

PHẦN 2. HÌNH HỌC GIẢI TÍCH OXY

BÀI 1. HỆ TỌA ĐỘ OXY

I. Tọa độ và các phép toán vector

Bài 1. Cho các vector $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (-3; 0)$.

- Tính tọa độ của các vector $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - 2\vec{b}$.
- Tính tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$ và góc giữa hai vector \vec{a} , \vec{b} .
- Gọi $\vec{c} = (-1; m)$. Tìm m để $\vec{c} \perp \vec{a}$.
- Gọi $\vec{d} = (1; -\sqrt{3}k)$. Tìm k để góc giữa hai vector \vec{b} và \vec{d} bằng 120° .
- Tìm tọa độ của vector \vec{e} sao cho \vec{e} cùng phương với \vec{a} và $|\vec{e}| = 2\sqrt{2}$.

II. Tọa độ của điểm

Bài 2. Cho tam giác ABC , biết $A(2; 1)$, $B(-1; 2)$ và $C(0; -5)$.

- Tính tọa độ các vector \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} . Chứng minh tam giác ABC vuông. Tìm tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
- Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ và số đo góc \widehat{ACB} .
- Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .
- Tìm tọa độ điểm D sao cho AD song song với BC và $AD = \sqrt{3}$.
- Gọi $E(a; 2a - 3)$. Tìm a sao cho B, C, E thẳng hàng.

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

1. Phương trình đường thẳng:

* VTPT, VTCP của đường thẳng:

* Phương trình đường thẳng: $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ hoặc $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$.

* Trục Ox : $y = 0$ và trục Oy : $x = 0$.

2. Vị trí tương đối của hai đường thẳng:

* Hai đường thẳng song song:

* Hai đường thẳng cắt nhau: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$. Đặc biệt: Hai đường thẳng vuông góc.

Chú ý: Đường thẳng có hệ số góc k : $y = kx + m$.

Bài 1. Viết phương trình dạng tổng quát của đường thẳng d trong các trường hợp sau:

- Đi qua điểm $A(1; 2)$ và có VTPT là $\vec{n}(2; -3)$.
- Đi qua điểm $B(-1; 0)$ và có VTCP là $\vec{u} = (2; 3)$.
- Đi qua điểm $C(-2; 5)$ và có hệ số góc bằng $\sqrt{2}$.

Bài 2. Viết phương trình đường thẳng MN biết $M(0; 1)$ và $N(3; 2)$.

Bài 3. a. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $I(-2; -1)$ và song song với đường thẳng $d: 2x + y - 3 = 0$.

b. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2; -4)$ và vuông góc với đường thẳng $d: x + y = 0$.

Tìm tọa độ điểm N đối xứng với điểm M qua đường thẳng d .

Bài 4. a. Tìm m để đường thẳng $d_1: y = mx + 2$ song song với đường thẳng $d_2: x - 2y + 3 = 0$.

b. Tìm k để hai đường thẳng sau vuông góc với nhau: $\Delta_1: y = x + 1$ và $\Delta_2: y = (2k + 1)x + k$. Khi đó, tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng Δ_1 với Δ_2 .

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại $A(1; 1)$, phương trình các cạnh $AB: x - 2y + 4 = 0$ và $BC: 2x - y - 1 = 0$.

a. Tìm tọa các đỉnh B, C .

b. Gọi I là điểm thuộc cạnh AB sao cho $IA = 2IB$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua I và song song với BC .

c. Tìm tọa độ điểm J thuộc đường thẳng BC sao cho góc $\widehat{AIC} = 30^\circ$.

3. Khoảng cách và góc:

* **Khoảng cách từ điểm $M(x_M; y_M)$ đến đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$:** $d(M, \Delta) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

* **Góc giữa hai đường thẳng** $\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$.

Bài 1. Cho điểm $M(2; 3)$ và đường thẳng $\Delta: 2x - 3y + 2 = 0$. Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ .

Bài 2. Cho hai đường thẳng $d_1: x + y - 3 = 0$ và $d_2: 2x - y + 1 = 0$. Tính góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 .

Bài 3. Cho điểm $A(2; 1)$ và đường thẳng $d: y = 2x + m$. Tìm m để khoảng cách từ A đến đường thẳng d bằng $\sqrt{5}$.

Bài 4. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua gốc tọa độ và tạo với đường thẳng $d: x + y + 5 = 0$ một góc 45° .

