1 MỘT SỐ BÀI TOÁN RỜI RẠC VÀ ĐẠI SỐ TỔ HỢP

Bài 1.

Một Quốc hội có n thượng nghị sĩ, chia thành 10 đảng và 10 uỷ ban. Mỗi nghị sĩ thuộc về đúng một đảng và đúng một uỷ ban. Giả sử tên gọi các đảng là $P_1, \ldots, P_{10}$ và các uỷ ban là $C_1, \ldots, C_{10}$. Tìm số bé nhất n sao cho có ít nhất 11 nghị sĩ mà mỗi người trong nhóm này thuộc về một đảng và một uỷ ban có cùng chỉ số .

Bài 2.

Cho các số thực dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$, gọi S_k là tổng của tất cả các tích của k số chọn từ $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Chứng minh rằng $S_k S_{n-k} \geq (C_n^k)^2 a_1 a_2 \ldots a_n$, với $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Bài 3.

Xét đa thức $P_n(x) = C_n^2 + C_n^5 x + C_n^8 x^2 + \ldots + C_n^{3k+2} x^k$, với $n \geq 2$ là một số tự nhiên và $k = \left[\dfrac{n-2}{3}\right]$.

a) Chứng minh

$$P_{n+3}(x) = 3P_{n+2}(x) - 3P_{n+1}(x) + (x+1)P_n(x).$$

b) Tìm tất cả các số tự nhiên a sao cho $P_n(a^3)$ chia hết cho $3^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$ với mọi $n \geq 2$.

Bài 4.

Cho số nguyên $n > 1$. Tìm số tất cả các hoán vị

$$(a_1 , a_2 , \dots , a_n)$$

của các số $1, 2, \dots , n$ thỏa mãn tính chất sau: tồn tại chỉ một chỉ số $i \in \{1, 2, \dots , n-1\}$ sao cho $a_i > a_{i+1}$.

Bài 5.

Dãy số thực $a_1 , a_2 , \dots , a_n$ $(n \geq 3)$ tạo thành một cấp số cộng. Biết rằng, tồn tại một hoán vị $a_{i_1} , a_{i_2} , \dots , a_{i_n}$ của các số trên sao cho dãy mới này là một cấp số nhân. Tìm các số $a_1, a_2, \dots, a_n$ có tính chất như thế sao cho chúng từng đôi một khác nhau và số lớn nhất trong chúng là 1996.

Bài 6.

Tìm tất cả các tập hợp A gồm hữu hạn các số thực không âm khác nhau sao cho:

(a) A chứa ít nhất 4 phần tử;

(b) với bất kì 4 phần tử khác nhau $a, b, c, d \in A$, ta có

$$ab + cd \in A.$$

Bài 7.

Trong một kì thi, 8 vị giám khảo đánh giá từng thí sinh chỉ bằng hai từ *đúng* và *sai*. Biết rằng với bất kì hai thí sinh nào cũng nhận được kết quả như sau: có hai giám khảo cùng cho đúng; có hai giám khảo với người thứ nhất cho đúng và người thứ hai cho sai; có hai giám khảo với người thứ nhất cho sai và người thứ hai cho đúng; cuối cùng, có hai giám khảo cùng cho sai. Hỏi số lớn nhất có thể có của các thí sinh là bao nhiêu?

Bài 8.

Với một hoán vị $a_1, a_2, ..., a_n$ của các số 1, 2, ..., n, ta được phép thay đổi vị trí của hai khối liên tiếp, nghĩa là, từ

$$a_1, ..., a_i, \underbrace{a_{i+1}, a_{i+2}, ..., a_{i+p}}_{A}, \underbrace{a_{i+p+1}, a_{i+p+2}, ..., a_{i+q}}_{B}, a_{i+q+1}, ..., a_n$$

bằng cách thay đổi vị trí của A và B cho nhau ta được

$$a_1, ..., a_i, \underbrace{a_{i+p+1}, a_{i+p+2}, ..., a_{i+q}}_{B}, \underbrace{a_{i+1}, a_{i+2}, ..., a_{i+p}}_{A}, a_{i+q+1}, ..., a_n.$$

Hãy tìm số lần thay đổi bé nhất như thế để có thể đưa được hoán vị n, n−1, ..., 1 về lại hoán vị 1, 2, ..., n.

Bài 9.

