

## 100 bài toán hình và các bài toán giải ngược từ cuối có lời giải

### I. MỘT SỐ VÍ DỤ MINH HỌA.

Trong chương trình toán học lớp 5, các em đã được học công thức tính diện tích hình tam giác:

Ta có công thức:  $S = a \times h; \Rightarrow a = S \times 2 : h$  hoặc  $h = S \times 2 : a$

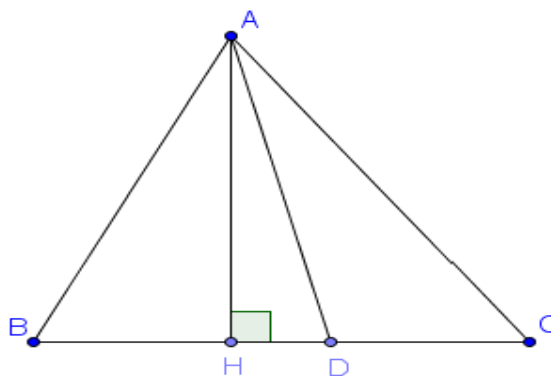
$S$  là diện tích hình tam giác;  $a$  là số đo độ dài một cạnh đáy;  $h$  là chiều cao của cạnh đáy tam giác đó.

Từ công thức cơ bản này, tôi nhấn mạnh cho tất cả các bài toán có liên quan đến hình tam giác đều xoay quanh mối quan hệ đến diện tích, cạnh đáy, đường cao ứng với tam giác đó. Tuy vậy, đối với các bài toán có trình độ nâng cao học sinh rất lúng túng không biết xuất phát từ đâu, cách giải như thế nào? Chính vì vậy tôi đưa ra một số ví dụ quan trọng giúp học sinh vận dụng công thức tính diện tích hình tam giác một cách sáng tạo và linh hoạt hơn, cụ thể:

1. **Trường hợp 1:** Hai tam giác có đáy bằng nhau (hoặc chung đáy) và có chiều cao bằng nhau (hoặc chung chiều cao) thì diện tích của hai tam giác đó bằng nhau.

**Ví dụ:** Cho tam giác ABC. Trên cạnh BC ta lấy một điểm chính giữa D. Hãy so sánh diện tích 2 tam giác ABD và ADC.

**Nhận xét:** Hai tam giác ABD và ADC có chung chiều cao hạ từ đỉnh A. Muốn so sánh diện tích của chúng thì ta phải so sánh hai cạnh đáy của chúng. (hình 8)



**Giải:**

Hai tam giác ABD và ADC có đáy  $BD = DC$  (Vì bài toán cho D là điểm chính giữa của BC) và chiều cao AH chung.

Vậy:  $S_{ABD} = S_{ADC}$ .

2. **Trường hợp 2:** Hai tam giác có đáy bằng nhau (hay chung đáy), tam giác nào có chiều cao gấp 2, 3, 4... lần thì diện tích gấp 2, 3, 4... lần.

**Ví dụ:** Cho tam giác ABC. Trên chiều cao AH ta lấy một điểm E sao cho  $AH = EH \times 3$ . Hãy so sánh diện tích tam giác ABC và EBC.

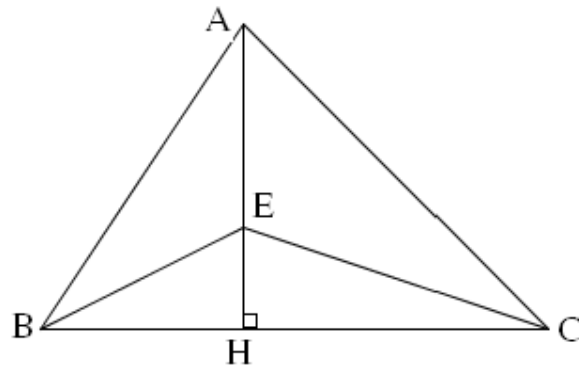
**Nhận xét:** Hai tam giác ABC và EBC có chung đáy BC nên để so sánh diện tích ta phải so sánh chiều cao hạ từ đỉnh E và A xuống đáy BC.

Giải:

Nối E với B và với C.

Hai tam giác ABC và EBC có chung đáy BC và có chiều cao

$AH = EH \times 3$ . Vậy  $S_{ABC} = S_{EBC} \times 3$ .



**3. Trường hợp 3 :** thì Hai tam giác có chiều cao bằng nhau ( hoặc chung chiều cao) tam giác nào có đáy gấp 2, 3, 4... lần diện tích cũng gấp 2, 3, 4... lần.