Bài 5. Cho đường thẳng $d: x + 2y - 1 = 0$ và hai điểm $A(-2; 3)$, $B(2; 5)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d sao cho diện tích tam giác MAB bằng $2\sqrt{5}$.

BÀI 3. XÁC ĐỊNH CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC

Bài 1. Cho tam giác ABC , biết $A(4; -1)$, $B(1; 5)$, $C(-4; -5)$. Viết phương trình các đường thẳng sau:

- Đường cao AE và BF . Suy ra tọa độ trực tâm H của tam giác ABC và tọa độ hai điểm E, F .
- Đường trung tuyến AM .
- Đường phân giác trong AD, CK . Suy ra tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .
- Đường trung trực của AB và BC . Suy ra tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Bài 2. Cho tam giác ABC có đỉnh $A(2; 2)$ và hai đường cao lần lượt có phương trình $9x - 3y - 4 = 0$; $x + y - 2 = 0$.

Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC và tìm tọa độ chân đường cao kẻ từ đỉnh A .

Bài 3. Cho tam giác ABC có đỉnh $C(4; 3)$ và các đường phân giác trong, trung tuyến kẻ từ đỉnh A có phương trình lần lượt là $x + 2y - 5 = 0$; $4x + 13y - 10 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh B .

Bài 4. Cho tam giác ABC có đỉnh $A(5; 2)$, phương trình đường trung trực của cạnh BC và đường trung tuyến kẻ từ đỉnh C lần lượt là $x + y - 6 = 0$ và $2x - y + 3 = 0$. Tính diện tích của tam giác ABC .

Bài 5. Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC , biết đỉnh $A(2; 1)$, trực tâm $H(-6; 3)$ và trung điểm của cạnh BC là $D(2; 2)$.

BÀI 4. XÁC ĐỊNH CÁC YẾU TỐ TRONG TỨ GIÁC

Bài 1. Cho hình thoi $ABCD$ có phương trình đường thẳng $AC: x + 7y - 31 = 0$, hai đỉnh B, D lần lượt thuộc các đường thẳng $d_1: x + y - 8 = 0$, $d_2: x - 2y + 3 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi, biết rằng diện tích hình thoi bằng 75 và đỉnh A có hoành độ âm.

Bài 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 20 và tâm $I(1; 1)$, trung điểm của cạnh CD là $E(3; 0)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D .

Bài 3. Cho hình bình hành $ABCD$ có $C(-4; -5)$, đường cao AH có phương trình $x + 2y - 1 = 0$, đường chéo BD có phương trình $8x - y - 3 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, D .

Bài 4. Cho hình vuông $ABCD$ có M là trung điểm của cạnh AD , đường thẳng CM có phương trình là $x - y - 2 = 0$. Đỉnh $D(3; -3)$, đỉnh B thuộc đường thẳng $d: 3x + y - 2 = 0$ và B có hoành độ âm. Xác định tọa độ các đỉnh A, B, C .

Bài 5. Cho hình thang vuông $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$. Biết $BC = CD = 2AB$, trung điểm của BC là $M(1; 0)$, đường thẳng AD có phương trình $x - \sqrt{2}y = 0$. Tìm tọa độ đỉnh A .

BÀI 5. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

Bài 1. Cho hai đường thẳng $d: x + y - 3 = 0$, $\Delta: x - y + 2 = 0$ và điểm $M(-1; 3)$. Viết phương trình đường tròn đi qua M , có tâm thuộc d , cắt Δ tại hai điểm A và B sao cho $AB = 3\sqrt{2}$.

Bài 2. Cho hai điểm $A(2; -1), B(1; 0)$ và đường tròn $(C): (x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 16$. Viết phương trình đường tròn (C_1) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với (C) .

Bài 3. Cho hai đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 - 6x + 8y + 23 = 0$ và $(C_2): x^2 + y^2 + 12x - 10y + 53 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm thuộc đường thẳng $d: x - y - 1 = 0$, tiếp xúc trong với đường tròn (C_1) và tiếp xúc ngoài với (C_2) .

Bài 4. Cho đường tròn $(C_1): (x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 25$ có tâm I_1 và đường thẳng $\Delta: 3x - 2y - 7 = 0$. Đường tròn (C_2) có tâm I_2 thuộc đường thẳng Δ , bán kính bằng $\sqrt{10}$, cắt đường tròn (C_1) tại hai điểm A và B . Viết phương trình đường tròn (C_2) , biết rằng diện tích tứ giác $I_1A I_2B$ bằng 15.

