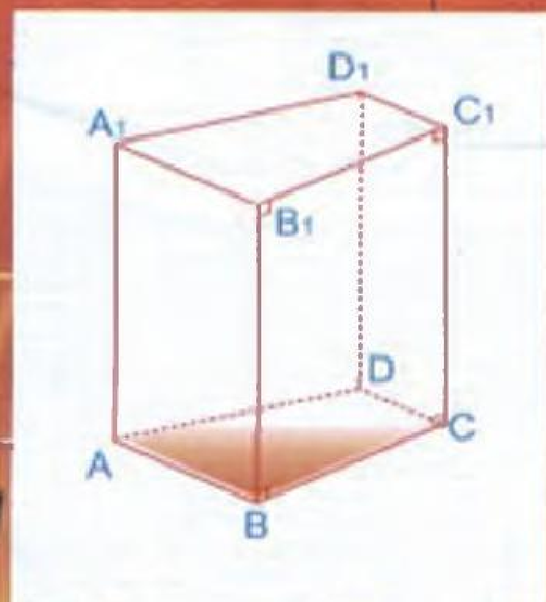
NGUYỄN ĐỨC TẤN - NGUYỄN ANH HOÀNG - LƯƠNG ANH VĂN
BÙI RUY TÂN - TRƯƠNG ĐỨC LONG - VŨ ĐỨC ĐOÀN

# LỜI GIẢI ĐỀ THI

# TOÁN 8

**_BỒI DƯỠNG HỌC SINH KHÁ GIỎI_**

_( Tái bản lần thứ hai có bổ sung )_




NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH

# A. CÁC BỘ ĐỀ TOÁN

## BỘ ĐỀ 1

### ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN 6, TPHCM – NĂM HỌC 1990 – 1991

**Bài 1:** Cho đa thức $P(x) = 2x^4 - 7x^3 - 2x^2 + 13x + 6$

1) Phân tích P(x) thành nhân tử.
2) Chứng minh rằng: $P(x) \vdots 6$ với mọi $x \in Z$.

**Bài 2:** Cho hình bình hành ABCD (AC > BD). Vẽ $CE \perp AB$ và $CF \perp AD$.
Chứng minh rằng: $AB.AE + AD.AF = AC^2$

**Bài 3:** Cho phân thức $F(x) = \dfrac{x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2}{x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2}$

1) Rút gọn phân thức.
2) Xác định x để phân thức có giá trị nhỏ nhất.

**Bài 4:** Cho tam giác vuông ABC, cạnh huyền BC = 289 và đường cao AH = 120. Tính hai cạnh AB và AC.

**Bài 5:** Cho ba số dương a, b, c.

1) Chứng minh: $(a + b + c)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) \geq 9$
2) Giải phương trình: $\dfrac{a + b - x}{c} + \dfrac{b + c - x}{a} + \dfrac{c + a - x}{b} + \dfrac{4x}{a + b + c} = 1$

### HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1:**

1) $P(x) = 2x^4 - 7x^3 - 2x^2 + 13x + 6$
$= 2x^4 - 6x^3 - x^3 + 3x^2 - 5x^2 + 15x - 2x + 6$
$= 2x^3(x - 3) - x^2(x - 3) - 5x(x - 3) - 2(x - 3)$
$= (x - 3)(2x^3 - x^2 - 5x - 2) = (x - 3)(2x^3 - 4x^2 + 3x^2 - 6x + x - 2)$
$= (x - 3)[2x^2(x - 2) + 3x(x - 2) + (x - 2)]$
$= (x - 3)(x - 2)(2x^2 + 3x + 1) = (x - 3)(x - 2)(2x^2 + 2x + x + 1)$
$= (x - 3)(x - 2)[2x(x + 1) + (x + 1)] = (x - 3)(x - 2)(x + 1)(2x + 1)$

2) $P = (x - 3)(x - 2)(x + 1)(2x + 1) = (x - 3)(x - 2)(x + 1)(2x - 2 + 3)$
$= 3(x - 3)(x - 2)(x + 1) + 2(x - 3)(x - 2)(x + 1)(x - 1)$

chia hết cho 6. Vì x – 3, x – 2 là hai số nguyên liên tiếp nên có một số chia hết cho 2.

$\Rightarrow (x - 3)(x - 2)(x + 1) \vdots 2 \Rightarrow 3(x - 3)(x - 2)(x + 1) \vdots 6$

Và x – 3, x – 2, x – 1 là ba số nguyên liên tiếp nên có một số chia hết cho 2, một số chia hết cho 3 mà ước chung lớn nhất (2; 3) = 1; 2.3 = 6

$\Rightarrow (x-3)(x-2)(x-1) \vdots 6$

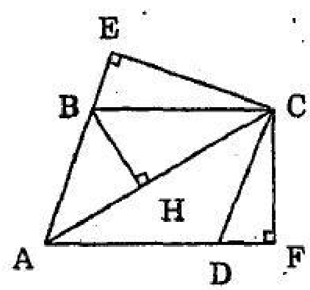
Vậy $P \vdots 6$ với mọi $x \in Z$

**Bài 2:** Vẽ $BH \perp AC$ $(H \in AC)$

Xét $\Delta ABH$ và $\Delta ACE$ có: $\widehat{ABH} = \widehat{AEC} = 90^0$

$\widehat{BAH}$ chung

Vậy $\Delta ABH \backsim \Delta ACE$ (g–g)




Cho ta $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AH}{AE}$ hay $AB.AE = AC.AH$ (1)

Xét $\Delta CBH$ và $\Delta ACF$ có

$\widehat{BAH} = \widehat{CAF}$ (2 góc so le trong có $BC \parallel AD$)

$\widehat{CHB} = \widehat{CFA} = 90^0$

Vậy $\Delta CBH \backsim \Delta ACF$ (g–g)

Cho ta $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{CH}{AF}$ hay $BC.AF = AC.CH$ (2)

Cộng vế theo vế (1) và (2) ta được:

$AB.AE + BC.AF = AC.AH + AC.CH$

$AB.AE + AD.AF = AC.(AH + CH) = AC^2$

**Bài 3:** $F(x) = \dfrac{x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2}{x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2}$

1) Ta có: $x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2 = x^4 + x^3 + x^2 - 2x^2 - 2x - 2$

$= x^2(x^2 + x + 1) - 2(x^2 + x + 1)$

$= (x^2 - 2)(x^2 + x + 1)$

$= x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$

$= x^4 - 2x^2 + 2x^3 - 4x + x^2 - 2$

$= x^2(x^2 - 2) + 2x(x^2 - 2) + x^2 - 2$

$= (x^2 - 2)(x^2 + 2x + 1) = (x^2 - 2)(x + 1)^2$

2) $F(x) = \dfrac{(x^2 - 2)(x^2 + x + 1)}{(x^2 - 2)(x + 1)^2}$ $(x \in Z, x \neq -1)$

$$= \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 1 - x - 1 + 1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2} - \frac{x+1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{3}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy $F(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\dfrac{3}{4} \Leftrightarrow x = 1$.

**Bài 4:** Gọi x, y lần lượt là độ dài các cạnh AB, AC. Giả sử $x \geq y$.

Theo đầu bài ta có: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 289^2 \\ x.y = 289.120 \end{cases}$

Do đó: $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 289^2 + 2.289.120 \\ x^2 - 2xy + y^2 = 289^2 - 2.289.120 \end{cases}$

$\begin{cases} (x + y)^2 = 289(289 + 240) \\ (x - y)^2 = 289(289 - 240) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x + y)^2 = 289.259 \\ (x - y)^2 = 289.49 \end{cases}$

$\begin{cases} (x + y)^2 = 17^2.23^2 \\ (x - y)^2 = 17^2.7^2 \end{cases}$ nên $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 17.29 \\ x - y = 17.7 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{17.(23+7)}{2} \\ y = \dfrac{17.(23-7)}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 255 \\ y = 136 \end{cases}$$

Vậy cạnh AB là 255, cạnh AC là 136 hoặc AB là 136 và AC là 255.

***Chú ý:*** Có thể giải như sau:

Gọi độ dài cạnh AB là x, ta có độ dài cạnh AC là $\dfrac{289.120}{x} = \dfrac{8670}{x}$

Theo định lý Pytago ta có: $x^2 + \left(\dfrac{8670}{x}\right)^2 = 289^2$

**Bài 5:** 1) Ta chứng minh bất đẳng thức sau $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \Leftrightarrow (x, y > 0)$ (*)

$\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 3\ \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a}$$

Ta có: $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2, \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{b} \geq 2, \dfrac{a}{c} + \dfrac{c}{a} \geq 2$ (a, b, c, > 0)

Vậy: $3 + \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{a}{c} + \dfrac{c}{a} \geq 3 + 2 + 2 + 2$

$3 + \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{a}{c} + \dfrac{c}{a} \geq 9$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Ta có: $(a + b + c)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) \geq (a, b, c > 0)$

2) $\dfrac{a+b-x}{c} + \dfrac{b+c-x}{a} + \dfrac{c+a-x}{b} + \dfrac{4x}{a+b+c} = 1$

$$\frac{a+b-x}{c}+1+\frac{b+c-x}{a}+1+\frac{c+a-x}{b}+1+\frac{4x}{a+b+c}+1=5$$

$$\frac{a+b+c-x}{c}+\frac{a+b+c-x}{a}+\frac{a+b+c-x}{b}+\frac{4x+a+b+c}{a+b+c}-5=0$$

$$\frac{a+b+c-x}{c}+\frac{a+b+c-x}{a}+\frac{a+b+c-x}{b}-\frac{4(a+b+c-x)}{a+b+c}=0$$

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{4}{a+b+c}\right)=0 \qquad (1)$$

Đặt $A=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{4}{a+b+c}$

Ta có: $(a+b+c).A=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{4}{a+b+c}\right)$ $(a, b, c > 0)$

Đặt $(a+b+c).A=B$

Ta có: $B=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-4$

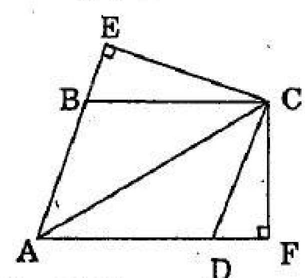
mà $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$ $(a, b, c > 0)$

nên $B=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-4\geq 5>0$

Do đó: $A > 0$. Vậy phương trình (1) có một nghiệm duy nhất là

$x = a + b + c$

***Nhận xét*: Bài 2** có cách giải khác không cần vẽ thêm đường phụ BH.




Áp dụng định lý Pytago vào các tam giác vuông *AEC* và *AFC*.

Ta có: $AE^2 + EC^2 = AC^2$; $AF^2 + CF^2 = AC^2$

$\Rightarrow AF^2 + FC^2 + AE^2 + EC^2 = 2AC^2$

$\Rightarrow (AD + DF)^2 + FC^2 + (AB + BE)^2 + EC^2 = 2AC^2$

$\Rightarrow AD^2 + 2AD.DF + DF^2 + FC^2 + AB^2 + 2AB.BE + BE^2 + EC^2 = 2AC^2$

$\Rightarrow AB^2 + 2AB.BE + BC^2 + DC^2 + AB.DF + AD^2 + BC^2 = 2AC^2$

$\Rightarrow AB^2 + 2AB.BE + AD^2 + AB^2 + 2AD.DF + AD^2 = 2AC^2$

$\Rightarrow 2AB^2 + 2AB.BE + 2AD^2 + 2AD.DF = 2AC^2$

$\Rightarrow 2(AB^2 + AB.BE + AD^2 + AD.DF) = 2AC^2$

$\Rightarrow AB(AB + BE) + AD(AD + DF) = AC^2$

$\Rightarrow AB.AE + AD.AF = AC^2$

**Bài 5:** Từ bất đẳng thức ở câu 1 ta có thể chứng minh bất đẳng thức Nesbit sau đây:

*Cho a, b, c là ba số dương. Chứng minh rằng* $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$

Ta có thể phát biểu bài toán trên dưới dạng bài toán cực trị trong hình học.

*Gọi a, b, c là số đo ba cạnh của tam giác ABC. Tam giác là tam giác gì để tổng* $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

*Hướng dẫn:* $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}+1+\frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}+1+1+1$

$\Leftrightarrow \frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b} \ge \frac{9}{2}$

$\Leftrightarrow 2(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) \ge 9$

$\Leftrightarrow [(b+c)+(c+a)+(a+b)]\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) \ge 9$ (bất đẳng đúng).

## BỘ ĐỀ 2

### ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI GIẢI THƯỞNG LÊ QUÝ ĐÔN QUẬN TÂN BÌNH, TPHCM – NĂM HỌC 1989 – 1990

**Bài 1:** Phân tích đa thức thành nhân tử

1) $a(x^2+1)-x(a^2+1)$ 2) $x-1+x^{n+3}-x^n$

**Bài 2:**

1) Thực hiện phép tính: $\left(\frac{x}{y^2-xy}+\frac{y}{x^2-xy}\right):\left(\frac{x^2-y^2}{x^2y+xy^2}\right)$

2) Rút gọn biểu thức: $\frac{|x|+|y|}{x+y}$

3) Tìm các giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức $\frac{x^2-3}{x-2}$ là số nguyên.

**Bài 3:** Cho hình vuông ABCD. Trên tia đối BA lấy một điểm E, trên tia đối của CB lấy một điểm F sao cho AE = CF.

1) Chứng minh tam giác EDF vuông cân.
2) Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD, gọi I là trung điểm EF. Chứng minh O, C, I thẳng hàng.

### HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1:**

1) $a(x^2+1)-x(a^2+1) = ax^2+a-a^2x-x = ax^2-a^2+a-x$
$= ax(x-a)+(a-x) = ax(x-a)-(x-a) = (x-a)(ax-1)$

2) $x-1+x^{n+3}-x^n = x-1+x^n(x^3-1) = x-1+x^n(x-1)(x^2+x+1)$
$= (x-1)(1+x^{n+2}+x^{n+1}+x^n) = (x-1)(x^{n+2}+x^{n+1}+x^n+1)$

**Bài 2:**

1) Đặt $A = \left(\frac{x}{y^2 - xy} + \frac{y}{x^2 - xy}\right) : \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2y + xy^2}\right)$

Điều kiện để biểu thức A có nghĩa là:

$$\begin{cases} y^2 - xy \neq 0 \\ x^2 - xy \neq 0 \\ x^2 - y^2 \neq 0 \\ x^2y + xy^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(y - x) \neq 0 \\ x(x - y) \neq 0 \\ (x - y)(x + y) \neq 0 \\ xy(x + y) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 0, y \neq 0, x \neq y, x \neq -y$$

Ta có: $A = \left[\frac{x}{y(y-x)} + \frac{y}{x(x-y)}\right] : \frac{(x-y)(x+y)}{xy(x+y)} = \left[\frac{x^2 - y^2}{xy(y-x)}\right] : \frac{x-y}{xy}$

$$= \frac{(x-y)(x+y)xy}{xy(y-x)(x-y)} = -\frac{x+y}{x-y}$$

2) Đặt $B = \frac{|x| + |y|}{x + y}$

Điều kiện để biểu thức B có nghĩa là $x \neq -y$.

Nếu $x \geq 0$, $y \geq 0$ và x, y không đồng thời bằng không, ta có

$$B = \frac{x+y}{x+y} = 1$$

Nếu $x \geq 0$, $y \leq 0$ và $x \neq -y$, ta có $B = \frac{x-y}{x+y}$

Nếu $x \leq 0$, $y \geq 0$ và $x \neq -y$, ta có $B = \frac{y-x}{x+y}$

Nếu $x \leq 0$, $y \geq 0$ và x, y không đồng thời bằng không, ta có

$$B = \frac{-x-y}{x+y} = -1$$

3) Đặt $C = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$

Điều kiện để biểu thức C có nghĩa là $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ (*)

Ta có: $C = \frac{x^2 - 3}{x - 2} = \frac{x^2 - 4 + 1}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2) + 1}{x - 2} = x + 2 + \frac{1}{x-2}$

Biểu thức C có giá trị nguyên khi $x - 2$ là ước của 1.

Suy ra $x - 2 = 1$ hoặc $x - 2 = -1$. Do đó $x = 3$ hoặc $x = 1$

Cả hai giá trị trên đều thỏa điều kiện (*) nên nhận được.

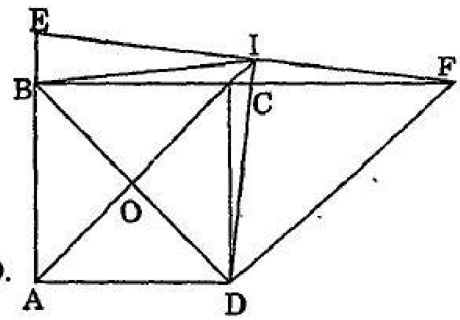
**Bài 3:** 1) Chứng minh tam giác EDF vuông cân.

Xét hai tam giác vuông ADE và FCD

$\widehat{EAD} = \widehat{FCD} = 90^0$

AD = DC (ABCD là hình vuông)

$AE = CF$ (giả thiết)
Vậy $\Delta AED = \Delta CFD$ (c–g–c)
Suy ra $\widehat{ADE} = \widehat{CDF}$
Mà $\widehat{ADE} + \widehat{CDF} = \widehat{ADC} = 90^0$
Nên $\widehat{CDF} + \widehat{CDE} = \widehat{EDF} = 90^0$
mặt khác $ED = DF$ ($\Delta AED = \Delta CFD$)
suy ra tam giác EDF vuông cân tại D.




2) Chứng minh O, C, I thẳng hàng.
Áp dụng tính chất trung tuyến ứng với cạnh huyền vào các tam giác vuông ABF và DEF, ta có:

$$IB = ID = \frac{1}{2}EF$$

mà $CB = CD$ (ABCD là hình vuông)
và $OB = OD$ (tính chất đường chéo hình vuông)
nên ba điểm I, C, O nằm trên đường trung trực của đoạn BD.
Suy ra ba điểm I, C, O thẳng hàng.

## BỘ ĐỀ 3

### ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI GIẢI THƯỞNG LÊ QUÝ ĐÔN QUẬN TÂN BÌNH, TPHCM – NĂM HỌC 1990 – 1991

**Bài 1:**

1) Giải phương trình $(3x - 1)(x + 1) = 2(9x^2 - 6x + 1)$
2) Giải bất phương trình $\frac{x-1}{2} \geq \frac{4+x}{2} - 3$

**Bài 2:** Tính số trị của biểu thức sau: $\frac{2a-b}{3a-b} + \frac{5b-a}{3a+b}$

Biết $10a^2 - 3b^2 + 5ab = 0$ và $9a^2 - b^2 \neq 0$

**Bài 3:** Cho biểu thức $P = \frac{x^4 + x^3 + x + 1}{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1}$

1) Tìm các giá trị thích hợp của các biến số trong biểu thức P.
2) Rút gọn P.
3) Với giá trị nào của x thì biểu thức P (sau khi rút gọn) có giá trị bằng 2.

**Bài 4:**

1) Cho hình thang ABCD (BC//AD) với các góc $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACD}$ bằng nhau. Tính độ dài đường chéo AC, biết rằng hai đáy BC và AD theo thứ tự có độ dài 12m và 27m.
2) Cho tam giác ABC, M là trung điểm của cạnh BC. Từ một điểm E trên cạnh BC ta kẻ đường Ex//AM. Ex cắt tia CA ở F và tia BA ở G, chứng minh $EF + EG = 2AM$.

## HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1:** 1) $(3x - 1)(x + 1) = 2(9x^2 - 6x + 1)$

$\Leftrightarrow (3x - 1)(x + 1) = 2(3x - 1)^2 \Leftrightarrow (3x - 1)(x + 1) - 2(3x - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (3x - 1)(x + 1 - 6x + 2) = 0 \Leftrightarrow (3x - 1)(-5x + 3) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - 1 = 0 \\ -5x + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{3} \\ x = \dfrac{3}{5} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm số là $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{3}{5}$

2) $\frac{x-1}{2} \geq \frac{4+x}{2} - 3 \Leftrightarrow x - 1 \geq 4 + x - 6 \Leftrightarrow 0x \geq -1$

Suy ra x tùy ý.

**Bài 2:** Đặt $A = \frac{2a-b}{3a-b} + \frac{5b-a}{3a+b}$ $(9a^2 - b^2 \neq 0)$

Ta có: $A = \dfrac{6a^2 + 2ab - 3ab - b^2 + 15ab - 5b^2 - 3a^2 + ab}{9a^2 - b^2}$

$= \dfrac{3a^2 + 15ab - 6b^2}{9a^2 - b^2} = \dfrac{3a^2 + 3(3b^2 - 10a^2) - 6b^2}{9a^2 - b^2}$

(Từ điều kiện $10a^2 - 3b^2 + 5ab = 0$ suy ra $5ab = 3b^2 - 10a^2$)

$= \dfrac{3a^2 + 9b^2 - 30a^2 - 6b^2}{9a^2 - b^2} = \dfrac{-27a^2 + 3b^2}{9a^2 - b^2} = \dfrac{-3(9a^2 - b^2)}{9a^2 - b^2} = -3$

**Bài 3:** $P = \dfrac{x^4 + x^3 + x + 1}{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1}$

*1)* Ta có $x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1 = x^4 - x^3 + x^2 + x^2 - x + 1$

$= x^2(x^2 - x - 1) + (x^2 - x + 1) = (x^2 + 1)(x^2 - x + 1)$

$= (x^2 + 1)(x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}) = (x^2 + 1)\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] > 0 \ \forall x$

Vậy biểu thức P có nghĩa với mọi giá trị của biến số x.

2) $x^4 + x^3 + x + 1 = x^3(x + 1) + (x + 1) = (x^3 + 1)(x + 1)$

$= (x + 1)^2(x^2 - x + 1)$

Vậy $P = \dfrac{(x+1)^2(x^2 - x + 1)}{(x^2 + 1)(x^2 - x + 1)} = \dfrac{(x+1)^2}{x^2 + 1}$

3) $P = 2 \Leftrightarrow \dfrac{(x+1)^2}{x^2 + 1} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 2x^2 + 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy với x = 1 thì biểu thức P có giá trị bằng 2.

