

Dạng 2: Chứng minh đẳng thức liên quan đến tích vô hướng.

Bài 14: Cho tam giác ABC với trọng tâm G, ba trung tuyến AD, BE, CF. Chứng minh:

a) $\overline{GA} \cdot \overline{GB} + \overline{GB} \cdot \overline{GC} + \overline{GC} \cdot \overline{GA} = -\frac{1}{6}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$.

b) $\overline{GA} \cdot \overline{GB} + \overline{GB} \cdot \overline{GC} + \overline{GC} \cdot \overline{GA} = -\frac{1}{2}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$.

c) $\overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{CA} \cdot \overline{BE} + \overline{AB} \cdot \overline{CF} = 0$.

Bài 15:

a) Chứng minh rằng trong mọi tứ giác ABCD, ta có hệ thức sau:

$$AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = 2\overline{AC} \cdot \overline{DB}$$

b) Từ câu a suy ra điều kiện cần và đủ để hai đường chéo AC và BD của tứ giác ABCD vuông góc với nhau là $AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = 0$.

c) A, B, C, D là 4 điểm bất kỳ. Chứng minh rằng: $\overline{DA} \cdot \overline{BC} + \overline{DB} \cdot \overline{CA} + \overline{DC} \cdot \overline{AB} = 0$.

Bài 16:

a) Cho tam giác ABC cố định có trọng tâm G. M là 1 điểm di động tùy ý. Chứng minh rằng $T = MA^2 + MB^2 + MC^2 - 3MG^2$ không phụ thuộc vào M.

b) Cho tam giác ABC cố định có trọng tâm G. Vẽ đường tròn tâm G, bán kính R. M là một điểm di động trên đường tròn đó. Chứng minh $T = MA^2 + MB^2 + MC^2$ không đổi khi M thay đổi.

Bài 17:

a) Cho ba điểm A, B, C cố định sao cho $5\overline{AB} = 3\overline{BC}$. M là 1 điểm di động tùy ý trong mặt phẳng. Chứng minh rằng: $5MA^2 + 3MC^2 - 8MB^2$ có giá trị không đổi.

b) Cho tam giác ABC và 1 điểm M thuộc cạnh BC sao cho $MC = 2MB$. Chứng minh rằng $AM^2 = \frac{2}{3}AB^2 + \frac{1}{3}AC^2 - \frac{2}{9}BC^2$.

Bài 18:

a) Cho AB là 1 dây cung của đường tròn tâm O và M là 1 điểm thuộc dây cung đó. Chứng minh rằng: $2 \cdot \overline{MA} \cdot \overline{MO} = MA(MA - MB)$.

- b) Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng: $\overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{BA} \cdot \overline{BC} + \overline{CB} \cdot \overline{CD} + \overline{DC} \cdot \overline{DA} = 0$ là điều kiện cần và đủ để ABCD là hình bình hành.

Bài 19: Cho tứ giác ABCD có 2 đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại M. Gọi E là trung điểm của AD. Chứng minh rằng: $ME \perp BC$ khi và chỉ khi $\overline{MA} \cdot \overline{MC} = \overline{MB} \cdot \overline{MD}$.

Dạng 3: Ứng dụng của tích vô hướng

Bài 20:

- a) Cho tam giác ABC cân tại A có đường cao AH. Kẻ $HD \perp AC$ với D thuộc đường thẳng AC. Gọi M là trung điểm của HD. Chứng minh rằng: $AM \perp BD$.
- b) Cho tam giác ABC có góc A nhọn. Vẽ bên ngoài các tam giác vuông cân đỉnh A là ABD và ACE. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $AM \perp DE$.

Bài 21: Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi D là trung điểm của AB và E là trọng tâm của tam giác ACD. Biểu diễn các vectơ $\overline{OE}, \overline{CD}$ theo vectơ $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$. Từ đó chứng minh $OE \perp CD$.

Bài 22: Cho tam giác ABC có $AB = 2a, AC = a, \hat{A} = 120^\circ$. Gọi M là trung điểm của AC.

- a) Tính BC và BM theo a.
- b) Gọi N là một điểm trên BC sao cho $BN = x$. Tính \overline{AN} theo $\overline{BC}, \overline{AC}$. Tìm giá trị của x để $AN \perp BM$.

Bài 23:

- a) Cho tam giác ABC có $AB = 4, AC = 8$ và $\hat{A} = 60^\circ$. Kẻ đường trung tuyến AM và lấy một điểm E thuộc tia AC. Đặt $\overline{AE} = k\overline{AC}$. Tìm tỉ số k để $BE \perp AM$.
- b) Cho tam giác ABC có độ dài 3 cạnh là $a = 6, b = 4, c = 3$. Kẻ đường cao AH. Tính tỷ số $\frac{CH}{BC}$.

