HÌNH HỌC 10

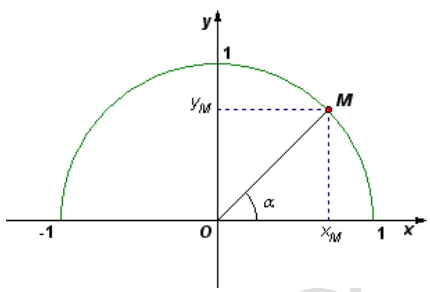
TÍCH VÔ HƯỚNG VÀ HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM:

Phần 1: Tỷ số lượng giác của một góc từ 0^0 đến 180^0.

1. Nửa đường tròn đơn vị.

- Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho nửa đường tròn tâm O, bán kính R = 1 nằm phía trên trục hoành. Ta gọi nó là nửa đường tròn đơn vị.



- Với mỗi góc $\alpha\left(0^0 \le \alpha \le 180^0\right)$ ta luôn xác định được duy nhất một điểm M nằm trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$.

2. Giá trị lượng giác của một góc $\alpha\left(0^0 \le \alpha \le 180^0\right)$.

- Trong mặt phẳng tọa độ cho nửa đường tròn đơn vị, và một góc $\alpha\left(0^0 \le \alpha \le 180^0\right)$ bất kì. Với mỗi góc α như vậy tương ứng một điểm M(x;y) trên nửa đường tròn đơn vị. Khi đó:

$$\sin\alpha = y \qquad \cos\alpha = x \qquad \tan\alpha = \frac{y}{x}\ (x \ne 0) \qquad \cot\alpha = \frac{x}{y}\ (y \ne 0)$$

- Hệ quả:
  - Nếu $\begin{cases}\alpha \ne 0^0\\ \alpha \ne 180^0\end{cases} \Rightarrow \cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.
  - Nếu $\alpha \ne 90^0 \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.
  - Nếu $0^0 \le \alpha \le 180^0$ thì $\begin{cases}-1 \le \cos\alpha \le 1\\ 0 \le \sin\alpha \le 1\end{cases}$.

3. Các công thức lượng giác cơ bản:

- $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.
- Nếu $\begin{cases}\alpha\neq 0^0\\ \alpha\neq 90^0\\ \alpha\neq 180^0\end{cases}\Rightarrow \tan\alpha.\cot\alpha=1$.
- Nếu $\alpha\neq 90^0\ \Rightarrow 1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.
- Nếu $\begin{cases}\alpha\neq 0^0\\ \alpha\neq 180^0\end{cases}\Rightarrow 1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

4. Hệ thức liên hệ giữa hai góc bù nhau, hai góc phụ nhau.

a) Hai góc bù nhau:

$\sin\alpha=\sin\left(180^0-\alpha\right)$; $\cos\alpha=-\cos\left(180^0-\alpha\right)$;

$\tan\alpha=-\tan\left(180^0-\alpha\right)\left(\alpha\neq 90^0\right);\cot\alpha=-\cot\left(180^0-\alpha\right)\left(0^0<\alpha<180^0\right)$

b) Hai góc phụ nhau:

$\sin\alpha=\cos\left(90^0-\alpha\right);\cos\alpha=\sin\left(90^0-\alpha\right)\left(0^0\leq\alpha\leq 90^0\right)$

$\tan\alpha=\cot\left(90^0-\alpha\right);\cot\alpha=\tan\left(90^0-\alpha\right)\left(0^0<\alpha<90^0\right)$

5. Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt:

	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	kxđ	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
cot	kxđ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	kxđ

Phần 2: Tích vô hướng của hai vecto.

1. Góc giữa hai vecto:

Cho hai vecto $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vecto không. Từ một điểm O nào đó, ta vẽ các vecto $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Khi đó số đo của góc AOB được gọi là số đo của góc giữa hai vecto $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ký hiệu là $\left(\vec{a};\vec{b}\right)$.

Đặc biệt: $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \vec{a} = \vec{0} \\ \vec{b} = \vec{0} \end{array}\right. \Rightarrow \left(\vec{a};\vec{b}\right) = \alpha \quad \left(0^0 \le \alpha \le 180^0\right) \\ \left(\vec{a};\vec{b}\right) = 90^0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \end{cases}$.

2. Định nghĩa tích vô hướng của hai vecto:

Tích vô hướng của hai vecto $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, ký hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$, được xác định bởi biểu thức : $\vec{a}.\vec{b} = \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a}.;\vec{b}\right)$.

Đặc biệt: Với một vecto $\vec{a}$, tích vô hướng $\vec{a}.\vec{a}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2 = \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{a}\right|.\cos\left(0^0\right) = \left|\vec{a}\right|^2$.