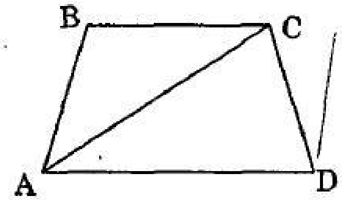
**Bài 4:**

1) Xét $\Delta ABC$ và $\Delta ACD$ ta có:

$\widehat{ABC} = \widehat{ACD}$ (giả thiết)

$\widehat{ACB} = \widehat{CAD}$ (cặp góc so le trong BC // AD)

Vậy $\Delta ABC \backsim \Delta DCA$ (g–g)



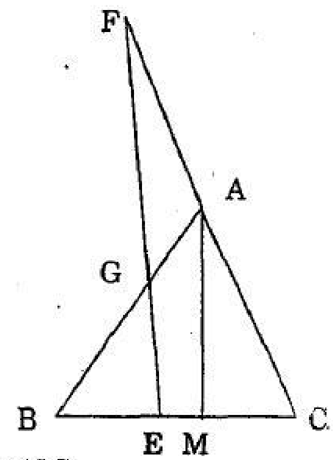

Suy ra $\dfrac{AC}{DA} = \dfrac{BC}{CA}$

Hay $AC^2 = AD.BC$

$AC^2 = 27.12 \Rightarrow AC^2 = 384$

$\Rightarrow AC^2 = 18^2 \Rightarrow AC = 18$ (m)

2) Xét $\Delta EFC$, ta có EF // AM (giả thiết)




Suy ra $\dfrac{EF}{AM} = \dfrac{EC}{CM}$ (1) (hệ quả định lý Talet)

Xét $\Delta ABM$, ta có EG // AM (giả thiết)

Suy ra $\dfrac{EG}{AM} = \dfrac{BE}{BM}$ (hệ quả định lý Talet)

Mà BM = CM (M là trung điểm BC)

Nên $\dfrac{EG}{AM} = \dfrac{BE}{CM}$ (2)

Cộng vế theo vế các hệ thức (1) và (2) ta có: $\dfrac{EF}{AM} + \dfrac{EG}{AM} = \dfrac{EC}{CM} + \dfrac{BE}{CM}$

hay $\dfrac{EF + EG}{AM} = \dfrac{BC}{CM} = 2$ (vì BE + EC = BC; BC = 2CM)

suy ra EF + EG = 2AM.

## BỘ ĐỀ 4

### ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI GIẢI THƯỞNG LÊ QUÝ ĐÔN QUẬN TÂN BÌNH, TPHCM – NĂM HỌC 1991 – 1992

**Bài 1:**

1) Rút gọn biểu thức sau: $B = \dfrac{4a^2 + 12a + 9}{2a^2 - a - 6}$

2) Thực hiện phép tính: $\dfrac{0,5a^2 + a + 2}{1 + 0,5a} : \dfrac{a^3 - 8}{a + 2} + \dfrac{2}{a(2 - a)}$

**Bài 2:**

1) Giải bất phương trình: $(x - 2)(x + 1) < 0$

2) Giải phương trình: $x^2 + 2x + 2|x + 1| - 2 = 0$

**Bài 3:** Cho biểu thức $A = x^2 + 6x + 15$

1) Chứng minh A luôn luôn dương với mọi x.
2) Với giá trị nào của x thì A có giá trị nhỏ nhất hay lớn nhất, tìm giá trị nhỏ nhất hay lớn nhất đó.

**Bài 4:**

1) Cho tứ giác ABCD, gọi M, N là trung điểm hai cạnh đối diện BC và AD. Cho biết $MN = \dfrac{AB + DC}{2}$. Chứng minh tứ giác ABCD là hình thang.
2) Cho hình bình hành ABCD, trên đường chéo AC lấy một điểm I. Tia DI cắt đường thẳng AB tại M, cắt đường thẳng BC tại N.
   Chứng minh: a) $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{DM}{DN} = \dfrac{CB}{CN}$ ; b) $ID^2 = IM.IN$

## HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1:**

1) $B = \dfrac{4a^2 + 12a + 9}{2a^2 - a - 6}$

Điều kiện để biểu thức B có nghĩa là:

$2a^2 - a - 6 \neq 0 \Leftrightarrow 2a^2 - 4a + 3a - 6 \neq 0 \Leftrightarrow 2a(a - 2) + 3(a - 2) \neq 0$

$\Leftrightarrow (2a + 3)(a - 2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3 \neq 0 \\ a - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -\dfrac{3}{2} \\ a \neq 2 \end{cases}$

Ta có: $B = \dfrac{4a^2 + 12a + 9}{2a^2 - a - 6}\ \left(a \neq -\dfrac{3}{2}, a \neq 2\right) = \dfrac{(2a + 3)^2}{(2a + 3)(a - 2)} = \dfrac{2a + 3}{a - 2}$

2) Đặt $A = \dfrac{0,5a^2 + a + 2}{1 + 0,5a} : \dfrac{a^3 - 8}{a + 2} + \dfrac{2}{a(2 - a)}$

Điều kiện để biểu thức A có nghĩa là:

$\begin{cases} 1 + 0,5a \neq 0 \\ a^3 - 8 \neq 0 \\ a(2 - a) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -2 \\ (a - 2)(a^2 + 2a + 4) \neq 0 \\ a \neq 0 \text{ và } a \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow a \neq 0, a \neq 2, a \neq -2$

$(a^2 + 2a + 4 = (a + 1)^2 + 3 > 0)$

Ta có: $A = \dfrac{a^2 + 2a + 4}{a + 2} : \dfrac{(a - 2)(a^2 + 2a + 4)}{a + 2} + \dfrac{2}{a(2 - a)}\ (a \neq 0\ , a \neq \pm 2)$

$= \dfrac{(a^2 + 2a + 4)(a + 2)}{(a + 2)(a - 2)(a^2 + 2a + 4)} + \dfrac{2}{a(2 - a)}$

$= \dfrac{1}{a - 2} - \dfrac{2}{a(a - 2)} = \dfrac{a - 2}{a(a - 2)} = \dfrac{1}{a}$

**Bài 2:**

1) $(x - 2)(x + 1) < 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 < 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x > 2 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 2$

2) $x^2 + 2x + 2|x + 1| - 2 = 0$ (1)

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + 2|x + 1| - 3 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + 2|x + 1| - 3 = 0$

Đặt $t = |x + 1|$ $(t \geq 0)$.

Phương trình trên trở thành:

$t^2 + 2t - 3 \Leftrightarrow t^2 - t + 3t - 3 = 0 \Leftrightarrow t(t - 1) + 3(t - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (t - 1)(t + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t - 1 = 0 \\ t + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \text{ (nhận)} \\ t = 3 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow t = 1$

Với $t = 1 \Rightarrow |x + 1| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 = 1 \\ x + 1 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm số là $x_1 = 0$, $x_2 = -2$.

**Bài 3:** 1) $A = x^2 + 6x + 15 = x^2 + 6x + 9 + 6 = (x + 3)^2 + 6 \geq 6$

(Vì $(x + 3)^2 \geq 0$ với mọi x)

suy ra $A > 0$ với mọi x.

2) Ta có $A \geq 6$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$

Vậy A đạt giá trị nhỏ nhất bằng $6 \Leftrightarrow x = -3$

Biểu thức A không có giá trị lớn nhất.

**Bài 4:**

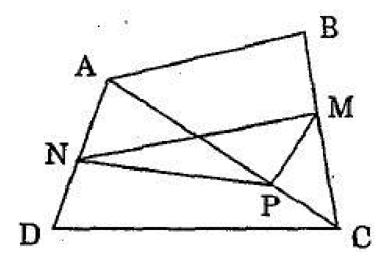
1) Gọi P là trung điểm của AC

Ta có: N là trung điểm của AD

Suy ra NP là đường trung bình của tam giác ADC.

Cho ta NP // DC và $NP = \frac{1}{2}$ DC

Chứng minh tương tự ta có MP là đường trung bình của tam giác ABC, cho ta MP//AB và $MP = \frac{1}{2}AB$.




Ta có $MP + NP = \frac{AB + DC}{2}$

mà $MN = \frac{AB + CD}{2}$ (giả thiết)

nên $MN = MP + NP$

Suy ra ba điểm M, N, P thẳng hàng.

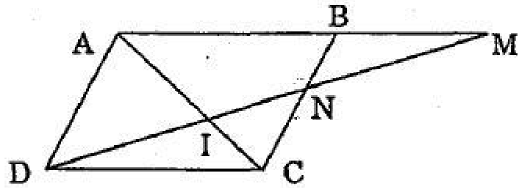
Từ NP // DC suy ra MP // DC mà MP // AB nên AB // CD

Vậy tứ giác ABCD là hình thang.

2) a/ Áp dụng hệ quả định lý Talet vào tam giác BMN với BM // DC ta có:

$\frac{MN}{ND} = \frac{BN}{NC} \Rightarrow \frac{MN + ND}{ND} = \frac{BN + NC}{NC}$ (tính chất tỉ lệ thức)

$\frac{MD}{NB} = \frac{BC}{NC}$ (1)




Áp dụng định lý Talet vào tam giác MAD

với BN // AD ta có: $\frac{AM}{AB} = \frac{DM}{DN}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AM}{AB} = \frac{DM}{DN} = \frac{CB}{CN}$

b/ Áp dụng hệ quả định lý Talet vào tam giác ADI với AD // NC

ta có: $\frac{ID}{IN} = \frac{IA}{IC}$ (1)

Áp dụng hệ quả định lý Talet vào tam giác DIC với DC // AM

ta có: $\frac{IM}{ID} = \frac{IA}{IC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{ID}{IN} = \frac{IM}{ID}$ hay $ID^2 = IM.IN$

## BỘ ĐỀ 5

### ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN 6, TPHCM – NĂM HỌC 1991 – 1992

**Bài 1:**

Cho a, b, c là số đo ba cạnh của một tam giác, chứng minh rằng:

$a^2b + b^2c + c^2a + ca^2 + bc^2 + ab^2 - a^3 - b^3 - c^3 > 0$

**Bài 2:** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $A = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2}$

**Bài 3:** Giải phương trình: $|x - 1| + |2x + 3| = |x| + 4$

**Bài 4:** Cho hình thoi ABCD có góc B tù. Kẻ BM và BN lần lượt vuông góc các cạnh AD và CD tại M và N. Biết rằng $\frac{MN}{DB} = \frac{1}{2}$

Tính các góc của hình thoi ABCD.

### HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1:** $a^2b + b^2c + c^2a + ca^2 + bc^2 + ab^2 - a^3 - b^3 - c^3 > 0$

Ta có a, b, c là số đo ba cạnh của một tam giác nên

$a + b - c > 0, b + c - a > 0, c + a - b > 0.$

$\Rightarrow c^2 (a + b - c) > 0, a^2 (b + c - a) > 0, b^2 (c + a - b) > 0$

$\Rightarrow c^2(a + b - c) + a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) > 0$
$\Rightarrow c^2a + c^2b - c^3 + a^2b + a^2c - a^3 + b^2c + b^2a - b^3 > 0$
$\Rightarrow a^2b + b^2c + c^2a + ca^2 + ac^2 + ab^2 - a^3 - c^2 - b^2 > 0$

**Bài 2:** Ta có: $A = \dfrac{x^2+2x+3}{x^2+2} = \dfrac{2x^2+4-x^2+2x-1}{x^2+2} = 2 - \dfrac{(x-1)^2}{x^2+2} \le 2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy: max $A = 2 \Leftrightarrow x = 1$

Ta có:

$$A = \frac{x^2+2x+3}{x^2+2} = \frac{2x^2+4x+6}{2(x^2+2)} =$$

$$= \frac{x^2+2+x^2+4x+4}{2(x^2+2)} = \frac{1}{2} + \frac{(x+2)^2}{2(x^2+2)} \ge \frac{1}{2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Vậy min $A = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = -2$

**Bài 3:** $|x-1| + |2x+3| = |x| + 4$ (1)

- Với $x < -\dfrac{3}{2}$ phương trình (1) trở thành

  $1 - x - 2x - 3 = -x + 4 \Leftrightarrow 2x = -6 \Leftrightarrow x = -3$ (nhận).

- Với $-\dfrac{3}{2} \le x \le 0$ phương trình (1) trở thành

  $1 - x + 2x + 3 = -x + 4 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (nhận)

- Với $0 < x \le 1$ phương trình (1) trở thành

  $1 - x + 2x + 3 = x + 4 \Leftrightarrow 0x = 0 \Leftrightarrow x$ tùy ý.

  Phương trình có vô số nghiệm đó là các giá trị x thỏa $0 < x \le 1$

- Với $x > 1$ phương trình (1) trở thành

  $1 - x + 2x + 3 = x + 4 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$ (loại).

  Kết luận: phương trình (1) có các nghiệm là: $x = -3, 0 \le x \le 1$

**Bài 4:** $\hat{B} > 90^0$ nên AC là đường chéo lớn.

Xét $\Delta BMD$ và $\Delta BND$ có: $\widehat{BMD} = \widehat{BND} = 90^0$ (giả thiết)

BD chung

$\widehat{BDM} = \widehat{BDN}$ (DB là phân giác của $\widehat{ADC}$)

Vậy $\Delta BMD = \Delta BND$ (cạnh huyền – góc nhọn)

Gọi I là trung điểm của đoạn BD. Theo tính chất trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông, ta có:

$IM = IN = IB = \dfrac{BD}{2}$

Mà $MN = \dfrac{BD}{2}$ nên $IM = IN = MN$

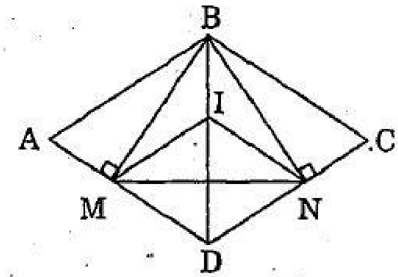
Suy ra $\Delta MIN$ đều

nên $\widehat{MIN} = 60^0$

mà IM = IN; DM = DN ($\Delta BMD = \Delta BND$)

nên ID là đường trung trực của $\Delta MIN$.

Suy ra ID là tia phân giác của $\widehat{MIN}$




Cho ta $\widehat{MID} = \dfrac{\widehat{MIN}}{2} = \dfrac{60^0}{2} = 30^0$

$\Delta MIB$ cân tại I (IM = IB) nên IMB = IBM.

Mà $\widehat{MID} = \widehat{IMB} + \widehat{IBM}$ (tính chất góc ngoài tam giác)

$\widehat{MID} = 2\widehat{IBM} \Rightarrow \widehat{IBM} = \dfrac{\widehat{MID}}{2} = \dfrac{30^0}{2} = 15^0$

Suy ra $\widehat{MDB} = 90^0 - \widehat{IBM} = 90^0 - 15^0 = 75^0$

Cho ta $\widehat{ADC} = 2\widehat{MDB} = 2.75^0 = 150^0$

Suy ra $\widehat{A} = 180^0 - \widehat{ADC} = 180^0 - 150^0 = 30^0$

Do đó $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 150^0$, $\widehat{BCD} = \widehat{BAD} = 30^0$

## BỘ ĐỀ 6

### ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI GIẢI THƯỞNG LÊ QUÝ ĐÔN QUẬN TÂN BÌNH, TPHCM – NĂM HỌC 1992 – 1993

**Bài 1:**

1) Biết a – b = 7. Tính giá trị của biểu thức sau:

$$a^2(a + 1) - b^2(b - 1) + ab - 3ab(a - b + 1)$$

2) Thực hiện phép tính bằng cách ngắn gọn nhất:

$$2\frac{7}{9}x^6 - \left(-1\frac{2}{3}x^3 - 6\right)^2$$

3) Thực hiện phép tính $\left(a + \dfrac{2}{1+0,5a}\right) : \dfrac{a^3-8}{a+2} + \dfrac{2}{2a-a^2}$

**Bài 2:** Giải phương trình: $(x - 2)(x + 2)(x^2 - 10) = 72$

**Bài 3:** Cho hình thang ABCD có độ dài hai đáy là AB = 5cm và CD = 15cm, độ dài hai đường chéo là AC = 16cm và BD = 12cm. Từ A vẽ đường thẳng song song với BD cắt CD tại E.

1) Chứng minh ACE là tam giác vuông tại A.

2) Tính diện tích hình thang ABCD.

**Bài 4:** Cho tam giác ABC, đường phân giác trong của C cắt cạnh AB tại D. Chứng minh $CD^2 < CA.CB$

**Bài 5:** Trong một bài kiểm tra toán bốn bạn An, Bảo, Cường, Đức được các điểm khác nhau từ 7 đến 10 nhưng không bạn nào nhớ chính xác điểm của mọi người. Hỏi điểm của từng bạn thì:

An trả lời: "Đức được 7, Bảo được 7, Cường được 9"
Bảo trả lời: "An được 8, Đức được 10, Cường được 8"
Cường trả lời: "An được 7, Đức được 7, Bảo được 7"
Đức trả lời: "An được 8, Cường được 8, Bảo được 8"

*Biết rằng:*

1) Không bạn nào được 2 bạn khác cùng nói đúng số điểm của mình.
2) Mỗi câu trả lời chỉ có một điểm đúng.

Hãy xem điểm của mỗi người là bao nhiêu?

## HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1:**

1) $a^2(a + 1) - b^2(b - 1) + ab - 3ab(a - b + 1)$
$= a^3 + a^2 - b^3 + b^2 + ab - 3a^2b + 3ab^2 - 3ab$
$= (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) + (a^2 - 2ab + b^2)$
$= (a - b)^3 + (a - b)^2$
$= (a - b)^2 (a - b + 1)$
$= 7^2.(7 + 1) = 49.8 = 392$

2) $2\frac{7}{9}x^6 - \left(-1\frac{2}{3}x^3 - 6\right)^2 = \frac{25}{9}x^6 - \left(-\frac{5}{3}x - 6\right)^2$

$= \left(\frac{5}{3}x^3\right)^2 - \left(-\frac{5}{3}x^3 - 6\right)^2 = -6\left(\frac{10}{3}x^3 + 6\right) = -20x^3 - 36$

3) Đặt $M = \left(a + \frac{2}{1 + 0,5a}\right) : \frac{a^3 - 8}{a + 2} + \frac{2}{2a - a^2}$

Điều kiện để biểu thức M có nghĩa là:

$$\begin{cases} 1 + 0,5a \neq 0 \\ a^3 - 8 \neq 0 \\ a + 2 \neq 0 \\ 2a - a^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -2 \\ (a - 2)(a^2 + 2a + 4) \neq 0 \\ a \neq -2 \\ a(2 - a) \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -2 \\ a \neq 2 \text{ (vì } a^2 + 2a + 4 = (a + 1)^2 + 3 > 0) \\ a \neq 0 \end{cases}$$

Ta có: $M = \left(a + \frac{4}{2 + a}\right) : \frac{(a - 2)(a^2 + 2a + 4)}{a + 2} + \frac{2}{a(2 - a)} (a \neq 0, a \neq \pm 2)$

$$= \frac{a^2 + 2a + 4}{2 + a} . \frac{a + 2}{(a - 2)(a^2 + 2a + 4)} + \frac{2}{a(2 - a)} =$$

$$= \frac{1}{a - 2} - \frac{2}{a(a - 2)} = \frac{a - 2}{a(a - 2)} = \frac{1}{a}$$

**Bài 2:** *Cách 1:*

$(x-2)(x+2)(x^2-10)=72 \Leftrightarrow (x^2-4)(x^2-10)=72$ (1)

Đặt $t=x^2$ $(t\ge 0)$ phương trình (1) trở thành $(t-4)(t-10)=72$

$\Leftrightarrow t^2-10t-4t+40=72 \Leftrightarrow t^2-14t-32=0$

$\Leftrightarrow t^2-16t+2t-32=0$

$\Leftrightarrow t(t-16)+2(t-16)=0 \Leftrightarrow (t-16)(t+2)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t-16=0 \\ t+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=16 \text{ (nhận)} \\ t=-2 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow t=16$

Với $t=16 \Rightarrow x^2=16 \Leftrightarrow x^2-16=0 \Leftrightarrow (x-4)(x+4)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-4=0 \\ x+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-4 \end{array}\right.$

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm là $x_1=4$; $x_2=-4$

*Cách 2:* $(x-2)(x+2)(x^2-10)=72$

$\Leftrightarrow (x^2-4)(x^2-10)=72 \Leftrightarrow (x^2-7+3)(x^2-7-3)=72$

$\Leftrightarrow (x^2-7)^2-3^2=72$

$\Leftrightarrow (x^2-7)^2=72+3^2 \Leftrightarrow (x^2-7)^2=9^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-7=9 \\ x^2-7=-9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=16 \\ x^2=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 4 \\ x\in \phi \end{array}\right.$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x_1=4$; $x_2=-4$.

**Bài 3:**

**1)** Ta có AB // DE (AB // DC) và AE // BD (giả thiết).

Suy ra $AB=DE=5cm$; $AE=BD=12cm$.

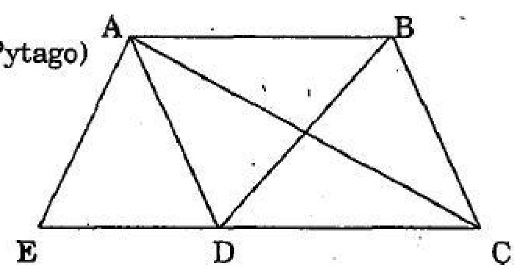
Ta có $CE=CD+DE=15+5=20cm$

$\Delta AEC$ có $AE^2+AC^2=12^2+16^2=144+256=400$

$EC^2=20^2=400$

Suy ra $AE^2+AC^2=EC^2$

Vậy $\Delta AEC$ vuông tại A (định lý đảo Pytago)




**2)** $\Delta AED$ và $\Delta ABC$ có $ED=AB$ và đường cao ứng với hai đáy ED và AB (hạ từ A xuống ED và từ C xuống AB) bằng nhau, và bằng đường cao của hình thang ABCE.

Suy ra: $S_{\Delta AED}=S_{\Delta ABC}$, $S_{\Delta AED}+S_{\Delta ADC}=S_{\Delta ABC}+S_{\Delta ADC}$, $S_{\Delta AEC}=S_{ABCD}$

Mà: $S_{\Delta AEC}=\frac{1}{2}AE.AC=\frac{1}{2}12.16=96\ (cm^2)$

Vậy $S_{ABCD}=96cm^2$.

**Bài 4:** *Cách 1:* $\widehat{BDC}>BAC$ (vì $\widehat{BDC}$ là góc ngoài của $\Delta ADC$), nên trên tia đối của tia DC có điểm E sao cho $\widehat{CAE}=\widehat{BDC}$.

