

Chương 2. Tích Vô Hướng

Bài 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC α

$$(0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ)$$

1) Định nghĩa

Cho hệ tọa độ Oxy với các điểm A(-1; 0), B(1; 0) và C(0; 1). Ta gọi nửa đường tròn đường kính AB và đi qua điểm C là nửa đường tròn đơn vị (có bán kính bằng 1).

2) Định lý

$$\text{a) } \sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha) \qquad \text{b) } \cos \alpha = \cos(180^\circ - \alpha)$$

$$\text{c) } \tan \alpha = -\tan(180^\circ - \alpha) \qquad \text{c) } \cot \alpha = -\cot(180^\circ - \alpha)$$

3) Sáu hệ thức lượng giác cơ bản

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$	$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$	$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$
$\tan^2 \alpha \cdot \cot^2 \alpha = 1$	$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$	$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

Bài tập

- Cho $\tan \alpha = -2$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α
- Cho $\cos \alpha = \frac{-2}{3}$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α
- Cho $\tan \alpha = 2$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của α
- Cho $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Tính giá trị lượng giác còn lại của α
- Biết $\tan \alpha = \sqrt{2}$. Tính biểu thức $A = \frac{3\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$
- Biết $\sin \alpha = \frac{2}{3}$. Tính biểu thức $B = \frac{\cot \alpha - \tan \alpha}{\cot \alpha + \tan \alpha}$
- Cho $P = \frac{3\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}$. Tìm giá trị của P biết $\tan \alpha = -2$
- Tính :

$$a) A = 4a^2 \cos^2 60^\circ + 2ab \cos^2 180^\circ + \frac{4}{3}b^2 \cos^2 30^\circ$$

$$b) B = (a \sin 90^\circ + b \tan 45^\circ)(a \cos 0^\circ + b \cos 180^\circ)$$

9. Tính :

$$1. \cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 140^\circ + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$$

$$2. \tan 5^\circ \tan 10^\circ \tan 15^\circ \dots \tan 80^\circ \tan 85^\circ$$

$$3. \sin^2 3^\circ + \sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 87^\circ$$

$$4. \cos^2 12^\circ + \cos^2 78^\circ + \cos^2 1^\circ + \cos^2 89^\circ$$

$$5. 2 \sin 30^\circ - 3 \cos 45^\circ + 4 \cos 60^\circ - 5 \sin 120^\circ + 6 \cos 150^\circ$$

$$6. 3 \sin^2 45^\circ - 2 \cos^2 45^\circ - 4 \sin^2 50^\circ - 4 \cos^2 50^\circ + 5 \tan 55^\circ \cot 55^\circ$$

10. Biết $\sin x + \cos x = m$. Tính theo m

$$a) A = \sin x \cos x, B = \sin^4 x + \cos^4 x, C = \sin^6 x + \cos^6 x$$

$$b) \text{ Chứng minh rằng } -\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}.$$

11. Biết $\tan a + \cot a = k$. Tính theo k

$$a) A = \tan^2 a + \cot^2 a, B = \tan^4 a + \cot^4 a, C = \tan^6 a + \cot^6 a$$

$$b) \text{ Chứng minh rằng } |k| \geq 2.$$

12. Chứng minh rằng :

$$a) \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$b) \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$c) (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$$

$$d) (\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2 \sin x \cos x$$

$$e) \sin x \cos x (1 + \tan x)(1 + \cot x) = 1 + 2 \sin x \cos x$$

13. Chứng minh rằng :

$$a) \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} \quad b) \frac{\tan \alpha - \sin \alpha}{\sin^3 \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha (1 + \cos \alpha)}$$

$$c) \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \left[1 - \frac{(1 - \cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha} \right] = 2 \cot \alpha$$

$$d) 1 - \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cot \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \tan \alpha} = \sin \alpha \cos \alpha$$

$$e) \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2$$

14. Chứng minh các biểu thức sau sau không phụ thuộc vào x

$$a) A = (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$$

$$b) B = \sin^6 x + \cos^6 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x$$

15. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$a) \sin A = \sin(B + C)$$

$$b) \cos A = -\cos(B + C)$$

$$c) \sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}$$

$$d) \tan A = -\tan(B + C).$$

Bài 2: TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VEC TƠ

1) Định nghĩa góc giữa hai véc tơ

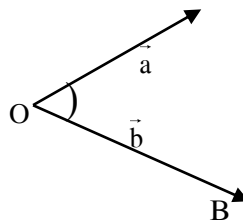
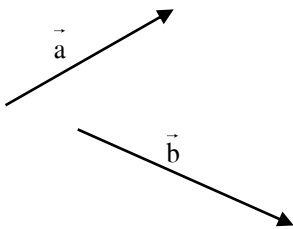
Cho hai véc tơ \vec{a} và $\vec{b} \neq \vec{0}$. Từ một điểm O ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Khi đó số đo của góc AOB được gọi là số đo của góc giữa hai

véc tơ \vec{a} và \vec{b}

A

, hay gọn hơn

là góc giữa \vec{a} và \vec{b} . Kí hiệu : (\vec{a}, \vec{b})



2) Định nghĩa tích vô hướng của hai véc tơ $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

$$a) \text{Hệ quả} \quad a) \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 \quad b) \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

b) Tính chất

$$a) \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad b) \vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \quad c) (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

3) **Biểu thức tọa độ** Cho hai véctơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$ b) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$ c) $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

d) $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ f) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$

Dạng 1. Tính góc giữa hai véctơ

Ôi dụ. Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 4, AD = 3$. Tính $(\vec{AC}; \vec{AD})$, $(\vec{CA}; \vec{BC})$.

Ôi dụ. Cho tam giác đều ABC cạnh 5. tính $(\vec{AC}; \vec{AC})$, $(\vec{AB}; \vec{BC})$.

Dạng 2. Dùng định nghĩa và tính chất để tính tích vô hướng

Ôi dụ. Cho tam giác đều ABC cạnh 3a. M, N là hai điểm thuộc cạnh AC sao cho: $AM = MN = NC$. Tính những tích vô hướng sau: $\vec{AC} \cdot \vec{AC}$, $\vec{AC} \cdot \vec{CB}$, $\vec{BM} \cdot \vec{MN}$.

Ôi dụ. Cho tam giác ABC trọng tâm G, M là điểm trên đt d qua G và vuông góc BC. Tính $(\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}) \cdot \vec{BC}$.

Ôi dụ. Cho hình vuông ABCD cạnh a. M, N là trung điểm BC, CD. Tính các tích vô hướng sau $\vec{AB} \cdot \vec{AM}$, $\vec{AM} \cdot \vec{AN}$.

Dạng 3. Chứng minh đẳng thức

Ôi dụ. Cho tam giác ABC trọng tâm G có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

a) Chứng minh: $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$.

Tính AG theo 3 cạnh a, b, c.

Ôi dụ. Cho hình vuông ABCD tâm O cạnh a. chứng minh rằng với mọi điểm M ta có: $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MO^2 + 2a^2$.

Dạng 4. Chứng minh hai véctơ vuông góc

Ôi dụ. Cho $|\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 4, \cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{1}{6}$. Chứng minh: $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - 2\vec{b})$.

Ôi dụ. Cho hình thang vuông ABCD có hai đáy là $AD = 2a$, $BC = 4a$, đường cao $AB = 2a\sqrt{2}$. Chứng minh rằng hai đường chéo AC và BD vuông góc nhau.

Dạng 5. Dùng công thức tọa độ

Öi dụ. Cho tam giác ABC với $A(10;5), B(3;2), C(6;-5)$. Chứng minh : tam giác ABC vuông tại B.

Öi dụ. Cho tam giác ABC với $A(3;1), B(-1;-1), C(6;0)$.

- Tính góc A của tam giác ABC.
- Tìm giao điểm của đường tròn đường kính AB và đường tròn đường kính OC.

Öi dụ. Cho tam giác ABC với $A(5;3), B(2;-1), C(-1;5)$.

- Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác.
- Tính tọa độ chân đường cao kẻ từ A.

Dạng 6. Tìm tập hợp điểm

Öi dụ. Cho tam giác ABC tìm tập hợp điểm M thỏa:

- $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 0$
- $MA^2 + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$.

