i) A chứa đúng p phần tử;

ii) tổng tất cả các phần tử của A chia hết cho p.

2 MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC TỔ HỢP

Bài 57.

Trong mặt phẳng, có thể tìm được 100 đường thẳng sao cho có đúng 1998 giao điểm từ 100 đường thẳng đó hay không?

Bài 58.

Chia hình vuông có cạnh bằng 5 đơn vị thành các hình vuông có cạnh bằng đơn vị (gọi tắt là *hình vuông đơn vị*) bằng các đường thẳng song song với các cạnh. Gọi A là tập hợp tất cả các đỉnh của các hình vuông đơn vị này ngoại trừ các đỉnh nằm trên cạnh hình vuông (*lớn*) đã cho. Hỏi rằng ta có thể chọn được nhiều nhất bao nhiêu điểm thuộc tập A để cho không có ba điểm nào trong số các điểm được chọn lập nên một tam giác vuông cân?

Bài 59.

Trong mặt phẳng, cho 2001 điểm và một đường tròn đơn vị. Chứng minh rằng tồn tại một điểm nằm trên chu vi đường tròn đó sao cho tổng các khoảng cách từ điểm này đến 2001 điểm đã cho có giá trị bé nhất là 2001.

Bài 60.

Cho đa giác lồi n cạnh, với $n \geq 4$, sao cho không có bất cứ bốn đỉnh nào của nó cùng nằm trên một đường tròn.

a) Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn đi qua 3 đỉnh của đa giác mà đường tròn này chứa các đỉnh còn lại của đa giác bên trong nó.

b) Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn đi qua 3 đỉnh liên tiếp kề nhau của đa giác mà đường tròn này chứa các đỉnh còn lại của đa giác bên trong nó.

Bài 61.

Tại một tỉnh nọ, mỗi thị trấn được nối với thị trấn gần nó nhất bằng một con đường thẳng. Các khoảng cách giữa từng cặp thị trấn khác nhau từng đôi một. Chứng minh rằng

a) không có hai con đường nào cắt nhau;

b) mỗi thị trấn được nối bằng các con đường với nhiều nhất là 5 thị trấn khác;

c) không có một đường gấp khúc đóng (*tức là khép kín*) nào gồm các con đường.

Bài 62.

Cho 33 điểm khác nhau nằm bên trong một hình vuông có cạnh là 4. Vẽ 33 đường tròn nhận các điểm này làm tâm, có cùng bán kính $\sqrt{2}$. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn trong số chúng chứa ít nhất 3 điểm trong 33 điểm nói trên.

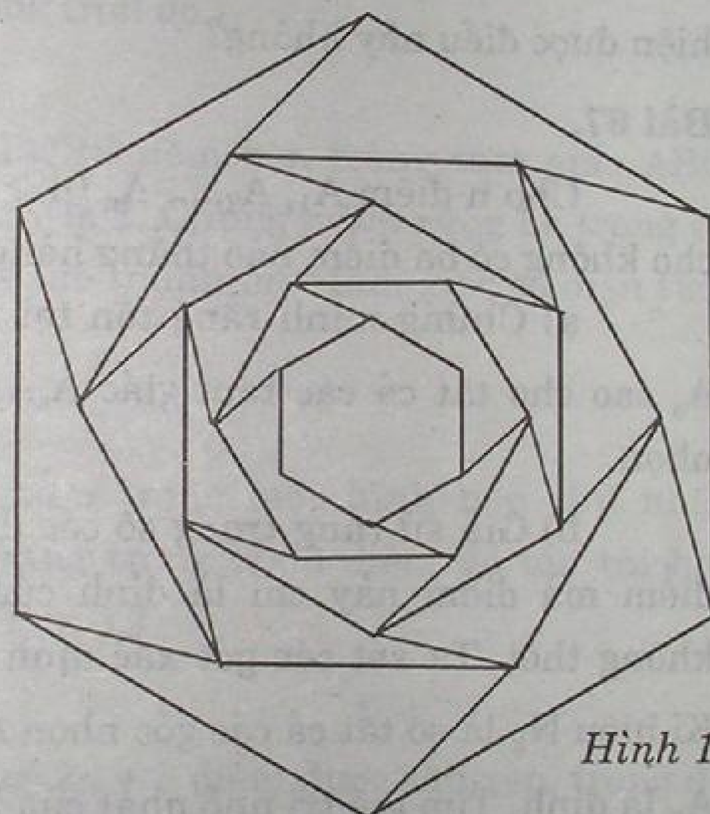
Bài 63.