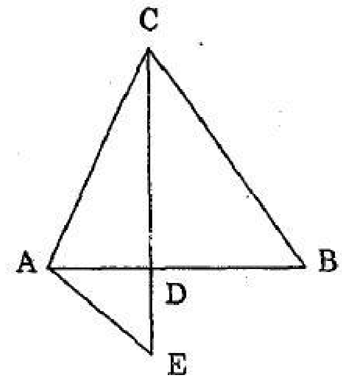
Xét hai tam giác CAE và CDB có:

$\widehat{CAE} = \widehat{BDC}$ và $\widehat{ACE} = \widehat{BCB}$ (CD là phân giác)

Vậy $\Delta CAE \backsim \Delta CDB$ (g–g)

Cho ta $\dfrac{CA}{CD} = \dfrac{CE}{CB}$ hay CD.CE = CA.CB

Do đó $CD^2 < CA.CB$ (Vì CD<CE).




*Cách 2*: $\widehat{CDB} > \widehat{CAD}$ ($\widehat{CDB}$ là góc ngoài của tam giác ADC).

Do đó tìm được điểm M trên cạnh BC sao cho $\widehat{CDM} = \widehat{CAD}$.

Ta có CM < CB (1)

Xét $\Delta ADC$ và $\Delta DMC$ có:

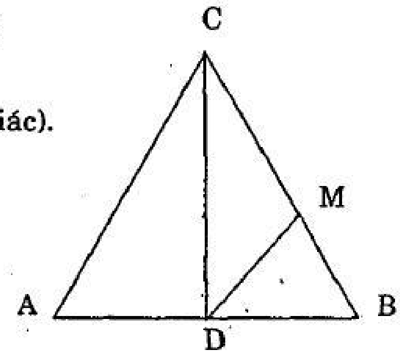
$\widehat{CAD} = \widehat{CDM}$, $\widehat{ACD} = \widehat{DCM}$ (CD là phân giác).

Do đó $\Delta ADC \backsim \Delta DMC$ (g–g)

$\Rightarrow \dfrac{CA}{CD} = \dfrac{CD}{CM}$

$\Rightarrow CD^2 = CA.CM$ (2)

Từ (1) và (2) có $CD^2 < CA.CB$




**Bài 5:**

Theo giả thiết a, không bạn nào được hai bạn khác cùng nói đúng số điểm của mình, do đó dựa theo câu trả lời của bạn An và bạn Cường thì Đức được 7 điểm, Bảo được 7 điểm là sai, lại theo giả thiết b, mỗi câu trả lời chỉ có một điểm đúng, nên ta có Cường được 9 điểm, An được 7 điểm.

Tương tự, dựa vào câu trả lời của Bảo và Đức thì An được 8 điểm và Cường được 8 điểm là sai, do đó Đức được 10 điểm, Bảo được 8 điểm là đúng.

Vậy số điểm của các bạn là:

An được 7 điểm, Bảo được 8 điểm, Cường được 9 điểm, Đức được 10 điểm.

## BỘ ĐỀ 7

### ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN 6, TPHCM – NĂM HỌC 1992 – 1993

**Bài 1:** a và b là hai số nguyên. Chứng minh:

1) Nếu a chia 13 dư 2 và b chia 13 dư 3 thì $a^2 + b^2$ chia hết cho 13.

2) $10a^2 + 5b^2 + 12ab + 4a - 6b + 13 \geq 0$

Dấu "=" xảy ra khi nào?

**Bài 2:** Ở bên ngoài của hình bình hành ABCD, vẽ hai hình vuông ABEF và ADGH. Chứng minh:

1) AC = FH và AC ⊥ FH.

2) CEG là tam giác vuông cân.

**Bài 3:** Cho đa thức $P(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24; x \in \mathbb{Z}$

1) Phân tích P(x) thành nhân tử.

2) Chứng minh rằng P(x) chia hết cho 6.

**Bài 4:** Cho $\Delta ABC$, BD và CE là hai đường cao của tam giác ABC. DF và EG là hai đường cao của tam giác ADE. Chứng minh:

1) Hai tam giác ADE và ABC đồng dạng.

2) FG // BC.

**Bài 5:**

1) Chứng minh rằng phương trình $x^4 - x^3 + x - 1 = 0$ chỉ có hai nghiệm.

2) Tùy theo giá trị của m, giải phương trình $m^2x + 1 = x + m$.

## HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1:** 1) a chia cho 13 dư 2 nên $a = 13x + 2$ ($x \in \mathbb{Z}$)

b chia cho 13 dư 3 nên $b = 13y + 3$ ($y \in \mathbb{Z}$)

Suy ra:

$a^2 + b^2 = (13x + 2)^2 + (13y + 3)^2 = 169x^2 + 52x + 4 + 169y^2 + 78y + 9$

$= 169x^2 + 52x + 169y^2 + 78y + 13 = 13(13x^2 + 4x + 13y^2 + 4y + 1) \vdots 13$

2) $10a^2 + 5b^2 + 12ab + 4a - 6b + 13$

$= 9a^2 + 12ab + 4b^2 + a^2 + 4a + 4 + b^2 - 6b + 9$

$= (3a + 2b)^2 + (a + 2)^2 + (b - 3)^2 \geq 0$

Dấu "=" xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b = 0 \\ a + 2 = 0 \\ b - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(-2) + 2.3 = 0 \text{ (đúng)} \\ a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases}$$

**Bài 2:** Xét trường hợp AC < BD

1) $\Delta AHF$ và $\Delta BCA$ có:

AH = BC (= AD)

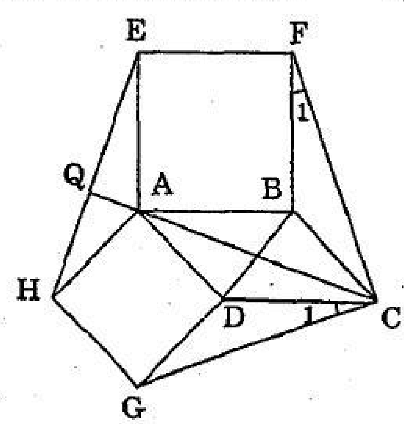
AF = AB (ABEF là hình vuông)

$\widehat{HAF} = \widehat{ABC}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc $AF \perp AB$, $AH \perp BC$).

Vậy $\Delta AHF = \Delta BCA$ (c–g–c)

Cho ta HF = CA.

Giả sử AC cắt HF tại Q.




Ta có $\widehat{FAQ} + \widehat{FAB} + \widehat{BAC} = 180^0$

mà $\widehat{FAB} = 90^0$

nên $\widehat{FAQ} + \widehat{BAC} = 90^0$

mà $\widehat{BAC} = \widehat{AFQ}$ ($\Delta BCA = \Delta AHF$)

nên $\widehat{AFQ} + \widehat{FAQ} = 90^0$

Suy ra $\widehat{FQA} = 90^0$ hay $AC \perp FH$.

2) Xét $\Delta GDC$ và $\Delta CBE$ ta có:

$BE = CD$ (= AB)

$BC = GD$ (= AD)

$\widehat{EBC} = \widehat{GDC}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc $GD \perp BC$; $CD \perp BE$)

Vậy $\Delta GDC = \Delta CBE$ (c–g–c)

Cho ta $\quad CG = CE$ và $\hat{C}_1 = \hat{E}_1$ $\quad$ (1)

Ta có: $\quad \widehat{GCE} = \widehat{DCB} - = (180^0 - \widehat{CBA}) - \hat{C}_1 - \hat{C}_2$

$= 180^0 - (\widehat{CBA} + \hat{E}_1 + \hat{C}_2)$

$= \widehat{ABE} = 90^0$ $\quad$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta GCE$ vuông cân tại C.

Xét trường hợp $AC < BD$

1) Chứng minh tương tự như trường hợp $AC < BD$ ta có $HF = CA$ và $HF \perp CA$

2) Chứng minh tương tự như trường hợp $AC < BD$ ta có $\Delta GDC = \Delta CBE$ Cho ta = và $CG = CE$ $\quad$ (1)

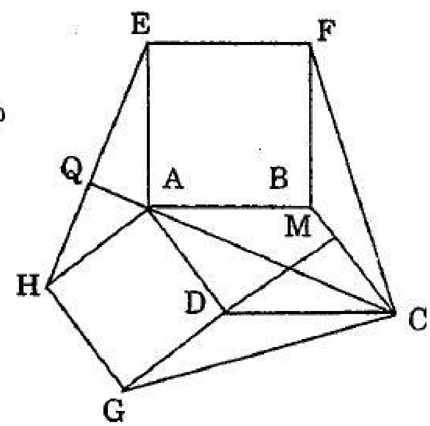
Giả sử GD cắt BC tại M suy ra $\widehat{GMC} = 90^0$

Ta có $\quad \widehat{MCG} + \hat{G}_1 = 90^0$

nên $\quad \widehat{MCG} + \hat{C}_1 = 90^0$ ($\hat{G}_1 = \hat{C}_1$)

hay $\quad ECG = 90^0$ $\quad$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tam giác GCE vuông cân tại C.




**Bài 3:**

1) $P(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$

$= x^4 - 3x^3 + 5x^3 - 15x^2 + 2x^2 - 6x - 8x + 24$

$= x^3(x - 3) + 5x^2(x - 3) + 2x(x - 3) - 8(x - 3)$

$= (x - 3)(x^3 + 5x^2 + 2x - 8) = (x - 3)(x^3 - x^2 + 6x^2 - 6x + 8x - 8)$

$= (x - 3)[x^2(x - 1) + 6x(x - 1) + 8(x - 1)]$

$= (x - 3)(x - 1)(x^2 + 6x + 8) = (x - 3)(x - 1)(x^2 + 2x + 4x + 8)$

$= (x - 3)(x - 1)[x(x + 2) + 4(x + 2)] = (x - 3)(x - 1)(x + 2)(x + 4)$

2) $P(x) = (x - 3)(x - 1)(x + 2)(x + 4) = (x - 3)(x - 1)(x + 2)(x - 2 + 6)$

$= (x - 3)(x - 2)(x - 1)(x + 2) + 6(x - 3)(x - 1)(x + 2)$

Trong ba số nguyên liên tiếp luôn có một số chia hết cho 2, một số chia hết cho 3, mà 2 và 3 là nguyên tố cùng nhau, nên tích của ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 2 và 3, tức chia hết cho 6.

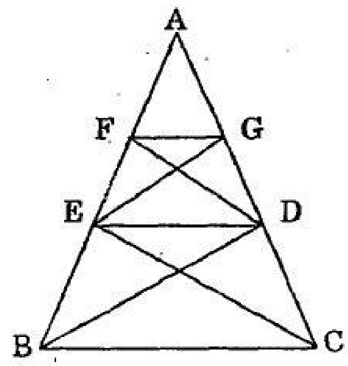
Ta có: $\quad x - 3;\ x - 2;\ x - 1$ là ba số nguyên liên tiếp.

nên $\quad (x - 3)(x - 2)(x - 1)(x + 2) \,\vdots\, 6$

mà $\quad 6(x - 3)(x - 1)(x + 2) \,\vdots\, 6$

nên $\quad P(x) = (x - 3)(x - 2)(x - 1)(x + 2) + 6(x - 3)(x + 2)(x - 1) \,\vdots\, 6$

**Bài 4:** Xét trường hợp $\Delta ABC$ có ba góc nhọn.




1) Xét $\Delta ABD$ và $\Delta ACE$, ta có $\widehat{A}$ chung.

$\widehat{ADB} = \widehat{AEC} = 90^0$ (gt)

Vậy $\Delta ABD \backsim \Delta ACE$ (g–g)

$\Delta AED$ và $\Delta ACB$ có:

$\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AD}{AB}$ ($\Delta ABD \backsim \Delta ACE$)

$\widehat{BAD}$ chung

Vậy $\Delta ADE \backsim \Delta ABC$ (c–g–c)

2) Chứng minh tương tự câu a ta có $\Delta ADE$ đồng dạng $\Delta AEG$ suy ra $\Delta AFG \backsim \Delta ABC$ cho ta $\widehat{AFG} = \widehat{ABC}$ nên FG // BC. Các trường hợp khác, chứng minh tương tự như trường hợp này.

**Bài 5:**

1) $x^4 - x^3 + x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^3(x-1) + (x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^3+1) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x^3 - x + 1) = 0$

Ta có: $x^2 - x + 1 = x^2 - x + \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$

Do đó phương trình $(x-1)(x+1)(x^2 - x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow x - 1 = 0$ hoặc $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -1$

Vậy phương trình $x^4 - x^3 + x - 1 = 0$ chỉ có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = -1$.

2) $m^2x + 1 = x + m \Leftrightarrow m^2x - x = m - 1$

$(m^2 - 1)x = m - 1 \Leftrightarrow (m-1)(m+1)x = m - 1$ (1)

- Nếu $m = 1$ phương trình (1) trở thành $0x = 0 \Leftrightarrow$ tùy ý
- Nếu $m = -1$ phương trình (1) trở thành $0x = -2 \Leftrightarrow x \in \varnothing$
- Nếu $m \neq \pm 1$ phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{1}{m+1}$

Kết luận:

– Nếu $m = 1$ phương trình đã cho có vô số nghiệm.

– Nếu $m = -1$ phương trình đã cho vô nghiệm.

– Nếu $m \neq \pm 1$ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{1}{m+1}$

## BỘ ĐỀ 8

### ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI GIẢI THƯỞNG LÊ QUÝ ĐÔN QUẬN TÂN BÌNH, TPHCM – NĂM HỌC 1993 – 1994

**Bài 1:** Cho phân thức $A = \dfrac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^3 - 3x - 2}$

1) Tìm điều kiện của x để A có nghĩa.

2) Rút gọn A.

3) Tính x để A < 1.

**Bài 2:** Tìm giá trị nhỏ nhất của phân thức $E = \dfrac{3}{-x^2 + 2x - 4}$

**Bài 3:** Giải phương trình $\left|\dfrac{1}{x(x-1)}\right| = \dfrac{1}{2}$

**Bài 4:** Cho hình bình hành ABCD với đường chéo AC > BD. Gọi E và F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ C đến các đường thẳng AB và AD; gọi G là chân đường vuông góc kẻ từ B đến AC.

1) Chứng minh tam giác CBG đồng dạng với tam giác ACF.

2) Chứng minh $AB.AE + AD.AF = AC^2$

## HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1:** $A = \dfrac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^3 - 3x - 2}$

1) Vì $x^3 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 - x - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) - 2(x + 1) = 0$

$x(x - 1)(x + 1) - 2(x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)(x^2 + x - 2x - 2) = 0$

$(x + 1)[x(x + 1) - 2(x + 1)] = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 (x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Vậy biểu thức A có nghĩa khi $x \neq -1$ và $x \neq 2$

2) Ta có $x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 = (x - 1)^2 (x + 1)^2$

Vậy $A = \dfrac{(x-1)^2(x+1)^2}{(x+1)^2(x-2)} \quad \dfrac{(x-1)^2}{x-2}$ $(x \neq -1; x \neq 2)$

3) $A < 1 \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)^2}{x-2} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-2x+1}{x-2} - 1 < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 2x + 1 - x + 2}{x-2} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x-2} < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 3x + \frac{9}{4} + \frac{3}{4}}{x-2} < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}{x-2} < 0 \Leftrightarrow x - 2 < 0$ (vì $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$)

$\Leftrightarrow x < 2$

Phối hợp với điều kiện $x \neq -1$ và $x \neq 2$, ta được $x < 2$ và $x \neq -1$

Vậy với $x < 2$ và $x \neq -1$ thì $A < 1$.

**Bài 2:** $E = \dfrac{3}{-x^2 + 2x - 4} = \dfrac{-3}{x^2 - 2x + 4}$

Ta có $x^2 - 2x + 4 = (x^2 - 2x + 1) + 3 = (x - 1)^2 + 3 \geq 3$

Do đó $\dfrac{3}{(x-1)^2 + 3} \leq \dfrac{3}{3} \Leftrightarrow \dfrac{-3}{(x-1)^2 + 3} \geq -1$

Vậy $E \geq -1$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của E là $-1 \Leftrightarrow x = 1$

**Bài 3:** $\left|\dfrac{1}{x(x-1)}\right| = \dfrac{1}{2}$ (1)

Điều kiện $x \neq 0, x \neq 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x(x-1)} = \dfrac{1}{2}$ (a)

hoặc $\dfrac{1}{x(x-1)} = -\dfrac{1}{2}$ (b)

Giải phương trình (a): $\dfrac{1}{x(x-1)} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x(x - 1) = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x(x + 1) - 2(x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Giải phương trình (b): $\dfrac{1}{x(x-1)} = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x(x - 1) = -2 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x + \dfrac{1}{4} + \dfrac{7}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{4} = 0$

Phương trình vô nghiệm.

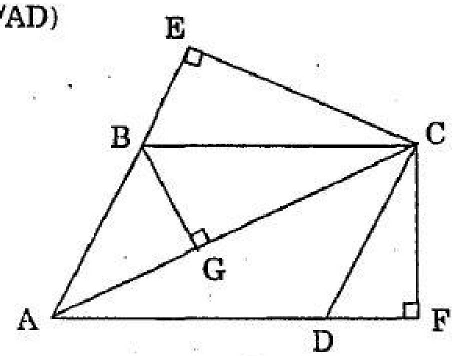
Trả lời: Phương trình (1) có nghiệm $x = -1$ hay $x = 2$.

**Bài 4:**

1) $\Delta CBG$ và ACF có: $\widehat{CGB} = \widehat{CFA} = 90^0$

$\widehat{BCG} = \widehat{CAF}$ (hai góc so le trong và BC//AD)

Vậy $\Delta CBG \backsim \Delta ACF$ (g–g)




2) $\Delta ABG$ và ACF có:

*Cách 1:* $\widehat{BAG}$ chung

$\widehat{AGB} = \widehat{AFC} = 90^0$

Vậy $\Delta ABG \backsim \Delta ACE$ (g–g)

Suy ra $\dfrac{AG}{AE} = \dfrac{AB}{AC}$ hay

$AG.AC = AB.AE$ (1)

Từ $\Delta CBG \backsim \Delta ACF$ suy ra $\dfrac{CG}{AF} = \dfrac{CB}{AC}$

hay CG.AC = CB.AF

hay CG.AC = AD.AF (2) (vì CB = AD) (2)

Cộng vế theo vế (1) và (2) ta có:

$$AG.AC + CG.AC = AB.AE + AD.AF$$
$$AC.(AG + CG) = AB.AE + AD.AF$$
$$AC^2 = AB.AE + AD.AF$$

*Cách 2:* Xem cách giải bài 2 ở đề 1 (Đề thi HSG Quận 6, TPHCM – năm học 1990 – 1991.

### MỘT SỐ BÀI TẬP TƯƠNG TỰ BÀI 4

1) Cho $\Delta ABC$ có ba góc nhọn, hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Chứng minh rằng $BH.BD + CH.CE = BC^2$

2) Cho $\Delta ABC$, vẽ phân giác trong AD. Chứng minh rằng $AD^2 = AB.AC + DB.DC$.

3) Cho $\Delta ABC$, BC = a, CA = b, AB = c. Chứng minh rằng $\widehat{A} = 2\widehat{B} \Leftrightarrow a^2 = b^2 + bc$.

4) Cho $\Delta ABC$. Biết rằng đường phân giác ngoài của góc $\widehat{A}$ cắt cạnh BC kéo dài tại E. Chứng minh rằng $AE^2 = EB.EC + AB.AC$.

## BỘ ĐỀ 9

### ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN 6, TPHCM – NĂM HỌC 1993 – 1994

**Bài 1:** Cho đa thức $P(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 9x + 6$

1) Trong trường hợp x là một số nguyên dương. Chứng minh rằng $P(x) \vdots 6$

2) Giải phương trình $P(x) = 0$.

**Bài 2:** Cho tứ giác ABCD có chu vi là 2p và M là một điểm ở trong tứ giác. Chứng minh:

1) $p < AC + BD < 2p$ 2) $p < MA + MB + MC + MD < 3p$.

**Bài 3:** Cho $a + b + c = 1$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

1) Nếu $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, chứng minh rằng $xy + yz + zc = 0$.

2) Nếu $a^3 + b^3 + c^3 = 1$. Tìm giá trị của a, b, c.

**Bài 4:** Cho $\Delta ABC$ (AB < AC). Hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H.

1) So sánh hai góc $\widehat{BAH}$ và $\widehat{CAH}$.

2) So sánh hai đoạn thẳng BD và CE.

3) Chứng minh hai tam giác ADE và ABC đồng dạng.

**Bài 5:** Giải phương trình:

1) $\frac{x-a}{bc} + \frac{x-b}{ca} + \frac{x-c}{ab} = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$

2) $|x + 1| - 2|x - 1| = x$

## HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1:**

1) $P(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 9x + 6 = x^4 - x^3 - 2x^3 + 2x^2 + 3x^2 - 3x - 6x + 6$

$= x^3(x-1) - 2x^2(x-1) + 3x(x-1) - 6(x-1)$

$= (x-1)(x^3 - 2x^2 + 3x - 6) = (x-1)[x^2(x-2) + 3(x-2)]$

$= (x-1)(x-2)(x^2+3) = x^2(x-1)(x-2) + 3(x-1)(x-2)$

Trong ba số nguyên liên tiếp luôn có một số chia hết cho 2, một số chia hết cho 3, mà 2 và 3 là nguyên tố cùng nhau, nên tích của ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 2, 3 tức chia hết cho 6.

$x$, $x-1$, $x-2$ là ba số nguyên liên tiếp nên $x(x-1)(x-2) \vdots 6$ và $3(x-1)(x-2) \vdots 6$

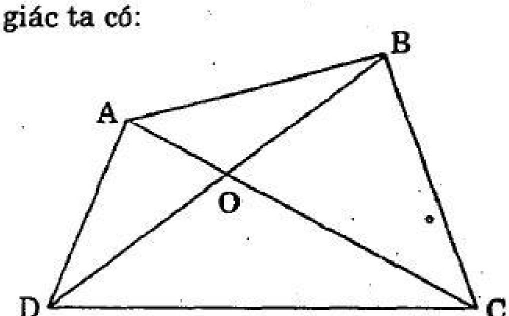
Suy ra $P(x) = x^2(x-1)(x-2) + 3(x-1)(x-2) \vdots 6$

2) $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x^2+3) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{array}\right.$ (vì $x^2 + 3 > 0$) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

**Bài 2:**

1) Áp dụng bất đẳng thức trong tam giác ta có:




$AB < OA + OB$ (xét $\Delta OAB$)

$BC < OB + OC$ (xét $\Delta OBC$)

$CD < OC + OD$ (xét $\Delta OCD$)

$DA < OD + OA$ (xét $\Delta ODA$)

Do đó $AB + BC + CD + DA < 2(OA + OB + OC + OD)$

$\Rightarrow 2p < 2(AC + BD)$

$\Rightarrow p < AC + BD$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức trong tam giác ta có:

$BD < AB + AD$; $BD < BC + CD$; $AC < AB + BC$; $AC < AD + CD$

$\Rightarrow 2(AC + BD) < 2(AB + BC + CD + DA)$

$\Rightarrow AC + BD < 2p$ (2)

2) Giả sử DM cắt BC tại N.