Ví dụ: Cho tam giác

ABC. Kéo dài BC thêm

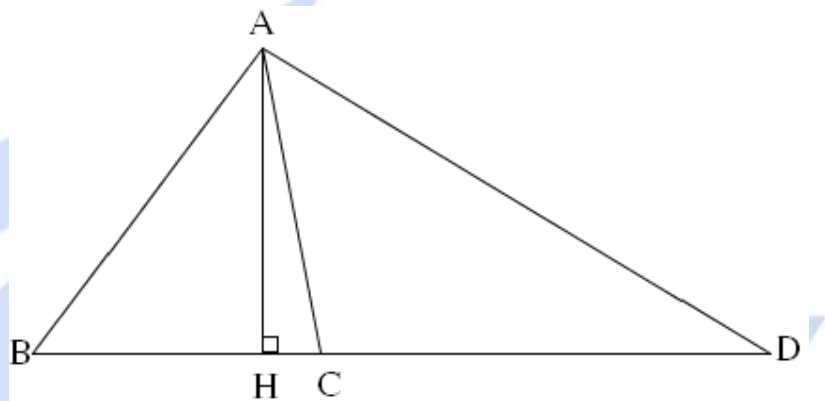
một đoạn  $CD = BC \times 2$ .

Nối A với D. So sánh

diện tích 2 tam giác

ADB và ABC.

Nhận xét : Hai tam giác



ADB và ABC có chung chiều cao từ đỉnh A nên để so sánh diện tích của 2 tam giác ta cần so sánh 2 đáy BC và BD.

Hai tam giác ABC và ABD có chung chiều cao AH và đáy  $BD = 3 \times BC$

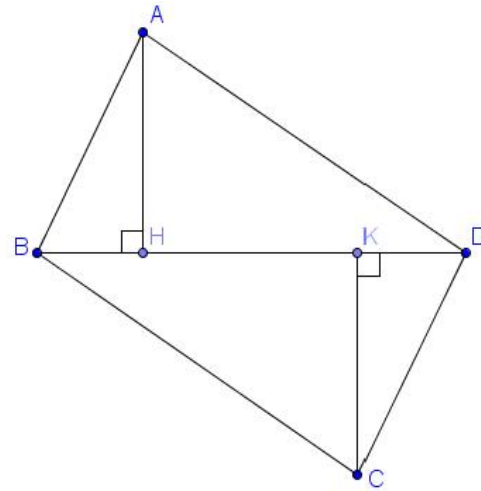
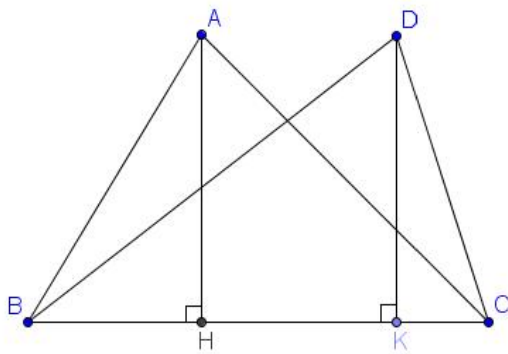
(vì  $CD = 2 \times BC$ )

Vậy  $S_{ABD} = 3 \times S_{ABC}$ .

**4. Trường hợp 4:** Hai tam giác có diện tích bằng nhau, đáy (hoặc chiều cao) bằng nhau thì chiều cao (hoặc đáy) cũng bằng nhau.

Ví dụ 1: Hai tam giác ABC và DBC có diện tích bằng nhau. Hãy so sánh chiều cao AH và DK hạ từ đỉnh A và D xuống đáy BC.

Nhận xét : Hai tam giác ABC và DBC có diện tích bằng nhau nên để so sánh chiều cao AH và DK ta phải tìm mối liên hệ giữa hai đáy ứng với chiều cao AH



Giải:

Theo bài ra ta có :  $S_{ABC} = S_{DBC}$ .

Mặt khác 2 tam giác ABC và DBC có diện tích bằng nhau lại còn có chung đáy BC nên suy ra chiều cao AH và DK hạ từ đỉnh A và D xuống đáy BC phải bằng nhau. Vậy  $AH = DK$ .

So sánh chiều cao AH và CK hạ từ A và C xuống đáy BD.

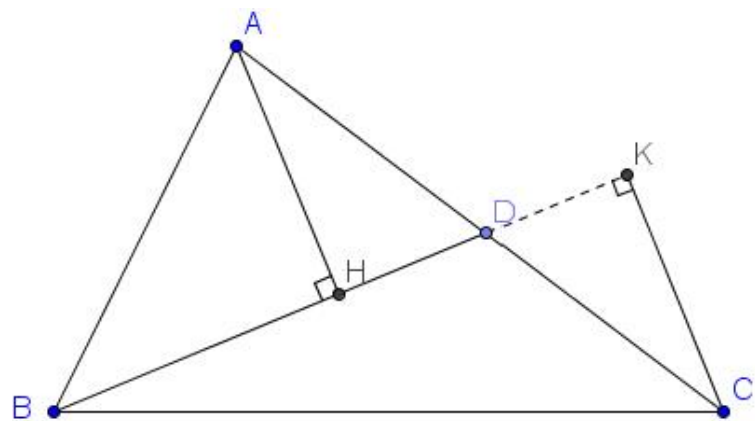
Ví dụ 2: Cho tam giác ABC. Trên AC lấy một điểm D sao cho khi nối B với D thì

BD chia tam giác ABC thành 2 tam giác có diện tích bằng nhau là ABD và BDC.