Một con sâu bò trên một tờ giấy hình vuông. Mỗi lần di chuyển, nó có thể dịch sang phải 2 đơn vị, sang trái 4 đơn vị, dịch lên trên 3 đơn vị, hoặc dịch xuống phía dưới 5 đơn vị.

Trong quá trình di chuyển, các hướng ngang và đứng mà nó dịch (ta vừa kể) đúng bằng 90^0. Lập hệ tọa độ vuông góc mà gốc tọa độ trùng với vị trí xuất phát của con sâu, hai trục song song với hai chiều di chuyển ngang và đứng vuông góc nhau của nó. Chứng minh rằng con sâu có thể đi qua tất cả các điểm nguyên của hệ trục này.

Bài 64.

Cho 30 điểm trong mặt phẳng. Một số điểm được nối với nhau bằng những đoạn thẳng như hình 1 bên cạnh. Đánh số các điểm bằng những số nguyên dương khác nhau. Nếu p và q là hai số ở hai đầu đoạn thẳng a, ta kí hiệu $\mu(a) = |p - q|$.



Hình 1.

a) Hãy xây dựng một cách đánh số các điểm bằng các số 1, 2, ..., 30 sao cho tồn tại đúng một đoạn thẳng a với $\mu(a) = 5$.

b) Chứng minh rằng với mọi cách đánh số các điểm, tồn tại một đoạn thẳng a sao cho $\mu(a) \geq 5$.

Bài 65.

Có 6 hình tròn được sắp xếp trên mặt phẳng sao cho tâm của mỗi hình tròn ấy đều nằm ngoài các hình tròn kia.

Chứng minh rằng tất cả 6 hình tròn này không có điểm chung.

Bài 66.

Cho một hình tam giác có diện tích lớn hơn 1. Người ta muốn lấp kín tam giác này bởi một hình tròn bán kính 1 sao cho tâm của hình tròn nằm ngoài tam giác. Có thể thực hiện được điều này không?

Bài 67.

Cho n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ ($n \geq 4$) trong mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng.

a) Chứng minh rằng tồn tại nhiều nhất là một điểm A_s sao cho tất cả các tam giác $A_sA_iA_j$ ($i, j = 1, 2, ..., n$) đều nhọn.

b) Giả sử rằng trong số các điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ có một điểm mà điểm này chỉ là đỉnh của những tam giác nhọn không thôi. Ta xét các góc xác định bởi những điểm đã cho. Kí hiệu N_k là số tất cả các góc nhọn $A_iA_kA_j$ ($i, j = 1, 2, ..., n$) có A_k là đỉnh. Tìm giá trị nhỏ nhất của N_k.

Bài 68.

Cho n điểm $A_0, A_1, ..., A_{n-1}$ theo thứ tự đó cùng nằm trên một đường tròn và chia đường tròn thành các cung bằng nhau. Hãy tìm n điểm trên đường tròn sắp theo thứ tự $B_0, B_1, ..., B_{n-1}$ như thế, sao cho độ dài đường gấp khúc $B_0B_1 ... B_{n-1}$ lớn nhất.

Bài 69.

Cho 1998 điểm trong mặt phẳng sao cho cứ với 17 điểm bất kì trong số các điểm này, ta đều có thể chọn được 11 điểm nằm bên trong một đường tròn có đường kính 1. Tìm số bé nhất các đường tròn có đường kính 2 đủ để phủ cả 1998 điểm đã cho. (Ta nói rằng một đường tròn *phủ* được một số điểm nào đó nếu tất cả các điểm đó đều nằm bên trong hình tròn hoặc nằm trên đường tròn đó.)

Bài 70.

Cho tứ giác lồi PQRS nằm bên trong tam giác ABC mà diện tích tam giác này là 1. Chứng minh rằng ba trong số các đỉnh của tứ giác này tạo thành một tam giác có diện tích bé hơn hoặc bằng 1/4.

Bài 71.

Cho 2000 điểm nằm trong một hình hộp chữ nhật $5\times5\times10$. Chứng minh rằng trong 2000 điểm đó tồn tại hai điểm có khoảng cách bé hơn 0,7.