Ta có $MC < MN + NC$ (bất đẳng thức tam giác)

Suy ra $MD + MC < MD + MN + NC$ hay $MD + MC < DN + NC$

Mà $DN < DA + AB + BN$ nên $DN + NC < DA + AB + BN + NC$

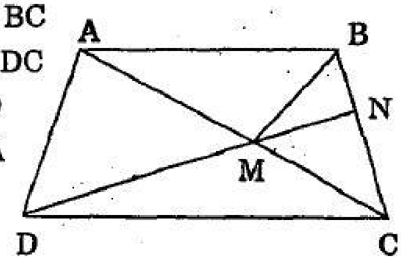
nên $MD + MC < DN + NC < DA + AB + BC$

Do đó ta có $DC < MD + MC < DA + AB + BC$

$BC < MB + MC < BA + AD + DC$

$AC < MC + MA < AB + BC + CD$

$AB < MA + MB < AC + CD + DA$




Suy ra: $DC + BC + AC + AB < 2(MA + MB + MC + MD)$

$< 3(AB + BC + CD + DA)$

hay $2p < 2(MA + MB + MC + MD) < 6p$

Vậy $p < MA + MB + MC + MD < 3p$

**Bài 3:**

1) Ta có $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x+y+z}{a+b+c} = x + y + z$ (vì $a + b + c = 1$)

Do đó: $(x + y + z)^2 = \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2} = x^2 + y^2 + z^2$

(vì $a^2 + b^2 + c^2 = 1$)

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = x^2 + y^2 + z^2$

$\Rightarrow 2xy + 2yz + 2zx = 0$

$\Rightarrow xy + yz + zx = 0$

2) *Cách 1:*

Từ $a + b + c = 1 \Rightarrow (a + b + c)^2 = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = 1$

$\Rightarrow 1 + 2ab + 2bc + 2ca = 1 \Rightarrow 2ab + 2bc + 2ca = 0$

$\Rightarrow ab + bc + ca = 0$ (1)

Ta có: $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) = 1$

$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 ab^2 + ac^2 + ba^2 + bc^2 + ca^2 + cb^2 = 1$

$\Rightarrow 1 + ab^2 + ac^2 + ba^2 + bc^2 + ca^2 + cb^2 = 1$

$\Rightarrow ab^2 + ba^2 + ac^2 + ca^2 + bc^2 + cb^2 = 0$

$\Rightarrow ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) = 0.$

$\Rightarrow ab(1 - c) + bc(1 - a) + ca(1 - b) = 0$ (vì $a + b + c = 1$)

$\Rightarrow ab - abc + bc - abc + ca - abc = 0$

$\Rightarrow ab + bc + ca - 3abc = 0 \Rightarrow 3abc = 0 \Rightarrow abc = 0$

Vậy ít nhất một trong ba thừa số a, b, c bằng 0, giả sử $a = 0$.

Thay $a = 0$ vào (1) ta có $bc = 0$

Vậy ít nhất một trong hai thừa số b, c bằng 0, giả sử $b = 0$

Vì $a + b + c = 1$ mà $a = b = 0$ nên ta có $c = 1$.

Vậy $a = b = 0, c = 1$.

Lý luận tương tự ta được $a = c = 0, b = 1, b = c = 0, a = 1$

*Cách 2:* Áp dụng hằng đẳng thức $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

Ta có: $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$

$= (a + b)^3 + c^3 + 3(a + b)c(a + b + c) - a^3 - b^3 - c^3$

$= a^3 + b^3 + 3ab(a + b) + 3(a + b)c(a + b + c) - a^3 - b^3$

$= 3(a + b)(ab + ac + bc + c^2) = 3(a + b)[a(b + c) + c(b + c)]$

$= 3(a + b)(b + c)(a + c)$

Vậy: $(a + b + c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3) = 3(a + b)(b + c)(a + c)$

Do $a + b + c = 1$ và $a^3 + b^3 + c^3 = 1$

nên $3(a + b)(b + c)(a + c) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a + b = 0 \\ b + c = 0 \\ a + c = 0 \end{array}\right.$

Xét $a + b = 0 \Rightarrow c = 1$

mà $a^2 + b^2 + c^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

Lý luận tương tự $b + c = 0$ thì $a = 1; b = c = 0$

$a + c = 0$ thì $b = 1; a = c = 0$

Kết luận: Các bộ giá trị (a,b,c) cần tìm là (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0).

**Bài 4:**

1) $\Delta ABC$ có $AB < AC \Rightarrow \widehat{ACB} < \widehat{ABC}$

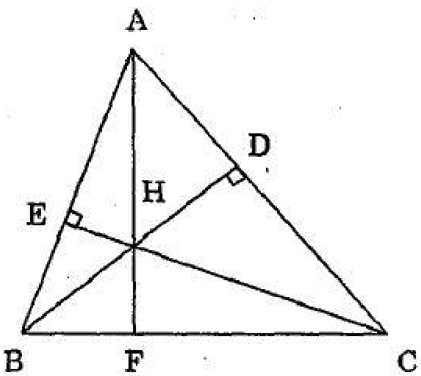
Vì H là giao điểm của hai đường cao BD và CE của $\Delta ABC$.

nên H là trực tâm của $\Delta ABC \Rightarrow AH \perp BC$.

Gọi **F** là giao điểm của AH và BC, $AH \perp BC$ tại **F**.

Suy ra: $\widehat{BAH} + \widehat{ABC} = 90^0$, $\widehat{CAH} + \widehat{ACB} = 90^0$

Mà $\widehat{ACB} < \widehat{ABC}$ nên $\widehat{BAH} < \widehat{CAH}$




2) $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}$ AC.BD $= \dfrac{1}{2}$ AB.CE mà

AC > AB nên BD < CE

3) Xét hai tam giác ABD và ACE ta có:

$\widehat{ADB} = \widehat{AEC} = 90^0$, $\widehat{BAD}$ chung

Do đó $\Delta ABD \backsim \Delta ACE$ (g–g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$hhh

Xét hai tam giác ADE và ABC ta có:

$\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$, $\widehat{DAE}$ (chung)

Vậy $\Delta ADE \backsim \Delta ABC$ (c–g–c)

**Bài 5:**

1) *Cách 1:* $\dfrac{x-a}{bc} + \dfrac{x-b}{ac} + \dfrac{x-c}{ab} = 2\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)$ $(a, b, c \neq 0)$

$$\Leftrightarrow \frac{ax - a^2 + bx - b^2 + cx - c^2}{abc} = \frac{2ab + 2bc + 2ca}{abc}$$

$$\Leftrightarrow (a + b + c)x = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc + 2ca + 2ab$$

$$\Leftrightarrow (a + b + c)x = (a + b + c)^2$$

Nếu $a + b + c \neq 0$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = a + b + c$

Nếu $a + b + c = 0$ phương trình có dạng $0x = 0 \Leftrightarrow x$ tùy ý.

*Cách 2:* $\dfrac{x-a}{bc} + \dfrac{x-b}{ca} + \dfrac{x-c}{ab} = 2\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-a}{bc} - \frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{x-b}{ca} - \frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) + \left(\frac{x-c}{ab} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-a-b-c}{bc} + \frac{x-b-a-c}{ca} + \frac{x-c-b-a}{ab} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-a-b-c)\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-a-b-c)(a+b+c)=0$$

Nếu $a+b+c\neq 0$ ta có $x-a-b-c=0 \Leftrightarrow x=a+b+c$

Nếu $a+b+c=0$ ta có $0x=0 \Leftrightarrow x$ tùy ý.

Từ lời giải bài toán này cho ta lời giải các bài toán sau:

Giải phương trình sau:

a/ $\dfrac{x-a}{b+c}+\dfrac{x-b}{c+a}+\dfrac{x-c}{a+b}=3$

b/ $\dfrac{x-ab}{a+b}+\dfrac{x-bc}{b+c}+\dfrac{x-ca}{c+a}=a+b+c$

c/ $\dfrac{a+b-x}{c}+\dfrac{b+c-x}{a}+\dfrac{c+a-x}{b}+\dfrac{4x}{a+b+c}=1$

2) $|x+1|-2|x-1|=x$ (1)

– Nếu $x<-1$ phương trình (1) trở thành $-x-1+2x-2=x$

$\Leftrightarrow 0x=3 \Leftrightarrow x\in\varnothing$

– Nếu $-1\leq x\leq 1$ phương trình (1) trở thành $x+1+2x-2=x$

$\Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ (nhận)

– Nếu $x>1$ phương trình (1) trở thành $x+1-2x+2=x$

$\Leftrightarrow 2x=3 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$ (nhận)

Kết luận: Vậy phương trình có nghiệm số là $x_1=\dfrac{1}{2}$; $x_2=\dfrac{3}{2}$

## BỘ ĐỀ 10

### ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI GIẢI THƯỞNG LÊ QUÝ ĐÔN QUẬN TÂN BÌNH, TPHCM – NĂM HỌC 1994 – 1995

**Bài 1:** Giải phương trình: $x^4+2x^3-4x^2-5x-6=0$

**Bài 2:** Thực hiện phép tính: $A=\dfrac{x^2+y^2-xy}{x^2-y^2}:\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2-2xy}$

**Bài 3:** Chứng tỏ bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x:

$$\frac{-4}{x^2-2x+2}-5<0$$

**Bài 4:** Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=\dfrac{x^2-4x+1}{x^2}$

**Bài 5:** Cho tam giác ABC vuông tại A (AC > AB), đường cao AH. Trong nửa mặt phẳng bờ AH có chứa C vẽ hình vuông AHKE.

1) Chứng minh $\widehat{B} > 45^0$.

2) Gọi P là giao điểm của AC và KE. Chứng minh tam giác ABP vuông cân.

3) Gọi Q là đỉnh thứ tư của hình bình hành APQB, gọi I là giao điểm của BP và AQ. Chứng minh H, I, E thẳng hàng.

4) Chứng minh HE // QK.

## HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1:** $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x^4 - 2x^3 + 4x^3 - 8x^2 + 4x^2 - 8x + 3x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x^3(x-2) + 4x^2(x-2) + 4x(x-2) + 3(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^3 + 4x^2 + 4x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^3 + 3x^2 + x^2 + 3x + x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)[x^2(x+3) + x(x+3) + (x+3)] = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+3)(x^2 + x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ x + 3 = 0 \\ x^2 + x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -3 \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 3 \\ x \in \phi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -3 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm số là $x_1 = 2$ và $x_2 = -3$.

**Bài 2:** $A = \dfrac{x^2 + y^2 - xy}{x^2 - y^2} : \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2 - 2xy}$.

Điều kiện để biểu thức A có nghĩa là:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 \neq 0 \\ x^3 + y^3 \neq 0 \\ x^2 + y^2 - 2xy \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)(x + y) \neq 0 \\ (x + y)(x^2 - xy + y^2) \neq 0 \\ (x - y)^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y \neq 0 \\ x + y \neq 0 \\ x^2 + y^2 - xy \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq y \\ x \neq -y \end{cases}$$

$$A = \frac{x^2 + y^2 - xy}{x^2 - y^2} : \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2 - 2xy} \quad (x \neq \pm y)$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - xy}{(x-y)(x+y)} : \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{(x^2 - xy + y^2)(x - y)^2}{(x-y)(x+y)^2(x^2 - xy + y^2)} = \frac{x - y}{(x+y)^2}$$

**Bài 3:** Ta có $x^2 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 1 + 1 = (x-1)^2 + 1 > 0$ với mọi x

Do đó $\dfrac{-4}{x^2-2x+2} = \dfrac{-4}{(x-1)^2+1} < 0$ với mọi x

Suy ra $\dfrac{-4}{x^2-2x+2} - 5 < 0$ với mọi x

**Bài 4:** Ta có:

$$A = \frac{x^2-4x+1}{x^2} = 1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = -3 + 4 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = -3 + \left(2 - \frac{1}{x}\right)^2 \geq -3$$

Dấu "=" xảy ra khi $2 - \dfrac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

Vậy biểu thức A đạt giá trị nhỏ nhất bằng $-3 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

**Bài 5:** 1) $\Delta ABC$ có $AC > AB$ (giả thiết)

$\Rightarrow \hat{B} > \hat{C}$ (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác)

$\Rightarrow 2\hat{B} > \hat{C} + \hat{B} \Rightarrow 2\hat{B} > 90^0 \Rightarrow \hat{B} = 45^0$

2) $\Delta ABH$ và $\Delta APE$ có $AHB = \widehat{AEP} = 90^0$; $\widehat{BAH} = \widehat{PAE}$

(góc có cạnh tương ứng vuông góc $AB \perp AP$, $AH \perp AE$), $AH = AE$

(AHKE là hình vuông).

Vậy $\Delta ABH = \Delta APE$ (g–c–g)

Suy ra $AB = AP$, mà $\Delta ABP$ có $\widehat{BAP} = 90^0$ nên $\Delta ABP$ vuông cân tại A.

3) Ta có $IB = IP$ (I là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành APQB).

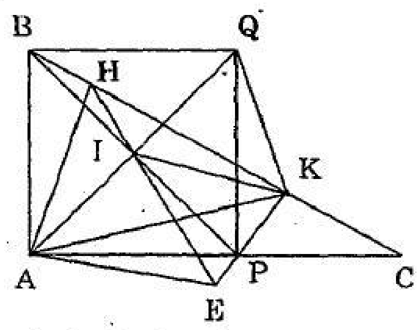
Xét các tam giác vuông ABP và BKP ta có:

$IA = IK = \dfrac{1}{2}BP$ (tính chất trung tuyến ứng với cạnh huyền)

Mà $HA = HK$, $EA = EK$ (vì tứ giác AHKE là hình vuông)

Suy ra ba điểm H, I, E nằm trên đường trung trực của đoạn AK.

Do đó ba điểm H, I, E thẳng hàng.




4) Hình bình hành APQB có $\widehat{BAP} = 90^0$ nên là hình chữ nhật nên $AQ = BP$ (tính chất đường chéo hình chữ nhật).

mà $KI = \dfrac{1}{2}BP$ (cmt)

nên $KI = \dfrac{1}{2}AQ$ mà KI là trung tuyến của $\Delta AKQ$.

Suy ra $\Delta AKQ$ vuông tại K. Hay $AK \perp KQ$

Ta lại có: $IE \perp AK$ (IE là đường trung trực của đoạn AK)

Do đó $IE \parallel KQ$ hay $HE \parallel KQ$.

## BỘ ĐỀ 11

### ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN 3, TPHCM – NĂM HỌC 1994 – 1995

**Bài 1:** Chứng minh rằng biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

$$\frac{(x^2+a)(1+a)+a^2x^2+1}{(x^2-a)(1-a)+a^2x^2+1}$$

**Bài 2:** Giải các phương trình sau:

1) $\dfrac{1+8x}{4+8x}-\dfrac{4x}{12x-6}+\dfrac{32x^2}{3(4-16x^2)}=0$

2) $x^3+12=3x^2+4x$

**Bài 3:** Cho ba phân thức:

$$A=\frac{4xy-z^2}{xy+2z^2},\quad B=\frac{4yz-x^2}{yz+2x^2},\quad C=\frac{4zx-y^2}{zx+2y^2}$$

(Với $x \neq y$, $y \neq z$, $z \neq x$)

Chứng minh rằng nếu $x + y + z = 0$ thì $A . B . C = 1$

**Bài 4:** Cho hình thang ABCD có đáy lớn là CD. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt đường chéo BD tại M và cắt CD tại I. Qua B kẻ đường thẳng song song với AD cắt cạnh CD ở K. Qua K kẻ đường thẳng song song với BD cắt BC ở P. Chứng minh: MP // DC.

**Bài 5:** Cho tam giác ABC. Gọi O là một điểm thuộc miền trong của tam giác. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng OB, OC, AC, AB.

1) Chứng minh tứ giác MNPQ là hình bình hành.

2) Để tứ giác MNPQ là hình chữ nhật thì điểm O nằm trên đường đặc biệt nào của tam giác ABC? Giải thích vì sao?

### HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1:** $\dfrac{(x^2+a)(1+a)+a^2x^2+1}{(x^2-a)(1-a)+a^2x^2+1}=\dfrac{x^2+x^2a+a+a^2+a^2x^2+1}{x^2-x^2a-a+a^2+a^2x^2+1}$

$$=\frac{x^2+x^2a+a^2x^2+a^2+a+1}{x^2-x^2a+a^2x^2+a^2-a+1}=\frac{x^2(1+a+a^2)+(1+a+a^2)}{x^2(1-a+a^2)+(1-a+a^2)}$$

$$=\frac{(x^2+1)(1+a+a^2)}{(x^2+1)(1-a+a^2)}=\frac{1+a+a^2}{1-a+a^2}\ \text{(vì } x^2+1>0 \text{ với mọi x)}$$

Vậy biểu thức không phụ thuộc vào x.

**Bài 2: 1)** $\dfrac{1+8x}{4+8x}-\dfrac{4x}{12x-6}+\dfrac{32x^2}{3(4-16x^2)}=0$ (1)

$4 + 8x = 4(1 + 2x)$

$12x - 6 = 6(2x - 1)$

$$3(4 - 16x^2) = 12(1 - 4x^2) = 12(1 - 2x)(1 + 2x)$$
$$MTC = 12(1 - 2x)(1 + 2x)$$

Điều kiện để phương trình có nghĩa là $x \neq \pm\dfrac{1}{2}$

Với điều kiện trên phương trình (1) tương đương với

$$\frac{1+8x}{4(1+2x)} - \frac{4x}{6(2x-1)} + \frac{32x^2}{12(1-2x)(1+2x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(1-2x)(1+8x) + 2(1+2x)4x + 36x^2}{12(1-2x)(1+2x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(1 + 6x - 16x^2) + 8x(1 + 2x) + 32x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 + 18x - 48x^2 + 8x + 16x^2 + 32x^2 = 0 \Leftrightarrow 26x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{26} \text{ (nhận)}$$

Vậy phương trình (1) có một nghiệm số là $x = -\dfrac{3}{26}$

2) $x^3 + 12 = 3x^2 + 4x$ (1)

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 5x^2 - 10x + 6x + 12 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2(x + 2) - 5x(x + 2) + 6(x + 2) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x + 2)(x^2 - 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x^2 - 2x - 3x + 6) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x + 2)[x(x - 2) - 3(x - 2)] = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 2)(x - 3) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 2 = 0 \\ x - 2 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình (1) có ba nghiệm số là $x_1 = -2$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$.

**Bài 3:** *Cách 1:* Ta chứng minh bài toán sau:

Nếu $x + y + z = 0$ thì $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

Thật vậy ta có $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y)^3 - 3xy(x + y) + z^3 - 3xyz$

$$= (x + y + z)[(x + y)^2 - z(x + y) + z^2] - 3xy(x + y + z)$$
$$= (x + y + z)(x^2 + 2xy + y^2 - xz - yz + z^2 - 3xy)$$
$$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - zy)$$

Nếu $x + y + z = 0$ thì $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0 \Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

Đặt $A.B.C = \dfrac{M}{N}$

Xét tích các tử thức của các phân thức A, B, C ta có:

$$M = (4xy - z^2)(4yz - x^2)(4zx - y^2) = (16x^2y^2z^2 - 4x^3y - 4yz^3 + z^2x)(4zx - y^2)$$
$$= 64x^2y^2z^2 - 16xy^4z - 16x^4yz + 4x^3y^3 - 16xyz^4 + 4y^3z^3 + 4x^3z^3 - x^2y^2z^2$$
$$= 63x^2y^2z^2 - 16xyz(x^3 + y^3 + z^3) + 4(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3)$$
$$= 63x^2y^2z^2 - 16xyz.3xyz + 4(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3)$$
$$= 63x^2y^2z^2 - 48x^2y^2z^2 + 4(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3)$$

Vậy $M = 15x^2y^2z^2 + 4(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3)$ (1)

Xét tích các mẫu thức của các phân thức A, B, C ta có:

$N = (xy + 2z^2)(yz + 2x^2)(zx + 2y^2)$

$= xy^2z + 2x^3y + 2yz^3 + 4x^2z^2)(zx + 2y^2)$

$= x^2y^2z^2 + 2xy^4z + 2x^4yz + 4x^3y^3 + 2xyz^4 + 4y^3z^3 + 4x^3z^3 + 8x^2y^2z^2$

$= 9x^2y^2z^2 + 2xyz(x^3 + y^3 + z^3) + 4(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3)$

$= 9x^2y^2z^2 + 2xyz.3xyz + 4(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3)$ (2)

So sánh (1) và (2) ta có M = N.

Vậy $A.B.C = \dfrac{M}{N} = 1$

*Cách 2:* $x + y + z = 0 \Rightarrow z = -(x + y)$

Do đó $4xy - z^2 = 4xy - (x + y)^2$

$= 4xy - x^2 - 2xy - y^2 = -(x^2 - 2xy + y^2) = (x - y)^2$

Tương tự $4yz - x^2 = -(y - z)^2$, $4zx - y^2 = -(z - x)^2$

Mặt khác: $xy + 2z^2 = z^2 + xy + z^2$

$z[-(x + y)] + xy + z^2 = -xz - yz + xy + z^2$

$= (-xz + z^2) + (-yz + xy) = -z(x - z) + y(x - z) = (x - z)(y - z)$

$yz + 2x^2 = (y - x)(z - x)$

$zx + 2y^2 = (z - y)(x - y)$

Vậy $A.B.C = \dfrac{-(x - y)^2}{(x - z)(y - z)}.\dfrac{-(x - y)^2}{(y - x)(z - x)}.\dfrac{-(z - x)^2}{(z - y)(x - y)}$

$= \dfrac{-(x - y)^2.(y - z)^2.(z - x)^2}{-(z - x)(y - z)(x - y)(z - x)(y - z)(x - y)} = 1$

**Bài 4:**

Tứ giác ABCD có AB // DK; BK // AD nên là hình bình hành, suy ra DK = AB (1)

Tứ giác ABCI có AB//CI, AI//BC nên là hình bình hành, suy ra

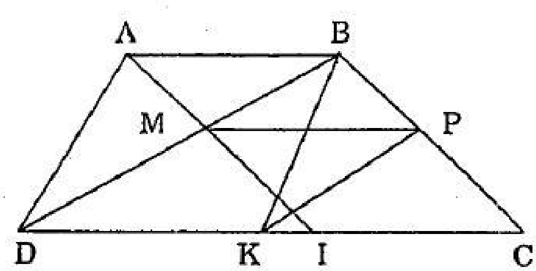
CI = AB (2)

Từ (1) và (2) ta có DK = CI.