Nhận xét: Muốn giải bài toán trước hết phải tìm vị trí điểm D trên cạnh AC tức là ta phải so sánh AD và DC.

(GV hướng dẫn)

Để so sánh chiều cao AH và CK thì ta phải tìm mối quan hệ giữa diện tích 2 tam giác ABD và BDC, quan hệ giữa 2 cạnh đáy ứng với chiều cao AH và CK.



Giải

Hai tam diện tích bằng nhau và có chung chiều cao hạ từ đỉnh B nên đáy  $AD = DC$  hay D là điểm chính giữa AC.

Mặt khác 2 tam giác ABD và BDC lại có chung đáy BD nên chiều cao AH = CK

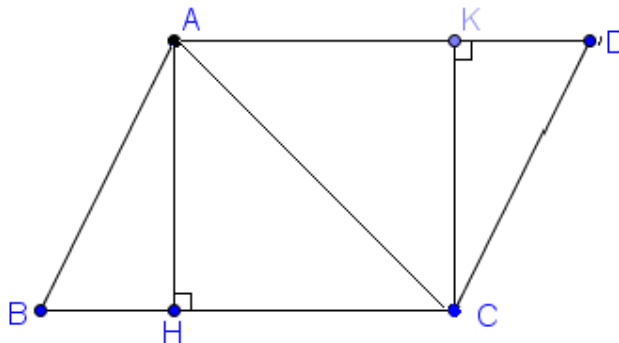
Ví dụ 3: Hai tam giác ABC và ADC có diện tích bằng nhau và chiều cao AH = CK. So sánh BC và AD.

Giải

Theo bài ra:  $S_{ABC} = S_{ADC}$

Mặt khác 2 tam giác này lại có chiều cao AH = CK nên suy ra đáy của chúng phải bằng nhau.

Vậy BC = AD.

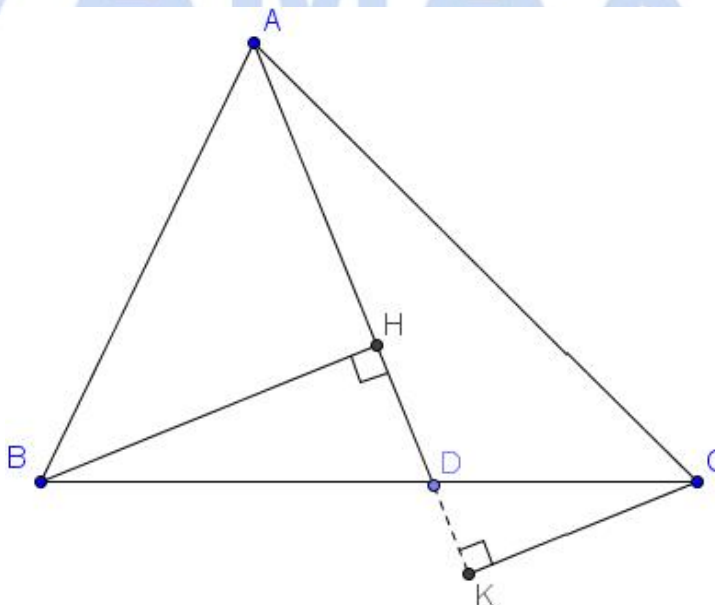


5.Trường hợp 5: Hai tam giác có đáy (hoặc chiều cao) bằng nhau, tam giác nào có diện tích gấp 2, 3, 4... lần chiều cao (hoặc đáy) cũng gấp 2, 3, 4... lần.

Ví dụ 1 : Cho tam giác ABC. Trên BC lấy một điểm D sao cho khi nối A với D ta được tam giác ABD gấp 2 lần diện tích tam giác ADC. Hãy so sánh chiều cao BH và CK hạ từ đỉnh B và C xuống AD.

a) Nhận xét :

- Tìm vị trí điểm D trên cạnh BC. So sánh chiều cao BH và CK thì ta phải tìm mối quan hệ giữa diện tích 2 tam giác ABD và ADC, mối quan hệ giữa 2 cạnh đáy ứng với chiều cao BH và CK.



Giải

Theo bài ra:  $S_{ABD} = 2 \times S_{ADC}$

mà hai tam giác này lại có chung chiều cao hạ từ đỉnh A

nên đáy  $BD = 2 \times DC$ .

Mặt khác 2 tam giác ABD và ADC lại có chung đáy AD nên chiều cao

$$BH = 2 \times CK$$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC. Trên BC kéo dài về phía C lấy 1 điểm D sao cho diện tích tam giác ABD và gấp 2 lần diện tích tam giác ABC. So sánh BD và BC.