Bài 72.

Trên mặt phẳng có $2n + 3$ điểm được sắp xếp, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng và không có 4 điểm nào nằm trên một đường tròn. Tồn tại hay không một đường tròn đi qua 3 điểm trong số đó và chứa trong nó n điểm trong số $2n$ điểm còn lại?

Bài 73.

Chia một tam giác đều có cạnh bằng n thành n^2 tam giác đều có cạnh bằng 1 bởi các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác. Ta đánh số mỗi đỉnh trong $n(n + 1)/2$

đỉnh của các tam giác bằng một số thực, sao cho nếu ABC và BCD là các tam giác nhỏ thì tổng các số đánh trên hai đỉnh A và D bằng tổng các số đánh trên hai đỉnh B và C. Giả sử a, b và c là các số đánh trên ba đỉnh của tam giác lớn ban đầu.

Hỏi khoảng cách ngắn nhất giữa một đỉnh có đánh số lớn nhất và một đỉnh có đánh số bé nhất là bao nhiêu?

Tổng tất cả các số đã đánh bằng bao nhiêu?

Bài 74.

Một lỗ tròn được phủ hoàn toàn bằng hai tấm bìa hình vuông. Cạnh mỗi hình vuông bằng 1 m. Hỏi đường kính của lỗ tròn thay đổi trong khoảng nào ?

Bài 75.

Cho 5 điểm nằm bên trong một tam giác đều có diện tích bằng 1, chứng minh rằng ta có thể tìm được 3 tam giác đều có các cạnh song song với các cạnh của tam giác ban đầu mà tổng diện tích của 3 tam giác đó lớn nhất là 0,64, sao cho mỗi một trong năm điểm đã cho phải nằm trong ít nhất một trong 3 tam giác mới.

Bài 76.

Cho n-giác lồi X (tức đa giác lồi n cạnh). Chứng minh rằng nếu như ta có thể phân hoạch X thành các tam giác bằng n-3 đường chéo mà các tam giác đó không giao nhau, ngoại trừ tại các đỉnh chung, sao cho tồn tại một đường gấp khúc khép kín bao gồm các cạnh của các tam giác (mỗi cạnh xuất hiện đúng một lần) và gồm các đường chéo trong n-3 đường chéo, mỗi đường chéo xuất hiện đúng một lần, (nhưng mỗi đỉnh có thể xuất hiện hơn một lần), thì khi đó, n phải là một bội số của 3.

Đảo lại, hãy chứng minh rằng nếu n là bội số của 3 thì sẽ tồn tại một phân hoạch như trên.

Bài 77.

Với những tứ giác lồi ABCD nào thì ta có thể tìm được một điểm P (trong mặt phẳng tứ giác đó) sao cho cả bốn tam giác PAB, PBC, PCD, PDA đều có cùng diện tích?

Với một tứ giác cho trước, số lớn nhất các điểm như thế là bao nhiêu?

Bài 78.

Có 10 điểm được sắp xếp trong mặt phẳng sao cho với 5 điểm bất kì, có ít nhất 4 điểm nằm trên một đường tròn. Gọi M là số lớn nhất các điểm nằm trên một đường tròn. Hỏi giá trị bé nhất của M là bao nhiêu?

Bài 79.

Tại mỗi đỉnh của một đa giác đều n cạnh có một con chim đang đậu. Bỗng nhiên chim vụt cánh bay xa rồi một phút sau trở lại. Khi chúng quay lại, mỗi đỉnh cũng có một con chim đậu, nhưng không nhất thiết giống vị trí trước đó. Hỏi với số n nào ta có thể luôn tìm được 3 con chim sao cho tam giác tạo bởi 3 vị trí ban đầu của chúng là cùng loại (tam giác nhọn, tam giác có một góc tù hoặc tam giác vuông) với tam giác tạo bởi 3 vị trí sau cùng của chúng?

Bài 80.

24 điểm nằm cách đều nhau trên một đường tròn sao cho khoảng cách giữa hai điểm kề nhau bất kì là 1. Có bao nhiêu cách khác nhau để chọn 8 điểm mà độ dài cung giữa

hai điểm tuỳ ý trong 8 điểm này không bằng 3 hoặc 8 ?

Bài 81.