3. Tính chất của tích vô hướng:

Với ba vecto $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ tùy ý và mọi số thực k, ta có:

- $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$
- $\vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
- $\left(k\vec{a}\right)\vec{b} = \vec{a}\left(k\vec{b}\right) = k\left(\vec{a}.\vec{b}\right)$
- $\vec{a}.\left(\vec{b} \pm \vec{c}\right) = \vec{a}.\vec{b} \pm \vec{a}.\vec{c}$

4. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng:

Cho hai vecto $\vec{a} = (x;y)$ và $\vec{b} = (x';y')$. Khi đó:

- $\vec{a}.\vec{b} = xx' + yy'$
- $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$

- $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x'^2+y'^2}}$ $\quad\left(\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0}\right)$
- $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow xx'+yy'=0$.

5. Khoảng cách giữa hai điểm $M\left(x_M;y_M\right)$ và $N\left(x_N;y_N\right)$:

$$MN=\sqrt{\left(x_N-x_M\right)^2+\left(y_N-y_M\right)^2}$$

Phần 3: Hệ thức lượng trong tam giác

Cho ΔABC có:

- Độ dài các cạnh BC = a, AC = b, AB = c.
- Độ dài các đường trung tuyến vẽ từ các đỉnh A, B, C: m_a,m_b,m_c.
- Độ dài các đường cao vẽ từ các đỉnh A, B, C: h_a,h_b,h_c.
- Bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác: R, r.
- Nửa chu vi tam giác: p
- Diện tích tam giác: S.

1. Định lý cosin trong tam giác:

- $a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$.
- $b^2=c^2+a^2-2ca.\cos B$.
- $c^2=a^2+b^2-2ab.\cos C$.

2. Định lý sin trong tam giác: $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$.

3. Độ dài trung tuyến trong tam giác:

- $m_a^2=\dfrac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}$.
- $m_b^2=\dfrac{2\left(c^2+a^2\right)-b^2}{4}$.
- $m_c^2=\dfrac{2\left(a^2+b^2\right)-c^2}{4}$.

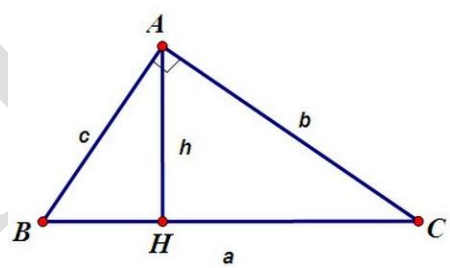
4. Diện tích tam giác:

- $S=\frac{1}{2}a.h_a=\frac{1}{2}b.h_b=\frac{1}{2}c.h_c$.
- $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ca\sin B$.
- $S=\frac{abc}{4R}$.
- $S=pr$.
- $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (công thức Hê – rông)

Giải tam giác là tính các cạnh và các góc của tam giác khi biết một yếu tố cho trước.

5. Hệ thức lượng trong tam giác vuông (nhắc lại).

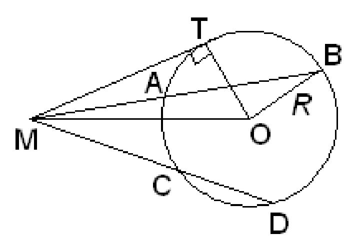
Cho ΔABC vuông tại A, AH là đường cao.



- $BC^2=AB^2+AC^2$ (định lý Pi – ta – go)
- $AB^2=BC.BH$; $AC^2=BC.CH$
- $AH^2=BH.CH$; $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}$
- $AH.BC=AB.AC$
- $b=a.\sin B=a.\cos C=c\tan B=c\cot C$; $c=a.\sin C=a.\cos B=b.\tan C=b.\cot C$.

6. Hệ thức lượng trong đường tròn (bổ sung)

Cho đường tròn (O;R) và điểm M cố định.



- Từ M vẽ hai cát tuyến MAB, MCD:

  $P_{M/(O)}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=MO^2-R^2$.

- Nếu M ở ngoài đường tròn, vẽ tiếp tuyến MT:

  $P_{M/(O)}=MT^2=MO^2-R^2$.

B. HỆ THỐNG BÀI TẬP

Phần 1: Tỷ số lượng giác của một góc từ 0^0 đến 180^0.

Bài 1: Tính giá trị cảu các biểu thức sau:

a) $A = \sin^2 164^0 + \cos^2 16^0$.

b) $B = \cos^2 152^0 + \cos^2 62^0$

c) $C = \cos^2 17^0 + \cos^2 73^0 + \cos^2 5^0 + \cos^2 85^0$

d) $D = \sin^2 21^0 + \sin^2 69^0 + \sin^2 13^0 + \sin^2 77^0$

e) $E = \sin^2 1^0 + \sin^2 2^0 + ... + \sin^2 89^0$

f) $F = \cos 0^0 + \cos 20^0 + \cos 40^0 + ... + \cos 160^0 + \cos 180^0$

g) $G = \tan 5^0 . \tan 10^0 . \tan 15^0 ... \tan 80^0 . \tan 85^0$

Bài 2:

a) Cho $\sin\alpha = \dfrac{3}{7}$ và $90^0 < \alpha < 180^0$. Tính $\cos\alpha$ và $\tan\alpha$.

b) Cho $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$. Tính $\sin\alpha$ và $\tan\alpha$.

c) Cho $\tan\alpha = 2$. Tính $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$.

d) Cho $\cot\alpha = -4$. Tính $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$.