Có 2n học sinh tham dự một cuộc thi, mỗi người được phép đệ trình ban giám khảo một bài toán (các bài phải khác nhau). Sau đó, ban giám khảo sẽ phân phối lại cho mỗi học sinh một bài toán từ 2n bài đã nhận. Cuộc thi này sẽ được gọi là *công bằng* nếu có n học sinh nhận được bài của n học sinh còn lại. Chứng minh rằng số tất cả các cách mà ban giám khảo thực hiện để làm cho cuộc thi công bằng là một số chính phương.

Bài 10.

Tìm số nguyên dương bé nhất n để tồn tại ít nhất 2003 hoán vị $\sigma \in S_n$ thoả mãn điều kiện:

với mọi $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$ ta có

$$|\sigma(k) - \sigma(k+1)| \leq 2.$$

(Một hoán vị $\sigma \in S_n$ là một song ánh

$$\sigma : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}.)$$

Bài 11.

Cho số nguyên $n \geq 2$. Gọi S là tập hợp gồm n phần tử và A_i, với $1 \leq i \leq m$, là các tập con khác nhau và gồm ít nhất 2 phần tử của S sao cho từ

$$A_i \cap A_j \neq \varnothing, A_i \cap A_k \neq \varnothing, A_j \cap A_k \neq \varnothing$$

ta suy ra được $A_i \cap A_j \cap A_k \neq \varnothing$.

Chứng minh rằng $m \leq 2^{n-1} - 1$.

Bài 12.

Với mọi số nguyên dương n, hãy đánh giá tổng

$$\sum_{i=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} C_{n-i+1}^{i},$$

ở đây, $C_m^k = \dfrac{m!}{k!(m-k)!}$ và $\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$ là phần nguyên của $\dfrac{n+1}{2}$.

Bài 13.

Tại một cuộc khiêu vũ, một nhóm S gồm 1994 học sinh đứng thành một vòng tròn lớn. Mỗi học sinh sẽ vỗ vào tay một trong hai học sinh kề hai bên một số lần. Với mọi học sinh x, ta gọi $f(x)$ là tổng tất cả các số lần mà x vỗ vào tay những người bạn đứng kề. Chẳng hạn, ta giả sử có 3 học sinh A, B và C. A vỗ vào tay B hai lần, B vỗ vào tay C ba lần và C vỗ vào tay A năm lần. Như thế, ta có

$$f(\mathrm{A}) = 7,\ f(\mathrm{B}) = 5 \text{ và } f(\mathrm{C}) = 8.$$

(i) Chứng minh rằng

$$\{ f(x) \mid x \in \mathrm{S} \} \neq \{ n \mid n \text{ là số nguyên, } 2 \leq n \leq 1995 \}.$$

(ii) Tìm một ví dụ chứng tỏ:

$\{ f(x) \mid x \in S \} = \{ n \mid n$ là số nguyên, $n \neq 3, 2 \leq n \leq 1996 \}$.

Bài 14.

Gọi S là tập hợp tất cả các n-bộ $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, với mỗi X_i là một tập con của tập $\{1, 2, \dots, 1998\}$. Với mọi k thuộc S (tức là, k là một n-bộ như trên), ta gọi $f(k)$ là số tất cả các phần tử trong hội của n tập hợp của k.

Tìm tổng tất cả các $f(k)$ khi k chạy trong khắp S.

Bài 15.

Xét hoán vị $s_0, s_1, \dots, s_n$ của các số $0, 1, 2, \dots, n$, ta tác động một *phép biến đổi* lên hoán vị này nếu tìm được i, j sao cho $s_i = 0$ và $s_j = s_{i-1} + 1$. Hoán vị mới tạo thành nhận được bằng cách đổi chỗ hai phần tử s_i và s_j. Hỏi với số n nào thì xuất phát từ hoán vị $(1, n, n-1, \dots, 3, 2, 0)$ ta có thể nhận được hoán vị $(1, 2, \dots, n, 0)$ bằng cách lặp lại nhiều lần phép biến đổi đó?

Bài 16.

Cho dãy số a_n được xác định bởi $a_1 = 0, a_2 = 1$,

$$a_n = \frac{1}{2}[na_{n-1} + n(n-1)a_{n-2} + (-1)^{n-1}n] + (-1)^n.$$

Tìm $a_n + 2C_n^1 a_{n-1} + 3C_n^2 a_{n-2} + \dots + nC_n^{n-1} a_1$.

Bài 17.