Bài 24:

- a) Cho tam giác ABC vuông cân tại A có đường trung tuyến BD. Kẻ $AE \perp BD$ với điểm E thuộc BC. Tính tỷ số $\frac{BE}{BC}$.
- b) Cho tam giác ABC đều. Gọi E là một điểm sao cho $\overline{BE} = \frac{1}{3}\overline{BC}$. Kẻ $CF \perp AE$ với điểm F thuộc AB. Tính tỷ số $\frac{AF}{AB}$.

Dạng 4: Tìm tập hợp điểm.

Bài 25: Cho tam giác ABC cố định. Tìm tập hợp điểm M sao cho:

a) $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) = 0$.

b) $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$.

c) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$.

Bài 26:

a) Cho hai điểm A và B cố định có $AB = a$. Tìm tập hợp các điểm N sao cho $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$.

b) Cho tam giác ABC cố định có cạnh $BC = a$. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$.

Bài 27: Cho hai điểm A và B sao cho $AB = a$.

a) Tìm tập hợp các điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 = 3a^2$.

b) Tìm tập hợp các điểm N sao cho $2NA^2 + NB^2 = 5a^2$.

Bài 28: Cho tam giác đều ABC có cạnh a.

a) Tìm tập hợp các điểm M sao cho: $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 7a^2$.

b) Xác định vị trí điểm I sao cho $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Từ đó tính IA^2, IB^2, IC^2 theo a.

c) Tìm tập hợp các điểm M sao cho $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2$.

Bài 29: Cho tam giác ABC có $AB = 4a, BC = 2a, AC = 3a$.

a) Xác định điểm I sao cho $2\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

b) Tính IA^2, IB^2, IC^2 theo a.

c) Tìm tập hợp các điểm M sao cho $2AM^2 - 3MB^2 + 4MC^2 = \frac{17a^2}{36}$.

Dạng 5: Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức hình học.

Bài 30: Cho tam giác ABC cố định.

a) Tìm vị trí điểm M sao cho $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- b) Tìm vị trí điểm N sao cho $3NA^2 + 2NB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
c) Hãy tìm vị trí điểm M sao cho: $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 31: Cho tam giác ABC cố định.

- a) Xác định điểm I sao cho: $2\vec{IA} + 3\vec{IB} + 4\vec{IC} = \vec{0}$.
b) Hãy tìm vị trí điểm M sao cho $2MA^2 + 3MB^2 + 4MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 32: Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = AC = x$.

- a) Hãy tìm vị trí điểm I sao cho: $\vec{IA} + 3\vec{IB} + 4\vec{IC} = \vec{0}$. Tính IA^2, IB^2, IC^2 theo x.
b) Tìm vị trí điểm M sao cho: $MA^2 + 3MB^2 + 4MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Dạng 6: Tích vô hướng trong hệ trục tọa độ.

Bài 33:

- a) Cho $\vec{a} = (2x + 5; -9); \vec{b} = (3x - 1; 5)$. Tìm x để $\vec{a} \perp \vec{b}$.
b) Cho $\vec{b} = (1; 2); \vec{c} = (3; 5)$. Hãy tìm tọa độ \vec{a} biết $\vec{a} \perp \vec{b}$ và $\vec{a} \cdot \vec{c} = -1$.
c) Cho $\vec{a} = (1; 5); \vec{b} = (2; 3); \vec{u} = \vec{a} - \vec{b}; \vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$. Tính $(\vec{u}; \vec{v})$.

Bài 34: Cho 3 điểm A(-1;1), B(3;1), C(2;4).

- a) Tính chu vi và diện tích của tam giác ABC.
b) Tìm tọa độ trọng tâm G, trực tâm H và tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh ba điểm G, H, I thẳng hàng.

Bài 35:

- a) Cho 3 điểm A(1;0), B(0;3), C(-3;-5). Chứng minh tam giác ABC tù.
b) Cho 3 điểm A(-1;1), B(1;3), C(1;-1). Chứng minh tam giác ABC vuông cân.

Bài 36: Cho 4 điểm A(-8;0), B(0;4), C(2;0) và D(-3;-5). Chứng minh rằng ABCD là tứ giác nội tiếp trong đường tròn.

Bài 37: Cho hai điểm A(-3;2), B(4;3).

- a) Tìm tọa độ của điểm M thuộc trục Ox để tam giác MAB vuông tại M.
b) Tìm tọa độ điểm N thuộc trục Oy sao cho $NA = NB$.