Người ta sơn bề ngoài của một khối lập phương thành màu trắng và cưa thành 64 khối lập phương nhỏ. Sau đó, từ các khối lập phương nhỏ, người ta xếp để tạo lại khối lập phương cũ, nhưng lúc ấy các khối lập phương nhỏ có thể thay đổi vị trí và quay đi. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các khối lập phương nhỏ để khối lập phương lớn có bề ngoài được sơn màu trắng?

Bài 82.

Chứng minh rằng trong số 10 điểm nằm trong một hình tròn có bán kính 5, luôn tồn tại hai điểm có khoảng cách bé hơn 2.

Bài 83.

Gọi S là tập hợp gồm n điểm trong mặt phẳng sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại một tập P gồm $2n - 5$ điểm thoả mãn điều kiện: Với mọi tam giác mà 3 đỉnh là 3 điểm của S, có một điểm của P nằm bên trong tam giác này.

Bài 84.

Xét các đường thẳng chứa các cạnh của một hình vuông đơn vị. Chứng minh rằng trên bốn đường thẳng đó không có bất cứ điểm nào sao cho khoảng cách từ điểm đó đến các đỉnh hình vuông là những số hữu tỉ.

Bài 85.

Một đường tròn S được gọi là cắt xuyên tâm đường tròn Σ nếu dây cung chung của chúng là đường kính của Σ.

Gọi S_A, S_B, S_C là 3 đường tròn tâm A, B, C phân biệt. Chứng minh A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi tồn tại không duy nhất một đường tròn S cắt xuyên tâm S_A, S_B, S_C.

Chứng minh thêm: Nếu có hơn 1 đường tròn S cắt xuyên tâm S_A, S_B, S_C thì tất cả các đường tròn S này đều đi qua 2 điểm cố định. Chỉ rõ vị trí 2 điểm này đối với 3 đường tròn S_A, S_B, S_C.

Bài 86.

Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 2$, tồn tại một tập hợp gồm 2^{n-1} điểm trong mặt phẳng sao cho không có 3 điểm nào nằm trên một đường thẳng và không có 2n điểm nào tạo thành đa giác lồi 2n đỉnh.

Bài 87.

Với mỗi tập hợp hữu hạn U các vectơ khác $\vec{0}$ trong mặt phẳng, ta gọi $l(U)$ là độ dài của vectơ tổng của tất cả các vectơ trong U. Cho trước một tập hợp hữu hạn V các vectơ khác $\vec{0}$ trong mặt phẳng, một tập con B của V được gọi là cực đại nếu với mọi tập con khác trống A của V, ta có $l(B) \geq l(A)$.

a) Hãy dựng các tập hợp gồm 4 và 5 vectơ, lần lượt có 8 và 10 tập con cực đại.

b) Chứng minh rằng, với mọi tập hợp V gồm n vectơ, $n \geq 1$, số các tập con cực đại là bé hơn hay bằng 2n.

Bài 88.

Trong mặt phẳng, cho trước một tập E gồm 1991 điểm, với một số cặp điểm nào đó được nối với nhau bằng một đường nối. Giả sử mỗi điểm của E đều nối được với ít nhất

1553 điểm khác của E. Chứng minh rằng tồn tại 6 điểm của E sao cho mỗi cặp trong 6 điểm này đều có nối với nhau.

Bài 89.

Cho hàm tuyến tính có đồ thị đi qua M(–1, –25), cắt trục Ox và Oy lần lượt tại hai điểm A, B và song song với đường thẳng

$$y = \frac{5}{4}x + \frac{95}{4}.$$

Ta xét *lưới đơn vị* trong mặt phẳng toạ độ (*tức là các ô vuông tạo bởi các đường thẳng song song cách nhau một đơn vị*). Tìm số các ô vuông chứa các điểm của đoạn thẳng AB (bên trong những ô vuông đó).

Bài 90.

Xác định tất cả các tập hợp hữu hạn S gồm những điểm trong mặt phẳng sao cho:

- S có ít nhất 3 điểm;
- với mọi A, B khác nhau thuộc S, đường trung trực của AB là một trục đối xứng của các điểm trong S.

Bài 91.