Có bao nhiêu số nguyên không âm sao cho biểu diễn thập phân của nó có không quá 1993 chữ số, và các chữ số đó viết theo thứ tự không giảm? [Chẳng hạn như, 55677 là số chấp nhận được, còn 54 thì không.]

Bài 18.

Cho số nguyên dương n và X là một tập hợp gồm n phần tử. Chứng minh rằng tồn tại 2^{n-1} tập con của X sao cho bất cứ hai tập con nào trong chúng cũng phải có một phần tử chung.

Bài 19.

Gọi S là tập tất cả các hoán vị $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ của $(1, 2, \ldots, n)$ sao cho trong mỗi hoán vị này có đúng một phần tử a_i (khác a_1) lớn hơn các phần tử đứng trước nó. Tìm số trung bình của các số a_1 trong các phần tử thuộc S.

Bài 20.

Có 1999 người tham dự một cuộc triển lãm. Cứ chọn ra 50 người một cách tuỳ ý thì trong số 50 người này sẽ có ít nhất 2 người không biết nhau. Chứng minh rằng ta có thể tìm được ít nhất 41 người sao cho mỗi người trong số này biết nhiều nhất là 1958 người khác.

Bài 21.

Cho A là tập hợp gồm 8 phần tử. Tìm số lớn nhất các tập con gồm 3 phần tử của A sao cho giao của hai tập bất kì trong các tập con này không phải là một tập hợp gồm 2 phần tử.

Bài 22.

Chứng minh rằng nếu n chẵn thì 2^n chia hết

$$C_{2n}^{0} + 3C_{2n}^{2} + \ldots + 3^{i}C_{2n}^{2i} + \ldots + 3^{n}C_{2n}^{2n}.$$

Bài 23.

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1991}C_{1991}^{0}-\frac{1}{1990}C_{1990}^{1}+\frac{1}{1989}C_{1989}^{2}-\ldots$$

$$\ldots+\frac{(-1)^m}{1991-m}C_{1991-m}^{m}+\ldots-\frac{1}{996}C_{996}^{995}=\frac{1}{1991}.$$

Bài 24.

Gọi n, k là các số nguyên dương với $k \le n$ và gọi S là tập hợp chứa n số thực phân biệt. Gọi T là tập tất cả số thực có dạng $x_1 + x_2 + \ldots + x_k$ với $x_1, x_2, \ldots, x_k$ là các phần tử phân biệt của S. Chứng minh rằng T chứa ít nhất $k(n-k)+1$ phần tử phân biệt.

Bài 25.

Giả sử $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ và $A_1, A_2, \ldots, A_k$ là các tập con của S sao cho với mọi $1 \le i_1, i_2, i_3, i_4 \le k$, ta có

$$\left|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup A_{i_3} \cup A_{i_4}\right| \le n-2.$$

Chứng minh rằng $k \le 2^{n-2}$.

(Kí hiệu $|A|$ để chỉ số phần tử của tập hữu hạn A.)

Bài 26.

Chứng minh rằng với mọi cặp số tự nhiên m, k, số m có thể được biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng

$$m = C_{a_k}^{k} + C_{a_{k-1}}^{k-1} + \ldots + + C_{a_t}^{t},$$

với $a_k > a_{k-1} > \ldots > a_t \ge t \ge 1$.

Bài 27.

Tám ca sĩ tham dự một cuộc hội diễn, họ biểu diễn m bài hát. Mỗi bài hát được 4 ca sĩ trình bày, mỗi cặp ca sĩ thì có hát chung với nhau một số bài hát. Tìm số m bé nhất để điều này có thể thực hiện được.

Bài 28.

Gọi X là tập hợp $\{1, 2, 3, \ldots, 2001\}$. Tìm số n bé nhất sao cho nếu cho một tập con gồm n phần tử của X thì ta luôn có thể tìm được một phần tử là luỹ thừa của 2 hoặc tìm được hai phần tử có tổng là luỹ thừa của 2.

Bài 29.

Các số $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, (n^2)^2$ được viết theo thứ tự tăng thành một mảng $n \times n$ như sau:

$$\begin{array}{llll}
1^2 & 2^2 & \ldots & n^2 \\
(n+1)^2 & (n+2)^2 & \ldots & (2n)^2 \\
\ldots & \ldots & & \ldots \\
(n^2-n+1)^2 & (n^2-n+2)^2 & \ldots & (n^2)^2
\end{array}$$

Từ mỗi hàng của mảng trên, ta chọn ra một số sao cho không có hai số nào nằm trên cùng một cột. Hỏi tổng các phần tử được chọn có thể nhận giá trị bao nhiêu?