Nhận xét: (HD giải của GV) Muốn so sánh BD và BC ta phải tìm mối quan hệ về diện tích của 2 tam giác ABD và ABC, tìm mối quan hệ giữa 2 chiều cao hạ từ đỉnh xuống đáy BC và BD.

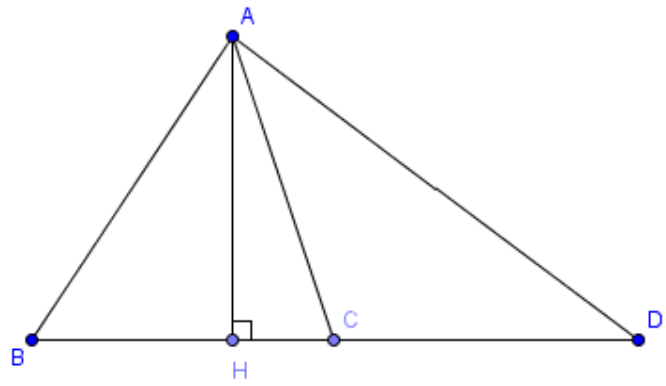
Giải:

Theo bài ra ta có:

$$S_{ABD} = S_{ABC} \times 2$$

Mặt khác 2 tam giác này lại có chung chiều cao AH suy ra đáy BD của tam giác ABD phải gấp 2 đáy BC của tam giác ABC.

$$\text{Vậy } BD = BC \times 2$$



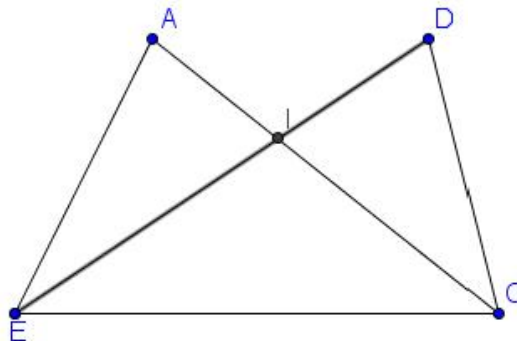
6. Trường hợp 6: Hai tam giác có diện tích bằng nhau, nếu chúng có một phần diện tích chung thì các phần diện tích còn lại của 2 tam giác đó cũng bằng nhau.

Ví dụ: Cho tam giác ABC và DBC có diện tích bằng nhau. AC và DB cắt nhau ở I. Hãy so sánh diện tích AIB và DIC.

Giải: Theo bài ra ta có:  $S_{ABC} = S_{DBC}$ .

Mặt khác 2 tam giác này có diện tích bằng nhau lại có chung hình IBC nên phần diện tích còn lại của chúng phải bằng nhau.

$$\text{Vậy } S_{AIC} = S_{DIC}.$$



## II. MỘT SỐ BÀI TẬP NÂNG CAO.:

Sau khi học sinh biết cách giải các bài toán trung gian đã nêu trên và đặc biệt là nắm chắc kết luận, tôi giới thiệu một số bài toán nâng cao mà khi giải các bài toán này yêu cầu học sinh phải vận dụng linh hoạt, sáng tạo và tổng hợp các kiến thức đã được học.

Bài toán 1: cho tam giác ABC có góc A là góc vuông,  $AB = 30\text{cm}$ ,  $AC = 45\text{cm}$ . M là một điểm trên cạnh AB sao cho  $AM = 20\text{cm}$ . Từ M kẻ đường thẳng song song với cạnh BC, cắt AC tại điểm N. Tính diện tích tam giác AMN.

Nhận xét: (HD giải của GV)

Muốn tính diện tích tam giác vuông AMN khi biết  $AM = 20\text{cm}$  ta cần tính AN. Mà  $AC = 45\text{cm}$  nên chỉ cần tính NC.

Tam giác BMC có chiều cao là  $AB = 30\text{cm}$  nên để tính đáy NC ta cần biết  $S_{BMC}$ .

Diện tích tam giác BMC được tính thông qua diện tích của tam giác BMC.

### Giải

Nối M với C, B với N. Diện tích tam giác BMC là:

$$45 \times (30 - 20) : 2 = 225 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Vì  $MN \parallel BC$  nên tứ giác BMNC là hình thang.

