac{1}{2})^3$ .

• Cách giải

a) Ta có  $(32)^9 = (2^5)^9 = 2^{45}$

$$16^{13} = (2^4)^{13} = 2^{52}.$$

Rõ ràng  $2^{45} < 2^{52}$  Nhân hai vế với  $-1$ , ta có:

$$-2^{45} > -2^{52} \text{ hay } (-2^5)^9 > (-2^4)^{13}$$

$$\text{Vậy } (-32)^9 > (-16)^{13}.$$

b) Ta có  $10^{20} = (10^2)^{10} = 100^{10}$ .

Rõ ràng  $100 > 90$  nên  $100^{10} > 90^{10}$

$$\text{Vậy } 10^{20} > 90^{10}.$$

c) Ta có  $(-5)^{30} = 5^{30} = (5^3)^{10} = 125^{10}$

$$(-3)^{50} = 3^{50} = (3^5)^{10} = 243^{10}.$$

Rõ ràng  $243 > 125$  nên  $243^{10} > 125^{10}$ , vậy

$$(-5)^{30} < (-3)^{50}.$$

d) Ta có  $(\frac{1}{16})^{10} = (\frac{1}{2^4})^{10} = [(\frac{1}{2})^4]^{10} = (\frac{1}{2})^{40}$ .

Vì  $\frac{1}{2} < 1$  nên  $(\frac{1}{2})^{40} > (\frac{1}{2})^{50}$ , vậy

$$(\frac{1}{16})^{10} > (\frac{1}{2})^{50}.$$

● Khai thác bài toán

Như đã nói ở phần hướng dẫn cách tìm lời giải, khi phải so sánh hai lũy thừa thì căn cứ vào đề bài cụ thể mà biến đổi các lũy thừa đã cho để chúng có cùng cơ số (hay cùng số mũ), khi đó sẽ so sánh số mũ (hay so sánh cơ số) để có kết luận.

Tuy vậy, cũng có đề bài có thể làm theo cả hai cách đã nói ở trên. Chẳng hạn, với câu d, trong cách giải đã trình bày cách biến đổi cơ số, bây giờ sẽ trình bày cách biến đổi số mũ như sau:

$$(\frac{1}{2})^{50} = [(\frac{1}{2})^5]^{10} = (\frac{1}{2^5})^{10} = (\frac{1}{32})^{10}.$$

Biết  $16 < 32$  suy ra  $\frac{1}{16} > \frac{1}{32}$ , vậy

$$(\frac{1}{16})^{10} > (\frac{1}{32})^{10} \text{ hay}$$

$$(\frac{1}{16})^{10} > (\frac{1}{2})^{50}.$$

*Chú ý:* Nếu  $a > b > 0$  và  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \neq 0$  thì  $a^n > b^n$ . Chẳng hạn  $a = 8$ ,  $b = 5$ ,  $n = 2$ , ta sẽ có  $8^2 > 5^2$ .

**Bài 31.** Tìm các số  $a$ ,  $b$ ,  $c$  biết rằng:

$$3a = 6b = 9c \text{ và } a - b + c = 45.$$

● Tìm hiểu đề bài

Đề bài cho  $3a = 6b = 9c$  và tổng đại số  $a - b + c = 45$ , yêu cầu tìm giá trị của ba số  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Từ giả thiết  $3a = 6b = 9c$  phải lập ra được một dãy các tỉ số



bằng nhau bằng cách chia  $3a$ ,  $6b$ ,  $9c$  cho BCNN của  $3$ ;  $6$ ;  $9$ . Sau đó áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau để tìm  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

• Cách giải

Từ  $3a = 6b = 9c$  suy ra  $\frac{3a}{18} = \frac{6b}{18} = \frac{9c}{18}$  hay  $\frac{a}{6} = \frac{b}{3} = \frac{c}{2}$ .

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{6} = \frac{b}{3} = \frac{c}{2} = \frac{a-b+c}{6-3+2} = \frac{45}{5} = 9.$$

$$\text{Từ } \frac{a}{6} = 9 \Rightarrow a = 54,$$

$$\frac{b}{3} = 9 \Rightarrow b = 27,$$

$$\frac{c}{2} = 9 \Rightarrow c = 18.$$

Vậy  $a = 54$ ,  $b = 27$ ,  $c = 18$ .

• Khai thác bài toán

Có thể kiểm tra lại kết quả trên bằng cách nào?

Kiểm tra như sau:

- Cách 1. Tính  $a - b + c$  có bằng  $45$  không?

$$a - b + c = 54 - 27 + 18 = 45$$

- Cách 2. Xét xem có  $3a = 6b = 9c$  không?

$$3a = 3 \cdot 54 = 162; 6b = 6 \cdot 27 = 162; 9c = 9 \cdot 18 = 162.$$

## B. CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

### ĐỀ BÀI

**Bài 32.** Biết rằng  $|a + b| = |a| + |b|$  khi và chỉ khi  $ab \geq 0$ .  
Hãy tìm số nguyên  $x$ , nếu biết:

a)  $|x - 3| + |5 \cdot x| = 2$ ;

b)  $|x - 4| + |5 \cdot x| = 1$ .

**Bài 33.** Tìm các số nguyên  $x, y$  sao cho:

a)  $(x - 3)(y - 2) = 5;$

b)  $(x + 1)(y + 3) = 7.$

**Bài 34.** Cho tổng

$M = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 99 - 100$ , hãy xét xem tổng  $M$  có chia hết cho 2; 3; 4 và 5 không?

**Bài 35.** Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức

a)  $|3 + 2x| + 3;$

b)  $5 - |x - 2|.$

**Bài 36.** Tìm  $x$  biết:

a)  $|3x - 5| = 4;$

b)  $|2x + 1| + 2 = 5.$

**Bài 37.** Tìm các giá trị của  $x$  để biểu thức  $Q = x^2 - 2x$  có giá trị âm.

**Bài 38.** Tìm  $x$  biết:

a)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} = \frac{1}{27};$

b)  $\left(-\frac{1}{3}\right)^{x-1} = \frac{1}{729}.$

### HƯỚNG DẪN - CÁCH GIẢI

**Bài 32.** ● Hướng dẫn cách tìm lời giải. Hãy sử dụng triệt để các điều đã cho của đề bài để làm.

● Cách giải

a)  $|x - 3| + |5 - x| = 2 = |(x - 3) + (5 - x)|.$

Theo đề bài có  $(x - 3)(5 - x) \geq 0$ , suy ra  $x - 3$  và  $5 - x$  cùng dấu, do đó có  $3 \leq x \leq 5$ . Vì  $x \in \mathbf{Z}$  nên  $x \in \{3; 4; 5\}$ .

b)  $|x - 4| + |5 - x| = 1 = |(x - 4) + (5 - x)|.$

Theo đề bài có  $(x - 4)(5 - x) \geq 0$ , suy ra  $x - 4$  và  $5 - x$  cùng dấu, do đó có  $4 \leq x \leq 5$ . Vì  $x \in \mathbf{Z}$  nên  $x \in \{4; 5\}$ .

**Bài 33. • Hướng dẫn cách tìm lời giải.**

a) Cần xét mối quan hệ giữa các ước cụ thể của 5 với hai ước phụ thuộc vào  $x, y$  của 5 là  $x - 3$  và  $y - 2$ .

b) Tương tự, cần xét mối quan hệ giữa các ước cụ thể của 7 với hai ước phụ thuộc vào  $x, y$  của 7 là  $x + 1$  và  $y + 3$ .

**• Cách giải**

a) Biết  $(x - 3)(y - 2) = 5$  nên  $x - 3$  và  $y - 2$  là ước của 5, mà số 5 có các ước là  $\pm 1; \pm 5$ , do đó có thể lập bảng để tìm số nguyên  $x, y$  như sau:

$x - 3$	1	-1	5	-5
$y - 2$	5	-5	1	-1

 $\Rightarrow$ 

$x$	4	2	8	-2
$y$	7	-3	3	1

b) Biết  $(x + 1)(y + 3) = 7$  nên  $x + 1$  và  $y + 3$  là ước của 7, mà số 7 có các ước là  $\pm 1; \pm 7$ , do đó có thể lập bảng để tìm số nguyên  $x, y$  như sau:

$x + 1$	1	-1	7	-7
$y + 3$	7	-7	1	-1

 $\Rightarrow$ 

$x$	0	-2	6	-8
$y$	4	-10	-2	-4

**Bài 34. • Hướng dẫn cách tìm lời giải.** Trước hết phải tính tổng  $M$ , muốn vậy hãy để ý 2 số liên tiếp bắt đầu từ số 1, chúng có hiệu bằng  $-1$ , tất cả có 50 hiệu, do đó tính được  $M$ . Sau đó vận dụng dấu hiệu chia hết để trả lời.

**• Cách giải**

$$\begin{aligned} M &= \underbrace{1 - 2} + \underbrace{3 - 4} + \underbrace{5 - 6} + \dots + \underbrace{99 - 100} \\ &= \underbrace{(-1) + (-1) + (-1) + \dots + (-1)}_{\text{có 50 số } -1} \\ &= -50 \end{aligned}$$

Số -50 chia hết cho 2 và cho 5 vì có chữ số tận cùng bằng số 0.

Số -50 không chia hết cho 3 và cho 4.

**Bài 35. • Hướng dẫn cách tìm lời giải.** Chú ý vận dụng về giá trị tuyệt đối của một biểu thức:  $|A| \geq 0$ ,  $-|A| \leq 0$ .

a) Ta biết rằng, với mọi giá trị của  $x$  thì  $|3 + 2x| \geq 0$ .

Thêm 3 vào hai vế của bất đẳng thức trên, ta có:

$$|3 + 2x| + 3 \geq 3.$$

Nhận thấy biểu thức  $|3 + 2x| + 3$  luôn lớn hơn hoặc bằng 3 và khi nó bằng 3 là giá trị nhỏ nhất.

$$\text{Từ } |3 + 2x| + 3 = 3 \Rightarrow |3 + 2x| = 0 \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

Vậy khi  $x = -\frac{3}{2}$  thì  $|3 + 2x| + 3$  có giá trị nhỏ nhất bằng 3.

b) Ta biết rằng, với mọi giá trị của  $x$  thì  $|x - 2| \geq 0$ , từ đó có  $-|x - 2| \leq 0$ .

Thêm 5 vào hai vế của bất đẳng thức trên, ta có:

$$5 - |x - 2| \leq 5$$

Nhận thấy biểu thức  $5 - |x - 2|$  luôn nhỏ hơn hoặc bằng 5 và khi nó bằng 5 là giá trị lớn nhất.

$$\text{Từ } 5 - |x - 2| = 5 \Rightarrow |x - 2| = 0 \Rightarrow x = 2$$

Vậy khi  $x = 2$  thì  $5 - |x - 2|$  có giá trị lớn nhất bằng 5.

**Bài 36. • Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Câu a cần xét khi  $3x - 5 > 0$  và  $3x - 5 < 0$

Câu b cần xét khi  $2x + 1 > 0$  và  $2x + 1 < 0$ .