Öi dụ. Cho hình vuông ABCD cạnh bằng a. tìm tập hợp điểm M thỏa:

- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = -\frac{a^2}{4}$
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = a^2$
- $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) = a^2$

bài tập

- Cho ΔABC vuông tại A, $AB = 3, AC = 4$. Tính $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}), (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})$.
- Cho ΔABC vuông tại A có $A = 60^\circ$. Tính $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}; \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB}$.
- Cho ΔABC vuông cân tại A, $AB = 3$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$
- Cho ΔABC có $AC = 9, \hat{C} = 90^\circ$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
- Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 9, CB = 5$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- Cho A, B, C phân biệt và thẳng hàng biết $AB = \sqrt{2}; AC = \sqrt{3}$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- Cho $\Delta ABC: AB = 5, BC = 7, AC = 8$.
 - Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Suy ra góc \hat{A} .
 - Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

- c) Gọi D là điểm trên cạnh CA sao cho $CD = 3$. Tính $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}$.
8. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và $AB = 2$; $BC = 4$; $CA = 3$. Tính :
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Suy ra giá trị của $\cos A$
 - $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}$
 - Gọi D là chân đường phân giác trong kẻ từ A. Tính \overrightarrow{AD} theo \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} . Tính độ dài đoạn AD.
9. Cho tam giác ABC có $AB = 2$; $AC = 3$; $A = 120^\circ$
- Tính độ dài đoạn BC và trung tuyến AM.
 - Gọi I, J định bởi $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$; $\overrightarrow{JB} - 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}$. Tính độ dài đoạn IJ.
10. Cho tam giác ABC vuông tại A, $BC = a\sqrt{3}$. Gọi AM là trung tuyến và $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$. Tính độ dài các đoạn AB và AC.
11. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Tính :
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$
 - $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$
 - $(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})(2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$.
12. Cho hình bình hành ABCD. Chứng minh: $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$.
13. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các đường chéo AC, BD. Chứng minh: $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2$.
14. Cho tam giác ABC với các trung tuyến AD, BE, CF. chứng minh: $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF} = \vec{0}$.
15. Cho bốn điểm A, B, C, D bất kỳ. Cm: $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.
16. Cho tứ giác ABCD, hai đường chéo cắt nhau tại O. Gọi H, K là trực tâm các tam giác ABO, CDO. I và J là trung điểm AD, BC. CMR: $HK \perp IJ$.
17. Cho tam giác ABC. CMR: Điều kiện cần và đủ để hai trung tuyến BM và CN vuông góc với nhau là $AC^2 + AB^2 = 5BC^2$.
18. Cho tứ giác ABCD
- CMR: $AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$
 - Suy ra: ĐK cvd để tứ giác ABCD có hai đường chéo $AC \perp BD$ là: $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.
19. Cho hình chữ nhật ABCD tâm O, M tùy ý. Chứng minh rằng :
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$
 - $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$

$$c) \overline{MA}^2 + \overline{MB} \cdot \overline{MD} = 2\overline{MA} \cdot \overline{MO}.$$

20. Cho tam giác ABC cân đỉnh A, H là trung điểm BC, D là hình chiếu của H trên AC, M là trung điểm HD. CMR : $AM \perp BD$.

21. Cho tam giác ABC, M là điểm tùy ý

a) CMR : Véc tơ $\vec{V} = 2\overline{MA} + \overline{MB} - 3\overline{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. CMR :

$$2MA^2 + MB^2 - 3MC^2 = 2\overline{MO} \cdot \vec{V}$$

c) Tìm tập hợp những điểm M thỏa : $2MA^2 + MB^2 = 3MC^2$.

22. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm M trong các trường hợp sau :

$$a) \overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MA} \cdot \overline{MC}$$

$$b) MA^2 + \overline{MA} \cdot \overline{MB} + \overline{MA} \cdot \overline{MC} = 0$$

$$c) MA^2 = \overline{MB} \cdot \overline{MC}.$$

23. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp những điểm M trong các trường hợp sau :

$$a) (\overline{MA} - \overline{MB})(2\overline{MB} - \overline{MC}) = 0$$

$$b) (\overline{MA} + \overline{MB})(\overline{MB} + \overline{MC}) = 0$$

$$c) 2MA^2 + \overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MA} \cdot \overline{MC}.$$

24. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Tìm tập hợp những điểm M trong các trường hợp sau :

$$a) \overline{MA} \cdot \overline{MC} + \overline{MB} \cdot \overline{MD} = a^2$$

$$b) \overline{MA} \cdot \overline{MB} + \overline{MC} \cdot \overline{MD} = 5a^2$$

$$c) MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MD^2$$

$$d) (\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC})(\overline{MC} - \overline{MB}) = 3a^2.$$

$$e) 2MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$$

25. Cho $\vec{a} = (3, 7)$; $\vec{b} = (-3, -1)$

a) Tính góc giữa các cặp véc tơ : \vec{a} và \vec{b} ; $\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{a} - \vec{b}$; \vec{a} và $\vec{a} + \vec{b}$

b) Tìm điều kiện của m, n sao cho $m\vec{a} + n\vec{b}$ vuông góc với \vec{a} .

c) Tìm véc tơ biết $\vec{a} \cdot \vec{c} = 17$ và $\vec{b} \cdot \vec{c} = -5$.

26. Xét tính chất tam giác ABC biết :

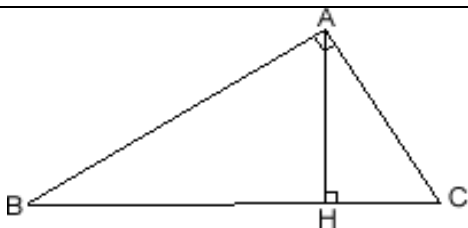
a) A(-1, 1) ; B(1, 3) ; C(2, 0).

b) A(10, 5) ; B(3, 2) ; C(6, -5).

27. Cho $M(1,4)$, $N(3,0)$, $P(-1,1)$ là trung điểm 3 cạnh của 1 tam giác .
- Tim tọa độ các đỉnh của tam giác
 - Tim tọa độ 2 điểm I, J chia đoạn MN thành 3 đoạn bằng nhau.
 - Tim Q sao cho MNQP là hình bình hành.
28. Cho $A(-5,6)$, $B(-4,-1)$, $C(4,3)$
- CMR : Ba điểm ABC tạo thành 1 tam giác.
 - Tim tọa độ chân đường cao A' kẻ từ A và trực tâm H của tam giác
 - Tim tọa độ trọng tâm G và tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
CMR : ba điểm I, H, G thẳng hàng.
 - Tính chu vi và diện tích và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác .
 - Tim điểm M thỏa : $\overline{MA} + 2\overline{MB} + 3\overline{MC} = \vec{0}$.
29. Cho $A(1,5)$, $B(-4,-5)$, $C(4,-1)$. Tim tọa độ các điểm : chân đường phân giác trong, chân đường phân giác ngoài kẻ từ A và tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.
30. Cho $A(1,-2)$, $B(3,-1)$.
- Tim điểm M trên trục hoành sao cho đường trung trực của AM đi qua O.
 - Tim C trên Oy sao cho tam giác ABC cân tại A.
31. Cho $A(1,1)$, $B(2,3)$, $C(5,-1)$.
- Chứng minh: A,B,C là 3 đỉnh của một tam giác vuông.
 - Tính diện tích và chu vi của tam giác.
 - Tính độ dài đường trung tuyến kẻ từ A.
32. (A, 2004) Cho hai điểm $A(0,2)$, $B(-\sqrt{3}, -1)$. Tim tọa độ trực tâm và tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
33. (D, 2004) Cho tam giác ABC có các đỉnh $A(-1;0)$, $B(4;0)$, $C(0,m)$ với $m \neq 0$. Tim trọng tâm G của tam giác ABC theo m. xác định m để tam giác GAB vuông tại G.
34. Cho điểm $N(2; -3)$. Tim điểm M trên trục hoành sao cho độ dài MN = 3.
35. Cho điểm $N(-8; -13)$. Tim điểm M trên trục tung sao cho độ dài MN = 17.
36. Cho điểm $M(2;2)$, $N(5;-2)$. Tim điểm P trên trục hoành sao cho tam giác MNP vuông tại P.

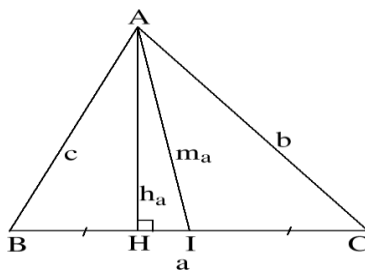
Bài 3. Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác

1) Hệ thức lượng trong tam giác vuông



$AB^2 = BH \cdot BC$	$AC^2 = CH \cdot BC$	$BC^2 = AB^2 + AC^2$
$AH \cdot BC = AB \cdot AC$	$AH^2 = BH \cdot CH$	$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

1) Hệ thức lượng trong tam giác thường



*** Định lý cos**

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$	$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$	$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$	$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

*** Định lý sin :** $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

*** Định lý đường trung tuyến**

$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$	$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$
$a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \frac{c^2}{2}$	$m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$
$a^2 + c^2 = 2m_b^2 + \frac{b^2}{2}$	$m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$

4) Công thức tính diện tích của tam giác

$$* S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a.h_a = \frac{1}{2} b.h_b = \frac{1}{2} c.h_c$$

$$* S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B$$

$$* S_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R}$$

$$* S_{\Delta ABC} = pr \text{ (p là nửa chu vi tam giác).}$$

$$* S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (công thức Hê rông)}$$

Bài tập

- Cho ΔABC có $b = 5, c = 7, \cos A = \frac{3}{5}$. Tính a, S, R, r .
- Trong ΔABC , tính A, B, C, R và m_a trong các trường hợp sau:
 - $A = 60^\circ, b = 8, c = 5$
 - $a = 21, b = 17, c = 10$
 - $a = \sqrt{6}, b = 2, c = 1 + \sqrt{3}$
 - $a = 2\sqrt{3}, b = 2\sqrt{2}, c = \sqrt{6}$
 - $a = 4\sqrt{7}, b = 6, c = 8$
- Cho ΔABC có $A = 120^\circ, AB = 1, AC = 2$
 - Tính $BC, \cos C$.
 - Trên AC kéo dài lấy điểm D sao cho $BD = 2$. Tính AD .
- Cho ΔABC . Tính độ dài mỗi cạnh trong trường hợp sau:

- a) $AB = \sqrt{3}, BC = \sqrt{2}, C = 60^\circ$
- b) $A = 120^\circ, BC = 13, AB + AC = 15$
5. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 8, AC = 9, BC = 10$. Một điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $MB = 7$. Tính độ dài đoạn thẳng AM .
6. Cho $\triangle ABC$ có $BC = 12, AC = 13$, trung tuyến $AM = 8$.
- a) Tính diện tích $\triangle ABC$
- b) Tính góc B
7. Cho $\triangle ABC$ có $m_b = 4, m_c = 2, a = 3$. Tính độ dài AB, AC .
8. Cho $\triangle ABC$ có 3 cạnh là a, b, c . Gọi m_a, m_b, m_c là 3 trung tuyến và G là trọng tâm. Chứng minh:
- 1) $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$
- 2) $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$
9. Cho $\triangle ABC$ có $bc \cdot \cos A + ac \cdot \cos B + ab \cdot \cos C = a^2$. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ vuông.
10. $\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh $4a$. Gọi D, E, F lần lượt là các điểm trên đoạn BC, AC, AB sao cho $BD = x$ ($0 < x < 4a$), $AE = a, AF = 3a$.
- a) Tính EF
- b) Định x để $\triangle DEF$ vuông tại F
11. Cho $\triangle ABC$ có $B = 45^\circ, C = 75^\circ$ và phân giác trong $AD = 4$. Tính các cạnh của tam giác và bán kính đường tròn ngoại tiếp.
12. Cho $\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh a , trên BC lấy điểm D sao cho $BD = 2DC$. Trung trực đoạn AD cắt AC tại E . Tính CE và BE .
13. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng:
- 1) $a(\sin B + \sin C) = (b + c)\sin A$ 2) $b^2 - c^2 = a(b \cos C - c \cos B)$
- 3) $\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$ 4) $a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$
- 5) $(b^2 - c^2) \cdot \cos A = a(c \cdot \cos C - b \cdot \cos B)$ 6) $h_a = 2R \sin B \sin C$
- 7) $S = 2R^2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$ 8) $S = Rr(\sin A + \sin B + \sin C)$

$$9) \frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

$$10) \frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{b^2 + c^2 - a^2}$$

$$11) \cotg A + \cotg B + \cotg C = \frac{R(a^2 + b^2 + c^2)}{abc}$$

$$12) \cotg A + \cotg B + \cotg C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$$

$$13) b + c = 2a \Leftrightarrow \sin B + \sin C = 2\sin A$$

$$14) bc = a^2 \Leftrightarrow \sin B \cdot \sin C = \sin^2 A$$

$$15) bc = a^2 \Leftrightarrow h_b \cdot h_c = h_a^2$$

$$16) b + c = 2a \Leftrightarrow \frac{2}{h_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

$$17) a^2 + c^2 = 2b^2 \Leftrightarrow 2\cot B = \cot A + \cot C$$

14. Cho ΔABC . Tính góc A trong mỗi trường hợp sau:

$$a) \frac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2 \quad b) \cos B = \frac{(a+b)(b+c-a)(c+a-b)}{2abc}$$

16. Cho ΔABC có trọng tâm G, biết $b^2 + c^2 = 5a^2$ Chứng minh: ΔBCG vuông tại G.

17. Chứng minh rằng nếu $\sin A = 2\sin B \cos C$ thì ΔABC cân

18. Chứng minh rằng nếu $\begin{cases} a = 2b \cos C \\ \frac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c} = a^2 \end{cases}$ thì ΔABC đều

19. Chứng minh rằng nếu $S = \frac{1}{4}(a+b-c)(a-b+c)$ thì ΔABC vuông.

BÀI TẬP ÔN THI

A. TRÊN VỎ HƯỚNG VÀ VỎ TƠ

1. Cho tam giác ABC có trọng tâm là G. Biết $\angle BGC = 120^\circ$, $BG = 4$, $CG = 6$.
Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC.

2. Cho hình thang có đáy lớn gấp đôi nhỏ, đáy lớn bằng 10cm, hai cạnh bên lần lượt có độ dài là 3cm, 4cm. Tìm độ dài đường cao hình thang.

3. Cho tam giác ABC có $AB = 1\text{cm}$, $AC = 3\text{cm}$, góc $A = 60^\circ$. Tìm BC, diện tích tam giác ABC, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, góc B của tam

giác ABC

4. Cho hình thang có đáy lớn gấp đôi nhỏ, đáy lớn bằng 10cm, hai cạnh bên lần lượt có độ dài là 3cm, 4cm. Tìm độ dài đường cao hình thang
5. Cho tam giác ABC có $AB = 1\text{cm}$, $AC = 3\text{cm}$, góc $A = 60^\circ$
6. Tìm BC, diện tích tam giác ABC, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, góc B của tam giác ABC
7. Cho tam giác ABC có cạnh $AB = 3$, $AC = 8$ và $A = 60^\circ$.
 - a) Tính cạnh BC và diện tích S của tam giác ABC.
 - b) Tính độ dài đường trung tuyến BM của tam giác ABC (M là trung điểm cạnh AC). Từ đó tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM.
8. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, $AB=3$, $AC=4$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho $CD = CB$.
 - a) Tính cạnh BD và AD.
 - b) Tính góc A, góc D của $\triangle ABD$ và diện tích $\triangle ABD$.
 - c) Gọi I là trung điểm AB. Tính bán kính đường tròn qua B, D và trung điểm I của AB.
9. Cho tam giác ABC có $AB = 5\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$ và góc $A = 60^\circ$.
 - a) Tính cạnh BC và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
 - b) Tính diện tích S của tam giác ABC và bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.
10. Chứng minh trong tam giác ABC ta luôn có: $\sin B \cos C + \sin C \cos B = \sin A$.
11. Cho tam giác ABC có $AB = 8$, $BC = 7$, $CA = 5$.
 - a) Tính diện tích tam giác ABC.
 - b) Tính độ dài đường cao kẻ từ A của tam giác ABC.
 - c) Gọi M là trung điểm BC và I là trung điểm MC. Tính độ dài AI.