$S_{BMC} = S_{BNC}$  (vì chung đáy BC, chiều cao hạ từ đỉnh M và N xuống đáy BC

tức là chiều cao của hình thang BMNC)

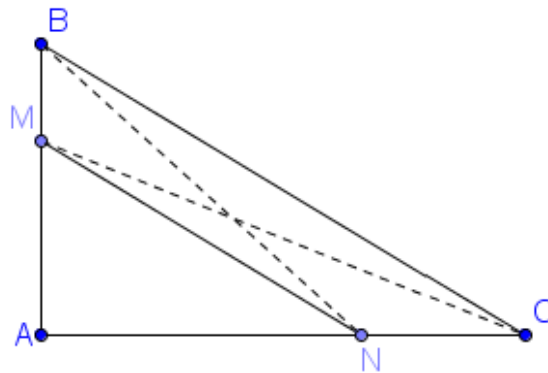
Độ dài đoạn NC là:  $225 \times 2 : 30 = 15$

(cm)

Diện tích tam giác AMN là :  $20 \times (45 - 15)$

$$: 2 = 300 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

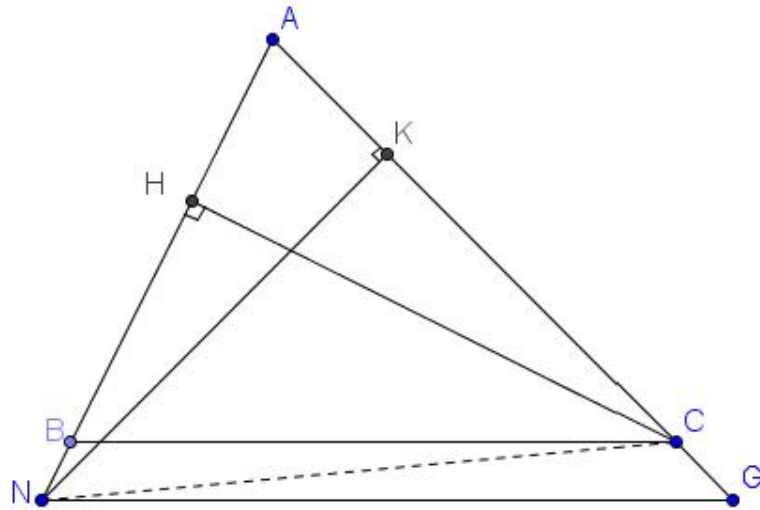
Đáp số:  $300 \text{ cm}^2$ .



Bài toán 2 : Cho tam giác có diện tích là  $12 \text{ cm}^2$ . Cạnh  $AB = 8 \text{ cm}$  và

$AC = 5 \text{ cm}$ . Kéo dài thêm  $AB$  đến  $M$  và  $AC$  đến  $N$  sao cho

$BM = CN = 2 \text{ cm}$ . Hỏi diện tích tam giác  $AMN$  là bao nhiêu?



Cách 1: Nhận xét:

Tam giác  $AMN$  có

$$AM = 8 + 2 = 10 \text{ cm.}$$

Để tính được diện tích của nó cần tính chiều cao hạ từ đỉnh  $N$  xuống đáy  $AM$  (hoặc  $AN = 5 + 2 = 7 \text{ cm}$ ).

Để tính được diện tích của ta cần tính chiều cao hạ từ đỉnh  $M$  xuống đáy. Mặt khác chiều cao hạ từ  $N$  xuống đáy  $AM$  lại là chiều cao của tam giác  $ABN$  nên chỉ cần tìm diện tích của tam giác  $ABN$  thì bài toán sẽ được giải.

Giải

Nối  $B$  với  $N$  ta có : Chiều cao  $BH$  là:

$$12 \times 2 : 5 = 4,8 \text{ (cm)}$$

Diện tích tam giác  $ANB$  là:

$$(5+2) \times 4,8 : 2 = 16,8 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{Chiều cao } NK \text{ là: } 16,8 \times 2 : 8 = 4,2 \text{ (cm)}$$

Diện tích tam giác  $AMN$  là :

$$(8+2) \times 4,2 : 2 = 21 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Đáp số :  $21 \text{ cm}^2$

Cách 2:

Nhận xét: ( HD giải của GV)

$S_{AMN}$  so sánh được với  $S_{ANB}$

$S_{ANB}$  so sánh được với  $S_{ABC}$

$\Rightarrow S_{AMN}$  so sánh được với  $S_{ABC}$

$S_{ANB} = \frac{7}{5} S_{ABC}$  ( vì chung chiều cao hạ từ đỉnh  $B$ , đáy  $AN = \frac{5+2}{5} AC$ ).

Diện tích tam giác  $ANB$  là:

$$12 \times \frac{7}{5} = 16,8 \text{ (cm}^2\text{)}$$

( vì chung chiều cao hạ từ  $N$ , đáy  $AM =$



Mà  $S_{ABC} = 12\text{cm}^2$  nên ta tính được  $S_{AMN}$

$$\frac{8+2}{8} AB)$$

Diện tích tam giác AMN là:  $16,8 \times$

$$\frac{4}{5} = 21 (\text{cm}^2)$$

Đáp số:  $21 \text{cm}^2$

Bài toán 3: Cho tam giác ABC với M là chính giữa cạnh AB, N là điểm chính giữa đoạn MB, P là điểm chính giữa cạnh AC, Q là điểm chính giữa đoạn PC. Tính diện tích tam giác ABC bằng  $16\text{cm}^2$ .