Bài 3:

a) Cho $\tan x = 2$. Tính giá trị của biểu thức sau: $S = \dfrac{3\sin^4 x - 5\sin^3 x \cos x}{-5\sin^4 x + 3\sin^2 x \cos^2 x - 3\cos^4 x}$.

b) Cho $\cot\alpha = \dfrac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức sau:

i) $M = \dfrac{2}{5\sin^2\alpha - 7\sin\alpha\cos\alpha + 3\cos^2\alpha}$.

ii) $N = \dfrac{5\cos^3\alpha - 2\sin\alpha\cos^2\alpha + 4\sin^3\alpha}{7\sin\alpha - 3\cos\alpha}$.

Bài 4: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = 2\sin(180 - \alpha)\cot\alpha - \cos(180^0 - \alpha)\tan\alpha\cot(180^0 - \alpha)$ với $0^0 < \alpha < 90^0$.

b) $B = 2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) - 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha)$.

c) $C=\sqrt{\sin^4\alpha+4\cos^2\alpha}+\sqrt{\cos^4\alpha+4\sin^2\alpha}$.

Phần 2: Tích vô hướng của 2 vecto.

Dạng 1: Tính tích vô hướng của 2 vecto, tính độ dài vecto và góc giữa 2 vecto.

Bài 5:

a) Cho hai vecto $\vec{a}$ và $\vec{b}$ biết $\left|\vec{a}\right|=2;\left|\vec{b}\right|=6$ và $\left(\vec{a};\vec{b}\right)=45^0$. Đặt $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}$ và $\vec{v}=\vec{a}-\vec{b}$. Tính $\vec{a}.\vec{b}$; $\vec{u}.\vec{v}$; $\left|\vec{u}\right|$; $\left|\vec{v}\right|$; $\left(\vec{u};\vec{v}\right)$.

b) Cho hai vecto $\vec{a}$ và $\vec{b}$ biết $\left|\vec{a}\right|=1;\left|\vec{b}\right|=2$ và $\left(\vec{a};\vec{b}\right)=30^0$. Đặt $\vec{u}=4\vec{a}-\vec{b}$ và $\vec{v}=(2x-1)\vec{a}+3\vec{b}$. Tìm x để $\vec{u}\perp\vec{v}$.

Bài 6: Cho ΔABC có AB = 4, AC = 7 và $\widehat{A}=120^0$.

a) Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

b) Tính độ dài đường trung tuyến AM của tam giác ABC.

Bài 7: Cho ΔABC vuông ở A có hai cạnh AB = 6 và AC = 8.

a) Tính cosin của các góc: $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$; $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}\right)$; $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CB}\right)$.

b) Kẻ đường cao AH của tam giác ABC. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC}$.

Bài 8: Cho tam giác ABC có BC = a, AC = b, AB = c.

a) Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(b^2+c^2-a^2\right)$.

Bài 9: Cho hình bình hành ABCD có AB = 2; AD = 3 và góc A bằng 45^0. Tính độ dài hai đường chéo AC và BD.

Bài 10: Cho tam giác ABC có độ dài 3 cạnh a = 3; b = 4; c = 6. Kẻ đường trung tuyến BD.

a) Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC}$.

b) Tính độ dài đường trung tuyến BD.

Bài 11: Cho tam giác ABC đều cạnh a. Gọi I và J là hai điểm sao cho $2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{JA}+3\overrightarrow{JC}=\vec{0}$.

a) Hãy vẽ các điểm I và J và biểu diễn các vecto $\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{BJ}; \overrightarrow{IJ}$ theo 2 vecto $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}$.

b) Tính các tích vô hướng sau: $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BJ}$; $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{BC}$

c) Tính độ dài IJ theo a.

Bài 12: Cho tam giác ABC có BC = a; AC = b; AB = c. Lấy một điểm M thuộc đường thẳng BC. Đặt $4\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC}$. Tính độ dài AM theo a,b,c.

Bài 13: Cho tam giác ABC có độ dài 3 cạnh BC = 5; AC = 6; AB = 4. Kẻ đường phân giác AE.

a) Hãy biểu diễn $\overrightarrow{AE}$ theo 2 vecto $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

b) Hãy tính độ dài đường phân giác AE.