Bài 38: Cho $A(1;-1)$ và $B(3;0)$. Tìm tọa độ các đỉnh C và D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình vuông.

PHẦN 3: HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC.

Dạng 1: Tính các yếu tố trong tam giác.

Bài 39: Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 60^\circ; \widehat{C} = 45^\circ; BC = a$.

- Tính độ dài hai cạnh AB và AC bằng a .
- Chứng minh rằng: $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

Bài 40: Cho tam giác ABC có $b = 20, c = 35$ và $\widehat{A} = 60^\circ$.

- Tính chiều cao h_a của tam giác ABC .
- Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
- Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Bài 41: Cho tam giác ABC có $a = 2\sqrt{3}; b = 2\sqrt{2}; c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

- Tính các góc A và B của tam giác ABC .
- Tính đường cao h_a và các bán kính R, r của tam giác ABC .

Bài 42:

- Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^\circ, a = 10, r = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Tính R, b, c .
- Cho tam giác ABC có $\widehat{A} < 90^\circ, b = 4, c = 3$ và $S_{\Delta ABC} = 3\sqrt{3}$. Tính A và a .

Bài 43: Cho tam giác ABC có độ dài 3 trung tuyến $AI = 15; BE = 18; CF = 27$.

- Tính diện tích ΔABC .
- Tính độ dài 3 cạnh của ΔABC .

Bài 44: Cho tam giác ABC có hai trung tuyến BM và CN cắt nhau tại G . Biết $BM = 6; CN = 9$ và $\widehat{BGC} = 120^\circ$. Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC .

Dạng 2: Chứng minh hệ thức cạnh góc trong tam giác.

Bài 45: Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng:

- a) $(b^2 - c^2)\cos A = a(c\cos C - b\cos B)$.
- b) $\sin C = \sin A \cos B + \sin B \cos A$.
- c) $\frac{(b^2 - c^2)\cos A}{a} + \frac{(c^2 - a^2)\cos B}{b} + \frac{(a^2 - b^2)\cos C}{c} = 0$.
- d) $\frac{\cos A}{b\cos C + c\cos B} + \frac{\cos B}{a\cos C + c\cos A} + \frac{\cos C}{a\cos B + b\cos A} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$.
- e) $\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$.
- f) $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$.

Bài 46: Cho tam giác ABC có diện tích S. Chứng minh rằng:

- a) $S = Rr(\sin A + \sin B + \sin C)$.
- b) $A = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$.
- c) $S = \frac{1}{2}(a^2 \sin B \cos B + b^2 \sin A \cos A)$.
- d) $S = p(p - a) \tan \frac{A}{2}$.

Bài 47:

- a) Cho tam giác ABC có $m_a = c$. Chứng minh rằng: $b \cos C = 3c \cos B$.
- b) Cho tam giác ABC có $\frac{m_a}{m_c} = \frac{c}{b} \neq 1$. Chứng minh rằng: $\cot B + \cot C = 2 \cot A$.
- c) Chứng minh tam giác ABC vuông cân tại A khi và chỉ khi $5m_a^2 = m_b^2 + m_c^2$.
- d) Cho ΔABC có $a^2 + b^2 = 2c^2$. Chứng minh rằng: $m_a + m_b + m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}(a + b + c)$.

Dạng 3: Nhận dạng tam giác

Bài 48:

- a) Cho tam giác ABC có $\frac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2$. Chứng minh rằng $\hat{A} = 60^\circ$.

b) Cho tam giác ABC có $\frac{\sin B}{\sin C} = 2 \cos A$. Chứng minh rằng tam giác ABC cân.

c) Tìm \hat{C} của tam giác ABC, biết $(a + b + c)(a + b - c) = 3ab$.

d) Hãy tìm hình dạng của tam giác ABC biết:
$$\begin{cases} a = 2b \cos C \\ a^2 = \frac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} \end{cases}$$

e) Cho tam giác ABC có $\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\cos C}{\cos B}$. Hỏi tam giác ABC là tam giác gì?

Bài 49: Cho tam giác ABC có độ dài 3 cạnh là a, b, c và diện tích là S. Hãy tìm hình dạng của tam giác ABC, biết:

a) $S = \frac{1}{4}(a + b - c)(a + c - b)$.

b) $S = p(p - a)$.

c) $S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}}{36}(a + b + c)^2$.

Bài 50: Cho ΔABC nội tiếp đường tròn có bán kính $R = 2$. Biết $\cot A = 2 \cot B = 3 \cot C$.

a) Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác nhọn.

b) Tính $\cot A, \cot B, \cot C$.

c) Tính độ dài 3 cạnh a, b, c của tam giác ABC.