Nhận xét:  $S_{MNPQ} = S_{ABQ} - S_{AMP} - S_{NBQ}$

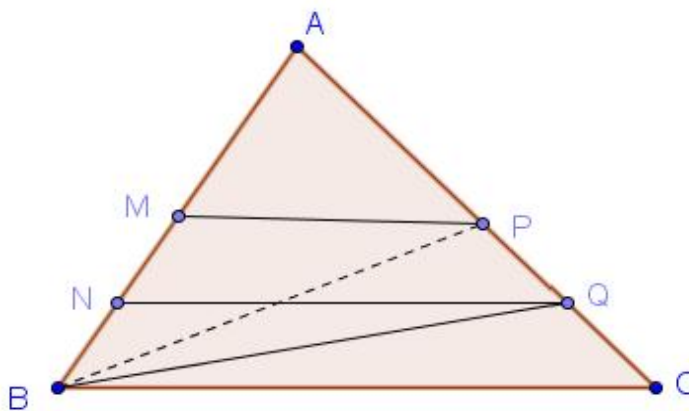
Như vậy ta cần tính:

$$S_{ABQ} = ? \text{cm}^2$$

$$S_{AMP} = ? \text{cm}^2$$

$$S_{NBQ} = ? \text{cm}^2$$

Giải



Nối  
B  
với  
Q; B  
với  
P ta  
có:  
 $S_{ABQ}$   
 $= \frac{3}{4}$

$S_{ABC}$  ( vì chung chiều cao hạ từ B, đáy  $AQ = \frac{3}{4} AC$ )

Diện tích tam giác ABQ là:  $16 \times \frac{3}{4} = 12 (\text{cm}^2)$

$S_{NQB} = \frac{1}{4} S_{ABP}$  ( vì chung chiều cao hạ từ điểm Q, đáy  $NB = \frac{1}{4} AB$ )

Diện tích tam giác NBQ là:  $12 \times \frac{1}{4} = 3 (\text{cm}^2)$

$S_{AMP} = \frac{1}{2} S_{ABP}$  (1) ( vì chung chiều cao hạ từ đỉnh P, đáy  $AM = \frac{1}{2} AC$ )

$S_{ABP} = \frac{1}{2} S_{ABC}$  (2) ( vì chung chiều cao hạ từ điểm B, đáy  $AP = \frac{1}{2} AC$ )



Từ (1) và (2) ta có:  $S_{AMP} = \frac{1}{4} S_{ABC}$  Diện tích tam giác AMP là:  $16 \times \frac{1}{4} = 4(\text{cm}^2)$

Diện tích tứ giác MNPQ là:  $12 - 4 - 3 = 5(\text{cm}^2)$

Đáp số :  $5 \text{ cm}^2$

**Bài toán 4:** Cho tam giác ABC và một điểm O nằm trong tam giác, đường thẳng AO cắt cạnh BC tại M. Đường thẳng BO cắt CA tại N. Cho biết diện tích tam giác AOB là  $3 \text{ cm}^2$ , diện tích BOM và AON đều bằng  $1 \text{ cm}^2$ . Tính diện tích tam giác ABC.

Mà  $S_{AOB} = 3 \text{ cm}^2$  nên để tính  $S_{ABC}$

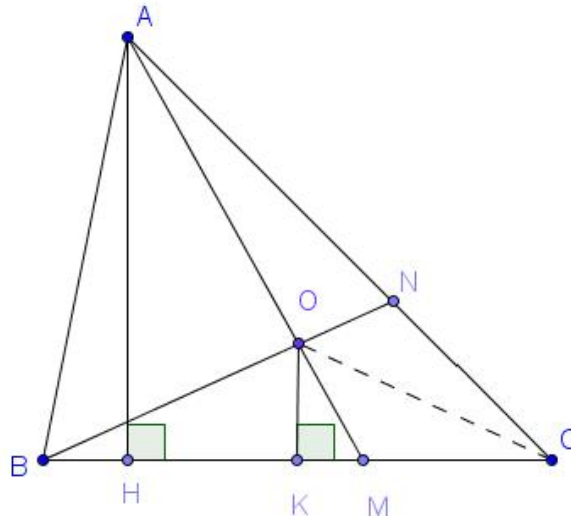
ta cần so sánh:  $S_{AOB}$  với  $S_{ABC}$

$S_{BOC}$  với  $S_{ABC}$

$\Rightarrow S_{ABC}$  so sánh với  $S_{AOB}$ . Sau đó

tính được  $S_{ABC}$ .

Giải. Ta có:  $S_{ABM}$  bằng  $S_{ABN} = 3 + 1 = 4 (\text{cm}^2)$ . Nối O với C hạ đường cao OK; AH; OP; BQ.