Cho $n \geq 1$ là một số nguyên. Một *con đường* từ (0, 0) tới (n, n) trong mặt phẳng xOy được định nghĩa là một chuỗi các di chuyển liên tiếp của đơn vị sang trái (di chuyển này được kí hiệu bởi E) hay lên trên (di chuyển này được kí hiệu bởi N), mọi di chuyển được thực hiện trong nửa mặt phẳng $x \geq y$. Một *bước nhảy* trên con đường là sự kết hợp của hai di chuyển liên tiếp có dạng EN.

Chứng minh rằng số các con đường từ (0, 0) đến (n, n) mà chứa đúng s bước nhảy ($n \geq s \geq 1$) là bằng

$$\frac{1}{s} C_{n-1}^{s-1} C_{n}^{s-1}.$$

Bài 92.

Trong mặt phẳng, cho bốn điểm phân biệt sao cho khoảng cách bé nhất giữa hai điểm bất kì trong bốn điểm đó là bằng 1. Tìm giá trị bé nhất của tổng sáu khoảng cách tạo bởi bốn điểm đó.

Bài 93.

Cho n điểm nằm trên một đường tròn sao cho không có ba dây cung nào có đầu mút nằm trong số n điểm này cắt nhau tại một điểm. Chứng minh rằng tồn tại n sao cho có

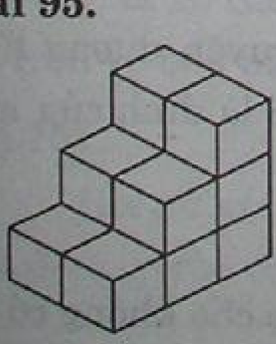
$$\frac{1}{2}(n^2 - 3n + 4)$$

dây cung có đầu mút nằm trong số n điểm này chia phần trong của hình tròn thành 1998 miền.

Bài 94.

Với mọi số tự nhiên $n \geq 3$, ta kí hiệu m(n) là số lớn nhất các điểm có thể được đặt bên trong hoặc trên biên của một hình đa giác đều n cạnh có cạnh bằng 1 sao cho khoảng cách giữa hai điểm bất kì trong chúng lớn hơn 1. Tìm tất cả các số n sao cho $m(n) = n - 1$.

Bài 95.



Một viên gạch có dạng hình của một tam cấp gồm ba bậc có bề rộng là 2 được làm từ 12 khối hình lập phương đơn vị. Hãy xác định số nguyên n sao cho ta có thể dựng một khối lập phương cạnh n từ các viên gạch (dạng tam cấp) ấy.

Bài 96.

Trong mặt phẳng, cho $C_1, C_2, \ldots, C_n$ là các đường tròn bán kính 1 sao cho không có bất cứ hai đường tròn nào trong chúng tiếp xúc nhau và tập con của mặt phẳng tạo bởi các đường tròn này là tập *liên thông* (nghĩa là, với mọi phép phân hoạch tập $\{1, 2, \ldots, n\}$ thành các tập con khác rỗng A và B, ta có $\bigcup_{a\in A} C_a$ và $\bigcup_{b\in B} C_b$ là hai tập không rời nhau). Chứng minh rằng $|S| \geq n$, trong đó

$$S = \bigcup_{1\leq i<j\leq n} C_i \cap C_j,$$

là tập hợp gồm các giao điểm của những đường tròn đó. (Mỗi đường tròn được xem là tập các điểm nằm trên biên, không kể các điểm bên trong - ở đây ta nói *đường tròn* để phân biệt với *hình tròn*.)

Bài 97.

Cho $n \geq 4$ là một số nguyên cố định. Cho tập hợp

$$S = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$$

gồm n điểm trong mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng và không có bốn điểm nào ở trên cùng một đường tròn. Gọi a_t, $1 \leq t \leq n$ là số các đường tròn ngoại tiếp tam giác $P_iP_jP_k$ chứa điểm P_t trong nó, đặt

$$m(S) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n;$$

Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên dương f(n), chỉ phụ thuộc vào n, sao cho: các điểm của S là đỉnh của một đa giác lồi nếu và chỉ nếu m(S) = f(n).

Bài 98.

Cho n điểm nằm trong mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Xét các đoạn thẳng có đầu mút là những điểm này sao cho với hai điểm bất kì A và B, tồn tại một điểm C nối với A và B bằng hai trong các đoạn thẳng đó. Hỏi số bé nhất các đoạn thẳng như thế là bao nhiêu?

Bài 99.