• Cách giải

a) Khi  $3x - 5 > 0$  hay  $x > \frac{5}{3}$  thì  $|3x - 5| = 3x - 5$ , do đó có:

$$3x - 5 = 4 \Leftrightarrow x = 3 \text{ (thỏa mãn điều kiện } x > \frac{5}{3} \text{)}$$

Khi  $3x - 5 < 0$  hay  $x < \frac{5}{3}$  thì  $|3x - 5| = -(3x - 5) = 5 - 3x$ ,

do đó có:

$$5 - 3x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ (thỏa mãn).}$$

b) Khi  $2x + 1 > 0$  hay  $x > -\frac{1}{2}$  thì  $|2x + 1| = 2x + 1$ , do đó có:

$$2x + 1 + 2 = 5 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn)}$$

Khi  $2x + 1 < 0$  hay  $x < -\frac{1}{2}$  thì  $|2x + 1| = -(2x + 1) = -2x - 1$ , do đó có:

$$-2x - 1 + 2 = 5 \Leftrightarrow 1 - 2x = 5 \Leftrightarrow x = -2 \text{ (thỏa mãn).}$$

**Bài 37. • Hướng dẫn cách tìm lời giải.** Biến đổi sao cho Q viết được thành một tích của hai thừa số. Tích của hai thừa số này là âm khi hai thừa số này trái dấu.

• Cách giải

$$Q = x^2 - 2x = x(x - 2)$$

$Q < 0$  khi các thừa số  $x$  và  $x - 2$  trái dấu. Biết rằng  $x > x - 2$  nên khi  $x$  và  $x - 2$  trái dấu thì  $x > 0$  còn  $x - 2 < 0$  tức là  $0 < x < 2$ .

Vậy với  $0 < x < 2$  thì Q có giá trị âm, có thể biểu diễn kết quả trên trục số như sau:

$$0 < x < 2$$



**Bài 38. • Hướng dẫn cách tìm lời giải.** Hãy viết số ở vế phải dưới dạng một lũy thừa có cùng cơ số với lũy thừa ở vế trái.

• Cách giải

$$\text{a) } \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} = \frac{1}{27} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = 3 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2.$$

$$\text{b) } \left(-\frac{1}{3}\right)^{x-1} = \frac{1}{729} \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{3}\right)^{x-1} = \left(-\frac{1}{3}\right)^6 \Leftrightarrow x - 1 = 6 \Leftrightarrow x = 7.$$

## II. ĐA THỨC VÀ CÁC PHÉP TÍNH

### A. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

#### BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

Bài 1. Tính giá trị của các biểu thức:

$$\text{a) } A = \frac{x^2 + y^2 - 2xy}{x - y} \text{ với } x = 2; y = -1,5;$$

$$\text{b) } B = \frac{4xy}{(x + y)^2 - (x - y)^2} \text{ với } x = 2; y = -0,75;$$

$$\text{c) } C = (x^7 + 11y^2)(x^{11} + 2y)(x^4 + y)(x^2 - y) \text{ với } x = -\frac{1}{5};$$

$y = 0,04;$

$$\text{d) } D = 6x^2 - 4|x| + 2x - 5 \text{ với } x = 2; x = -3;$$

$$\text{e) } E = 4x^3 - 2x^2 + 3x + 1 \text{ với } |x| = \frac{1}{2}.$$

#### • Tìm hiểu đề bài

Đề bài cho các biểu thức có một biến hoặc hai biến và giá trị bằng số của biến, đòi hỏi tính giá trị của biểu thức.

#### • Hướng dẫn cách tìm lời giải

Phương pháp chung để tính giá trị của một biểu thức đại số gồm 2 bước sau:

- Bước 1. Thay chữ bởi giá trị số đã cho, với giá trị là số âm cần lưu ý đặt trong dấu ngoặc.

- Bước 2. Thực hiện các phép tính: lũy thừa, nhân, chia và cuối cùng là cộng, trừ.

Cụ thể:

+ Các câu a, b có thể áp dụng ngay hướng dẫn trên.

+ Câu c, hãy thay chữ bởi số đã cho đối với thừa số cuối cùng của biểu thức đã cho, từ đó sẽ có ngay kết quả.

+ Câu d, cho giá trị bằng số của x, phải tính  $|x|$ .

+ Câu e, cho  $|x| = \frac{1}{2}$ , phải tính x, cần xét hai trường hợp

$$x = \frac{1}{2} \text{ và } x = -\frac{1}{2}$$

• Cách giải

a) Với  $x = 2, y = -1,5 = -1\frac{1}{2}$ , có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2^2 + (-1\frac{1}{2})^2 - 2 \cdot 2 \cdot (-1\frac{1}{2})}{2 - (-1\frac{1}{2})} = \frac{4 + \frac{9}{4} + 6}{2 + 1\frac{1}{2}} \\ &= \frac{12\frac{1}{4}}{3\frac{1}{2}} = \frac{49}{4} : \frac{7}{2} = \frac{49}{4} \cdot \frac{2}{7} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) Với  $x = 2; y = -0,75 = -\frac{3}{4}$ , có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{4 \cdot 2 \cdot (-\frac{3}{4})}{[2 + (-\frac{3}{4})]^2 - [2 - (-\frac{3}{4})]^2} = \frac{-6}{(\frac{5}{4})^2 - (\frac{11}{4})^2} = \frac{-6}{\frac{25}{16} - \frac{121}{16}} \\ &= \frac{-6}{-\frac{96}{16}} = \frac{-6}{-6} = 1. \end{aligned}$$

c) Với  $x = -\frac{1}{5} = -0,2, y = 0,04$ . Trước hết tính  $x^2 - y$ , có:

$$(-0,2)^2 - 0,04 = 0,04 - 0,04 = 0.$$

C là tích của bốn thừa số, thừa số thứ tư bằng 0, vậy  $C = 0$ .

d) \* Với  $x = 2$ , có:

$$\begin{aligned} D &= 6 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 5 \\ &= 24 - 8 + 4 \cdot 5 = 15 \end{aligned}$$

\* Với  $x = -3$ , có:

$$D = 6. (-3)^2 - 4. 3 + 2.(-3) - 5 \\ = 54 - 12 - 6 - 5 = 31.$$

e) Xét hai trường hợp:

\* Với  $x = \frac{1}{2}$ , có:

$$E = 4. \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3.\frac{1}{2} + 1 \\ = 4.\frac{1}{8} - 2.\frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 1 = 2\frac{1}{2}$$

\* Với  $x = -\frac{1}{2}$ , có:

$$E = 4.\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3.\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \\ = 4.\left(-\frac{1}{8}\right) - 2.\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 1 = -1\frac{1}{2}$$

#### ● Khai thác bài toán

Một vài chú ý khi giải loại toán tính giá trị của biểu thức:

- Với loại bài như câu c, nếu cứ làm theo phương pháp chung ta có:

$$[(-0,2)^7 + 11.(0,04)^2][(-0,2)^{11} + 2.(0,04)][(-0,2)^4 + 0,04]. [(-0,2)^2. 0,04]$$

Nhận thấy, nâng  $-0,2$  lên lũy thừa 4; 7; 11 được số thập phân với nhiều chữ số ở phần thập phân, tính toán rất phức tạp. Sau một hồi tính toán kiên trì, ta sẽ gặp thừa số thứ tư bằng 0, đến đây có thể bỏ không cần tính toán cụ thể các thừa số thứ nhất, thứ hai, thứ ba, mà biết ngay biểu thức này bằng 0, vì trong một tích có một trong các thừa số bằng không thì cả tích đó sẽ bằng 0.

Điều chú ý thứ nhất rút ra: cần làm thử, mò mẫm để tìm kết quả, do đó sẽ có cách giải nhanh, gọn.

- Với loại bài như câu e, biểu thức đã cho chứa biến  $x$ , còn giá



trị của  $x$  đã cho là  $|x| = \frac{1}{2}$ . Ta cần tìm  $x$ .

Theo định nghĩa về giá trị tuyệt đối, ta có:  $|\frac{1}{2}| = |+\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ ,  
nên  $|x| = \frac{1}{2}$  suy ra  $x = \frac{1}{2}$ ;  $x = -\frac{1}{2}$ . Do vậy câu này cần xét hai trường hợp đối với  $x$ .

Điều chú ý thứ hai rút ra: Chẳng những quan tâm tìm hiểu đề bài mà còn quan tâm đến các giá trị đã cho của  $x$  để làm bài cho đầy đủ.

**Bài 2.** Tìm các giá trị thích hợp của biến trong biểu thức:

a)  $\frac{x}{5x + 1}$  ;

b)  $\frac{4}{x^2 - 9}$  ;

c)  $\frac{x + 3}{x^2 - xy}$  ;

d)  $\frac{5x - 8}{x^2 + 4}$  .

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài cho các biểu thức phân, đòi hỏi phải tìm giá trị thích hợp của biến để mỗi biểu thức phân đó có nghĩa.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Như đã biết trong phép chia, số chia phải khác 0 thì mới thực hiện được phép tính. Cũng vậy, một biểu thức phân có nghĩa khi giá trị của các biến ở mẫu không làm cho mẫu đó bằng 0 tức là mẫu phải khác 0. Từ đó phải xét lần lượt các mẫu khác 0 để tìm giá trị thích hợp của các biến trong mỗi phân thức.

● **Cách giải**

a) Ta có  $5x + 1 \neq 0 \Rightarrow 5x \neq -1 \Rightarrow x \neq -\frac{1}{5}$ .

Vậy giá trị thích hợp của biến  $x$  trong biểu thức  $\frac{x}{5x + 1}$  là

$x \neq -\frac{1}{5}$ .

b) Ta có  $x^2 - 9 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 9 \Rightarrow x \neq \pm 3$ .

Vậy giá trị thích hợp của biến  $x$  trong biểu thức  $\frac{4}{x^2 - 9}$  là  $x \neq 3; x \neq -3$ .

c) Ta có  $x^2 - xy = x(x - y) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0; x - y \neq 0 \Rightarrow x \neq y$ .

Vậy giá trị thích hợp của biến  $x, y$  trong biểu thức  $\frac{x+3}{x^2 - xy}$  là  $x \neq 0; x \neq y$ .

d) Ta có  $x^2 + 4$  luôn khác 0 với mọi giá trị của  $x$ .

Vậy giá trị thích hợp của biến  $x$  trong biểu thức  $\frac{5x-8}{x^2+4}$  là với mọi giá trị của  $x$ .

#### ● Khai thác bài toán

- Khi mẫu của một biểu thức phân là tổng của một bình phương và một số dương nào đó, chẳng hạn  $x^2 + 4$ , thì  $x^2 + 4$  luôn là một số dương và chắc chắn rằng  $x^2 + 4 \neq 0$  với mọi giá trị của  $x$ . Do đó giá trị thích hợp của biến  $x$  trong biểu thức phân là mọi giá trị của  $x$ , biểu thức đã cho luôn có nghĩa.