B. TÍCH VÔ HƯỚNG VÀ TỌA ĐỘ

12. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có $A(10,5)$, $B(3,2)$, $C(6,-5)$
Chứng minh tam giác ABC là tam giác vuông cân.
13. Trong mặt phẳng tọa độ cho tam giác ABC, $A(2;1)$; $B(3;-1)$; $C(-2;2)$
 - a) Tính độ dài 3 cạnh của tam giác ABC.
 - b) Tìm tọa độ trực tâm tam giác ABC

14. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(4;3)$, $B(-1;2)$, $C(3;-2)$.
- Tính chu vi và diện tích tam giác ABC.
 - Gọi D là điểm nằm trên trục hoành sao cho tam giác ABD vuông tại A. Tìm tọa độ điểm D.
 - Tìm tọa độ điểm E nằm trên đường thẳng AB sao cho $EB = EC$.
15. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có $A(-1,1), B(2,-2), C(2,6)$
- Tìm độ dài trung tuyến AM
 - Cho $E(m,2m)$. Định m để tam giác ABE vuông tại E
16. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC với: $A(1; 3), B(-1; 1), C(2; 1)$.
- Tính tích vô hướng: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ và từ đó tính góc B.
 - Tìm tọa độ điểm M nằm trên trục hoành Ox sao cho: $AM \perp BC$.
17. Cho $\triangle ABC$ có điểm $A(6,-2), B(4,4)$ và $C(-2,6)$.
- $CM \triangle ABC$ cân tại B.
 - Tìm tọa độ điểm D nằm trên Ox sao cho $DA = DB$.
 - Tìm tọa độ trực tâm H của $\triangle ABC$.
18. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác biết $A(-2, 3), B(-1, -3)$ và $C(4, 2)$
- Tìm tọa độ điểm A' là hình chiếu của A trên BC
 - Tính diện tích $\triangle ABC$. Từ đó suy ra độ dài đường cao của $\triangle ABC$ hạ từ B
19. Trong mặt phẳng Oxy cho hình vuông ABCO biết $A(0, 1), C(1, 0)$. I là trung điểm BC. Lấy điểm E trên DC sao cho $2\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB}$. Chứng minh: $OI \perp BE$
20. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC biết $A(0, 1), B(-2, 1), C(-4, -2)$
- Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC
 - Tìm tọa độ D là chân đường phân giác trong của góc A
 - Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{4}BC^2$.
21. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC biết $A(1, -2), B(2, 3), C(-1, -2)$
- Tìm tọa độ M trên AB sao cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 52$
 - Tìm tọa độ D sao cho tam giác OAD vuông cân tại O
22. Trong mặt phẳng Oxy cho hình chữ nhật ABCD có $A(-\sqrt{2}/2, 1)$,

$B(-\sqrt{2}/2, 0)$, $C(\sqrt{2}/2, 0)$, K là trung điểm AD . CM : $BK \perp AC$

23. Trong mặt phẳng Oxy, cho $A(1; 2)$, $B(-3; 2)$, $C(-1; 1)$
- Chứng minh rằng: tam giác ABC cân tại C .
 - Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, từ đó suy ra $\cos A$.
 - Gọi AH là đường cao của tam giác ABC . Tìm tọa độ điểm H .
24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại C . Biết $A(-2; 1)$, B là điểm đối xứng với A qua O và C có tung độ là 2 .
- Tìm tọa độ B và tọa độ C .
 - Tính diện tích tam giác ABC .
25. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC với $A(1; 3)$, $B(-1; 1)$, $C(2; 1)$.
- Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ và độ dài các cạnh AB , BC rồi suy ra giá trị của góc B .
 - Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC .
26. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{u} = (4; 2)$. Tìm điểm A trên trục Ox , B trên trục Oy sao cho $AB = \sqrt{5}$ và AB vuông góc với giá của vector \vec{u} .
27. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có $A(2; 1)$, $B(3; -1)$, $C(-1; 2)$
- Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC .
 - Tìm tọa độ điểm I là giao điểm của hai đường thẳng OA và BC .
28. Trong mặt phẳng cho tam giác ABC biết $A(-2; 1)$, $B(0; 3)$, $C(1; -2)$.
- Chứng minh tam giác ABC vuông.
 - Tìm tọa độ tâm và tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
 - Gọi K là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC , M là điểm thuộc trục hoành sao cho M cách đều hai điểm A và B . Tìm tọa độ của hai điểm K và M .