Ta  
thấ  
y:  
OK  
=  
 $\frac{1}{4}$   
AH  
(vỡ  
 $S_{BO}$

$$S_{BOM} = \frac{1}{4} S_{ABM}, \text{ chung đáy BM}$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{4} S_{ABC} \text{ (vì chung đáy BC, chiều cao OK bằng } \frac{1}{4} \text{AH)}$$

$$S_{AON} = \frac{1}{4} S_{ABN} \text{ (vì chung đáy AN)}$$

$$S_{AOC} = \frac{1}{4} S_{ABC} \text{ (vì chung đáy AC, chiều cao OP bằng } \frac{1}{4} \text{QB)}$$

$$\text{Mặt khác: } S_{AOB} = S_{ABC} - (S_{AOC} + S_{BOC})$$

$$\text{Hay } S_{AOB} = S_{ABC} - \left( \frac{1}{4} S_{ABC} + \frac{1}{4} S_{ABC} \right)$$

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} S_{ABC}$$

Diện tích tam giác ABC là:  $3 : \frac{1}{2} = 6(\text{cm}^2)$

Đáp số:  $6 \text{ cm}^2$

Bài toán 5: Cho tam giác ABC có diện tích  $420\text{cm}^2$ . N là điểm chính giữa cạnh AC. P là điểm nằm trên cạnh AB sao cho  $AP = 3 \times PB$ . Các đoạn thẳng BN và CP cắt nhau tại K. Hãy tính diện tích tam giác BKC?

Nhận xét: ( HD giải của GV)

Tính diện tích tam giác BKC mà chưa biết số đo cạnh đáy và chiều cao nên ta phải tìm mối quan hệ giữa diện tích tam giác BKC với diện tích tam giác khác.

Giải

$S_{ABN} = S_{NCK}$  (1) (Vì chung chiều cao hạ từ đỉnh B, đáy

$AN = NC$ )

$S_{AKN} = S_{NKC}$  (2) (Vì chung chiều cao hạ từ đỉnh K, đáy

$AN = AC$ )

Từ(1) và (2) ta có  $S_{ABK} = S_{BCK}$

$S_{PBC} = \frac{1}{3} S_{APC}$  (3) (Vì chung chiều cao hạ từ đỉnh C, đáy  $PB = \frac{1}{3} AP$ )

$S_{PKB} = \frac{1}{3} S_{APK}$  (4) (vì chung chiều cao hạ từ đỉnh K, đáy  $PB = \frac{1}{3} AP$ )

Từ (3) và (4) ta có:  $S_{BKC} = \frac{1}{3} S_{AKC}$

Nếu gọi  $S_{BKC}$  là 1 phần thì  $S_{ABK}$  là 1 phần và  $S_{AKC}$  là 3 phần bằng nhau như thế. Vậy  $S_{ABC} = 1 + 1 + 3 = 5$  (phần)

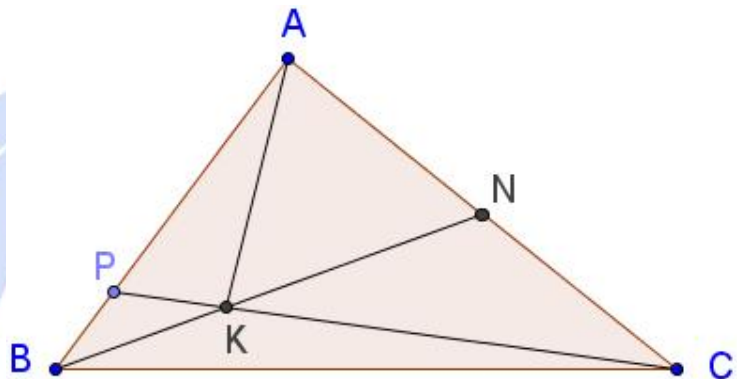
Diện tích tam giác BKC là:  $420 : 5 = 84 (\text{cm}^2)$

Đáp số:  $84 \text{ cm}^2$

Bài toán 6: Cho tam giác ABC. Trên cạnh AB lấy điểm D, E sao cho  $AD = DE = EB$ , trên cạnh AC lấy điểm M, N sao cho  $AM + MN = NC$ . Tính diện tích tứ giác DEMN bằng  $6 \text{ cm}^2$ .

Nhận xét: ( HD giải của GV)

$S_{DENM} = S_{DEM} + S_{MEN}$

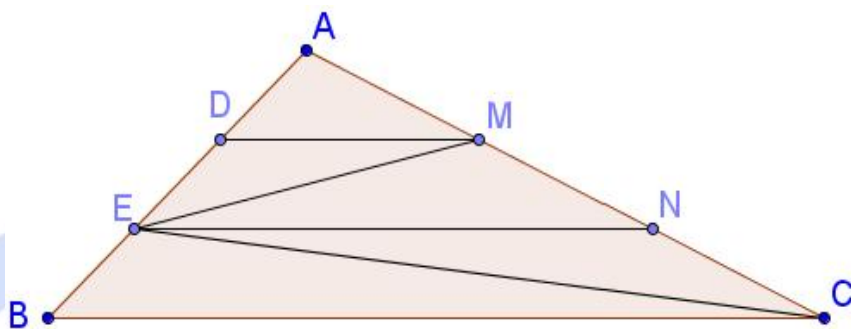


Để tính  $S_{ABC}$  ta cần so sánh  $S_{DEM}$  và  $S_{MEN}$  với diện tích các tam giác có liên quan đến tam giác ABC.