Bài 5. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$ và điểm $A(5; 2)$. Viết phương trình đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm B, C sao cho tam giác ABC đều.

Bài 1. Cho đường tròn $(C): (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$ và đường thẳng $d: x + y - 10 = 0$. Từ điểm M trên d kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đến (C) (A, B là các tiếp điểm). Tìm tọa độ điểm M sao cho $AB = 3\sqrt{2}$.

Bài 2. Cho đường tròn $(C): (x + 6)^2 + (y - 6)^2 = 50$. Gọi M là điểm thuộc (C) có hoành độ và tung độ dương. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại M , biết tiếp tuyến cắt hai trục tọa độ tại A và B sao cho M là trung điểm của AB .

Bài 3. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 6y + 8 = 0$ và hai đường thẳng $d: 3x - y - 10 = 0$, $\Delta: x + y - 2 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc d sao cho khoảng cách từ M đến Δ bằng độ dài đoạn MT là tiếp tuyến kẻ từ M đến (C) , với T là tiếp điểm.

Bài 4. Cho đường tròn $(C): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$ và đường thẳng $\Delta: x - y - 4 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc Δ và điểm N thuộc (C) sao cho đường thẳng MN và tiếp tuyến MA của (C) (A là tiếp điểm không trùng với N) cùng tạo với d một góc 45° .

Bài 5. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ có tâm là I và đường thẳng $d: x - y + 1 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc d để từ M kẻ được hai đường thẳng tiếp xúc với (C) tại A và B sao cho tứ giác $IMAB$ là hình vuông.

BÀI TẬP HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

Bài 1. Cho các vectơ $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (-3; 1)$ và $\vec{c} = (-4; -2)$.

- Tính $\vec{a}\vec{b}$, độ dài các vectơ $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ và góc giữa hai vectơ \vec{a} , \vec{b} .
- Tính $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c})$.
- Tìm tọa độ vectơ \vec{d} , biết $\vec{c} \perp \vec{d}$ và $|\vec{d}| = \sqrt{5}$.

Bài 2. Cho các vectơ $\vec{a}(-2; 3)$ và $\vec{b}(4; 1)$.

- Tính cosin góc giữa hai vectơ $\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{a} - \vec{b}$.
- Tìm vectơ \vec{c} , biết $\vec{a}\vec{c} = 4$ và $\vec{b}\vec{c} = -2$.

Bài 3. Cho hai điểm $A(-3; 2)$ và $B(4; 3)$.

- Tìm tọa độ của điểm M trên trục Ox sao cho tam giác MAB vuông tại M .
- Tìm tọa độ của điểm N trên trục Oy sao cho $NA = NB$.

Bài 4. Cho ba điểm $A(-1; 1)$, $B(3; 1)$ và $C(2; 4)$.

- Tính chu vi và diện tích của tam giác ABC .
- Tìm tọa độ trục tâm H , trọng tâm G và tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Bài 5. Cho 3 điểm $A(1; 0)$, $B(0; b)$ và $C(-1; -3)$.

- Chứng minh 3 điểm A, B, C không thẳng hàng với mọi $b \neq -\frac{3}{2}$.
- Tìm tọa độ đỉnh B và trọng tâm G của tam giác ABC , biết tam giác ABC vuông tại C .
- Tính $\overline{AB \cdot AC}$, độ dài đoạn thẳng BG và độ lớn góc \widehat{CAB} .
- Gọi $E(a; 2-a)$. Tìm a để $EC = 2\sqrt{5}$.
- Gọi I là trung điểm của AB . Tìm tọa độ điểm D thuộc trục Oy sao cho tam giác OID cân tại O .

Bài 6. Cho các điểm $A(1; 2)$, $B(-2; 4)$, $C(3; -5)$.

- Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
- Tìm tọa độ trục tâm của tam giác ABC .
- Tìm tọa độ điểm D thỏa mãn $\overline{BD} = -3\overline{AB}$.
- Tìm tọa độ điểm E , biết $BE = 2$ và $\widehat{EBC} = 60^\circ$.
- Tìm tọa độ điểm F sao cho 3 điểm A, B, F thẳng hàng và $AF = \sqrt{6}$.

Bài 7. Cho hình vuông $ABCD$ biết $A(1; -1)$ và $B(3; 0)$. Tìm tọa độ các đỉnh C và D .