Suy ra DK + KI = CI + KI hay DI = KC (3)

Áp dụng định lý Talet vào tam giác ABM với AB // DI, ta có:

$\dfrac{BM}{MD} = \dfrac{AB}{DI}$ (4)




Áp dụng định lý Talet vào tam giác CBD với KP // BD, ta có:

$\dfrac{BP}{PC} = \dfrac{DK}{KC}$ hay $\dfrac{BP}{PC} = \dfrac{AB}{KC}$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\dfrac{BM}{MD} = \dfrac{BP}{PC}$

cho ta MP // DC (Định lý Talet đảo)

**Bài 5:**

1) Tam giác BOC có: M là trung điểm của đoạn OB, N là trung điểm của đoạn OC.

Suy ra MN là đường trung bình của tam giác BOC.

Cho ta MN // BC và $MN = \frac{1}{2}$ BC (1)

Chứng minh tương tự ta có PQ là đường trung bình của tam giác ABC.

Cho ta PQ // BC và $PQ = \frac{1}{2}$ BC (2)

Từ (1) và (2) suy ra MN // PQ và MN = PQ. Vậy tứ giác MNPQ là hình bình hành.

2) Chứng minh tương tự câu 1) ta có QM // AO

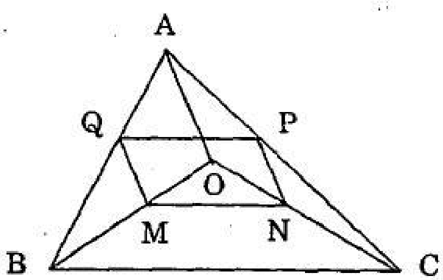
Hình bình hành MNPQ là hình chữ nhật, suy ra $QM \perp MN$, nhưng QM//AO; PQ//BC suy ra AO//BC

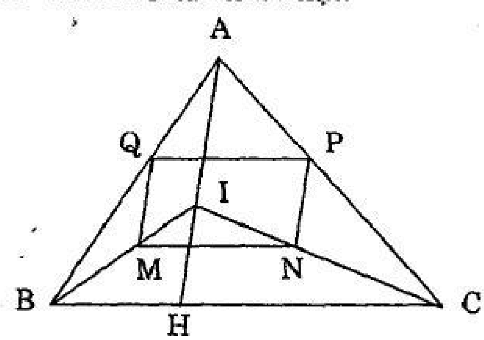
Suy ra điểm O nằm trên đường cao AH của tam giác ABC.

Ngược lại, nếu điểm O nằm trên đường cao AH của tam giác ABC, ta có $AH \perp BC$, mà QM//AH, MN//BC.

Suy ra $QM \perp MN$ hay $\widehat{QMN} = 90^0$

Hình bình hành MNPQ có: $\widehat{QMN} = 90^0$ nên là hình chữ nhật.




## BỘ ĐỀ 12

### ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN 6, TPHCM – NĂM HỌC 1994 – 1995

**Bài 1:**

1) Phân tích đa thức thành nhân tử $P(x) = 6x^3 + 13x^2 + 4x - 3$

2) Với giá trị nào của x thì biểu thức $A = (x - 1)(x + 2)(x + 3)(x + 6)$ đạt giá trị nhỏ nhất?

**Bài 2:**

1) Cho $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

2) Giải phương trình $(4x + 3)^3 + (5 - 7x)^3 + (3x - 8)^3 = 0$

**Bài 3:** Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

1) Chứng minh bất đẳng thức: $ab + bc + ca \le a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$

2) Chứng minh rằng nếu $(a + b + c)^2 = 3(ab + bc + ca)$ thì tam giác đó là tam giác đều.

**Bài 4:** Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh BC lấy một điểm M tùy ý. Đường thẳng vuông góc với AM tại M cắt CD tại E và AB tại F.
Chứng minh: AM = EF.

**Bài 5:** Trong tam giác ABC kẻ trung tuyến AM, K là một điểm trên AM sao cho $\frac{AK}{AM} = \frac{1}{3}$, BK cắt AC tại N.

1) Tính diện tích tam giác AKN. Biết diện tích tam giác ABC là S.

2) Một đường thẳng qua K cắt các cạnh AB và AC lần lượt tại I và J. Chứng minh: $\frac{AB}{AI} + \frac{AC}{AJ} = 6$.

## HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1:**

1) $P(x) = 6x^3 + 13x^2 + 4x - 3 = 6x^3 + 7x^2 + 7x - 3x - 3$
$= 6x^2(x + 1) + 7x(x + 1) - 3(x + 1) = (x + 1)(6x^2 + 7x - 3)$
$= (x + 1)(6x^2 + 9x - 2x - 3) = (x + 1)[3x(2x + 3) - (2x + 3)]$
$= (x + 1)(2x + 3)(3x - 1)$

2) $A = (x - 1)(x + 2)(x + 3)(x + 6) = (x - 1)(x + 6)(x + 2)(x + 3)$
$= (x^2 + 5x - 6)(x^2 + 5x + 6) = (x^2 + 5x)^2 - 36 \geq -36$

Dấu "=" xảy ra $\Rightarrow x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(x + 5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -5 \end{array}\right.$

Vậy min $A = -36 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -5$

**Bài 2:**

1) $a^3 + b^3 + c^3 = (a^3 + b^3) + c^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3$
$= (a + b + c)[(a + b)^2 - c(a + b) + c^2] - 3ab(a + b)$
$= -3ab(a + b)$ (vì $a + b + c = 0$)
$= -3ab(-c)$ (vì $-c = a + b$) $= 3abc$.

2) $(4x + 3)^2 + (5 - 7x)^3 + (3x - 8)^3 = 0$ (1)

Ta có $4x + 3 + 5 - 7x + 3x - 8 = 0$

Do đó: $(4x + 3)^3 + (5 - 7x)^3 + (3x - 8)^3 = 3(4x + 3)(5 - 7x)(3x - 8)$

Vậy phương trình (1) trở thành $3(4x + 3)(5 - 7x)(3x - 8) = 0$ (câu a)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x + 3 = 0 \\ 5 - 7x = 0 \\ 3x - 8 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{3}{4} \\ x = \frac{5}{7} \\ x = \frac{8}{3} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình (1) có ba nghiệm số là $x_1 = -\frac{3}{4}$; $x_2 = \frac{5}{7}$; $x_3 = \frac{8}{3}$

**Bài 3:**

1) Ta có $ab + bc + ca \le a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow 2ab + 2bc + 2ca \le 2a^2 + 2b^2 + 2c^2$

$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ac + a^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \ge 0$ (bất đẳng thức đúng)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow$ Tam giác có độ dài ba cạnh bằng a, b, c là tam giác đều.

Theo bất đẳng thức trong tam giác ta có:

$$\begin{cases} a < b + c \\ b < a + c \\ c < b + a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 < ab + ac \\ b^2 < ba + bc \\ c^2 < cb + ca \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$$

Vậy $ab + bc + ca \le a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$ (a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác).

2) $(a + b + c)^2 = 3(ab + bc + ca)$

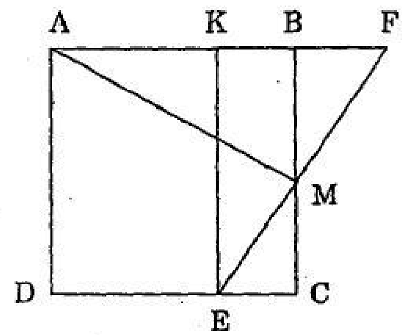
$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 3ab + 3bc + 3ca.$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$

Theo câu a đẳng thức trên đúng khi a = b = tức tam giác đó là tam giác đều.

**Bài 4:**

*Cách 1:* Vẽ $EK \perp AB$ ($K \in AB$)




Tứ giác KBCE có $\widehat{EKB} = \widehat{KBC} = \widehat{BCE} = 90^0$ nên là hình chữ nhật.

Suy ra KE = BC

Xét $\Delta MAB$ và $\Delta FEK$ có:

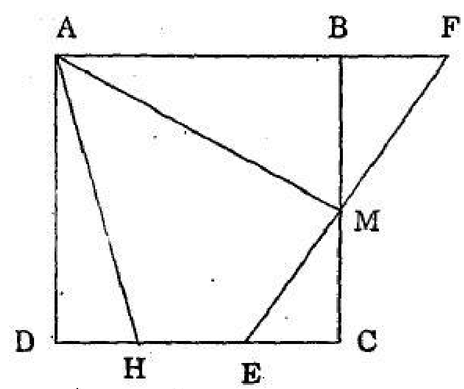
$\widehat{AMB} = \widehat{EFK}$ (cặp góc có cạnh tương ứng vuông góc) AB = KE (vì cùng bằng BC)

$\widehat{ABM} = \widehat{EKF}$ $(= 90^0)$

Do đó $\Delta MAB = \Delta FEK$ (g–c–g)

Suy ra AM = EF.

*Cách 2:*




Dễ thấy $\widehat{DAB} = 90^0 > \widehat{AFE}$

Vẽ tia AH nằm giữa hai tia AB, AD và $\widehat{BAH} = \widehat{AFE}$, $H \in DC$

Tứ giác AFCH là hình thang (HC // AF)

Có $\widehat{BAH} = \widehat{AFE}$ nên là hình thang cân

Suy ra AH = EF (1)

$\widehat{DAH} + \widehat{HAF} = \widehat{DAB} = 90^0$

$\widehat{BAM} + \widehat{AFE} = 90^0$ ($\Delta AMF$ vuông tại A)

Do đó $\widehat{DAH} = \widehat{BAM}$

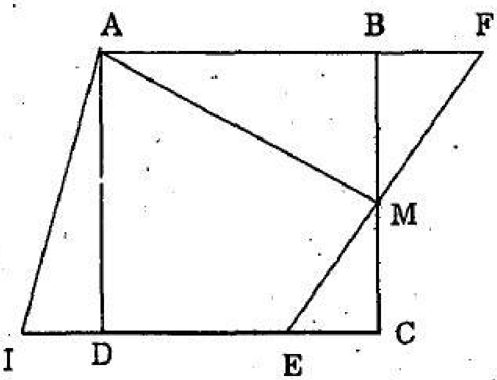
Xét $\Delta DAH$ và $\Delta BAM$

Có $\widehat{DAH} = \widehat{ABH}$ ($= 90^0$), AD = AB, $\widehat{DAH} = \widehat{BAM}$.

Do đó $\Delta DAH = \Delta BAM$ (g–c–g)

Suy ra AH = AM (2)

Từ (1) và (2) có AM = EF.




*Cách 3:* Đường thẳng vuông góc AM tại A cắt CD tại I. AI ⊥ AM, EF ⊥ AM (gt) suy ra AI // EF

Tứ giác AFEI có AF = IE, AI // EF nên là hình bình hành.

Suy ra AI = EF.

Xét $\Delta ADI$ và $\Delta ABM$ có:

$\widehat{ADI} = \widehat{ABM}$ ($= 90^0$); AD = AB;

$\widehat{DAI} = \widehat{BAM}$ (cặp góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc)

Do đó $\Delta ADI = \Delta ABM$ (g–c–g)

Suy ra AI = AM

Vậy AM = EF.

***Chú ý:*** Bài này còn nhiều cách giải khác nữa. Chẳng hạn:

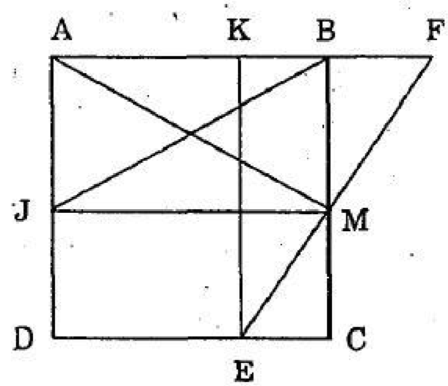
*Cách 4:* Vẽ MJ ⊥ AD, EK ⊥ AB (J ∈ AD, K ∈ AB)

Chứng minh được: JB = AM, JB = EF, để có AM = EF.

*Cách 5:* BF // EC $\Rightarrow \dfrac{MC}{MB} = \dfrac{ME}{MF}$

$\Rightarrow \dfrac{MC + MB}{MB} = \dfrac{MF + ME}{MF}$ hay $\dfrac{BC}{MB} = \dfrac{EF}{MF}$ (*)

$\Delta ABM \backsim \Delta MBF \Rightarrow \dfrac{AB}{MB} = \dfrac{AM}{MF}$ (**)




Mà AB = BC.

Từ (*) và (**) ta có: AM = EF

*Cách 6:* $\Delta JAM$ đồng dạng $\Delta KFE$

Suy ra $\dfrac{AM}{EF} = \dfrac{JM}{KE} = 1$ vì JM = KE

Và từ các cách giải trên cho ta bài toán tổng quát sau.

**Bài toán 1:**

Cho hình vuông ABCD, E, F, M, N lần lượt trên các cạnh (hoặc đường thẳng chứa cạnh) DC, AB, BC, AD sao cho MN ⊥ EF.

Chứng minh rằng MN = EF.

Điều thú vị là tứ giác ở cách giải 6 cho ta bài toán tổng quát của bài toán 1.

**Bài toán 2:**

Cho hình chữ nhật ABCD, có AB = mBC (m > 0). E, F, M, N lần lượt trên các cạnh (hoặc đường thẳng chứa cạnh) DC, AB, BC, AD sao cho $MN \perp EF$. Chứng minh rằng MN = mEF.

Thử nghĩ đến bài toán ngược.

**Bài Toán 3:**

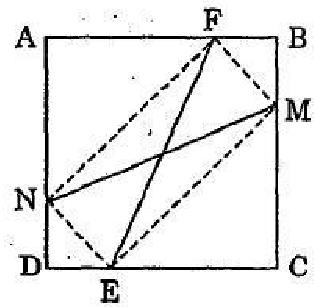
Cho hình vuông ABCD. E, F, M, N lần lượt trên các cạnh (hoặc đường thẳng chứa các cạnh) DC, AB, BA, AD sao cho MN = EF. Chứng minh $MN \perp EF$, có đúng chăng?

Tưởng chừng mọi chuyện đã êm đẹp, và ta cho rằng với kết quả suy đoán của bài toán trên là đúng!

Xét thử ví dụ sau:

Xét hình vuông ABCD, gọi E, F, M, N lần lượt trên DC, AB, BC, AD sao cho:

$DN = DE = BF = BM \neq \frac{a}{2}$ trong đó a là độ dài cạnh hình vuông.




Ta nối NF, FM, ME và NE.

Suy ra $\Delta DNE = \Delta BMF$ (c–g–c)

và $\Delta CME = \Delta ANF$ (c–g–c)

Suy ra NE = MF và NF = ME

Suy ra MENF là hình bình hành.

Mặt khác $\widehat{FNE} = 180^0 - (\widehat{DNE} + \widehat{ANE}) = 180^0 - (45^0 + 45^0) = 90^0$

Vậy MENF là hình chữ nhật, nên EF = MN mà rõ ràng EF và MN không vuông góc nhau.

Vậy các bạn hãy bổ sung giả thiết để mệnh đề đảo MN = EF thì $MN \perp EF$ đúng.

**Bài 5:**

1) Gọi P là trung điểm của đoạn NC. Ta có MP là đường trung bình của $\Delta BNC$. Cho ta MP // BN suy ra KN // MP.

Theo định lý Talet ta có: $\frac{AK}{AM} = \frac{KN}{MP} = \frac{1}{3}$

Vẽ $AH \perp KN$, $AK \perp MP$.

Suy ra $\frac{AH}{AK} = \frac{AK}{AM} = \frac{1}{3}$

Cho ta $\frac{S_{AKN}}{S_{AMP}} = \frac{\frac{1}{2}KN.AH}{\frac{1}{2}MP.AK} = \frac{1}{9} \Rightarrow S_{AKN} = \frac{1}{9} S_{AMP}$ (1)

Ta có: NP = PC; $AN = \frac{1}{3}AP = \frac{1}{2}NP$

$\Rightarrow AC = AN + NP + PC = AN + 2AN + 2AN = 5AN$

$\Rightarrow AP = AN + NP = AN + 2AN = 3AN \Rightarrow \dfrac{AP}{AC} = \dfrac{3}{5}$

$\Rightarrow \dfrac{S_{AMP}}{S_{AMC}} = \dfrac{AP}{AC} = \dfrac{3}{5}$

(Hai tam giác có chung đường cao xuất phát từ đỉnh M)

hay $S_{AMP} = \dfrac{3}{5} S_{AMC}$ (2)

mà $\dfrac{S_{AMC}}{S_{ABC}} = \dfrac{MC}{BC} = \dfrac{1}{2}$

(Hai tam giác có chung đường cao xuất phát từ đỉnh A)

hay $S_{AMC} = \dfrac{1}{2} S_{ABC} = \dfrac{1}{2} S$, (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow S_{AKN} = \dfrac{1}{9} S_{AMP} = \dfrac{1}{9}\dfrac{3}{5}.S_{AMC} = \dfrac{1}{9}\dfrac{3}{5}\dfrac{1}{2}S = \dfrac{1}{30}S$

2) Gọi P là trung điểm NC.

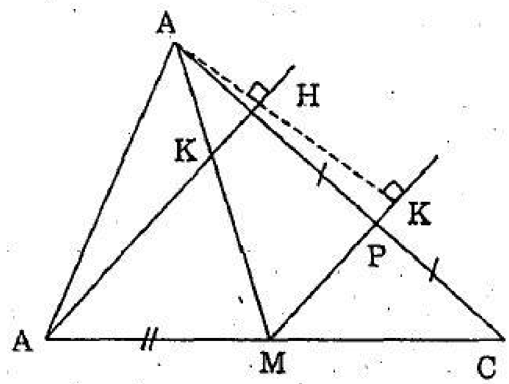
Ta có MP là đường trung bình của tam giác BNC cho ta MP//BN, KN//MP.

AN = NP = PC

$\Rightarrow \Delta AKN \backsim \Delta AMP$

$\Rightarrow \dfrac{S_{AKN}}{S_{AMP}} = \dfrac{1}{9} \Rightarrow S_{AKN} = \dfrac{1}{9} S_{AMP}$

$S_{AMP} = \dfrac{1}{2} S_{AMC}$ và $S_{AMC} = \dfrac{1}{2} S_{ABC}$




Do đó $S_{AKN} = \dfrac{1}{9} S_{AMP} = \dfrac{1}{9}\dfrac{2}{3} S_{AMC}$

$= \dfrac{1}{9}\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{2} S_{ABC} = \dfrac{1}{27} S$

Vẽ BD // IJ; CE // IJ (D,E $\in$ AM)

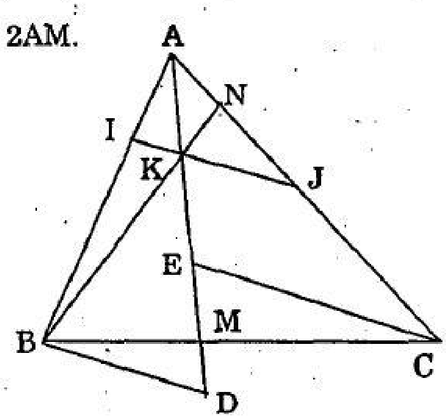
Dễ dàng chứng minh

$\Delta BMD = \Delta CME$ (g–c–g)

Cho ta EM = MD.

Ta có AE + AD = AM – ME + AM + MD = 2AM.

Áp dụng định lý Talet vào các tam giác AIK, AKJ với IK//BD; KJ//CE, ta có:




$\dfrac{AB}{AI} = \dfrac{AD}{AK}; \dfrac{AC}{AJ} = \dfrac{AE}{AK}$

Suy ra:

$\dfrac{AB}{AI} + \dfrac{AC}{AJ} = \dfrac{AD + AE}{AK} = \dfrac{2AM}{AK} = 6$

## BỘ ĐỀ 13

### ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN I, TPHCM – NĂM HỌC 1994 – 1995

**Bài 1:** Phân tích đa thức thành nhân tử:

1) $(x^2 + x)^2 - 2(x^2 + x) - 15$

2) $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$

**Bài 2:** Giải phương trình:

$$\frac{2}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{x + 1} + \frac{2x - 1}{x^3 + 1}$$

**Bài 3:** Giả sử $a \geq b$, $c \geq d$. Chứng minh: $ac + bd \geq bc + ad$

**Bài 4:** Cho hình vuông ABCD, điểm E thuộc cạnh CD, điểm F thuộc cạnh BC. Biết $\widehat{EAF} = 45^0$. Chứng minh chu vi $\Delta CEF$ bằng nửa chu vi hình vuông ABCD.

**Bài 5:** Lấy một điểm O trong $\Delta ABC$. Các tia AO, BO, CO cắt BC, AC, AB lần lượt tại P, Q, R. Chứng minh $\dfrac{OA}{AP} + \dfrac{OB}{BQ} + \dfrac{OC}{CR} = 2$

### HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1:** Phân tích đa thức thành nhân tử:

1) $(x^2 + x)^2 - 2(x^2 + x) - 15 = (x^2 + x)^2 - 2(x^2 + x) + 1 - 16$

$= (x^2 + x - 1)^2 - 4^2 = (x^2 + x - 1 - 4)(x^2 + x - 1 + 4)$

$= (x^2 + x + 3)(x^2 + x - 5)$

$= (x^2 + x + 3)[(x^2 + x + \frac{1}{4}) - \frac{21}{4}] = (x^2 + x + 3)[(x + \frac{1}{2})^2 - (\frac{\sqrt{21}}{2})^2]$

$= (x^2 + x + 3)(x + \frac{1 + \sqrt{21}}{2})(x + \frac{1 - \sqrt{21}}{2})$

$= \frac{1}{4}(x^2 + x + 3)(2x + 1 + \sqrt{21})(2x + 1 - \sqrt{21})$

2) $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$

*Cách 1:* $= (a + b)^3 + c^3 + 3(a + b).c(a + b + c) - a^3 - b^3 - c^3$

Áp dụng: $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

$= a^3 + b^3 + 3ab(a + b) + 3(a + b)(ac + bc + c^2) - a^3 - b^3$

$= 3(a + b)(ab + ac + bc + c^2) = 3(a + b)[a(b + c) + c(b + c)]$

$= 3(a + b)(b + c)(a + c)$

*Cách 2:* Xem $P = (a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$ là đa thức biến a.