### Giải

$$S_{DEM} = \frac{1}{2} S_{AEM} \text{ (Vì chung chiều cao hạ từ đỉnh M, đáy } DE = \frac{1}{2} AE \text{)}$$

$$S_{MEN} = \frac{1}{2} S_{MEC} \text{ (vì chung chiều cao hạ từ đỉnh E, đáy } MN = \frac{1}{2} MN \text{)}$$



$$S_{DEM} + S_{MEN} = \frac{1}{2} \times (S_{DENM} + S_{MEN}) \quad \text{Hay } S_{DENM} = \frac{1}{2} S_{AEC} \quad (1) \text{ Mặt khác}$$

$$S_{AEC} = \frac{2}{3} S_{ABC} \quad (2) \text{ (vì chung chiều cao hạ từ đỉnh C, đáy } AE = \frac{2}{3} AB \text{)}$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta cú: } S_{DENM} = \frac{1}{2} S_{ABC}$$

$$S_{ABC} = 6 : \frac{1}{3} = 18 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Đáp số:  $18 \text{ cm}^2$

Bài toán 7: Cho tam giác ABC. M là điểm trên cạnh CA sao cho  $CN = 3 \times NA$ . AM cắt BN tại D. Hãy tính diện tích tam giác ABC nếu biết diện tích tam giác ADB bằng  $20 \text{ cm}^2$ .

Nhận xét:  $S_{ABC} = S_{ADB} + S_{ADC} + S_{BDC}$

Để tính  $S_{ABC}$  cần tính diện tích tam giác ADC và diện tích tam giác BDC.

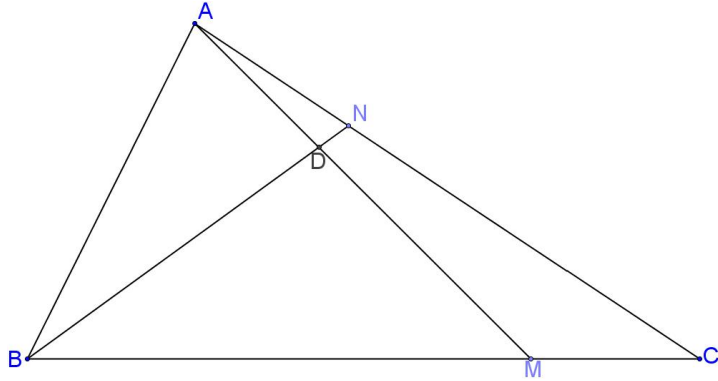
Giải

$$S_{ABN} = \frac{1}{3} S_{BNC} \quad (1) \quad (\text{vì chung}$$

chiều cao hạ từ B, đáy

$$AN = \frac{1}{3} NC)$$

$$S_{AND} = \frac{1}{3} S_{NDC} \quad (2)$$



(vì chung chiều cao hạ từ đỉnh D, đáy  $AN = \frac{1}{3} NC$ )

Từ (1) và (2) ta có:  $S_{ADB} = \frac{1}{3} S_{BDC}$

Diện tích tam giác BDC là:  $20 : \frac{1}{3} = 60 \text{ (cm}^2\text{)}$ :

$$S_{AMC} = \frac{1}{2} S_{BDM} \quad (3) \quad (\text{Vì chung chiều cao hạ từ đỉnh D, đáy } MC = \frac{1}{2} BM)$$

$$S_{MDC} = \frac{1}{2} S_{NDM} \quad (4) \quad (\text{vì chung chiều cao hạ từ đỉnh D, đáy } MC = \frac{1}{2} BM)$$

Từ (3) và (4) ta có:  $S_{ADC} = \frac{1}{2} S_{ADB}$

Diện tích tam giác ADC là:  $20 \times \frac{1}{2} = 10 \text{ (cm}^2\text{)}$

Vậy diện tích tam giác ABC là:  $20 + 10 + 60 = 90 \text{ (cm}^2\text{)}$

Đáp số:  $90 \text{ cm}^2$

**Bài toán 8:** Cho tam giác ABC có cạnh  $AB = 9 \text{ cm}$  và có diện tích là  $36 \text{ cm}^2$ . Trên BC lấy điểm M sao cho  $BM = 3 \times MC$ . Qua M người ta vẽ một đường thẳng cắt BA kéo dài tại K sao cho diện tích tam giác  $KBM = 36 \text{ cm}^2$ .

a) Tính đoạn BK.

b) AC và MK cắt nhau tại O. So sánh  $S_{OAK} : S_{OCM}$ .

**Giải**