Bài 30.

Chứng minh rằng tồn tại một tập hữu hạn $A \subset R^2$ sao cho với mọi $X \in A$, có các điểm $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{1993}$ thuộc A mà khoảng cách giữa X và Y_i bằng 1 với mọi i.

Bài 31.

Có tồn tại một số nguyên $n > 1$ thoả mãn điều kiện sau đây hay không : Tập hợp các số nguyên dương có thể được phân hoạch thành n tập con khác trống, sao cho một tổng bất kì của $n - 1$ số nguyên, mỗi số được lấy trong một tập con của n – 1 tập con tuỳ ý, sẽ thuộc tập con còn lại.

Bài 32.

Tập hợp gồm 2^n phần tử được chia thành các tập con đôi một không giao nhau. Xét một thuật toán chuyển một số phần tử của 1 tập con vào một tập con khác. Ngoài ra, số phần tử được chuyển bằng số phần tử của tập hợp con thứ hai (tập hợp này phải có số phần tử không lớn hơn tập đầu tiên). Chứng minh rằng sau một số hữu hạn các phép chuyển như vậy, ta có thể nhận được một tập hợp con trùng với tập hợp lúc ban đầu (gồm 2^n phần tử).

Bài 33.

Cho $S = \{1,2,3,...,280\}$. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho mọi tập hợp con gồm n phần tử của S đều chứa 5 số đôi một nguyên tố cùng nhau.

Bài 34.

(a) Chứng minh tập Q^+ các số hữu tỉ dương có thể phân hoạch được thành 3 tập A, B, C rời nhau thoả mãn:

$$BA = B,\ B^2 = C,\ BC = A$$

trong đó $HK = \{ hk \mid h \in H, k \in K \}$ và $B^2 = BB$.

(b) Chứng minh tất cả các lập phương của các số hữu tỉ dương đều thuộc A theo phân hoạch trên.

(c) Tìm các phân hoạch $Q^+ = A \cup B \cup C$ như vậy mà không có số nguyên dương n nào mà $n \le 34$, với n và n+1 thuộc A, nghĩa là: $\min \{ n \in N \mid n \in A, n+1 \in A \} > 34$.

Bài 35.

Chọn ra một số tập con gồm 4 phần tử từ một tập hợp A có *n* phần tử sao cho bất cứ hai tập 4 phần tử nào trong các tập con đã chọn cũng có nhiều nhất là hai phần tử chung. Chứng minh rằng tồn tại một tập con của A gồm ít nhất $\sqrt[3]{6n}$ phần tử của A sao cho tập này không chứa bất cứ một tập con 4 phần tử nào đã chọn.

Bài 36.

Cho U = { 1, 2,..., n }, trong đó $n \geq 3$. Một tập con S của U được gọi là *tách được bởi một chỉnh hợp các phần tử của* U nếu tồn tại một chỉnh hợp của U sao cho một phần tử không thuộc S xuất hiện đâu đó giữa hai phần tử của S trong chỉnh hợp này. Chẳng hạn, 13542 tách {1, 2, 3 } nhưng không tách { 3, 4, 5 }. Chứng minh rằng với bất kì $n - 2$ tập con của U, mỗi tập con chứa ít nhất 2 và không quá $n - 1$ phần tử, tồn tại một chỉnh hợp các phần tử của U sao cho chỉnh hợp này tách tất cả các tập con ấy.

Bài 37.

Chứng minh rằng tập hợp các số nguyên dương không thể bị phân hoạch thành ba tập con không rỗng sao cho với hai số nguyên bất kì x, y lấy ở trong hai tập con khác nhau, thì số $x^2 - xy + y^2$ thuộc vào tập con thứ ba.

Bài 38.

Có 100 tấm thẻ khác nhau được đánh số từ 1 đến 100, toàn bộ 100 tấm thẻ này được đặt trong 3 cái hộp phân biệt nhau (mỗi hộp phải chứa ít nhất 1 tấm thẻ).

Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 100 tấm thẻ ấy vào trong 3 hộp nói trên để cho nếu ta chọn ngẫu nhiên 2 hộp, rồi lại rút ngẫu nhiên 1 tấm thẻ ở mỗi hộp được chọn, thì từ tổng của 2 thẻ này (tức là tổng của 2 số được đánh trên chúng) ta có thể suy ra được hộp thứ ba không được chọn?