Khi $a = -b$ thì $P = 0$ do đó $P \,\vdots\, (a + b)$

Trong P vai trò a, b, c như nhau nên cũng có $P \,\vdots\, (b + c)$, $P \,\vdots\, (c + a)$.

Do đó $P = (a + b)(b + c)(c + a)Q$

Vì P là đa thức bậc hai đối với a, b, c nên Q là hằng số.

Cho a = 0, b = c = 1 ta có $2Q = x^3 - 2 \Leftrightarrow Q = 3$

Vậy $P = 3(a + b)(b + c)(c + a)$

**Bài 2:** Điều kiện $x \neq -1$

Phương trình đã cho được viết: $2(x + 1) = x^2 - x + 1 + 2x - 1$

$\Leftrightarrow 2x + 2 = x^2 - x + 1 + 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) + (x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \text{ (loại)} \\ x = 2 \text{ (nhận)} \end{array}\right.$

Kết luận: Nghiệm của phương trình là x = 2

**Bài 3:** Ta có: $ac + bd \geq bc + ad \Leftrightarrow ac - ad + bd - bc \geq 0$

$\Leftrightarrow a(c - d) - b(c - d) \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)(c - d) \geq 0$ (đúng)

Vì $a \geq b$ và $c \geq d \Rightarrow \begin{cases} a - b \geq 0 \\ c - d \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (a - b)(c - d) \geq 0$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b hoặc c = d.

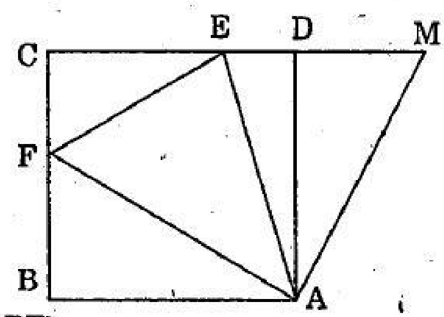
**Bài 4:** Trên tia đối của tia DE, lấy điểm M sao cho MD = BF

$\Rightarrow \Delta ABF = \Delta ADM$ (BF = MD, AB = AD cạnh hình vuông, $\widehat{ABF} = \widehat{ADM} = 90^0$)

$\Rightarrow AF = AM$ và $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

Ta có: $\widehat{EAM} = \widehat{EAD} + \hat{A}_2 = \widehat{EAD} + \hat{A}_1 = \widehat{BAD} - \widehat{EAF} = 45^0$

$\Rightarrow EAF = EAM = 45^0$




Vậy $\Delta FAE = \Delta MAE$ (AE cạnh chung; $\widehat{EAF} = \widehat{EAM}$, AF = AM)

$\Rightarrow EF = EM$.

Gọi $P_{CEF}$ là chu vi $\Delta CEF$, ta có:

$P_{CEF} = CE + CF + EF = CE + CF + ME = CE + CF + ED + DM$

$= (CE + ED) + (CF + BF)$ (vì DM = BF)

$= CD + BC = 2a = \dfrac{P_{ABCD}}{2}$

với a là độ dài cạnh hình vuông và $P_{ABCD}$ là chu vi của hình vuông ABCD.

**Bài 5:**

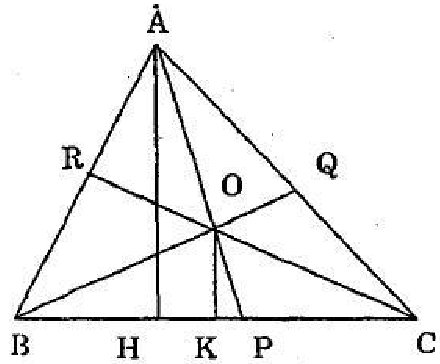
*Cách 1:* Đặt $S_1 = S_{OBC}$; $S_2 = S_{OAC}$; $S_3 = S_{OAB}$; $S = S_{ABC}$

Kẻ $AH \perp BC$ và $OK \perp BC \Rightarrow AH \parallel OK$

Áp dụng hệ quả định lí Talet trong tam giác AHP có:

$$\frac{OP}{AP} = \frac{OK}{AH} = \frac{\frac{1}{2}OK.BC}{\frac{1}{2}AH.BC} = \frac{S_1}{S}$$

$$\Rightarrow \frac{AP-OP}{AP}=\frac{S-S_1}{S} \Rightarrow \frac{OA}{AP}=\frac{S_2+S_3}{S}$$




Lý luận tương tự ta có: $\frac{OB}{BQ}=\frac{S_1+S_3}{S}$

và $\frac{OC}{CR}=\frac{S_1+S_2}{S}$

Vậy: $\frac{OA}{AP}+\frac{OB}{BQ}+\frac{OC}{CR}=$

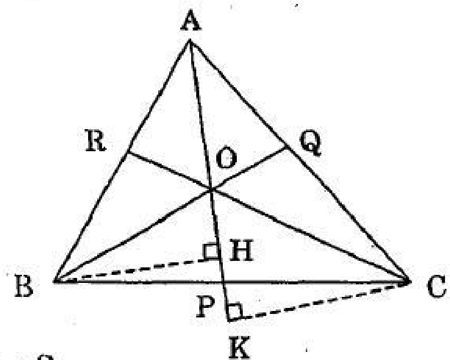
$$=\frac{S_2+S_3}{S}+\frac{S_1+S_3}{S}+\frac{S_1+S_2}{S}=$$

$$=\frac{2(S_1+S_2+S_3)}{S}=\frac{2S}{S}=2$$

*Cách 2:* Đặt $S_1 = S_{OBC}$, $S_2 = S_{OAC}$, $S_3 = S_{OAB}$, $S = S_{ABC}$

Kẻ BH và CK cùng vuông góc với đường AH.

Ta có:




$$\begin{cases} \dfrac{OA}{AP}=\dfrac{\frac{1}{2}OA.BH}{\frac{1}{2}AP.BH}=\dfrac{S_{OAB}}{S_{ABP}} \\ \dfrac{OA}{AP}=\dfrac{\frac{1}{2}OA.CK}{\frac{1}{2}AP.CK}=\dfrac{S_{OAC}}{S_{APC}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{AO}{AP}=\frac{S_{OAB}}{S_{ABP}}=\frac{S_{OAC}}{S_{APC}}=\frac{S_{OAB}+S_{OAC}}{S_{ABP}+S_{APC}}=\frac{S_2+S_3}{S}$$

(Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau)

Lý luận tương tự ta có: $\frac{OB}{BQ}=\frac{S_1+S_3}{S}$ và $\frac{OC}{CR}=\frac{S_1+S_3}{S}$

Vậy $\frac{OA}{AP}+\frac{OB}{BQ}+\frac{OC}{CR}=\frac{2(S_1+S_2+S_3)}{S}=\frac{2S}{S}=2$

(Đây là bài toán của Giecgôn – nhà toán học người Pháp thế kỉ 19)

***Nhận xét:*** Ta dễ dàng chứng minh bất đẳng thức:

$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9$ với $x, y, z > 0$

nên ta có: $\left(\frac{OA}{AP}+\frac{OB}{BQ}+\frac{OC}{CR}\right)\left(\frac{AP}{OA}+\frac{BQ}{OB}+\frac{CR}{OC}\right) \geq 9$

do đó: $\frac{AP}{OA}+\frac{BQ}{OB}+\frac{CR}{OC} \geq \frac{9}{2}$

***Từ đó ta có bài toán:***

Lấy một điểm O nằm trong tam giác ABC. Các tia AO, BO, CO cắt BC, AC, AB lần lượt tại P,Q, R.

Tìm vị trí của O để: $\frac{AP}{OA}+\frac{BQ}{OB}+\frac{CR}{OC}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Các bạn đã tìm được lời giải bài toán *HAY VÀ KHÓ* sau:

Cho tam giác ABC, O là điểm nằm trong tam giác ABC. Các tia AO, BO, CO cắt BC, AC, AB lần lượt tại P, Q, R.

Xác định vị trí của O để:

1) $\frac{OA}{OP}+\frac{OB}{OQ}+\frac{OC}{OR}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

2) $\frac{OA}{OP}.\frac{OB}{OQ}.\frac{OC}{OR}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

3) $\frac{OP}{OA}+\frac{OQ}{OB}+\frac{OR}{OC}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

4) $\frac{OP.OQ.OR}{OA.OB.OC}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

## BỘ ĐỀ 14

### ĐỀ THI HỌC BỔNG MARIE CURIE TRƯỜNG THCS NGUYỄN DU QUẬN I, TPHCM – NĂM HỌC 1994 – 1995

**Bài 1:** Cho ba số a, b, c khác 0, thỏa mãn $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1$

Tính giá trị của biểu thức: $(a^{23}+b^{23})(b^5+c^5)(a^{1995}+c^{1995})$

**Bài 2:** Xác định đa thức bậc ba sao cho khi chia đa thức ấy lần lượt cho các nhị thức $(x-1)$, $(x-2)$, $(x-3)$ đều có số dư là 6 và tại $x=-1$ thì đa thức nhận giá trị tương ứng là $-18$. .

**Bài 3:** Cho hình vuông ABCD có độ dài bằng 1. Trên các cạnh AB, AD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho chu vi của tam giác AMN bằng 2. Tính số đo góc $\widehat{MCN}$.

### HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1:** *Cách 1:* Với a, b, c khác 0, ta có:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1 \Leftrightarrow (a+b+c)\ \frac{ab+bc+ac}{abc}=1$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(ab+bc+ca)+abc+c(bc+ac)-abc=0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(ab+bc+ac)+c^2(a+b)=0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(ab+bc+ac+c^2)=0$$

$\Leftrightarrow (a + b)[b(a + c) + c(a + b)] = 0$

$$\Leftrightarrow (a + b)(b + c)(a + c) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a + b = 0 \\ b + c = 0 \\ a + c = 0 \end{array}\right.$$

Đặt $P = (a^{23} + b^{23})(b^5 + c^5)(a^{1995} + c^{1995})$

- Nếu $a + b = 0$ thì $a = -b \Leftrightarrow a^{23} = -b^{23} \Leftrightarrow a^{23} + b^{23} = 0$.
  Vậy $P = 0$
- Nếu $b + c = 0$ thì $b = -c \Leftrightarrow b^5 = -c^5 \Leftrightarrow b^5 + c^5 = 0$.
  Vậy $P = 0$.
- Nếu $a + c = 0$ thì $a = -c \Leftrightarrow a^{1995} = -c^{1995} \Leftrightarrow a^{1995} + c^{1995} = 0$.
  Vậy $P = 0$

Kết luận: với điều kiện đã cho: $P = 0$

*Cách 2:* $(a + b + c)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b+c} - \frac{1}{c} \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{c-(a+b+c)}{c(a+b+c)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{-(a+b)}{c(a+b+c)}$$

$\Leftrightarrow (a + b)c(a + b + c) = -(a + b)ab \Leftrightarrow (a + b)[c(a + b + c) + ab] = 0$

$\Leftrightarrow (a + b)[c(b + c) + ca + ab] = 0 \Leftrightarrow (a + b)[c(b + c) + a(b + c)] = 0$

$\Leftrightarrow (a + b)(b + c)(c + a) = 0$

Tiếp tục giải như cách 1.

Hãy giải bài toán sau:

*Tìm a, b, c thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*

*$a + b + c = 3;\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{3}$ và $2a^2 + b = 1$*

**Bài 2:** *Cách 1:* Xét đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f(x)$ chia cho $(x - 1)$ có số dư là 6 nên $f(x) = (x - 1)\, q_1(x) + 6$ với mọi x.

Tại $x = 1$ : $f(1) = 6 \Leftrightarrow a + b + c + d = 6$ (1)

$f(x)$ chia cho $(x - 2)$ có số dư là 6 nên $f(x) = (x - 2)q_2(x) + 6$ với mọi x.

Tại $x = 2$ : $f(2) = 6 \Leftrightarrow 8a + 4b + 2c + d = 6$ (2)

$f(x)$ chia cho $(x - 3)$ có số dư là 6 nên $f(x) = (x - 3)q_3(x) + 6$ với mọi x.

Tại $x = 3$ : $f(3) = 6 \Leftrightarrow 27a + 9b + 3c + d = 6$ (3)

Mặt khác theo đề bài $f(-1) = -18 \Leftrightarrow a + b - c + d = -18$ (4)

Từ (1) và (4) có: $2(b + d) = -12 \Leftrightarrow b + d = -6 \Leftrightarrow d = -6 - b$

Thay vào (1) ta được: $a + c = 12 \Leftrightarrow c = 12 - a$

Từ (1) và (2) có: $7a + 3b + c = 0 \Leftrightarrow 6a + 3b + (a + c) = 0$

$\Leftrightarrow 3(2a + b) = -12$

$\Leftrightarrow a = \dfrac{-4 - b}{2}$

Thay các giá trị a, c, d được tính theo b vào (3) ta được:

$$27\left(\frac{-4-b}{2}\right) + 9b + 3(12 - a) - 6 - b = 6$$

$$\Leftrightarrow -108 - 27b + 18b + 6(12 + \frac{4+b}{2}) -2b - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow -132 - 11b + 72 + 12 + 3b = 0 \Leftrightarrow -8b - 48 = 0 \Leftrightarrow b = -6$$

Với b = 6 thì d = 0; $a = \frac{-4+6}{2} = 1$ và c = 12 – 1 = 11.

Vậy đa thức cần tìm là $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x$.

*Cách 2:*

Do f(x) chia cho các nhị thức (x – 1); (x – 2) và (x – 3) đều có dư là 6 nên f(x) – 6 chia hết cho x – 1, x – 2 và x – 3. Vì f(x) là da thức bậc ba nên f(x) – 6 = m(x – 1)(x – 2)(x – 3) với m là hằng số.

f(–1) = 18 nên 18 – 6 = m(–2)(–3)(–4) $\Leftrightarrow$ m = 1.

Vậy $f(x) - 6 = (x-2)(x-3)(x-1) = (x^2 - 5x + 6)(x-1)$

$$= x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6$$

$$= x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x.$$

**Bài 3:** *Cách 1:* Gọi $P_{AMN}$ là chu vi tam giác $\Delta$MN.

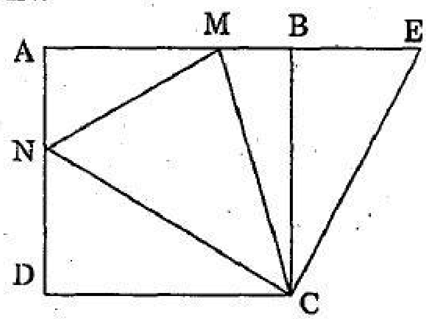
ta có: $P_{AMN} = 2$

$\Rightarrow AM + AN + MN = AD + AB$

$\Rightarrow AM + AN + MN =$

$= AM + MB + AN + ND$

$\Rightarrow MN = MB + ND$ (1)




Trên tia đối của tia BM, lấy điểm E:

BE = DN.

$\Rightarrow ME = MB + BE = MB + DN = MN.$

Vậy $\Delta CDN = \Delta CBE$ ($DN = BE$, $\widehat{NDC} = \widehat{ABE} = 90^0$, $CD = CB$)

$\Rightarrow CN = CE$ và $C_1 = C_2$

Ta có: $\widehat{NCE} = \widehat{NCB} + \hat{C}_2 = \widehat{NCB} + \hat{C}_1 = \widehat{DCB} = 90^0$

$\Delta CNM = \Delta CEM$ ($CN = CE$, MN chung, $MN = ME \Rightarrow NCM = MCE$)

Vậy $\widehat{MCN} = \frac{\widehat{NCE}}{2} = \frac{90^0}{2} = 45^0$

*Cách 2:* Tương tự với cách 1 ta có MN = MB + ND (1)

Kẻ $CH \perp MN$, ta được MH + NH = MB + ND

Áp dụng định lý Pytago đối với các tam giác vuông $\Delta CHM$ và $\Delta BMC$ có:

$MH^2 = MC^2 - CH^2 = MB^2 + BC^2 - HC^2$ (2)

Áp dụng định lý Pytago đối với các tam giác vuông $\Delta HCN$ và $\Delta DNC$ có:

$NH^2 = NC^2 - HC^2 = ND^2 + CD^2 - CH^2$ (3)

Trừ vế với vế (2) và (3) ta được:

$MH^2 - NH^2 = MB^2 - ND^2$ (vì BC = CD cạnh hình vuông)

$\Rightarrow (MH - NH)(MH + NH) = (MB - ND)(ND + MB)$

$\Rightarrow MN - NH = MB - ND$ (do $MH + NH = ND + MB$)

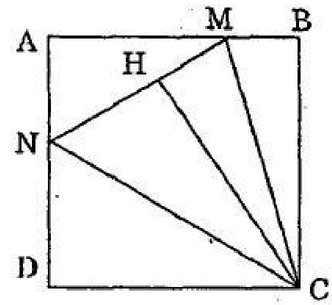
Kết hợp: $MH + NH = MB + ND$

$\Rightarrow MH = MB, NH = ND$

$\Rightarrow$ CN và CM là phân giác $\widehat{DCH}$ và $\widehat{BCH}$.

Vậy $\widehat{MCN} = \widehat{NCH} + \widehat{HCM} =$

$\dfrac{\widehat{DCH} + \widehat{BCH}}{2} = \dfrac{\widehat{DCB}}{2} = \dfrac{90^0}{2} = 45^0$




***Nhận xét:*** Ta nối đường chéo BD lần lượt cắt CM, CN tại Q, P.

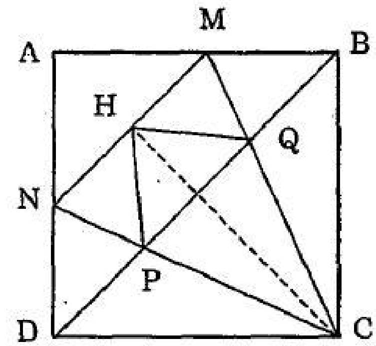
Do tính chất đối xứng ta được $DP = PH$ và $BQ = HQ$

Và $\widehat{CBQ} = \widehat{CHQ}$; $\widehat{CDP} = \widehat{CHP}$

$\Rightarrow \widehat{PHQ} = \widehat{CHQ} + \widehat{CHP} =$

$\widehat{CPQ} + \widehat{CDP} = 90^0$

Vậy $PQ^2 = PH^2 + HQ^2 = DP^2 + QB^2$




***Từ đó ta có bài toán:***

*Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng đơn vị. Trên các cạnh AB, AD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho chu vi của tam giác AMN bằng 2. Chứng minh rằng CM và CN chia đường chéo BD thành ba đoạn mà độ dài ba cạnh một tam giác vuông.*

## BỘ ĐỀ 15

### ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI GIẢI THƯỞNG LÊ QUÝ ĐÔN QUẬN TÂN BÌNH TPHCM – NĂM HỌC 1995 – 1996

**Bài 1:** Cho biểu thức: $A = \dfrac{2a-1}{3a-1} + \dfrac{5-a}{3a+1}$

**1)** Tính giá trị của A khi: $a = -\dfrac{1}{2}$

**2)** Tính giá trị của A khi: $10a^2 + 5a = 3$

**Bài 2:** Giải phương trình: $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x - 12 = 0$

**Bài 3:** Cho đoạn thẳng AB, gọi O là trung điểm của AB.

Vẽ về một phía của AB các tia Ax, By vuông góc với AB.

Lấy C trên tia Ax, D trên tia By sao cho $\widehat{COD} = 90^0$

1) Chứng minh tam giác ACO và tam giác BDO đồng dạng.

2) Chứng minh CD = AC + BD

3) Kẻ OM ⊥ CD tại M, gọi N là giao điểm của AD với BC. Chứng minh MN // AC.

## HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1:** $A = \dfrac{2a-1}{3a-1} + \dfrac{5-a}{3a+1}$

1) Thay $a = -\dfrac{1}{2}$ vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{2.\left(-\frac{1}{2}\right)-1}{3.\left(-\frac{1}{2}\right)-1} + \frac{5-\left(-\frac{1}{2}\right)}{3.\left(-\frac{1}{2}\right)+1} = \frac{-1-1}{-\frac{3}{2}-1} + \frac{5+\frac{1}{2}}{-\frac{3}{2}+1} = \frac{2}{\frac{5}{2}} + \frac{\frac{11}{2}}{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{4}{5} - 11 = -10\frac{1}{5}$$

2) $A = \dfrac{2a-1}{3a-1} + \dfrac{5-a}{3a+1} \quad (a \neq \pm\dfrac{1}{3})$

$$= \frac{(2a-1)(3a+1)+(5-a)(3a-1)}{(3a-1)(3a+1)}$$

$$= \frac{6a^2+2a-3a-1+15a-5-3a^2+a}{9a^2-1}$$

$$= \frac{3a^2+15a-6}{9a^2-1} = \frac{3(a^2+5a-2)}{9a^2-1} \qquad (1)$$

Từ điều kiện $10a^2 + 5a = 3 \Rightarrow 5a = 3 - 10a^2$

Thay $5a = 3 - 10a^2$ vào (1) ta được:

$$A = \frac{3(a^2+3-10a^2-2)}{9a^2-1} = \frac{3(1-9a^2)}{9a^2-1} = -3 \quad (a \neq \pm\frac{1}{3})$$

**Bài 2:** *Cách 1:* $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x - 12 = 0$

$\Leftrightarrow x^4 - 1 + 2x^3 - 2 + 5x^2 - 5 + 4x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2+1) + 2(x^3-1) + 5(x^2-1) + 4(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2+1) + 2(x^3-1) + 5(x^2-1) + 4(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1 + 2x^2 + 2x + 2 + 5x + 5 + 4) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^3 + 3x^2 + 8x + 12) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^3 + 2x^2 + x^2 + 2x + 6x + 12) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)[x^2(x+2) + x(x+2) + 6(x+2)] = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+2)(x^2+x+6)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+2)\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+5\frac{3}{4}\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x+2=0 \end{array}\right.$ (vì $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+5\frac{3}{4}\neq 0$)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có hai nghiệm số: $x_1=1$, $x_2=-2$

*Cách 2:* $x^4+2x^3+5x^2+4x-12=0$

$\Leftrightarrow x^4+x^3-2x^2+x^3+x^2-2x-6x^2+6x-12=0$

$\Leftrightarrow x^2(x^2+x-2)+x(x^2+x-2)+6(x^2+x-2)=0$

$\Leftrightarrow (x^2+x-2)(x^2+x+6)=0$

$\Leftrightarrow (x^2-x+2x-2)\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+5\frac{3}{4}\right]=0$

$\Leftrightarrow [x(x-1)+2(x-1)]\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+5\frac{3}{4}\right]=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+2)\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+5\frac{3}{4}\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x+2=0 \end{array}\right.$ vì $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+5\frac{3}{4}\neq 0)$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có hai nghiệm số là: $x_1=1$, $x_2=-2$.