- Khi làm toán với một phân số có dạng  $\frac{a}{b}$  và một biểu thức phân có dạng  $\frac{A}{B}$  thì phải có điều kiện  $b \neq 0; B \neq 0$  vì phép chia cho số 0 là không có nghĩa.

**Bài 3.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

a)  $M = (x - 4)^2 + 1;$

b)  $N = (2x + 1)^2 - 3;$

c)  $Q = (x^2 - 9)^6 + |y - 5| - 1.$

#### ● Tìm hiểu đề bài

Câu a là tổng một bình phương và số 1, câu b là hiệu một bình phương và số 3, câu c là tổng một lũy thừa bậc 6 và giá trị tuyệt đối của một biểu thức với số -1. Ta phải tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức  $M, N, Q$ .

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Lưu ý rằng, lũy thừa bậc chẵn của một biểu thức A chẳng hạn luôn là một số không âm, tức là  $A \geq 0$ . Mặt khác cũng biết rằng giá trị tuyệt đối của một số hay một biểu thức cũng là số không âm.

Khi thêm cùng một số vào hai vế của bất đẳng thức  $A \geq 0$  thì được một bất đẳng thức cùng chiều với bất đẳng thức đó, chẳng hạn từ  $A \geq 0$  suy ra  $A + 5 \geq 5$  hay  $A - 3 \geq -3$ .

Dựa vào gợi ý trên hãy giải bài toán đã cho.

● **Cách giải**

a) Với mọi  $x$  ta đều có  $(x - 4)^2 \geq 0$  nên  $(x - 4)^2 + 1 \geq 1$ .

Ta thấy  $(x - 4)^2 + 1$  luôn lớn hơn hoặc bằng 1, nên giá trị nhỏ nhất của  $(x - 4)^2 + 1$  bằng 1 khi  $x - 4 = 0$  hay  $x = 4$ .

Vậy khi  $x = 4$  thì biểu thức M có giá trị nhỏ nhất bằng 1.

b) Với mọi  $x$  ta đều có  $(2x + 1)^2 \geq 0$  nên  $(2x + 1)^2 - 3 \geq -3$ .

Ta thấy  $(2x + 1)^2 - 3$  luôn lớn hơn hoặc bằng -3, vậy giá trị nhỏ nhất của  $(2x + 1)^2 - 3$  bằng -3 khi  $2x + 1 = 0$  hay  $x = -\frac{1}{2}$ .

Vậy khi  $x = -\frac{1}{2}$  thì biểu thức N có giá trị nhỏ nhất bằng -3.

c) Với mọi  $x$  ta đều có  $(x^2 - 9)^6 \geq 0$  và với mọi  $y$  ta đều có  $|y - 5| \geq 0$ , do đó  $(x^2 - 9)^6 + |y - 5| \geq 0$  nên

$$(x^2 - 9)^6 + |y - 5| - 1 \geq -1.$$

Ta thấy  $(x^2 - 9)^6 + |y - 5| - 1$  luôn lớn hơn hoặc bằng -1, vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức Q bằng -1 khi

$$(x^2 - 9)^6 + |y - 5| = 0.$$

Tổng của hai số hạng không âm bằng không khi và chỉ khi mỗi số hạng đó bằng 0 tức là có:

$$(x^2 - 9)^6 = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$|y - 5| = 0 \Rightarrow y - 5 = 0 \Rightarrow y = 5.$$

Vậy với  $x = \pm 3$  và  $y = 5$  thì biểu thức  $Q$  có giá trị nhỏ nhất bằng  $-1$ .

- **Khai thác bài toán.** Một lưu ý về phương pháp giải:

Nhận thấy các biểu thức  $M, N, Q$  đã cho đều có lũy thừa bậc chẵn, mà lũy thừa bậc chẵn của một số hay của một biểu thức luôn là một số không âm. Đó là cơ sở chủ yếu để dựa vào đó mà làm loại toán này. Bạn đọc cần lưu ý và làm quen cách lập luận này.

**Bài 4.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

a)  $M = 12 - x^2;$

b)  $N = 5 - (3x - 1)^4;$

c)  $Q = \frac{3}{3x^2 + 6}.$

- **Tìm hiểu đề bài**

Câu a cho hiệu của 12 với bình phương của  $x$ , câu b cho hiệu của 5 với lũy thừa bậc 4 của một biểu thức, câu c cho thương của 3 với một biểu thức có chứa lũy thừa bậc 2. Ta phải tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức  $M, N, Q$ .

- **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, ta thấy rằng, với mọi  $x$  thì  $x^2 \geq 0$ , nhưng nếu nhân với  $-1$  thì có  $-x^2 \leq 0$ . Thêm 12 vào hai vế ta có  $12 - x^2 \leq 12$ . Từ đó tìm được giá trị lớn nhất của biểu thức  $M$ .

Với câu b, làm tương tự câu a.

Với câu c, với mọi giá trị của  $x$ , ta luôn có  $3x^2 + 6 \geq 6$ , do đó  $\frac{3}{3x^2 + 6} \leq \frac{3}{6}$ , vì với hai phân số có cùng tử nếu phân số nào có mẫu

lớn hơn thì nhỏ hơn. Lại biết  $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ , từ đó tìm được giá trị lớn nhất của biểu thức  $Q$ .

• Cách giải

a) Với mọi giá trị của  $x$  ta đều có  $x^2 \geq 0$ . Nhân hai vế với  $-1$  ta có  $-x^2 \leq 0$ . Thêm  $12$  vào hai vế được  $12 - x^2 \leq 12$ .

Ta thấy  $12 - x^2$  luôn nhỏ hơn hoặc bằng  $12$ , nên giá trị lớn nhất của biểu thức  $M = 12 - x^2$  bằng  $12$  khi  $x^2 = 0$  hay  $x = 0$ .

Vậy khi  $x = 0$  thì biểu thức  $M$  có giá trị lớn nhất bằng  $12$ .

b) Với mọi  $x$  ta đều có  $(3x - 1)^4 \geq 0$ . Nhân hai vế với  $-1$  ta có  $-(3x - 1)^4 \leq 0$ . Thêm  $5$  vào hai vế được  $5 - (3x - 1)^4 \leq 5$ .

Ta thấy  $5 - (3x - 1)^4$  luôn nhỏ hơn hoặc bằng  $5$ , nên giá trị lớn nhất của biểu thức  $N = 5 - (3x - 1)^4$  bằng  $5$  khi  $3x - 1 = 0$  hay

$$x = \frac{1}{3}$$

Vậy khi  $x = \frac{1}{3}$  thì biểu thức  $N$  có giá trị lớn nhất bằng  $5$ .

c) Ta luôn có  $3x^2 + 6 \geq 6$  với mọi  $x$ . Biết rằng, nếu hai phân số có cùng tử là  $3$  thì phân số nào có mẫu lớn hơn sẽ là phân số nhỏ hơn, do đó có  $\frac{3}{3x^2+6} \leq \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ .

Ta thấy  $\frac{3}{3x^2+6}$  luôn nhỏ hơn hoặc bằng  $\frac{1}{2}$ , vậy giá trị lớn nhất của biểu thức  $Q = \frac{3}{3x^2+6}$  bằng  $\frac{1}{2}$  khi  $x = 0$ .

Vậy khi  $x = 0$  thì biểu thức  $Q$  có giá trị lớn nhất bằng  $\frac{1}{2}$ .

• Khai thác bài toán. Một lưu ý về phương pháp giải:

Ngược lại với bài toán tìm giá trị nhỏ nhất của một biểu thức, ở bài toán tìm giá trị lớn nhất của một biểu thức, ta lập luận để cho biểu thức đã cho nhỏ hơn hoặc bằng một số nào đó. Cái giống nhau của đề bài loại toán này là các lũy thừa của biến hay biểu thức đã cho đều là lũy thừa bậc chẵn.

Hãy làm đi làm lại một số lần với mỗi bài để có thói quen và kỹ năng về cách giải loại toán này.

## Bài 5

a) Tìm giá trị nguyên của biến  $x$  để biểu thức  $A = \frac{3x-5}{x}$  có giá trị nguyên nhỏ nhất.

b) Tìm giá trị nguyên của biến  $x$  để biểu thức  $B = \frac{2}{6-x}$  có giá trị nguyên lớn nhất.

### • Tìm hiểu đề bài

Câu a, phải tìm giá trị nguyên của biến  $x$  để biểu thức

$A = \frac{3x-5}{x}$  cũng là một số nguyên, nhưng có giá trị nhỏ nhất.

Câu b, phải tìm giá trị nguyên của biến  $x$  để biểu thức

$B = \frac{2}{6-x}$  cũng là một số nguyên, nhưng có giá trị lớn nhất.

### • Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, trước hết cần lưu ý rằng, nếu phải trừ hai phân số có cùng mẫu, chẳng hạn  $\frac{x}{7}$  trừ  $\frac{3}{7}$ , thì có thể viết  $\frac{x}{7} - \frac{3}{7} = \frac{x-3}{7}$ . Ở đây

ta quan tâm đến điều ngược lại, tức là  $\frac{x-3}{7} = \frac{x}{7} - \frac{3}{7}$ .

Vận dụng cách viết này để biến  $A$  thành một số nguyên và một biểu thức phân, rồi tiếp tục suy luận để tìm ra kết quả.

Với câu b, vì tử là số dương không đổi, nên biểu thức  $B$  có giá trị lớn nhất khi  $6 - x$  là số nguyên nhỏ nhất. Biết rằng  $6 - x$  không thể là một số nguyên âm vì không có số nguyên âm nhỏ nhất, tức là  $6 - x > 0$ . Như vậy  $B$  có giá trị lớn nhất khi  $6 - x$  là số nguyên dương nhỏ nhất.

### • Cách giải

a) Ta có  $A = \frac{3x-5}{x} = \frac{3x}{x} - \frac{5}{x}$  (dựa theo cách viết khi phải trừ

hai phân số có cùng mẫu).

$$\text{Vậy } A = 3 - \frac{5}{x}.$$

Ta thấy A là hiệu của 3 và  $\frac{5}{x}$  sẽ có giá trị nhỏ nhất khi số trừ  $\frac{5}{x}$  là số nguyên dương lớn nhất.

Phân số  $\frac{5}{x}$  là số dương khi  $x > 0$ . Phân số  $\frac{5}{x}$  có tử là số không đổi, sẽ là số nguyên dương lớn nhất khi x là số nguyên dương bé nhất.

Biết số nguyên dương bé nhất bằng 1, nên có  $\frac{5}{x} = \frac{5}{1} = 5$ , từ đó suy ra: giá trị nhỏ nhất của  $A = 3 - \frac{5}{x} = 3 - 5 = -2$  khi  $x = 1$ .