Bài 8. Cho hai điểm $A(1; -3)$ và $B(0; 2)$. Tìm tọa độ điểm M , biết ba điểm A, B, M thẳng hàng và $AB = 2BM$.

Bài 9. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm $I(1; 2)$, $A(-3; -2)$ và $AC = 2BC$. Tìm tọa độ các đỉnh C, B, D .

Bài 10. Cho tam giác ABC vuông cân tại đỉnh A , biết $B(0; -1)$ và chân đường cao kẻ từ đỉnh A là điểm $H(3; 2)$.
Tìm tọa độ các đỉnh A và C .

BÀI TẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Bài 1. Viết phương trình đường thẳng d trong các trường hợp sau:

- Đi qua hai điểm $A(2;1)$ và $B(-2;3)$.
- Đi qua điểm $M(0;-3)$ và song song với đường thẳng $\Delta: y = x + 1$.
- Đi qua điểm $N(1;-4)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: 3x + 2y - 10 = 0$.
- Biết khoảng cách từ điểm $M(1;-2)$ đến đường thẳng d bằng $\frac{1}{\sqrt{13}}$.

Bài 2. Cho đường thẳng $\Delta: y = x + 2m - 1$. Tìm tọa độ các giao điểm A của Δ với trục Ox và B của Δ với trục Oy theo m . Tìm m để tam giác OAB có diện tích bằng 2.

Bài 3. Cho đường thẳng $d: x - y + 5 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d sao cho $OM = \sqrt{13}$.

Bài 4. Cho hai đường thẳng $\Delta_1: 3x - y + 2 = 0$ và $\Delta_2: x - y = 0$.

- Tìm tọa độ giao điểm A của hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 .
- Tìm tọa độ các điểm M thuộc Δ_1 và N thuộc Δ_2 sao cho $AN = 2\sqrt{2}$ và $\widehat{ANM} = 45^\circ$.

Bài 5. Cho tam giác ABC , biết $A(1;3)$, $B(0;-1)$ và trọng tâm $G(1;1)$.

- Tìm tọa độ đỉnh C . Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC .
- Gọi Δ là đường thẳng đi qua G và vuông góc với AB . Tìm tọa độ điểm M thuộc Δ sao cho $MA = \sqrt{10}$.

Bài 6. Cho hình bình hành $ABCD$ có $A(-1;3)$, tâm $I(0;2)$ và đỉnh B thuộc đường thẳng $\Delta: x + y - 1 = 0$.

- Tìm tọa độ đỉnh C .
- Viết phương trình đường chéo BD , biết $BD = 2\sqrt{13}$.

Bài 7. Cho hình chữ nhật $ABCD$, biết phương trình cạnh $AB: 3x - 4y + 8 = 0$, đường chéo $AC: 2x + y - 2 = 0$ và tâm I thuộc đường thẳng $\Delta: x - 3y + 2 = 0$. Viết phương trình các cạnh AD , CD và đường chéo BD .

Bài 8. Cho hình vuông $ABCD$, biết $B(3;4)$ và đường chéo AC có phương trình $x - y + 2 = 0$. Tìm tọa độ điểm A và C .

Bài 9. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B , cạnh AD và CD có phương trình lần lượt là $x - y + 5 = 0$ và $y = 2x$, đỉnh $B(2;1)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, C, D .

Bài 10. Cho hình thoi $ABCD$ có phương trình các cạnh AB , AD lần lượt là $x + y - 3 = 0$ và $3x - 2y - 4 = 0$, đỉnh $C(-2;-4)$. Viết phương trình các cạnh BC, CD .

Bài 11. Cho tam giác ABC , biết $A(2;-4)$, $B(1;2)$ và $C(-2;0)$. Tính diện tích tam giác ABC .

Bài 12. Cho hai điểm $M(2;-2)$ và $N(0;3)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M sao cho khoảng cách từ điểm N đến Δ bằng 1.

Bài 13. Cho đường thẳng $\Delta: x + \sqrt{3}y - \sqrt{3} = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho góc giữa đường thẳng OM và Δ bằng 60° .

Bài 14. Cho tam giác đều ABC , biết phương trình cạnh $AB: x - 2y + 3 = 0$ và điểm $M(0;-1)$ là trung điểm của đoạn thẳng AC . Tìm tọa độ các điểm A, B, C .

Bài 15. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm $I(-1;2)$ và phương trình cạnh $AD: 3x - y + 10 = 0$. Viết phương trình các cạnh của hình vuông.