Bài 39.

Một tập hợp A không trống gồm các số thực được gọi là một B_3-tập nếu điều kiện sau được thoả: Từ $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in A$ và $a_1 + a_2 + a_3 = a_4 + a_5 + a_6$ sẽ suy ra được rằng các dãy (a_1, a_2, a_3) và (a_4, a_5, a_6) là trùng nhau với sai kém một phép hoán vị. Đặt

$$A = \{a(0) = 0 < a(1) < a(2) < \ldots\},$$

$$B = \{b(0) = 0 < b(1) < b(2) < \ldots\}$$

là các dãy vô hạn các số thực sao cho $D(A) = D(B)$, trong đó, với một tập hợp X các số thực, D(X) kí hiệu cho tập hợp các hiệu số $\{|x - y| \setminus x, y \in X\}$.

Chứng minh rằng nếu A là một B_3-tập thì A = B.

Bài 40.

Xét một hoán vị $(a_1, a_2, \ldots, a_6)$ của các số 1, 2, ..., 6 sao cho số các chuyển vị bé nhất cần thiết để đưa

$$(a_1, a_2, \ldots, a_6) \text{ về } (1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

là 4. Tìm số các hoán vị có tính chất đó.

Bài 41.

Với đa thức P bậc 2000 có các hệ số thực phân biệt, ta gọi M(P) là tập hợp mọi đa thức có được từ P bằng cách hoán vị các hệ số. Một đa thức P được gọi là *n-độc lập* nếu $P(n) = 0$ và từ một đa thức $Q \in M(P)$ bất kì ta có thể có được một đa thức Q_1 sao cho $Q_1(n) = n$ bằng cách thay đổi không quá một cặp hệ số của Q. Tìm tất cả các số nguyên n sao cho các đa thức n-độc lập tồn tại.

Bài 42.

Với một số nguyên dương n ta gọi một dãy gồm các số 0 và số một là một dãy *cân bằng* nếu nó chứa n số 0 và n số một. Hai dãy cân bằng a và b được gọi là *láng giềng* nếu ta có thể dịch chuyển một trong 2n kí hiệu của a tới một vị trí khác thì được b. Chẳng hạn, khi n = 4, các dãy cân bằng 01101001 và 00110101 là láng giềng vì số 0 thứ ba (hay thứ tư) trong dãy thứ nhất có thể dịch chuyển đến vị trí dầu hay thứ hai thì được dãy thứ hai.

Chứng minh rằng có một tập hợp S gồm không quá

$$\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$$

dãy cân bằng sao cho mỗi dãy cân bằng bất kì đều phải là bằng hay láng giềng của ít nhất một dãy trong S.

Bài 43.

Gọi $\mathcal{S}$ là một họ các tập con gồm 3 phần tử của tập

$$\{1, 2, \ldots, n\}.$$

Biết rằng hai phần tử bất kì thuộc $\mathcal{S}$ đều có không quá 1 phần tử chung. Chứng minh rằng $\mathcal{S}$ không thể có nhiều hơn $\dfrac{n(n-1)}{6}$ phần tử. Tìm một tập $\mathcal{S}$ như thế có đúng

$$\frac{n(n-1)}{6} \text{ phần tử.}$$

Bài 44.

Gọi P là tập hợp gồm 6 từ, mỗi từ gồm 4 chữ cái, mỗi chữ cái là a hoặc b. Kí hiệu Q_P là tập hợp gồm tất cả các từ (cũng gồm hai chữ cái a và b) sao cho các từ này không chứa các từ của P (như là từ con của từ đó). Chứng minh rằng :

a) Nếu Q_P là tập hữu hạn thì nó không chứa một từ nào có độ dài ≥ 11 ;

b) Tồn tại một tập hợp P để cho Q_P là tập hữu hạn và Q_P có chứa các từ với độ dài 10.

Bài 45.

Giả sử $w_1, \dots, w_k$ là các số thực khác nhau và có tổng khác 0. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên $n_1, \dots, n_k$ sao cho $n_1w_1 + \dots + n_kw_k > 0$ và với mọi hoán vị không đồng nhất π của $\{1, \dots, k\}$ ta có

$$n_1 w_{\pi(1)} + \dots + n_k w_{\pi(k)} < 0.$$

Bài 46.

Gỉa sử $-1 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq 1$ là các số thực thoả mãn điều kiện $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$. Chứng minh rằng tồn tại một hoán vị σ của $\{1, 2, \dots, n\}$ sao cho với mọi $1 \leq p \leq q \leq n$, ta có $x_{\sigma(p)} + \dots + x_{\sigma(q)} < 2 - \dfrac{1}{n}$.

Hơn nữa, hãy chứng minh rằng biểu thức ở vế phải không thể được thay bằng $2 - \dfrac{4}{n}$.

Bài 47.

Cho $A = (a_{ij})$, với $i, j = 1, 2, \dots, n$, là một ma trận với các hệ số a_{ij} là những số nguyên không âm. Với mọi i, j mà $a_{ij} = 0$, tổng các phần tử ở hàng thứ i và cột thứ j bé nhất là bằng n. Chứng minh rằng tổng các phần tử của ma trận có giá trị bé nhất là $n^2/2$.

Bài 48.

Từ các số 10, 11, 12, ..., 99, ta thành lập một tập con S tùy ý gồm 10 số phân biệt. Chứng minh rằng từ tập hợp S này có thể trích ra được 2 tập con rời nhau (có giao bằng rỗng) mà tổng giá trị các phần tử ở hai tập con đó bằng nhau.

Bài 49.

Cho n là số nguyên lớn hơn 2, gọi V_n là tập các số nguyên có dạng 1 + kn, với k nguyên dương. Một số m thuộc V_n được gọi là *bất khả phân* (*indecomposable*) nếu nó không thể biểu diễn được thành tích của 2 số thuộc V_n. Chứng minh rằng tồn tại một phần tử của V_n sao cho phần tử đó có thể biểu diễn được thành tích các phần tử bất khả phân của V_n bằng nhiều hơn một cách (các biểu diễn chỉ khác nhau về thứ tự nhân tử thì được xem là như nhau).

Bài 50.

Một hội quốc tế có hội viên thuộc 6 nước khác nhau. Danh sách các hội viên gồm 1978 người được đánh số theo thứ tự 1, 2, ..., 1978. Chứng minh rằng có ít nhất một hội viên mà số thứ tự bằng tổng các số thứ tự của hai hội viên thuộc cùng một nước với hội viên đó, hoặc bằng hai lần số thứ tự của một hội viên thuộc cùng một nước với hội viên đó.

Bài 51.

Cho r là số tự nhiên thỏa mãn điều kiện $1 \le r \le n$. Xét tất cả các tập con gồm r phần tử của tập hợp $\{1,2,...,n\}$. Mỗi tập con này đều có phần tử bé nhất. Gọi $F(n,r)$ là trung bình cộng của tất cả các phần tử bé nhất đó. Chứng minh rằng :

$$F(n,r) \le \frac{n+1}{r+1}.$$

Bài 52.

Xét tập hợp M gồm 1985 số nguyên dương phân biệt, sao cho không có số nào có ước số nguyên tố lớn hơn 23. Chứng minh rằng M chứa một tập con gồm 4 phần tử mà tích của 4 phần tử này là lũy thừa bậc 4 của một số nguyên.

Bài 53.

Cho S là tập hợp $\{1,2,...,n\}, n \ge 1$. Ta gọi $p_n(k)$ là số các hoán vị của S có đúng k điểm cố định. Chứng minh rằng:

$$\sum_{k=0}^{n} k.p_n(k) = n!$$

Bài 54.

Chứng minh rằng tập hợp $\{1,2,3,...,1989\}$ có thể được viết thành hội của các tập con rời nhau $A_1, A_2, ..., A_{117}$ sao cho mọi A_i, i = 1, 2, ..., 117, đều có chứa 17 phần tử và tổng giá trị các phần tử của những A_i đều bằng nhau.

Bài 55.

Một hoán vị $\{x_1, x_2, ..., x_{2n}\}$ của tập hợp {1, 2,..., 2n} được gọi là *có tính chất* P, trong đó n là một số nguyên dương, nếu $|x_i - x_{i+1}| = n$ với ít nhất một i thuộc $\{1,2,...,2n-1\}$. Chứng minh rằng với mỗi n, số các hoán vị có tính chất P lớn hơn số các hoán vị không có tính chất đó.

Bài 56.

Cho p là một số nguyên tố lẻ. Tìm số các tập con A của tập hợp {1, 2, ..., 2p}, biết rằng :