Vậy khi  $x = 1$  thì biểu thức  $A = \frac{3x-5}{x}$  có giá trị nhỏ nhất bằng -2.

b) Vì biểu thức phân B có tử bằng 2 là một số nguyên dương không đổi nên  $B = \frac{2}{6-x}$  sẽ có giá trị lớn nhất khi  $6 - x > 0$  và  $6 - x$  phải là số nguyên dương nhỏ nhất.

Biết số nguyên dương nhỏ nhất bằng 1, nên có  $6 - x = 1$ , suy ra  $x = 5$ .

Vậy khi  $x = 5$  thì biểu thức  $B = \frac{2}{6-x}$  có giá trị lớn nhất bằng 2.

### ● Khai thác bài toán

Ta thấy:

- Trong cách giải đối với câu a, dựa vào cách viết về phép trừ hai phân số cùng mẫu để biến đổi biểu thức phân đã cho thành một số nguyên và một biểu thức phân khác đơn giản hơn.

Đến đây ta được một hiệu, hiệu này có giá trị nhỏ nhất khi số trừ có giá trị lớn nhất, dẫn đến phải lập luận phân số  $\frac{5}{x}$  là số nguyên dương lớn nhất với giá trị nguyên dương nào của  $x$ . Tiếp tục những suy luận có lí ta sẽ đi tới kết quả bài toán.

- Trong cách làm đối với câu b, do tử là một số dương, nên cần những suy luận có lí đối với mẫu để biểu thức B có giá trị lớn nhất.

Chú ý rằng, cả hai câu a và b đều phải lập luận với giá trị nào của  $x$  để  $\frac{5}{x}$  và  $\frac{2}{6-x}$  có giá trị lớn nhất. Cả hai lập luận đều đi đến mẫu của hai biểu thức phân này phải bằng 1.

Đây là loại bài toán đòi hỏi dùng một dãy các suy luận có lí lẽ chặt chẽ để đi tới lời giải. Bạn đọc cần làm quen với loại toán này để phát triển tư duy toán học.

**Bài 6.** Các biểu thức sau có bằng nhau không:

- a)  $(x + 1)^2$  và  $x^2 + 1$ ;                      c)  $(x - 1)^2$  và  $(1 - x)^2$ ;  
b)  $(x - 1)^3$  và  $(1 - x)^3$ ;                      d)  $(x - y)^2$  và  $(y - x)^2$ .

● **Tim hiểu đề bài**

Mỗi câu của đề bài gồm hai biểu thức, phải xét xem hai biểu thức đó có bằng nhau hay không?

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Cách thức chung để giải bài toán trên là biến đổi biểu thức này về biểu thức kia dựa vào định nghĩa về lũy thừa, quy tắc đổi dấu các thừa số của một tích để có kết luận rằng, hai biểu thức này có bằng nhau hay không. Nếu không biến đổi được có thể cho biến một giá trị số nào đó, rồi tính giá trị mỗi biểu thức, từ đó có kết luận, cần chú ý rằng với cách làm này chỉ có thể kết luận được cho hai biểu thức không bằng nhau.

Với câu a và câu b hãy cho  $x$  một giá trị số rồi tính giá trị mỗi



biểu thức. Các câu c, d có thể biến đổi được.

• Cách giải

a) Hai biểu thức đã cho không bằng nhau. Chẳng hạn với  $x = 2$  thì  $(x + 1)^2 = (2 + 1)^2 = 9$ , còn  $x^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$ . Rõ ràng  $9 \neq 5$  nên  $(x + 1)^2 \neq x^2 + 1$ .

b) Hai biểu thức đã cho không bằng nhau. Chẳng hạn với  $x = 3$  thì  $(x - 1)^3 = (3 - 1)^3 = 8$ , còn  $(1 - x)^3 = (1 - 3)^3 = (-2)^3 = -8$ . Rõ ràng  $8 \neq -8$  nên  $(x - 1)^3 \neq (1 - x)^3$ .

c) Hai biểu thức đã cho bằng nhau, vì:

$$\begin{aligned}(x - 1)^2 &= (x - 1)(x - 1) \text{ (theo định nghĩa lũy thừa)} \\ &= (1 - x)(1 - x) \text{ (quy tắc đổi dấu hai thừa số của tích)} \\ &= (1 - x)^2 \text{ (theo định nghĩa lũy thừa).}\end{aligned}$$

d) Hai biểu thức đã cho bằng nhau, vì:

$$\begin{aligned}(x - y)^2 &= (x - y)(x - y) \text{ (theo định nghĩa lũy thừa)} \\ &= (y - x)(y - x) \text{ (quy tắc đổi dấu hai thừa số của tích)} \\ &= (y - x)^2 \text{ (theo định nghĩa lũy thừa).}\end{aligned}$$

• Khai thác bài toán

Ta biết rằng  $2 \neq -2$ , nhưng  $2 = -(-2)$ . Vận dụng nhận xét này, ta nhận thấy: hai biểu thức ở câu b trong bài 6 là hai biểu thức đối nhau. Thật vậy:

$$(x - 1)^3 = (x - 1)(x - 1)(x - 1)$$

Đổi dấu ba thừa số của tích ta được:

$$-(1 - x)(1 - x)(1 - x) = -(1 - x)^3$$

Do vậy, ta có:  $(x - 1)^3 = -(1 - x)^3$ .

Có thể nêu tổng quát như sau:

Với mọi  $n \in \mathbf{N}$  thì:

$$(a - b)^{2n + 1} = -(b - a)^{2n + 1}$$

$$(a - b)^{2n} = (b - a)^{2n}, \text{ tức là:}$$

- + Lũy thừa lẻ cùng bậc của hai số đối nhau thì đối nhau.
- + Lũy thừa chẵn cùng bậc của hai số đối nhau thì bằng nhau.

## CỘNG, TRỪ ĐƠN THỨC, ĐA THỨC

### Bài 7

a) Cho  $A = 3x - 4 - |2x - 1|$

1) Rút gọn biểu thức A

2) Với giá trị nào của x thì  $A = 10$ ?

b) Cho  $B = |3x - 3| + (x - 5)$ .

1) Rút gọn biểu thức B

2) Với giá trị nào của x thì  $B = 2$ ?

#### • Tìm hiểu đề bài

Câu a của đề bài là trừ hai đa thức, sau đó là tìm giá trị của x (nếu có) để  $A = 10$ .

Câu b của đề bài là cộng hai đa thức, sau đó là tìm giá trị của x (nếu có) để  $B = 2$ .

#### • Hướng dẫn cách tìm lời giải

Để rút gọn biểu thức A, B đã cho phải khử được dấu giá trị tuyệt đối với lưu ý là:

$$|P| = \begin{cases} P & \text{với } P \geq 0 \\ -P & \text{với } P < 0 \end{cases}$$

Để tìm giá trị của x (nếu có) phải căn cứ vào các biểu thức A, B đã được rút gọn cùng với điều kiện của x khi khử dấu giá trị tuyệt đối.

#### • Cách giải

a) 1) Rút gọn biểu thức A.

- Nếu  $x \geq \frac{1}{2}$  thì  $2x - 1 \geq 0$  nên  $|2x - 1| = 2x - 1$ . Khi đó, có:

$$A = 3x - 4 - (2x - 1)$$

$$= 3x - 4 - 2x + 1 = x - 3.$$

- Nếu  $x < \frac{1}{2}$  thì  $2x - 1 < 0$  nên  $|2x - 1| = 1 - 2x$ . Khi đó, có:

$$A = 3x - 4 - (1 - 2x)$$

$$= 3x - 4 - 1 + 2x = 5x - 5$$

2) Tìm giá trị của  $x$  để  $A = 10$ .

Phải xét hai trường hợp sau:

$$+ \text{ Trường hợp 1: } \begin{cases} x - 3 = 10 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 13 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 13$$

$$+ \text{ Trường hợp 2: } \begin{cases} 5x - 5 = 10 \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \text{Không tồn tại } x.$$

Vậy với  $x = 13$  thì  $A = 10$ .

b) 1) Rút gọn biểu thức B

- Nếu  $x \geq 1$  thì  $3x - 3 \geq 0$  nên  $|3x - 3| = 3x - 3$ . Khi đó, có:

$$B = 3x - 3 + (x - 5)$$

$$= 3x + x - 3 - 5 = 4x - 8$$

- Nếu  $x < 1$  thì  $3x - 3 < 0$  nên  $|3x - 3| = 3 - 3x$ . Khi đó, có:

$$B = 3 - 3x + (x - 5)$$

$$= 3 - 3x + x - 5 = -2x - 2.$$

2) Tìm giá trị của  $x$  để  $B = 2$

Phải xét hai trường hợp sau:

+ Trường hợp 1:

$$\begin{cases} 4x - 8 = 2 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 10 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

+ Trường hợp 2:

$$\begin{cases} -2x - 2 = 2 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = 4 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2$$

Vậy với  $x = \frac{5}{2}$ ;  $x = -2$  thì  $B = 2$ .

● Khai thác bài toán

a) Để tự tin và khẳng định tính đúng đắn của đáp số một bài toán đã tìm được, nên có thói quen thử lại. Dưới đây ta thử lại đối với câu b như sau:

- Với  $x = \frac{5}{2}$ , ta có:

$$\begin{aligned} B &= |3x - 3| + (x - 5) \\ &= \left| 3 \cdot \frac{5}{2} - 3 \right| + \left( \frac{5}{2} - 5 \right) = \left| \frac{15-6}{2} \right| + \left( \frac{5-10}{2} \right) \\ &= \left| \frac{9}{2} \right| + \left( -\frac{5}{2} \right) = \frac{9}{2} - \frac{5}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

- Với  $x = -2$ , ta có:

$$\begin{aligned} B &= |3x - 3| + (x - 5) \\ &= |3 \cdot (-2) - 3| + (-2 - 5) \\ &= |-6 - 3| + (-7) = |-9| + (-7) \\ &= 9 - 7 = 2 \end{aligned}$$

b) Cần lưu ý khi trình bày việc khử dấu giá trị tuyệt đối. Chẳng hạn, với câu b, để tìm điều kiện về  $x$ , ta làm như sau:

$$|3x - 3| = \begin{cases} 3x - 3 & \text{với } 3x - 3 \geq 0 \\ -(3x - 3) & \text{với } 3x - 3 < 0 \end{cases}$$

$$\text{Với } 3x - 3 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq 3 \Rightarrow x \geq 1$$

$$\text{Với } 3x - 3 < 0 \Rightarrow 3x < 3 \Rightarrow x < 1$$

Việc tìm điều kiện của  $x$  do làm nhiều, thành quen, nên có thể

viết ngay được kết quả cần có. Nếu không, phải viết ra như đã trình bày như trên ở vở nháp, còn khi trình bày bài làm phải bắt đầu từ: nếu  $x \geq 1$  (hoặc nếu  $x < 1$ )...

Trên đây trình bày các lưu ý về cách làm bài, trình bày lời giải để bạn đọc suy ngẫm mà thực hành tốt.

**Bài 8.** Tìm P biết:

a)  $P + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$ ;

b)  $(25xy^2 - 13x^2y + x^3) - P = 11xy^2 - 2x^3$ ;

c)  $(8xyz + 20x^2yz^2 - 5xy^3) + P = 0$ ;

d)  $P - (3x^3y^2 - 5xyz^2 + 3xyz) = 2x^3y^2 + 4xyz^2 - 2xyz$ .

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài đòi hỏi phải tìm đa thức P, trong đó P là một số hạng của một tổng (câu a, câu c), hay P là số trừ (câu b), hay P là số bị trừ (câu d).

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Vận dụng mối quan hệ giữa các số hạng và tổng trong phép cộng, số bị trừ, số trừ và hiệu trong phép trừ.

● **Cách giải**

a)  $P + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$

$$P = 6x^2 + 9xy - y^2 - (5x^2 - 2xy)$$

$$= 6x^2 + 9xy - y^2 - 5x^2 + 2xy = x^2 + 11xy - y^2$$

b)  $(25xy^2 - 13x^2y + x^3) - P = 11xy^2 - 2x^3$

$$P = (25xy^2 - 13x^2y + x^3) - (11xy^2 - 2x^3)$$

$$= 25xy^2 - 13x^2y + x^3 - 11xy^2 + 2x^3 = 3x^3 + 14xy^2 - 13x^2y$$

c)  $(8xyz + 20x^2yz^2 - 5xy^3) + P = 0$

$$P = 0 - (8xyz + 20x^2yz^2 - 5xy^3) = -8xyz - 20x^2yz^2 + 5xy^3$$

d)  $P - (3x^3y^2 - 5xyz^2 + 3xyz) = 2x^3y^2 + 4xyz^2 - 2xyz$

$$\begin{aligned}
 P &= 2x^3y^2 + 4xyz^2 - 2xyz + (3x^3y^2 - 5xyz^2 + 3xyz) \\
 &= 2x^3y^2 + 4xyz^2 - 2xyz + 3x^3y^2 - 5xyz^2 + 3xyz \\
 &= 5x^3y^2 - xyz^2 + xyz.
 \end{aligned}$$

● **Khai thác bài toán**

Như đã biết hai số đối nhau hay hai biểu thức đối nhau thì có giá trị tuyệt đối bằng nhau còn dấu khác nhau.

Với câu c, tổng của hai biểu thức bằng 0, chắc chắn rằng đó là hai biểu thức đối nhau, từ đó có thể viết ra ngay  $P = -8xyz - 20x^2yz^2 + 5xy^3$ . Biểu thức này chính là biểu thức đã cho trong bài toán nhưng được viết với dấu ngược lại.

Đây là một nhận xét, lưu ý bạn đọc có thể làm nhầm bài toán và trong tính toán đòi hỏi phải làm nhanh.

**Bài 9.** Cho các đa thức:

$$f(x) = 6x^3 - 3x^2 + x - 5;$$

$$g(x) = 3x^3 - 4x^2 + 4;$$

$$h(x) = 4x^3 + 8x.$$

Tính: a)  $f(x) + g(x) - h(x)$

b)  $f(x) - g(x) + h(x)$

c)  $g(x) + h(x) - f(x)$ .

● **Tim hiểu đề bài**

Đề bài cho ba đa thức một biến, phải tìm tổng và hiệu của các đa thức đã cho.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Vận dụng quy tắc về phép trừ số hữu tỉ: muốn trừ đi đa thức  $h(x)$  (hoặc  $g(x)$ ), ta cộng với  $-h(x)$  (hoặc  $-g(x)$ ).

Khi cộng các đa thức đã sắp xếp, cần viết các đơn thức đồng dạng ở cùng một cột, rồi cộng các hệ số của các đơn thức với nhau.

● Cách giải

a) Tính  $f(x) + g(x) - h(x)$ :

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & 6x^3 - 3x^2 + x - 5 \\ g(x) & = & 3x^3 - 4x^2 + 4 \\ -h(x) & = & -4x^3 - 8x \end{array}$$


---

$$f(x) + g(x) - h(x) = 5x^3 - 7x^2 - 7x - 1$$

b) Tính  $f(x) - g(x) + h(x)$ :

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & 6x^3 - 3x^2 + x - 5 \\ -g(x) & = & -3x^3 + 4x^2 - 4 \\ h(x) & = & 4x^3 + 8x \end{array}$$


---

$$f(x) - g(x) + h(x) = 7x^3 + x^2 + 9x - 9$$

c) Tính  $g(x) + h(x) - f(x)$ :

$$\begin{array}{rcl} g(x) & = & 3x^3 - 4x^2 + 4 \\ h(x) & = & 4x^3 + 8x \\ -f(x) & = & -6x^3 + 3x^2 - x + 5 \end{array}$$


---

$$g(x) + h(x) - f(x) = x^3 - x^2 + 7x + 9$$

● Khai thác bài toán

Các đa thức đã cho trong đề bài là các đa thức đã được sắp xếp, nếu các đa thức cho chưa sắp xếp, ta cần sắp xếp theo lũy thừa tăng (hoặc giảm) rồi làm phép tính. Chẳng hạn: cho các đa thức  $f(x) = x^4 + 3x^5 - x^3 + 2x^2 - 7$  và  $g(x) = -x - 7 + x^4$ , tính  $f(x) + g(x)$ ,  $f(x) - g(x)$  và  $g(x) - f(x)$ .

Trước hết ta sắp xếp đa thức theo lũy thừa giảm dần, có:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & 3x^5 + x^4 - x^3 + 2x^2 - 7 \\ g(x) & = & x^4 - x - 7 \end{array}$$

- Tính tổng  $f(x) + g(x)$

$$f(x) = 3x^5 + x^4 - x^3 + 2x^2 - 7$$

$$g(x) = x^4 - x - 7$$

---

$$f(x) + g(x) = 3x^5 + 2x^4 - x^3 + 2x^2 - x - 14$$

- Tính hiệu  $f(x) - g(x)$ :

$$f(x) = 3x^5 + x^4 - x^3 + 2x^2 - 7$$

$$-g(x) = -x^4 + x + 7$$

---

$$f(x) - g(x) = 3x^5 - x^3 + 2x^2 + x$$

- Tính hiệu  $g(x) - f(x)$ :

$$g(x) = x^4 - x - 7$$

$$-f(x) = -3x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 + 7$$

---

$$g(x) - f(x) = -3x^5 + x^3 - 2x^2 - x$$

*Chú ý:* Khi phải tính hiệu của  $g(x)$  và  $f(x)$  thì ta đã tính tổng của  $g(x)$  với đa thức đối của đa thức  $f(x)$  chính là  $-f(x)$ .

**Bài 10.** Thu gọn các đa thức sau rồi tìm nghiệm của chúng:

a)  $(9x + 1) - (4x + 2)$ ;                      b)  $(2x^2 - 5x + 1) - (x^2 + 3x + 1)$

c)  $(3x^2 - 2x + 1) - (3x^2 - 2x + 5)$ ; d)  $x(x + 4) - (x^2 + 4x)$ ;

e)  $x^2 + 2x + 2$ ; f)  $x^2 + x + 1$

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài yêu cầu thu gọn các đa thức đã cho, sau đó tìm nghiệm của đa thức sau khi đã thu gọn.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Thu gọn các đa thức bằng cách thực hiện phép cộng các đơn thức đồng dạng. Riêng đối với các câu e, f phải biến đổi để làm xuất hiện các số hạng đồng dạng.

Để tìm nghiệm của đa thức cần giải phương trình  $f(x) = 0$ ,



nếu tồn tại giá trị của  $x$  thì giá trị này là nghiệm của đa thức.

Với câu a, cần bỏ ngoặc, thu gọn đa thức, sau đó xét  $f(x) = 0$ .

Với câu b, làm tương tự câu a.

Với câu c, bỏ ngoặc, thu gọn, sẽ được một hằng số không thể bằng 0 nên không có nghiệm.

Với câu d, bỏ ngoặc, thu gọn, sẽ được số 0, hãy xét nghiệm.

Với các câu e, f cần biến đổi để làm xuất hiện các số hạng đồng dạng, rồi xem xét nghiệm.

● Cách giải

$$a) (9x + 1) - (4x + 2) = 9x + 1 - 4x - 2 = 5x - 1.$$

$$\text{Xét } 5x - 1 = 0 \Leftrightarrow 5x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}.$$

Nghiệm của đa thức là  $x = \frac{1}{5}$ .

$$b) (2x^2 - 5x + 1) - (x^2 + 3x + 1)$$

$$= 2x^2 - 5x + 1 - x^2 - 3x - 1 = x^2 - 8x.$$

$$\text{Xét } x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(x - 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 8 \end{cases}$$

Nghiệm của đa thức là  $x = 0$ ;  $x = 8$ .

$$c) (3x^2 - 2x + 1) - (3x^2 - 2x + 5)$$

$$= 3x^2 - 2x + 1 - 3x^2 + 2x - 5 = -4, \text{ không thể bằng } 0.$$

Đa thức này không có nghiệm.

d)  $x(x + 4) - (x^2 + 4x) = x^2 + 4x - x^2 - 4x = 0$ . Đa thức này có vô số nghiệm.

$$e) x^2 + 2x + 2 = x^2 + x + x + 1 + 1$$

$$= (x^2 + x) + (x + 1) + 1$$

$$= x(x + 1) + (x + 1) + 1$$

$$= (x + 1)(x + 1) + 1 = (x + 1)^2 + 1$$

Vì  $(x + 1)^2 \geq 0$  nên  $(x + 1)^2 + 1 > 0$ . Vậy đa thức  $x^2 + 2x + 2$

không có nghiệm.

$$\begin{aligned} f) x^2 + x + 1 &= x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \\ &= (x^2 + \frac{1}{2}x) + (\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}) + \frac{3}{4} \\ &= x(x + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}) + \frac{3}{4} \\ &= (x + \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2}) + \frac{3}{4} = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Vì  $(x + \frac{1}{2})^2 \geq 0$  nên  $(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$ .

Vậy đa thức  $x^2 + x + 1$  không có nghiệm.

● Khai thác bài toán

Qua cách giải bài toán trên, ta thấy:

- Đa thức ở câu c bằng  $-4$ , đó là "đa thức bậc 0" ( $-4 = -4x^0$ ). Đa thức bậc 0 thì không có nghiệm.
- Đa thức ở câu d bằng 0, đa thức này được gọi là "đa thức 0" (đa thức này không có bậc). Đa thức 0 thì có vô số nghiệm.

Thật vậy, nếu:

$$x = 1, \text{ ta có } 1(1 + 4) - (1^2 + 4 \cdot 1) = 5 - 5 = 0$$

$$x = 2, \text{ ta có } 2(2 + 4) - (2^2 + 4 \cdot 2) = 12 - 12 = 0, \dots$$

Rõ ràng đa thức luôn bằng 0 với mọi giá trị của  $x$ .