Có n hình chữ nhật với các cạnh song song nằm trên một mặt phẳng. Các cạnh của các hình chữ nhật khác nhau thì nằm trên các đường thẳng khác nhau. Biên của các hình chữ nhật cắt mặt phẳng thành các miền liên thông. Một miền được gọi *đẹp* nếu nó có ít nhất một trong các đỉnh của n hình chữ nhật nằm trên biên của nó.

Chứng minh rằng tổng của số các đỉnh tất cả các miền đẹp là bé hơn 40n. (Có thể có miền không lồi cũng như có những miền có hơn một biên cong.)

Bài 100.

Cho k là một số thực dương, n là một số nguyên lớn hơn 1. Có n điểm nằm trên một đường thẳng sao cho chúng không trùng tất cả thành một điểm. Xét hai điểm bất kì A, B không trùng nhau. Giả sử A nằm bên phải B. Khi đó, ta nói *một nước đi* là một sự chuyển chỗ được thực hiện như sau: thay B bởi điểm B' nằm bên phải A sao cho AB' = kAB.

Tìm tất cả các giá trị k để với các nước đi (hữu hạn) như vậy, ta có thể chuyển toàn bộ các điểm trên đường thẳng nói trên về bên phải của một điểm mốc tuỳ ý nào đó.

Bài 101.

Giả sử $n(r)$ là số tất cả các điểm có toạ độ nguyên trên một đường tròn có bán kính $r > 1$. Chứng minh rằng :

$$n(r) < 6\sqrt[3]{\pi r^2}.$$

Bài 102.

Cho 5 điểm trong một mặt phẳng sao cho trong số tất cả những đường thẳng nối hai điểm bất kì, không có hai đường thẳng nào trùng nhau, song song hoặc vuông góc với nhau.

Qua mỗi điểm, vẽ các đường thẳng vuông góc với các đường thẳng xác định bởi hai trong số 4 điểm còn lại. Hãy xác định số lớn nhất các giao điểm mà những đường vuông góc này có thể giao nhau.

Bài 103.

Cho n điểm trong mặt phẳng, với $n > 4$ và không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng tỏ rằng có ít nhất

$$\frac{(n-3)(n-4)}{2}$$

tứ giác lồi có đỉnh nằm trong số n điểm đã cho.

Bài 104.

Cho n là số tự nhiên lớn hơn 4, chứng minh rằng mọi tứ giác nội tiếp đều có thể được phân chia làm n tứ giác nội tiếp.

Bài 105.

Hãy chỉ ra một tập hợp các điểm không đồng phẳng, sao cho với bất kì hai điểm A và B cho trước trong tập hợp này, tồn tại hai điểm C và D khác (cũng trong tập hợp đó) mà AB và CD song song với nhau.

Bài 106.

Một hình hộp chữ nhật có thể được lấp đầy bằng những hình lập phương có cạnh bằng đơn vị. Ngoài ra, người ta có thể sắp xếp các hình lập phương có thể tích bằng 2 chồng lên nhau, cạnh song song với cạnh của hình hộp, và lấp đầy được 40% hình hộp. Hãy xác định kích thước có thể có của hình hộp đã cho.

Bài 107.

Xác định tất cả các số nguyên $n > 3$ sao cho tồn tại n điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ trong mặt phẳng và các số thực $r_1, r_2, \ldots, r_n$ thỏa mãn hai điều kiện sau:

i) Không có 3 điểm nào trong số các điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ thẳng hàng.

ii) Với mỗi bộ số (i, j, k) $(1 \le i < j < k \le n)$, các tam giác $A_iA_jA_k$ có diện tích bằng $r_i + r_j + r_k$.

Bài 108.

Cho n điểm trong mặt phẳng với n > 2. Chứng minh rằng có nhiều nhất là n cặp điểm có khoảng cách cực đại.

Bài 109.

Trong mặt phẳng cho 100 điểm phân biệt sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng trong số các tam giác được tạo thành từ 100 điểm đó, có không quá 70% các tam giác nhọn.

Bài 110.

Một người lính làm nhiệm vụ rà mìn, anh ta cần phải dò cùng khắp một khu vực có hình tam giác đều. Máy dò mìn (*detector*) có bán kính dò hiệu quả bằng một nửa chiều cao tam giác đó. Người lính bắt đầu từ một đỉnh của tam giác.

Hỏi anh ta nên đi theo con đường nào để cho đó là con