**Bài 3:** 1) Xét $\Delta ACO$ và $\Delta BDO$ ta có:

$\widehat{CAO}=\widehat{DBO}=90^0$ (giả thiết)

$\widehat{ACO}=\widehat{ODB}$

Vậy $\Delta ACO \backsim \Delta BOD$ (g–g)

2) CO cắt tia DB tại điểm E

Xét $\Delta ACO$ và $\Delta BOE$ ta có:

$\widehat{OAC}=\widehat{OBE}$ ($=90^0$)

$\widehat{AOC}=\widehat{BOE}$ (góc đối đỉnh)

OA = OB (O là trung điểm AB)

Vậy $\Delta AOC=\Delta BOE$ (g – c – g)

Suy ra OC = OE ; AC = BE

$\Delta DCE$ có DO vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao nên $\Delta DCE$ cân tại D.

Cho ta DC = DE

mà $DE = DB + BE = DB + AC$

nên $DC = AC + DB$

3) $\Delta CDE$ cân tại D

nên đường cao DO cũng là đường phân giác, $OM = OB$

suy ra $OM = OA$ ($OA = OB$)

$\Delta ACO$ và $\Delta MOC$

có $\widehat{CAO} = \widehat{OMC} = 90^0$,

$OM = OA$, $OC = OC$

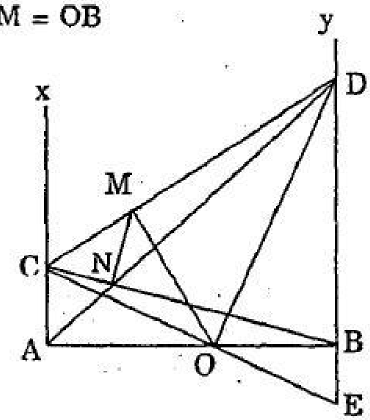
Vậy $\Delta AOC = \Delta MOC$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

Suy ra $MC = CA$

Chứng minh tương tự ta có:

$\Delta ODM = \Delta ODB$

Suy ra $MD = DB$




Tam giác CAN có $AC \parallel BD$ (cùng vuông góc với AB)

nên $\dfrac{AN}{ND} = \dfrac{AC}{BD}$ (hệ quả định lý Talet)

hay $\dfrac{AN}{ND} = \dfrac{CM}{MD}$ ($AC = CB$, $BD = MD$)

Suy ra $MN \parallel AC$ (Định lý Talet đảo và ADCA)

## BỘ ĐỀ 16

### ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN 6, TPHCM – NĂM HỌC 1995 – 1996

**Bài 1:** n là số tự nhiên

1) Xác định n để $A = \dfrac{5n-11}{4n-13}$ số tự nhiên.

2) Chứng minh rằng: $B = n^3 + 6n^2 - 19n - 24$ chia hết cho 6

3) Tính tổng $S(n) = \dfrac{1}{2{,}5} + \dfrac{1}{5{,}8} + .... + \dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}$

**Bài 2:** Cho hình bình hành ABCD, đường chéo lớn AC. Tia Dx cắt AC, AB, CB lần lượt ở I, M, N. Vẽ CE vuông góc với AB. CF vuông góc với AD, BG vuông góc với AC. Gọi K là điểm đối xứng của D qua I. Chứng minh:

1) $IM.IN = ID^2$

2) $\dfrac{KM}{KN} = \dfrac{DM}{DN}$

3) $AB.AE + AD.AF = AC^2$

**Bài 3:**

1) Giải phương trình $|x-1| + |x+2| + |x-3| = 14$.

2) Tìm giá trị nguyên của x và y trong đẳng thức $2x^3 + xy = 7$.

3) Cho bốn số dương a, b, c, d. Chứng minh:

$$1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$$

**Bài 4:** Cho tam giác ABC có BC = a và đường cao AH = h. Từ một điểm M trên đường cao AH vẽ đường thẳng song song với BC cắt hai cạnh AB và AC tại P và Q. Vẽ PS và QR vuông góc với BC.

1) Tính diện tích của tứ giác PQRS theo a, h, x (AM = x)

2) Xác định vị trí của M trên AH để diện tích này lớn nhất.

## HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1:**

1) $A = \frac{5n-11}{4n-13}$ là số tự nhiên

$\Rightarrow (5n - 11) \vdots (4n - 13) \Rightarrow 4(5n - 11) \vdots (4n - 13)$

$\Rightarrow (20n - 44) \vdots (4n - 13) \Rightarrow [5(4n - 13) + 21] \vdots (4n - 13)$

$\Rightarrow 21 \vdots (4n - 13) \Rightarrow 4n - 13 \in Ư(21)$

mà $4n - 13 = 4(n - 3) - 1$ chia cho 4 dư $-1$ (hay 3)

Do đó:

$4n - 13 \in \{-1;3;7;-21\} \Leftrightarrow 4n \in \{12; 16; 20; -8\} \Leftrightarrow n \in \{3; 4; 5; -2\}$

Với n = 3 ta có: $A = \frac{5.3-11}{4.3-11} = -4 \notin N$ (loại)

Với n = 4 ta có: $A = \frac{5.4-11}{4.4-11} = 3$

Với n = 5 ta có $A = \frac{5.5-11}{4.5-11} = 2$

Với $n = -2 \notin N$ (loại)

Vậy n = 4 hoặc n = 5 thì A là số tự nhiên

2) $B = n^3 + 6n^2 - 19n - 24 = n^3 - n + 6n^2 - 18n - 24$

$= n(n^2 - 1) + 6(n^2 - 3n - 4)$

$= n(n - 1)(1 + n) + 6(n^2 - 3n - 4)$

Trong ba số nguyên liên tiếp luôn có một số chia hết cho 2 và một số chia hết cho 3; mà 2 và 3 là hai số nguyên tố cùng nhau nên tích của ba số nguyên liên tiếp chia hết cho tích 2.3, tức chia hết cho 6.

Ta có: $(n - 1).n(n + 1) \vdots 6$ và $6(n^2 - 3n - 4) \vdots 6$

Do đó: $B = n(n - 1)(n + 1) + 6(n^2 - 3n - 4) \vdots 6$ $(n \in N)$

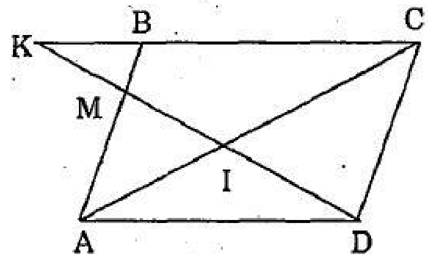
3) $S = \frac{1}{2,5} + \frac{1}{5,8} + \ldots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$

$= \frac{1}{3}\left[\frac{3}{2,5} + \frac{3}{5,8} + \ldots + \frac{3}{(3n-1)(3n+2)}\right]$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n-2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3n+2-2}{2(3n+2)} = \frac{n}{2(3n+2)}$$

**Bài 2: 1)** Áp dụng hệ quả định lý Talet vào $\Delta AID$ với $AD // NC$




Ta có: $\frac{ID}{IN} = \frac{IA}{IC}$ (1)

Áp dụng hệ quả định lý Talet vào $\Delta MIA$ với $AM // DC$

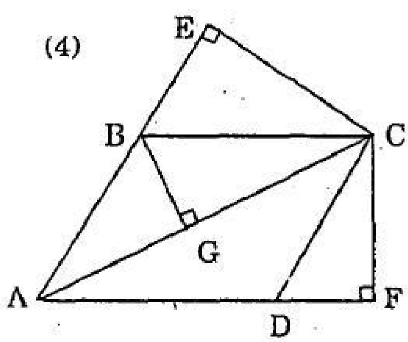
Ta có $\frac{IM}{ID} = \frac{IA}{IC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{ID}{IN} = \frac{IM}{ID}$ hay $IM.IN = ID^2$

**2)** Ta có: $\frac{ID}{IN} = \frac{IM}{ID}$ hay $\frac{KI}{IN} = \frac{IM}{KI}$ $(KI = ID)$

Suy ra: $\frac{KI}{IN} = \frac{IM}{KI} = \frac{KI - IM}{IN - KI} = \frac{KM}{KN}$

Do đó $\frac{ID}{IN} = \frac{KM}{KN}$ (3)




Mặt khác ta có: $\frac{ID}{IN} = \frac{IM}{ID} = \frac{ID + IM}{IN + ID} = \frac{DM}{DN}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{KM}{KN} = \frac{DM}{DN}$

3) $\Delta ABG$ và $\Delta ACE$ có:

$\widehat{AGB} = \widehat{AEC} = 90^0$

$\widehat{A}$ chung

Vậy $\Delta ABG \backsim \Delta ACE$ (g – g)

Cho ta $\frac{AB}{AC} = \frac{AG}{AE}$ hay $AB.AE = AC.AG$ (1)

$\Delta CBG$ và $\Delta ACF$ có:

$\widehat{BCG} = \widehat{CAF}$ (hai góc so le trong có $BC // AD$)

$\widehat{CGB} = \widehat{CFA} = 90^0$

Vậy $\Delta CBG \backsim \Delta ACF$ (g–g)

Cho ta: $\frac{BC}{AC} = \frac{CG}{AF}$ hay $BC.\ AF = AC\ .\ CG$ (2)

Cộng vế theo vế (1) và (2) ta được:

$AB.AE + BC.AF = AG.AC + AC.CG$

$AB.AE + BC.AF = AC(AG + CG) = AC^2$

**Bài 3: 1)** $|x-1|+|x+2|+|x-3|=14 \qquad (1)$

- **Nếu** $x < -2$ **phương trình (1) trở thành**

$$1 - x - x - 2 + 3 - x = 14 \Leftrightarrow -3x = 12 \Leftrightarrow x = -4 \text{ (nhận)}$$

- **Nếu** $-2 \le x < 1$ **phương trình (1) trở thành**

$$1 - x + x + 2 + 3 - x = 14 \Leftrightarrow -x = 8 \Leftrightarrow x = -8 \text{ (loại)}$$

- **Nếu** $1 \le x < 3$ **phương trình (1) trở thành**

$$x - 1 + x + 2 + 3 - x = 14 \Leftrightarrow x = 10 \text{ (loại)}$$

- **Nếu** $x \ge 3$ **phương trình (1) trở thành**

$$x - 1 + x + 2 + x - 3 = 14 \Leftrightarrow 3x = 16x = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3} \text{ (nhận)}$$

**Vậy phương trình (1)** có hai nghiệm số là $x_1 = -4,\ x_2 = 5\frac{1}{3}$.

**2)** $2x^3 + xy = 7\ (x, y \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x(2x^2 + y) = 7$

**mà** $7 = (-1).(-7) = 1.7$

**Ta có các trường hợp sau:**

$$\begin{cases} x = -1 \\ 2x^2 + y = -7 \end{cases};\ \begin{cases} x = 7 \\ 2x^2 + y = -1 \end{cases};\ \begin{cases} x = 1 \\ 2x^2 + y = 7 \end{cases};\ \begin{cases} x = 7 \\ 2x^2 + y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -9 \end{cases};\ \begin{cases} x = 7 \\ y = -99 \end{cases};\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases};\ \begin{cases} x = 7 \\ y = -97 \end{cases}$$

**Vậy giá trị nguyên x, y cần tìm là:**

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -9 \end{cases};\ \begin{cases} x = 7 \\ y = -99 \end{cases};\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases};\ \begin{cases} x = 7 \\ y = -97 \end{cases}$$

**3)** ***Cách 1:*** **Với a, b, c, d > 0**

**Ta có:**

$$\frac{a}{a+b+c} > \frac{a}{a+b+c+d} \text{ và } \frac{a}{a+b+c} < \frac{a+d}{a+b+c+d}$$

$$\frac{b}{b+c+d} > \frac{b}{a+b+c+d} \text{ và } \frac{b}{b+c+d} < \frac{b+a}{a+b+c+d}$$

$$\frac{c}{c+d+a} > \frac{c}{a+b+c+d} \text{ và } \frac{c}{c+d+a} < \frac{c+b}{a+b+c+d}$$

$$\frac{d}{d+a+b} > \frac{d}{a+b+c+d} \text{ và } \frac{d}{d+a+b} < \frac{d+c}{a+b+c+d}$$

**Suy ra** $\dfrac{a}{a+b+c} + \dfrac{b}{b+c+d} + \dfrac{c}{c+d+a} + \dfrac{d}{d+a+b} > \dfrac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = 1$

**Và** $\dfrac{a}{a+b+c} + \dfrac{b}{b+c+d} + \dfrac{c}{c+d+a} + \dfrac{d}{d+a+b} < \dfrac{2(a+b+c+d)}{a+b+c+d} = 2$

**Ta chứng minh** nhận xét sau nếu $x, y, z > 0$ và $x < y$

**thì** $\dfrac{x}{y} < \dfrac{x+y}{y+z} \qquad (1)$

Thật vậy bất đẳng thức (1) tương đương với bất đẳng thức sau:

$xy + xz < xy + yz \Leftrightarrow xz < yz \Leftrightarrow xz - yz < 0 \Leftrightarrow z(x - y) < 0$

(Bất đẳng thức đúng vì ta có $z > 0$ và $x - y < 0$)

Vậy bất đẳng thức (1) đúng

*Cách 2:* Vì a, b, c, d > 0 ta có:

$$\frac{a}{a+b+c+d} < \frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+c}$$

$$\frac{c}{a+b+c+d} < \frac{c}{c+d+a} < \frac{a}{c+a}$$

$$\frac{b}{a+b+c+d} < \frac{b}{b+c+d} < \frac{b}{b+d}$$

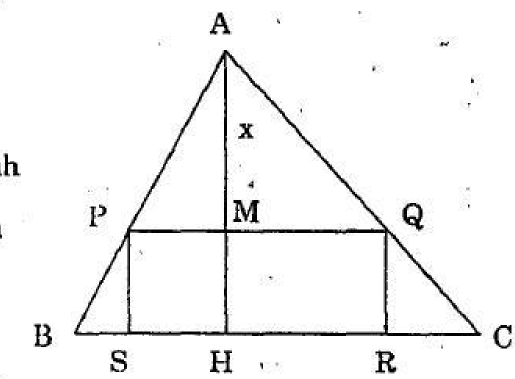
$$\frac{d}{a+b+c+d} < \frac{d}{d+a+b} < \frac{d}{d+b}$$

Do đó: $\frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d}$

$+\frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < \frac{a+c}{c+a} + \frac{b+d}{d+b}$

$$\Rightarrow 1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$$

**Bài 4: 1)** Đặt PQ = y




Ta có $MH = AH - AM = h - x$

Ta có $S_{APQ} + S_{BPQC} = S_{ABC}$

Suy ra $\frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}(h - x)(y + a) = \frac{1}{2}ah$

hay $xy + hy - xy + ah - ax = ah$

cho ta $hy - ax = 0$ hay $hy = ax$

Suy ra $y = \frac{ax}{h}$

Vậy $S_{PQRS} = y.(h - x) = \frac{ax(h-x)}{h} = \frac{a}{h}x(h - x)$

**2)** *Cách 2:* Ta có: $x > 0$ mà $x + (h - x) = h$ (không đổi)

Do đó tích $x(h - x)$ lớn nhất $\Leftrightarrow x = h - x \Leftrightarrow x = \frac{h}{2}$

$\Leftrightarrow$ M là trung điểm của đoạn AH

Vậy max $S_{PQRS} = \frac{ah}{4} \Leftrightarrow$ M là trung điểm của đoạn thẳng AH

*Cách 2:* $S_{PQRS} = \frac{a}{h}x(h - x) = \frac{a}{h}\left[\frac{h^2}{4} - \left(\frac{h}{2} - x\right)^2 \le \frac{ah}{4}\right]$

Vậy max $S_{PQRS} = \frac{ah}{4} \Leftrightarrow x = \frac{h}{2}$, M là trung điểm của đoạn thẳng AH.

# BỘ ĐỀ 17

## ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN 3, TPHCM – NĂM HỌC 1995 – 1996

(VÒNG 1)

**Bài 1:** Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^3 - 7x - 6$

**Bài 2:** Một trường tổ chức lần lượt cho các lớp trồng cây: lớp thứ nhất trồng được 18 cây và thêm $\frac{1}{11}$ số cây còn lại, rồi đến lớp thứ hai trồng 36 cây và thêm $\frac{1}{11}$ số cây còn lại. Tiếp theo lớp thứ ba trồng 54 cây và thêm $\frac{1}{11}$ số cây còn lại. Cứ như thế các lớp trồng hết số cây và số cây trồng được của mỗi lớp bằng nhau. Hỏi trường đó đã trồng được bao nhiêu cây?

**Bài 3:** Cho biểu thức $\dfrac{\dfrac{x-1}{x+1} - \dfrac{x+1}{x-1}}{1 + \dfrac{x^3}{1 - x^3}}$

Hãy viết biểu thức trên dưới dạng tổng của một biểu thức nguyên và một phân thức với bậc của tử thấp hơn bậc của mẫu.

**Bài 4:** Chứng minh rằng "Tổng độ dài ba trung tuyến của một tam giác thì lớn hơn $\frac{3}{4}$ chu vi và nhỏ hơn chu vi của chính tam giác ấy".

**Bài 5:** Gọi O là một điểm ở miền trong tứ giác lồi MNPQ. Nếu bốn tam giác MON, NOP, POQ, QOM có diện tích bằng nhau.

1) MP cắt NO ở A, chứng minh là A là trung điểm của MP.

2) Hãy chứng minh rằng điểm O nằm trên đường chéo NQ hoặc đường chéo MP của tứ giác MNPQ.

## HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1:** $x^3 - 7x - 6 = x^3 - x - 6x - 6 = x(x^2 - 1) - 6(x + 1)$

$= x(x - 1)(x + 1) - 6(x + 1) = (x + 1)(x^2 - x - 6)$

$= (x + 1)(x^2 - 3x + 2x - 6)$

$= (x + 1)\,[(x(x - 3x + 2(x - 3)] = (x + 1)(x + 2)(x - 3)$

**Bài 2:** *Cách 1:*

Theo đầu bài, một lớp trồng được một số cây (A cây) và một phần số cây còn lại. Xét hai trường hợp cuối cùng. Lớp trước lớp cuối cùng được phân công trồng A + $\frac{1}{11}$B. Lớp cuối cùng được chia số cây còn lại tức là $\frac{10}{11}$ B.

Theo quy luật của bài toán, số chia cho mỗi lớp là tổng của hai số hạng số cây thứ nhất được xác định bằng 18, 36, 54 cây, số hạng thứ hai được xác định bằng số cây còn lại. Như vậy lớp cuối cùng sẽ có số cây được chia tính theo lớp trước đó là $(A + 18) + 0$ (không còn số còn lại).

Vậy $A + \frac{1}{11}B = A + 18$ hay $\frac{1}{11}B = 18$

Từ đó $B = 198$. Ta đã xác định lớp cuối cùng được chia $\frac{10}{11}B$ nghĩa là:

$$\frac{10}{11}.198 = 180 \text{ (cây)}$$

Các lớp được trồng số cây bằng nhau nên lớp đầu tiên cũng được trồng 180 cây.

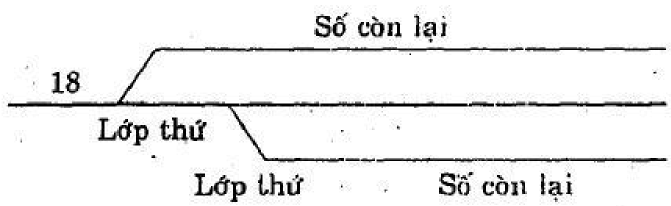
Theo đầu bài: $180 = 18\frac{1}{11}$ (số cây)

Suy ra số cây còn lại sau khi lớp thứ nhất đã trồng được 18 cây sẽ là:

$$(180 - 18) \,.\, 11 = 1782 \text{ (cây)}$$

Vậy số cây trường đó trồng được là: $1782 + 18 = 1800$ (cây)

*Cách 2:* Ta có thể biểu diễn đề bài đó theo sơ đồ sau:




Lớp thứ 1 trồng được 18 cây và $\frac{1}{11}$ số cây còn lại lần thứ nhất (CL 1)

Lớp thứ 2 trồng 36 cây $\frac{1}{11}$ số cây còn lại lần thứ hai (CL 2)

Vì số cây trồng của hai lớp bằng nhau nên $\frac{1}{11}$ CL 1 lớn hơn $\frac{1}{11}$ CL 2 là:

$$36 - 18 = 18 \text{ (cây)}$$

Do đó số cây còn lại lần thứ nhất hơn số cây còn lại lần thứ hai là:

$$18 \,.\, 11 = 198 \text{ (cây)}$$

Theo sơ đồ ta thấy: $\frac{1}{11}$ CL 1 là : $198 - 36 = 162$ (cây)

Vậy số cây của lớp thứ nhất (cũng là số cây của mỗi lớp) là:

$$18 + 162 = 180 \text{ (cây)}$$

Tổng số cây của trường đó trồng là :

$$18 + 11 \,.\, 162 = 18 + 1782 = 1800 \text{ (cây)}$$

*Cách 3:* Gọi x là số lớp đã tham gia lao động trồng cây (Đơn vị là lớp. Điều kiện x nguyên, $x > 1$)

Vì các lớp trồng hết số cây đã giao nên với lớp sau cùng (nghĩa là lớp thứ x) thì số cây được giao trồng vừa hết, và lớp này trồng được: 18x (cây).