- Các đa thức ở hai câu e, f được thu gọn có dạng là tổng của một bình phương và một số. Biết bình phương của một số là luôn lớn hơn hay bằng 0, khi cộng thêm một số vào, thì nó luôn lớn hơn 0, tức không bằng 0, nên không thể có nghiệm được.

Ở câu e, f, đa thức đã cho gồm ba đơn thức. Ta đã tách  $2x$  và 2 cũng như  $x$  và 1 để biến đổi đa thức đã cho thành 5 đơn thức. Bằng cách kết hợp các số hạng ta đã làm xuất hiện các thừa số

chung từ đó theo định nghĩa lũy thừa, đã biến đổi mỗi đa thức về dạng tổng của một bình phương và một số. Đây là một thủ thuật trong biến đổi đồng nhất một biểu thức rất hay dùng, tuy khó nhưng làm nhiều lần sẽ thành quen.

**Bài 11.** Tìm nghiệm của các đa thức sau:

a)  $3x - 2$ ;

b)  $8 - 3x$ ;

c)  $x^2 - 4$ ;

d)  $x^2 + 1$ ;

e)  $x^2 - 2x$ ;

f)  $x^3 - x^2 + x - 1$ .

• **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài yêu cầu tìm xem trong các đa thức đã cho đa thức nào có nghiệm, đa thức nào không có nghiệm. Nếu có nghiệm thì nghiệm đó bằng bao nhiêu?

• **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Cần xét xem mỗi đa thức đã cho có bằng 0 hay không? Chỉ có đa thức nào bằng 0 mới có thể tìm nghiệm được.

• **Cách giải**

a)  $3x - 2 = 0$  từ đó  $x = \frac{2}{3}$ .

Đa thức  $3x - 2$  có nghiệm  $x = \frac{2}{3}$ .

b)  $8 - 3x = 0$  từ đó  $x = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ .

Đa thức  $8 - 3x$  có nghiệm  $x = 2\frac{2}{3}$ .

c)  $x^2 - 4 = 0$  từ đó  $x = \pm 2$

Đa thức  $x^2 - 4$  có nghiệm  $x = 2$ ;  $x = -2$ .

d) Vì  $x^2 \geq 0$  nên  $x^2 + 1 > 0$ .

Đa thức  $x^2 + 1$  không có nghiệm.

$$e) x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Đa thức  $x^2 - 2x$  có nghiệm  $x = 0$ ;  $x = 2$ .

f)  $x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 1) + (x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 1) = 0$ . Trường hợp  $x - 1 = 0$  cho  $x = 1$ . Trường hợp  $x^2 + 1 = 0$  không xảy ra.

Đa thức  $x^3 - x^2 + x - 1$  có nghiệm  $x = 1$ .

#### ● Khai thác bài toán

Qua cách giải bài toán trên, nhận thấy:

- Đa thức  $x^2 - 4$  và đa thức  $x^2 - 2x$  là hai đa thức có nghiệm.
- Đa thức  $x^2 + 1$  là đa thức không có nghiệm.

Như vậy, một đa thức gồm 2 đơn thức, trong đó đơn thức thứ nhất là một bình phương, nếu đơn thức thứ hai mang dấu trừ thì chắc chắn đa thức gồm 2 đơn thức đó sẽ có nghiệm; còn nếu đơn thức thứ hai mang dấu cộng thì đa thức gồm 2 đơn thức này sẽ vô nghiệm. Bạn đọc hãy tự thử lại.

## NHÂN ĐA THỨC

**Bài 12.** Chứng minh rằng biểu thức sau không phụ thuộc vào biến  $y$ :

a)  $A = (3y - 5)(2y + 11) - (2y + 3)(3y + 7)$ ;

b)  $B = (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2) + 8y^3$ .

#### ● Tìm hiểu đề bài

Đề bài câu a đã cho hiệu của hai tích các đa thức với biến  $y$ , phải chứng minh rằng biểu thức  $A$  không phụ thuộc  $y$ .

Đề bài câu b đã cho tích của hai đa thức cộng với một đơn thức, phải chứng minh rằng biểu thức  $B$  không phụ thuộc  $y$ .

#### ● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, thực hiện các phép nhân đa thức, sau đó bỏ dấu

ngoặc trước có dấu trừ, rồi ước lược các đơn thức đồng dạng. Với câu b, làm tương tự câu a.

● **Cách giải**

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= (3y - 5)(2y + 11) - (2y + 3)(3y + 7) \\ &= 6y^2 + 33y - 10y - 55 - (6y^2 + 14y + 9y + 21) \\ &= 6y^2 + 33y - 10y - 55 - 6y^2 - 14y - 9y - 21 = -76. \end{aligned}$$

Vậy biểu thức A không phụ thuộc vào biến y.

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2) + 8y^3 \\ &= x^3 + 2x^2y + 4xy^2 - 2x^2y - 4xy^2 - 8y^3 + 8y^3 \\ &= x^3 \end{aligned}$$

Vậy biểu thức B không phụ thuộc vào biến y.

● **Khai thác bài toán**

Ta nhận thấy:

- Ở câu a, kết quả biến đổi biểu thức A là một hằng số, vậy biểu thức A luôn có giá trị là -76, giá trị này chứng tỏ rằng A không phụ thuộc vào y.

- Còn ở câu b, kết quả biến đổi biểu thức B là một đơn thức  $x^3$ , vậy biểu thức B luôn có giá trị là  $x^3$ , giá trị này chứng tỏ rằng B không phụ thuộc vào y, nhưng B có phụ thuộc vào giá trị của x.

Bạn đọc hãy xem xét kết quả của biểu thức:

$$C = 3x(2x - 5y) - (3x - 1)2x - x(2 - 15y) - 2$$

để rút ra kết luận về giá trị của C và các biến x, y.

**Bài 13.** Sắp xếp đa thức theo một biến chính rồi làm phép nhân:

- $(xy^2 + x^2y + x^3 + y^3)(x - y)$ ;
- $(x^3 - y^3 - 2xy^2)(y^3 - 2x^2y + x^3)$ ;
- $(x - y)(y^4 + x^2y^2 + xy^3 + x^3y + x^4)$ ;
- $(16 + 4x^2 - 2x^3 - 8x + x^4)(x + 2)$ .

● **Tim hiểu đề bài**

Đề bài đòi hỏi phải sắp xếp các đa thức đã cho cùng theo lũy thừa tăng hoặc giảm của một biến nào đó, rồi thực hiện phép nhân đa thức với đa thức.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, ở đa thức thứ hai, biến x có bậc một, bậc không, tức biến x được xếp theo thứ tự giảm dần, do đó đa thức thứ nhất cũng cần được sắp xếp theo lũy thừa giảm dần đối với biến x, ta có:  $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$ .

Sau đó viết đa thức thứ hai dưới đa thức thứ nhất, rồi thực hiện phép nhân.

Với các câu b, c, d làm tương tự câu a.

● **Cách giải**

a) Sắp xếp đa thức theo lũy thừa giảm dần đối với biến x, ta có:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 \\
 x \qquad \qquad x - y
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 \\
 + \quad - x^3y - x^2y^2 - xy^3 - y^4
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 x^4 \qquad \qquad \qquad - y^4
 \end{array}
 \end{array}$$

b) Sắp xếp đa thức theo lũy thừa giảm dần đối với biến x, ta có:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 x^3 \qquad \qquad - 2xy^2 - y^3 \\
 x \quad x^3 - 2x^2y \qquad \qquad + y^3
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 x^6 \qquad \qquad - 2x^4y^2 - x^3y^3 \\
 + \quad - 2x^5y \qquad \qquad + 4x^3y^3 + 2x^2y^4 \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad x^3y^3 \qquad \qquad - 2xy^5 - y^6
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 x^6 - 2x^5y - 2x^4y^2 + 4x^3y^3 + 2x^2y^4 - 2xy^5 - y^6
 \end{array}
 \end{array}$$

c) Sắp xếp đa thức theo lũy thừa giảm dần đối với biến x, ta có:

$$\begin{array}{r} x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 \\ \quad \quad \quad x \quad \quad \quad x - y \\ \hline x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 \\ + \quad \quad \quad - x^4y - x^3y^2 - x^2y^3 - xy^4 - y^5 \\ \hline x^5 \quad \quad \quad - y^5 \end{array}$$

d) Sắp xếp đa thức theo lũy thừa giảm dần đối với biến x, ta có:

$$\begin{array}{r} x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16 \\ \quad \quad \quad x \quad \quad \quad x + 2 \\ \hline x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 16x \\ + \quad \quad \quad 2x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 32 \\ \hline x^5 \quad \quad \quad + 32 \end{array}$$

● Khai thác bài toán

- Bốn câu a, b, c, d của bài toán trên ta đã quan tâm đến biến chính là x, thử làm câu b khi coi y là biến chính để xem kết quả thế nào.

$$\begin{array}{r} \quad \quad \quad -y^3 - 2xy^2 \quad \quad \quad + x^3 \\ \quad \quad \quad x \quad y^3 \quad \quad \quad - 2x^2y + x^3 \\ \hline -y^6 - 2xy^5 \quad \quad \quad + x^3y^3 \\ + \quad \quad \quad 2x^2y^4 + 4x^3y^3 \quad \quad \quad - 2x^5y \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad - x^3y^3 - 2x^4y^2 \quad \quad \quad + x^6 \\ \hline -y^6 - 2xy^5 + 2x^2y^4 + 4x^3y^3 - 2x^4y^2 - 2x^5y + x^6 \end{array}$$

Kết quả này và kết quả trong cách giải đều có các đơn thức như nhau, nhưng thứ tự của chúng khác nhau. Cụ thể là:

+ Khi chọn biến chính là x thì ở kết quả, các đơn thức có bậc đối với biến x từ 6 xuống 0, còn đối với biến y có bậc từ 0 đến 6.

+ Khi chọn biến chính là y, thì ở kết quả, các đơn thức có bậc đối với biến y từ 6 xuống 0, còn đối với biến x có bậc từ 0 đến 6.

Vậy việc chọn biến nào là biến chính không ảnh hưởng gì tới kết quả của bài toán.

- Trong lời giải các câu trên ta đều sắp xếp đa thức bị nhân và đa thức nhân theo cùng một biến chính. Vấn đề đặt ra là sắp xếp mỗi đa thức theo một lũy thừa của biến chính, có gì xảy ra?

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccccccc}
 & & x^3 & & - & 2xy^2 & - & y^3 \\
 x & & y^3 & & - & 2x^2y & & + & x^3 \\
 \hline
 & & & & & & & & & x^3y^3 & & - & 2xy^5 & - & y^6 \\
 + & & - & 2x^5y & & + & 4x^3y^3 & + & 2x^2y^4 \\
 x^6 & & - & 2x^4y^2 & & - & x^3y^3 \\
 \hline
 x^6 & - & 2x^5y & - & 2x^4y^2 & + & 4x^3y^3 & + & 2x^2y^4 & - & 2xy^5 & - & y^6
 \end{array}
 \end{array}$$

Kết quả này với kết quả ở câu b trong lời giải giống hệt nhau.

- Một điều cần hết sức lưu ý khi làm phép nhân hai đa thức là phải viết các đơn thức đồng dạng của các tích riêng theo cùng một cột. Nếu tích riêng nào khuyết bậc trung gian thì để trống một khoảng ứng với bậc khuyết ấy, nhờ vậy việc tính toán sẽ nhanh chóng hơn.

**Bài 14.** Chứng minh đẳng thức sau đúng với mọi giá trị của a, b, c:

a)  $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc;$

b)  $(a - b - c)(a^2 - b^2 - c^2 + ab + bc + ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 2a(b^2 + c^2) - abc.$



• **Tim hiểu đề bài**

Đề bài yêu cầu chứng minh rằng, với mọi giá trị của a, b, c hai đẳng thức đã cho là đúng.

• **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Cần biến đổi về trái, thực chất là thực hiện phép nhân hai đa thức, nếu tích tìm được đúng bằng đa thức ở vế phải, thì đẳng thức được chứng minh.

• **Cách giải**

a) Thực hiện phép nhân hai đa thức ở vế trái:

$$\begin{array}{r}
 a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \\
 \times \quad \quad \quad a + b + c \\
 \hline
 a^3 + ab^2 + ac^2 - a^2b - abc - a^2c \\
 + \quad - ab^2 \quad \quad + a^2b - abc \quad \quad + bc^2 + b^3 - b^2c \\
 \quad \quad \quad - ac^2 \quad \quad - abc + a^2c - bc^2 \quad \quad + b^2c + c^3 \\
 \hline
 a^3 \quad \quad \quad - 3abc \quad \quad \quad + b^3 \quad \quad + c^3
 \end{array}$$

Vế trái là đa thức  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ , đúng bằng vế phải, vậy đẳng thức được chứng minh.

b) Thực hiện phép nhân hai đa thức ở vế trái:

$$\begin{array}{r}
 a^2 - b^2 - c^2 + ab + bc + ca \\
 \times \quad \quad \quad a - b - c \\
 \hline
 a^3 + a^2b - ab^2 - ac^2 + abc + ca^2 \\
 + \quad - a^2b - ab^2 \quad \quad - abc \quad \quad + b^3 + bc^2 - b^2c \\
 \quad \quad \quad - ac^2 - abc - ca^2 \quad \quad - bc^2 + b^2c + c^3 \\
 \hline
 a^3 \quad \quad - 2ab^2 - 2ac^2 - abc \quad \quad + b^3 \quad \quad + c^3
 \end{array}$$

Có thể viết gọn tích trên như sau:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 2a(b^2 + c^2) - abc.$$

Vế trái bằng vế phải, đẳng thức được chứng minh.

● Khai thác bài toán

Theo trên, để chứng minh một đẳng thức, ta đã biến đổi (tức là thực hiện các phép tính) ở vế trái để được một biểu thức bằng biểu thức ở vế phải.

Trong một số trường hợp, để chứng minh một đẳng thức, ta phải biến đổi cả hai vế sao cho chúng cùng bằng một biểu thức thứ ba, đó cũng là một cách chứng minh đẳng thức.

Chẳng hạn, hãy chứng minh đẳng thức sau:

$$(3a + 2b - 1)(a + 5) - (a - 2) \cdot 2b = (3a + 5)(a + 3) + 2(7b - 10).$$

Ta có thể làm như sau:

- Biến đổi vế trái:

$$\begin{aligned} & (3a + 2b - 1)(a + 5) - (a - 2) \cdot 2b \\ &= 3a^2 + 15a + 2ab + 10b - a - 5 - (2ab - 4b) \\ &= 3a^2 + 15a + 2ab + 10b - a - 5 - 2ab + 4b \\ &= 3a^2 + 14a + 14b - 5 \end{aligned}$$

- Biến đổi vế phải:

$$\begin{aligned} & (3a + 5)(a + 3) + 2(7b - 10) \\ &= 3a^2 + 9a + 5a + 15 + 14b - 20 \\ &= 3a^2 + 14a + 14b - 5 \end{aligned}$$

Vế trái và vế phải cùng bằng biểu thức  $3a^2 + 14a + 14b - 5$ .  
Vậy đẳng thức được chứng minh.

*Chú ý.* Cũng có thể lấy biểu thức ở vế trái trừ đi biểu thức ở vế phải, nếu kết quả bằng 0 thì chứng tỏ đẳng thức đã cho là đúng. Vậy đẳng thức được chứng minh. Bạn đọc hãy tự làm.

## Bài 15

a) Cho ba số tự nhiên liên tiếp. Biết rằng tích của số thứ hai và số thứ ba hơn tích của số thứ nhất và số thứ hai là 100. Tìm ba số tự nhiên ấy.

b) Cho bốn số tự nhiên liên tiếp. Biết rằng tích của hai số đầu nhỏ hơn tích của hai số sau là 46. Tìm bốn số tự nhiên ấy.

### • Tìm hiểu đề bài

Đề bài câu a cho 3 số tự nhiên liên tiếp, biết tích của số thứ hai và số thứ ba hơn tích của số thứ nhất và số thứ hai là 100, phải tìm 3 số đó.

Câu b lại cho bốn số tự nhiên liên tiếp, biết tích của hai số đầu (tức số thứ nhất và số thứ hai) nhỏ hơn tích của hai số sau (tức là số thứ ba và số thứ tư) là 46. Tìm 4 số đó.

### • Hướng dẫn cách tìm lời giải

Ta biết rằng, hai số tự nhiên liên tiếp hơn kém nhau 1 đơn vị, do đó nếu gọi số tự nhiên thứ nhất là  $a$  ( $a \neq 0$ ) thì số tự nhiên thứ hai, thứ ba, thứ tư lần lượt là  $a + 1$ ,  $a + 2$ ,  $a + 3$ .

Với câu a, tích của số thứ hai và số thứ ba là  $(a + 1)(a + 2)$ ; tích của số thứ nhất và số thứ hai là  $a(a + 1)$ . Dựa vào đề bài ta được một đẳng thức đúng. Từ đó tìm ra kết quả bài toán.

Với câu b, tích của hai số đầu là  $a(a + 1)$ , tích của hai số sau là  $(a + 2)(a + 3)$ . Cũng dựa vào đề bài ta được một đẳng thức đúng. Từ đó tìm ra kết quả bài toán.

### • Cách giải

a) Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là  $a$ ,  $a + 1$ ,  $a + 2$  (với  $a \neq 0$ ) thì tích của số thứ hai và số thứ ba là  $(a + 1)(a + 2)$ , tích của số thứ nhất và số thứ hai là  $a(a + 1)$ . Theo đề bài ta có đẳng thức sau:

$$(a + 1)(a + 2) - a(a + 1) = 100$$

Thực hiện phép nhân đa thức ở vế trái, ta có:

$$a^2 + 2a + a + 2 - a^2 - a = 100;$$

$$2a + 2 = 100; 2a = 100 - 2 = 98; a = 98 : 2 = 49.$$

Vậy ba số tự nhiên liên tiếp phải tìm là 49; 50; 51.

b) Gọi bốn số tự nhiên liên tiếp là  $a, a + 1, a + 2, a + 3$  (với  $a \neq 0$ ), thì tích của hai số đầu là  $a(a + 1)$ , tích của hai số sau là  $(a + 2)(a + 3)$ . Theo đề bài ta có đẳng thức sau:

$$(a + 2)(a + 3) - a(a + 1) = 46$$

Thực hiện phép nhân đa thức ở vế trái, ta có:

$$a^2 + 3a + 2a + 6 - a^2 - a = 46;$$

$$4a + 6 = 46; 4a = 40; a = 10.$$

Vậy bốn số tự nhiên liên tiếp phải tìm là 10; 11; 12; 13.

#### ● Khai thác bài toán

- Làm loại bài toán này, bạn đọc nên thử lại để kiểm tra kết quả theo như đề bài đã ra.

Với câu a, ta có:

$$50. 51 - 49. 50 = 2550 - 2450 = 100$$

Với câu b, ta có:

$$12. 13 - 10. 11 = 156 - 110 = 46$$

Bạn đọc nên có thói quen thử lại kết quả mọi bài toán đã giải để khẳng định và tin tưởng vào bài làm của bản thân.

- Vẫn là đề bài tìm 4 số tự nhiên liên tiếp được cho như sau:

Cho bốn số tự nhiên liên tiếp. Biết rằng tích của số thứ hai và thứ tư hơn tích của số thứ nhất và thứ ba là 9. Tìm 4 số tự nhiên ấy.

Tương tự như cách giải trên, ta có:

$$(n + 1)(n + 3) - n(n + 2) = 9 \text{ hay}$$

$$n^2 + 3n + n + 3 - n^2 - 2n = 9;$$

$$2n + 3 = 9; n = 3.$$

Bốn số tự nhiên liên tiếp phải tìm là 3; 4; 5; 6.

Thử lại:  $4 \cdot 6 - 3 \cdot 5 = 24 - 15 = 9$ .

## HÀNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỎ

**Bài 16.** Tìm x biết

a)  $3(x + 2)^2 + (2x - 1)^2 - 7(x + 3)(x - 3) = 172$ ;

b)  $(x - 1)(x^2 + x + 1) - x(x - 2)(x + 2) = 14$ ;

c)  $(x - 1)^3 - (x + 3)(x^2 - 3x + 9) + 3(x^2 - 4) = 23$ ;

d)  $(x + 1)^3 - (x + 2)(x^2 - 2x + 4) - 3(x^2 - 1) = 8$ .

### ● Tìm hiểu đề bài

Đề bài đòi hỏi phải tìm được giá trị của x trong các đẳng thức đã cho.

### ● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, cần thực hiện các phép tính trong dấu ngoặc trước bằng cách sử dụng các hằng đẳng thức: bình phương của một tổng hai số  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ , bình phương của một hiệu hai số  $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ , tích của tổng hai số với hiệu hai số ấy  $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ . Cần chú ý đến quy tắc bỏ ngoặc đẳng thức trước có dấu trừ.

Với câu b, sử dụng các hằng đẳng thức: hiệu của hai lập phương  $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$ , tích của tổng hai số với hiệu hai số ấy  $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ . Cần chú ý đến quy tắc bỏ dấu ngoặc đẳng thức trước có dấu trừ.

Với câu c, sử dụng các hằng đẳng thức: lập phương của một hiệu  $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$ , tổng hai lập phương  $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$ . Cũng cần chú ý đến quy tắc bỏ dấu ngoặc đẳng thức trước có dấu trừ.

Với câu d, sử dụng các hằng đẳng thức: lập phương của một tổng  $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$ , tổng của hai lập

phương  $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$ . Cần chú ý đến quy tắc bỏ dấu ngoặc đằng trước có dấu trừ.

• Cách giải

a)  $3(x + 2)^2 + (2x - 1)^2 - 7(x + 3)(x - 3) = 172$

$$3(x^2 + 4x + 4) + (4x^2 - 4x + 1) - 7(x^2 - 9) = 172$$

$$3x^2 + 12x + 12 + 4x^2 - 4x + 1 - 7x^2 + 63 = 172$$

hay  $8x + 76 = 172$  từ đó  $x = 12$ .

b)  $(x - 1)(x^2 + x + 1) - x(x - 2)(x + 2) = 14$

$$x^3 - 1 - x(x^2 - 4) = 14; \quad x^3 - 1 - (x^3 - 4x) = 14$$

$$x^3 - 1 - x^3 + 4x = 14; \quad \text{hay } 4x - 1 = 14.$$

Từ đó  $x = 3\frac{3}{4}$ .

c)  $(x - 1)^3 - (x + 3)(x^2 - 3x + 9) + 3(x^2 - 4) = 23$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - (x^3 + 27) + (3x^2 - 12) = 23$$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^3 - 27 + 3x^2 - 12 = 23$$

hay  $3x - 40 = 23$ . Từ đó  $x = 21$

d)  $(x + 1)^3 - (x + 2)(x^2 - 2x + 4) - 3(x^2 - 1) = 8$

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - (x^3 + 8) - (3x^2 - 3) = 8$$

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 - 8 - 3x^2 + 3 = 8$$

hay  $3x - 4 = 8$ . Từ đó  $x = 4$ .

• Khai thác bài toán

- Trong bài 16, ta đã vận dụng cả 7 hằng đẳng thức đã học, đó là:

1)  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

2)  $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

3)  $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$

4)  $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

5)  $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$

$$6) A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

$$7) A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2).$$

Đối với bạn đọc có trình độ PTCS, đòi hỏi phải thuộc lòng và vận dụng thành thạo 7 hằng đẳng thức trên theo cả hai chiều, từ trái sang phải và từ phải sang trái. Chẳng hạn, cho các biểu thức ở vế trái, yêu cầu viết tiếp vào vế phải:

$$\begin{aligned} a) (2xy)^3 + (3x^2y^2)^3 &= (2xy + 3x^2y^2)[(2xy)^2 - 2xy \cdot 3x^2y^2 + (3x^2y^2)^2] \\ &= (2xy + 3x^2y^2)(4x^2y^2 - 6x^3y^3 + 9x^4y^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) 125x^3y^3 + 225x^2y^3 + 135xy^3 + 27y^3 \\ &= (5xy)^3 + 3 \cdot (5xy)^2 \cdot 3y + 3 \cdot 5xy(3y)^2 + (3y)^3 \\ &= (5xy + 3y)^3. \end{aligned}$$

Trên đây chỉ đưa ra hai ví dụ cụ thể để chứng tỏ một điều rằng: cần phải sử dụng 7 hằng đẳng thức kể trên theo cả "hai chiều" một cách thành thạo.

- Sau khi tìm được giá trị của x, cần thử lại. Chẳng hạn với câu b, ta thử lại như sau:

Với  $x = 3\frac{3}{4} = \frac{15}{4}$ , ta thay vào vế trái của đẳng thức:

$$\begin{aligned} (x - 1)(x^2 + x + 1) - x(x - 2)(x + 2) \\ &= \left(\frac{15}{4} - 1\right)\left(\frac{15^2}{4^2} + \frac{15}{4} + 1\right) - \frac{15}{4}\left(\frac{15}{4} - 2\right)\left(\frac{15}{4} + 2\right) \\ &= \left(\frac{15^3}{4^3} - 1\right) - \frac{15}{4}\left(\frac{15^2}{4^2} - 4\right) = \frac{15^3}{4^3} - 1 - \frac{15^3}{4^3} + 15 = 14. \end{aligned}$$

Ta được kết quả ở vế phải, chứng tỏ giá trị  $x = 3\frac{3}{4}$  là đúng.

**Bài 17.** Giá trị của các biểu thức sau có phụ thuộc vào biến x không?

$$a) (x - 1)^3 - (x + 2)(x^2 - 2x + 4) + 3(x + 4)(x - 4) - 3(x - 20);$$

$$b) 4x(7x^2 - 1) - (3x - 1)(9x^2 + 3x + 1) - x(x - 2)(x + 2);$$

$$c) (x + 3)^3 - (x - 3)^3.$$

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài đòi hỏi xét xem trong các biểu thức đã cho, biểu thức nào phụ thuộc biến  $x$ , biểu thức nào không phụ thuộc biến  $x$ .

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, sử dụng các hằng đẳng thức: lập phương của một hiệu  $(A - B)^3$ , tổng của hai lập phương  $A^3 + B^3$ , tích của tổng hai số và hiệu của hai số ấy  $(A + B)(A - B)$  và sau cùng là nhân đơn thức với đa thức. Chú ý đến dấu đối với phép trừ. Từ đó có kết quả.

Với câu b, thực hiện phép nhân đơn thức với đa thức, sau đó áp dụng các hằng đẳng thức: hiệu của hai lập phương  $A^3 - B^3$ , tích của hiệu 2 số và tổng của hai số ấy  $(A - B)(A + B)$ , sau đó là phép nhân đơn thức với đa thức. Cần chú ý đến dấu đối với phép trừ. Từ đó có kết quả.

Với câu c, vận dụng hằng đẳng thức hiệu hai lập phương  $A^3 - B^3$ . Từ đó có kết quả.

● **Cách giải**

$$\begin{aligned} \text{a) } & (x - 1)^3 - (x + 2)(x^2 - 2x + 4) + 3(x + 4)(x - 4) - 3(x - 20) \\ & = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - (x^3 + 8) + 3(x^2 - 16) - (3x - 60) \\ & = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^3 - 8 + 3x^2 - 48 - 3x + 60 = 3. \end{aligned}$$

Biểu thức có giá trị bằng 3, như vậy biểu thức đã cho không phụ thuộc vào biến  $x$ .

$$\begin{aligned} \text{b) } & 4x(7x^2 - 1) - (3x - 1)(9x^2 + 3x + 1) - x(x - 2)(x + 2) \\ & = 28x^3 - 4x - (27x^3 - 1) - x(x^2 - 4) \\ & = 28x^3 - 4x - 27x^3 + 1 - x^3 + 4x = 1 \end{aligned}$$

Biểu thức có giá trị bằng 1, như vậy biểu thức đã cho không phụ thuộc vào biến  $x$ .

$$\begin{aligned} \text{c) } & (x + 3)^3 - (x - 3)^3 \\ & = (x + 3 - x + 3)[(x + 3)^2 + (x + 3)(x - 3) + (x - 3)^2] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= 6(x^2 + 6x + 9 + x^2 - 9 + x^2 - 6x + 9) \\
 &= 6(3x^2 + 9) = 18x^2 + 54
 \end{aligned}$$

Giá trị của biểu thức đã cho phụ thuộc vào biến  $x$ .

● Khai thác bài toán

- Câu c bài 16 có thể sử dụng các hằng đẳng thức: lập phương của một tổng, lập phương của một hiệu như sau:

$$\begin{aligned}
 &(x + 3)^3 - (x - 3)^3 \\
 &= x^3 + 3x^2 \cdot 3 + 3x \cdot 3^2 + 3^3 - (x^3 - 3x^2 \cdot 3 + 3x \cdot 3^2 - 3^3) \\
 &= x^3 + 9x^2 + 81x + 27 - (x^3 - 9x^2 + 81x - 27) \\
 &= x^3 + 9x^2 + 81x + 27 - x^3 + 9x^2 - 81x + 27 = 18x^2 + 54.
 \end{aligned}$$

- Với bài toán loại này có thể thử lại được không?

Hoàn toàn được, bằng cách:

+ Có thể sử dụng các hằng đẳng thức khác mà vẫn có kết quả như đã làm là được.

+ Hoặc làm lại một lần nữa, mà vẫn có kết quả như đã làm là được.

**Bài 18.** Tìm giá trị của  $x$  và  $y$  biết rằng:

a)  $x^3 + y^3 = 72$ ,  $x^2 - xy + y^2 = 12$  và  $x - y = 2$ ;

b)  $x^3 - y^3 = 98$ ,  $x^2 + xy + y^2 = 49$  và  $x + y = 8$ .

● Tìm hiểu đề bài

Đề bài câu a cho  $x^3 + y^3 = 72$ ,  $x^2 - xy + y^2 = 12$  và  $x - y = 2$ , đòi hỏi tìm giá trị của  $x$  và  $y$ .

Đề bài câu b cho  $x^3 - y^3 = 98$ ,  $x^2 + xy + y^2 = 49$  và  $x + y = 8$ , đòi hỏi tìm giá trị của  $x$  và  $y$ .

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, hãy sử dụng hằng đẳng thức  $A^3 + B^3$  rồi thay giá trị đã biết của các biểu thức, từ đó tính được giá trị của  $A + B$ , kết

hợp với hiệu  $x - y = 2$  đã cho sẽ có kết quả.

Với câu b, hãy sử dụng hằng đẳng thức  $A^3 - B^3$  rồi thay giá trị đã biết của các biểu thức, từ đó tính được giá trị của  $A - B$ , kết hợp với tổng  $x + y = 8$  đã cho sẽ có kết quả.

● **Cách giải**

a) Sử dụng hằng đẳng thức tổng của hai lập phương, ta có:

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2).$$

Thay các giá trị của các biểu thức đã cho, có:

$$72 = (x + y) \cdot 12, \text{ suy ra } x + y = \frac{72}{12} = 6 \quad (1)$$

Biết  $x - y = 2$  suy ra  $x = y + 2$  (2). Thay (2) vào (1) có:

$$y + 2 + y = 2y + 2 = 6 \Rightarrow 2y = 6 - 2 = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{2} = 2.$$

Do đó  $x = y + 2 = 2 + 2 = 4$ .

Vậy  $x = 4$  và  $y = 2$ .

b) Sử dụng hằng đẳng thức hiệu của hai lập phương, ta có:

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2).$$

Thay các giá trị của các biểu thức đã cho, có:

$$98 = (x - y) \cdot 49 \text{ suy ra } x - y = \frac{98}{49} = 2 \quad (1).$$

Biết  $x + y = 8$  suy ra  $y = 8 - x$  (2). Thay (2) vào (1) có:

$$x - y = x - (8 - x) = x - 8 + x = 2x - 8 = 2, \text{ suy ra}$$

$$2x = 8 + 2 = 10, \text{ nên } x = \frac{10}{2} = 5.$$

Do đó  $y = 8 - x = 8 - 5 = 3$

Vậy  $x = 5$  và  $y = 3$ .

● **Khai thác bài toán**

- Bạn đọc cần thử lại các giá trị của  $x$  và  $y$  đã tìm được. Dưới đây trình bày cách thử câu a:

$$x^3 + y^3 = 4^3 + 2^3 = 64 + 8 = 72.$$

$$x^2 - xy + y^2 = 4^2 - 4 \cdot 2 + 2^2 = 16 - 8 + 4 = 20 - 8 = 12.$$