Số cây trồng được ở mỗi lớp bằng nhau, nên số cây được giao trồng là 18x . x (cây) hay $18x^2$ (cây)

Số cây trồng của lớp thứ nhất là $\left(18 + \frac{18x^2 - 18}{11}\right)$ cây

Từ đó ta có phương trình:

$18 + \frac{18x^2 - 18}{11} = 18x \Leftrightarrow 198 + 18x^2 - 18 = 198x$

$\Leftrightarrow 18x^2 - 198x + 180 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x - x + 10 = 0$

$\Leftrightarrow x(x - 10) - (x - 10) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 10) = 0$

$\Leftrightarrow x = 10$ (vì $x > 1 \Leftrightarrow x - 1 > 0$ nghĩa là $x - 1 \neq 0$)

Vậy trường đã tổ chức 10 lớp tham gia lao động trồng cây.

Số cây trường đã trồng được là 18.100 = 1800 (cây).

**Bài 3:** $A = \dfrac{\dfrac{x-1}{x+1} - \dfrac{x+1}{x-1}}{1 + \dfrac{x^3}{1-x^3}} = \dfrac{\dfrac{(x-1)^2 - (x+1)^2}{(x+1)(x-1)}}{\dfrac{1}{1-x^3}}$

$= \dfrac{\dfrac{x^2 - 2x + 1 - x^2 - 2x - 1}{(x-1)(x+1)}}{\dfrac{1}{1-x^3}} = \dfrac{-4x(1-x^3)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{4x(x-1)(x^3+x+1)}{(x-1)(x+1)}$

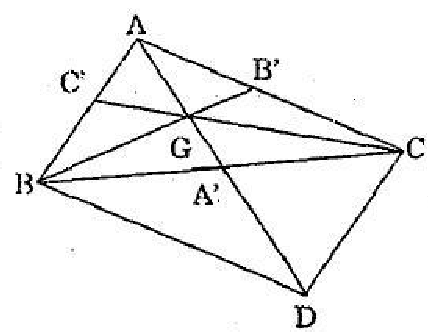
$= \dfrac{4x(x^2+x+1)}{x+1} = \dfrac{4(x^3+x^2+x+1) - 4}{x+1} = \dfrac{4\left[x^2(x+1) + x + 1\right] - 4}{x+1}$

$= \dfrac{4(x+1)(x^2+1) - 4}{x+1} = 4(x^2+1) - \dfrac{4}{x+1}$ (với $x \neq \pm 1$)

**Bài 4:** Gọi AA', BB', CC' là trung tuyến của tam giác ABC và G là trọng tâm của tam giác ABC. Ta có:

GB + GC > BC (bất đẳng thức trong tam giác BGC)

hay $\frac{2}{3}BB' + \frac{2}{3}CC' > BB' + CC' > \frac{3}{2}BC$




Chứng minh tương tự ta có:

$AA' + BB' > \frac{3}{2}AB$

$AA' + CC' > \frac{3}{2}AC$

Từ các kết quả trên ta suy ra :

$2(AA' + BB' + CC') > \frac{3}{2}(AB + BC + AC)$

hay $AA' + BB' + CC' > \frac{3}{4}(AB + BC + AC)$ (1)

Trên tia đối của tia AA' lấy điểm D sao cho A'D = AA'

Suy ra tứ giác ABCD là hình bình hành và có hai đường chéo AD và BC cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, suy ra CD = AB.

Từ AD < AC + CD (bất đẳng thức tam giác) suy ra 2AA' < AC + AB

hay $AA' < \frac{AC + AB}{2}$

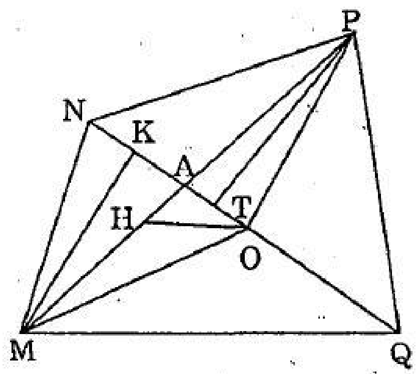
Chứng minh tương tự ta có: $BB' < \frac{AC + BC}{2}$ và $CC' < \frac{BC + AC}{2}$

Từ các kết quả trên suy ra: $AA' + BB' + CC' < AB + BC + CA$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\frac{3}{4}(AB + BC + CA) < AA' + BB' + CC'$

$$< AB + BC + CA$$

**Bài 5:** 1) Theo đề bài ta có $S_{MON} = S_{NOP}$




Suy ra $\frac{1}{2}PT.NO = \frac{1}{2}MK.NO$

(với PT, MK lần lượt là đường cao của tam giác NOP và MON)

Suy ra PT = MK

Dễ dàng chứng minh được hai tam giác vuông MAK và PAT bằng nhau. Suy ra MA = AP hay A là trung điểm của MP.

2) Giả sử đường chéo MP cắt OQ tại H. Chứng minh tương tự câu 1) ta có H là trung điểm MP. Suy ra A ≡ H.

– Nếu O ≠ A thì bốn điểm N, A, O, Q nằm trên một đường thẳng nghĩa là O nằm trên đường chéo NQ của tứ giác MNPQ.

– Nếu ⇔ O ≡ A thì O nằm trên đường chéo MP của tứ giác MNPQ. Như vậy O nằm trên đường chéo MP hoặc NQ của tứ giác MNPQ.

## BỘ ĐỀ 18

### ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUẬN 3, TPHCM – NĂM HỌC 1995 – 1996

(VÒNG 2)

**Bài 1:** Rút gọn biểu thức: $A = 75(4^{1993} + 4^{1992} + ... + 4^2 + 5) + 25$

**Bài 2:** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số: $y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$

**Bài 3:** Chứng minh rằng nếu $abc = a + b + c$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$ thì

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 2$$

**Bài 4:** Tìm các số nguyên dương n để $n^{1988} + n^{1987} + 1$ là số nguyên tố.

**Bài 5:** Cho tam giác ABC với AB = 5cm, AC = 6cm, BC = 7cm. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, O là giao điểm của hai tia phân giác trong của tam giác ABC. Chứng minh GO//AC.

**Bài 6:** Cho hình vuông ABCD trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = \frac{BC}{3}$, trên tia đối của tia CD lấy N sao cho $CN = \frac{AD}{2}$. I là giao điểm của tia AM và BN. Chứng minh năm điểm A, B, I, C, D cùng cách đều một điểm.

## HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1:**

$A = 75(4^{1993} + 4^{1992} + .... + 4^2 + 5) + 25$

$A = 25.3(4^{1993} + 4^{1992} + .... + 4^2 + 4 + 1) + 25$

$A = 25(4 - 1)(4^{1993} + 4^{1992} + ... + 4^2 + 4 + 1) + 25$

$A = 25(4^{1994} + 4^{1993} + ... + 4^3 + 4^2 + 4 - 4^{1993} - 4^{1992} - ... - 42 - 4 - 1) + 25$

$A = 25.(4^{1994} - 1) + 25$

$A = 25.(4^{1994} - 1 + 1)$

$A = 25.4^{1994}$

**Bài 2:** Ta có: $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \leq \frac{4}{3} \text{ hay } y \leq \frac{4}{3}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

Vậy max $y = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

**Bài 3:** Ta có:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{a}.\frac{1}{b} + \frac{1}{b}.\frac{1}{c} + \frac{1}{c}.\frac{1}{a}\right)$$

$$= 4 - 2.\frac{a+b+c}{abc} = 4 - 2 = 2$$

**Bài 4:**

- $n = 1$ ta có $n^{1988} + n^{1987} + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$ là số nguyên tố
- $n \geq 2$ ta có $n^{1988} + n^{1987} + 1 > n^2 + n + 1$,

Mặt khác, ta có $n^{1998} - n^2 = n^2(n^{1986} - 1) = n^2[(n^3)^{662} - (1^3)^{662}]$

Chia hết cho $n^3 - 1^3$ mà $n^3 - 1^3 = (n - 1)(n^2 + n + 1)$

Áp dụng $(a^n - b^n) \vdots (a - b)$

Vậy $(n^{1998} - n^2) \vdots (n^2 + n + 1)$

Tương tự $n^{1987} - n = n(n^{1986} - 1) \vdots (n^2 + n + 1)$

Do đó: $n^{1988} + n^{1987} + 1 = (n^{1988} - n^2) + (n^{1987} - n) + (n^2 + n + 1)$ chia hết cho $n^2 + n + 1$

Vậy $n^{1988} + n^{1987} + 1$ có nhiều hơn hai ước.

Suy ra $n^{1988} + n^{1987} + 1$ là hợp số.

Vậy $n = 1$ là số nguyên dương duy nhất thỏa mãn $n^{1988} + n^{1987} + 1$ là số nguyên tố.

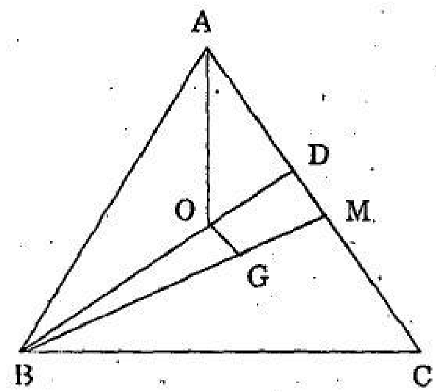
**Bài 5:** Gọi BD, BM lần lượt là phân giác, trung tuyến của tam giác ABC

Theo tính chất phân giác của tam giác, ta có:

$\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC}$ hay $\frac{DA}{DC} = \frac{5}{7}$

$\Rightarrow \frac{DA}{DC + DA} = \frac{5}{7+5} \Rightarrow \frac{DA}{AC} = \frac{5}{12}$

$\Rightarrow DA = \frac{5}{12}.AC = \frac{5}{12}.6 = \frac{5}{2}(cm)$




AO là phân giác của tam giác ABD nên ta có:

$$\frac{OD}{OB} = \frac{DA}{AB} \text{ hay } \frac{OD}{OB} = \frac{\frac{5}{2}}{5} = \frac{1}{2}$$

mà $\frac{GM}{GB} = \frac{1}{2}$ (tính chất trọng tâm tam giác)

Suy ra tam giác BDM có $\frac{OD}{OB} = \frac{GM}{GB}\left(= \frac{1}{2}\right)$

nên OG//DM (Định lý Talet đảo hay OG//AC).

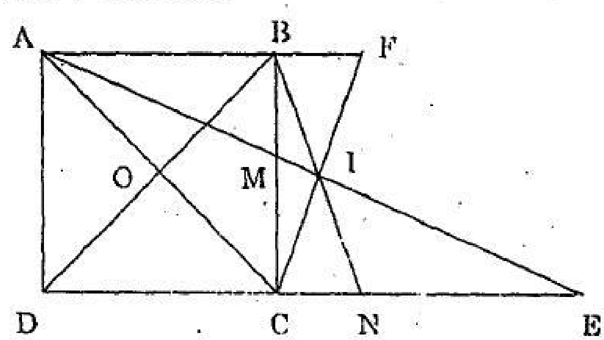
**Bài 6:** *Cách 1:*

Gọi E là giao điểm của AI với DC và F là giao điểm của CI với AB. Áp dụng hệ quả định lý Talet vào $\Delta ABM$ với AB // CE ta có:

$$\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{CE} = \frac{1}{2} \text{ (và } MB = \frac{1}{3}BC)$$

Suy ra $\quad CE = 2AB$ mà $CN = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}AB$ nên $NE = \frac{3}{2}AB$

Và $\quad DE = DC + CE = 3AB$



Áp dụng hệ quả định lý Talet vào $\Delta ABI$ với AB//NE, ta có:

$$\frac{IB}{IN}=\frac{IA}{IE}=\frac{AB}{NE}=\frac{2}{3} \text{ (vì } NE=\frac{3}{2}AB) \Rightarrow \frac{IA}{IE+IA}=\frac{2}{3+2} \Rightarrow \frac{IA}{AE}=\frac{2}{5}$$

Áp dụng hệ quả định lý Talet vào $\Delta BIF$ với BF // CN, ta có:

$$\frac{IF}{IC}=\frac{IB}{IN}=\frac{BF}{CN}=\frac{2}{3} \text{ suy ra } BF=\frac{2}{3}CN=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}AB=\frac{1}{3}AB$$

và $\frac{IF+IC}{IC}=\frac{2+3}{3}$ hay $\frac{CF}{IC}=\frac{5}{3}$ do đó $\frac{IC}{CF}=\frac{3}{5}$

Áp dụng định lý Pytago vào tam giác vuông EAD, ta có:

$$AE^2=AD^2+DE^2=AB^2+9AB^2=10AB^2$$

Từ $\frac{IA}{AE}=\frac{2}{5}\Rightarrow\frac{IA^2}{AE^2}=\frac{4}{25}\Rightarrow IA^2=\frac{4}{25}AB^2=\frac{8}{5}AB^2$

Áp dụng định lý Pytago vào tam giác vuông CBF, ta có:

$$CF^2=CB^2+BF^2=AB^2+\frac{1}{9}AB^2=\frac{10}{9}AB^2$$

Từ $\frac{IC}{CF}=\frac{3}{5}\Rightarrow\frac{IC^2}{CF^2}=\frac{9}{25}\Rightarrow IC^2=\frac{9}{25}\cdot\frac{10}{9}AB^2=\frac{2}{5}AB^2$

Suy ra $IA^2+IC^2=\frac{8}{5}AB^2+\frac{2}{5}AB^2=2AB^2$

Áp dụng định lý Pytago vào tam giác vuông ABC, ta có:

$$AC^2=AB^2+BC^2=AB^2+AB^2=2AB^2$$

$\Delta AIC$ có $AC^2=AI^2+IC^2\ (=2AB^2)$

nên $\Delta AIC$ vuông tại I (định lý Pytago đảo).

Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD của hình vuông ABCD ta có:

$$OA=OB=OC=OD=\frac{1}{2}AC$$

(Tính chất trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông AIC)

Vậy OA = 0B = OC = OD = OI

Nên năm điểm A, B, C, D, I cùng cách đều điểm O.

*Cách 2:*

Gọi E là giao điểm của AI với DC và F là giao điểm của CI với AB

Chứng minh được $BF=\frac{AB}{3}$ (xem cách 1)

Xét $\Delta ABM$ và $\Delta CBF$ có:

$AB=BC$, $\widehat{ABM}=\widehat{CBF}$ $(90^0)$, $BM=BF$ $(BM=\frac{AB}{2}=\frac{BC}{3}=BM)$

Do đó $\Delta ABM=\Delta CBF$ (c–g–c)

Suy ra $\widehat{BAM}=\widehat{BCF}$

Xét $\Delta MAB$ và $\Delta MCI$ có:

$\widehat{BAM}=\widehat{MCI}$, $\widehat{AMB}=\widehat{IMC}$ (đối đỉnh)

Do đó $\Delta MAB \backsim \Delta MCI$ (g–g)

Suy ra $\widehat{ABM} = \widehat{CIM}$

Mà $\widehat{ABM} = 90^0$ nên $\widehat{CIM} = 90^0$

Tứ giác ABCD là hình vuông nên OA = OB = OC = OD

$\Delta IAC$ vuông tại I, IO là trung tuyến nên OI = OA = OC

Vậy OA = OB = OC = OD = OI

Suy ra năm điểm A, B, C, D, I cùng cách đều điểm O.

## BỘ ĐỀ 19

### ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 8 TRƯỜNG THCS NGUYỄN DU QUẬN 1, TPHCM – NĂM HỌC 1995 – 1996

(ĐỀ THỨ NHẤT)

**Bài 1** Chứng minh $21^{30} + 39^{21}$ chia hết cho 45.

**Bài 2:** Cho a, b, c là ba số dương.

Chứng minh $\dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{b^2}{a+c} + \dfrac{c^2}{b+a} \geq \dfrac{a+b+c}{2}$

**Bài 3:** Chứng minh rằng nếu x + y + z = 0 thì:

$2(x^5 + y^5 + z^5) = 5xyz\,(x^2 + y^2 + z^2)$

**Bài 4:** Cho tam giác ABC, trung tuyến CM. Qua điểm Q trên AB vẽ đường thẳng d song song với CM. Đường thẳng d cắt BC tại R và cắt AC tại P. Chứng minh nếu QA . QB = QP. QR thì tam giác ABC vuông tại C.

**Bài 5:** Trên các cạnh AB < BC < CA của tam giác ABC cố định, người ta lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho: $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{BN}{NC} = \dfrac{CP}{PA} = k$ (k>0)

Tính $S_{MNP}$ theo $S_{ABC}$ và theo k.

Tính k sao cho $S_{MNP}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

### HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1:** Đặt $x = 21^{30} + 39^{21}$

Nhận xét 45 = 9.5 và 9 và 5 là nguyên tố cùng nhau.

Vậy để chứng minh $x \vdots 45$ ta cần chứng minh $x \vdots 9$ và $x \vdots 5$

Thật vậy: $21 \vdots 3 \Rightarrow 21^{30} \vdots 9$, $39 \vdots 3 \Rightarrow 39^{21} \vdots 9$

Do đó $x \vdots 9$

Mặt khác $x = 21^{30} + 39^{21} = (21^{30} - 1)^{30} + [\,39^{21} - (-1)^{21}] \vdots 5$

Vì $(21^{30} - 1^{30}) \vdots (21 - 1) \vdots 5$, $[39^{21} - (-1)^{21}]\,[39 - (-1)] \vdots 5$

Vận dụng: $(a^n - b^n) \vdots (a - b)$

**Bài 2:** *Cách 1:*

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{a+b+c}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b+c}+a+\frac{b^2}{a+c}+b+\frac{c^2}{a+b}+c\geq\frac{3}{2}(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+a(b+c)}{b+c}+\frac{b^2+b(a+c)}{a+c}+\frac{c^2+c(a+b)}{a+b}\geq\frac{3}{2}(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(a+b+c)}{b+c}+\frac{b(a+b+c)}{a+c}+\frac{c(a+b+c)}{a+b}\geq\frac{3}{2}(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}\ \text{(do a, b, c > 0 nên a + b + c > 0)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{a+c}+1+\frac{c}{a+b}+1\geq\frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{a+c}+\frac{a+b+c}{a+b}\geq\frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\right)\geq 9 \qquad (1)$$

vì đặt $x = a + b > 0$; $y = b + c > 0$ và $z = a + c > 0$

và $x + y + z = 2(a + b + c)$

$$(1) \Leftrightarrow (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+1+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+1\geq 9$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)\geq 6$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}-2\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}-2\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}-2\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{xy}+\frac{(y-z)^2}{yz}+\frac{(x-z)^2}{xz}\geq 0\ \text{(đúng)}$$

Vì $x, y, z > 0$ và $(x-y)^2\geq 0$; $(y-z)^2\geq 0$, $\forall\, x, y, z$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

*Cách 2:*

Với $a, b, c > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}\geq a \Leftrightarrow 4a^2+(b+c)^2\geq 4a(b+c)$$

$$\Leftrightarrow 4a^2-4a(b+c)+(b+c)^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow [2a-(b+c)]^2\geq 0\ \text{(đúng)}$$

Lý luận tương tự ta có :

$$\begin{cases} \dfrac{b^2}{a+c} + \dfrac{a+c}{4} \geq b \\ \dfrac{c^2}{a+b} + \dfrac{a+b}{4} \geq c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} + \frac{a+b+c}{2} \geq a+b+c$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

**Bài 3:** Ta có: $x + y + z = 0$ nên $x + y = -z$; $x + y = y$ và $y + z = -x$

Khi ấy: $x^3 + y^3 + x^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) + z^3$

$= (-z)^3 - 3xy(-z) + z^3$ (vì $x + y = -z$)

$= 3xyz$

Suy ra: $(x^3 + y^3 + z^3)(x^2 + y^2 + z^2) = 3xyz\,(x^2 + y^2 + z^2)$

$\Leftrightarrow x^5 + y^5 + z^5 + x^2y^2(x + y) + x^2z^2(x + z) + y^2z^2(y + z) =$

$= 3xyz\,(x^2 + y^2 + z^2)$ (*)

Do $(x + y + z)^2 = 0$ nên $2(xy + yz + zx) = x^2 + y^2 + z^2$

$\Rightarrow -2xyz(xy + yz + zx) = xyz(x^2 + y^2 + z^2)$

Thay vào (*) ta được:

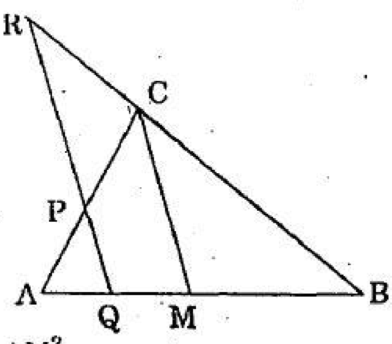
$x^5 + y^5 + z^5 - xyz(xy + yz + zx) = 3xyz(x^2 + y^2 + z^2)$

$\Rightarrow 2(x^5 + y^5 + z^5) - 2xyz(xy + yz + xz) = 6xyz(x^2 + y^2 + z^2)$

$\Rightarrow 2(x^5 + y^5 + z^5) + xyz(x^2 + y^2 + z^2) = 6xyz(x^2 + y^2 + z^2)$

$\Rightarrow 2(x^5 + y^5 + z^5) = 5xyz(x^2 + y^2 + z^2)$ (dpcm)

**Bài 4:** Trong $\Delta BRQ$ có $CM//QR$ nên $\dfrac{CM}{QR} = \dfrac{MB}{QB}$ (hệ quả định lý Talet)




$\Rightarrow CM = \dfrac{QR}{QB}.MB = \dfrac{QA}{QP}.MB$

(do $QA.QB = QP.QR$ (gt) $\Rightarrow \dfrac{QR}{QB} = \dfrac{QA}{QP}$

Mặt khác, trong tam giác ACM có $PQ//CM$

nên: $\dfrac{QA}{QP} = \dfrac{AM}{CM}$

Suy ra : $CM = \dfrac{AM}{CM}.MB \Rightarrow CM^2 = AM.MB = AM^2$

(vì $AM = MB$ – M là trung điểm AB) $\Rightarrow CM = AM = MB$

Tam giác CAB có CM trung tuyến và $CM = \dfrac{AB}{2} \Rightarrow \Delta CAB$ vuông tại C.

**Bài 5:** Xét bài toán:

Trên AB, AC của $\Delta ABC$ ta lấy thứ tự các điểm M và P thì: