

c)
$$\begin{cases} mx + 4y = 2m + 3 \\ (m + 1)x = 6y \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 4x - 4y = m + 1 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} my - 4x = m + 1 \\ (m + 6)x + 2y = 3 + m \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} mx + 2y = m^2 \\ 2x + my = 4 \end{cases}$$

g)
$$\begin{cases} 2x + my = m + 2 \\ (m + 1)x + 2my = 2m + 4 \end{cases}$$

h)
$$\begin{cases} ax + y = a + b \\ x + 2y = a \end{cases}$$

i)
$$\begin{cases} a^2x - by = a^2 - b \\ bx - b^2y = 2 + 4b \end{cases}$$

j)
$$\begin{cases} (a^2 + b^2)x + (a^2 - b^2)y = a^2 \\ (a + b)x + (a - b)y = a + 1 \end{cases}$$

Hệ phương trình bậc nhất có vô số nghiệm khi:.....

Bài 101. Tìm tham số m để các hệ phương trình sau vô nghiệm.

a)
$$\begin{cases} mx + y = m + 1 \\ x + my = 2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x - my = 0 \\ mx - y = m + 1 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 4x + 2y = 5 \\ 2x + y = m - 1 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} mx + y = 1 \\ x + my = -1 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} x + my = 1 \\ mx - 3my = 2m + 3 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} (m + 1)x + my = 2m \\ (3m + 3)x + (m - 1)y = 3m - 1 \end{cases}$$

g)
$$\begin{cases} mx + 4y = 2m + 3 \\ (m + 1)x = 6y \end{cases}$$

h)
$$\begin{cases} 3x + 2my = 1 \\ 3(m - 1)x - my = 1 \end{cases}$$

i)
$$\begin{cases} 2m^2 + 3(m - 1)y = y \\ m(x + y) - 2y = 2 \end{cases}$$

j)
$$\begin{cases} m^2x + (2 - m)y = 4 + m^3 \\ mx + (2m - 1)y = m^5 - 2 \end{cases}$$

Hệ phương trình bậc nhất có vô số nghiệm khi:.....

Bài 102. Tìm tham số m để các hệ phương trình sau có nghiệm.

a)
$$\begin{cases} 3x - my = 1 \\ -mx + 3y = m - 4 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} (m + 2)x + 3y = 3m + 9 \\ x + (m + 4)y = 2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} mx + 2y = m \\ (m - 1)x + (m - 1)y = 1 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} (2m - 1)x - y = 1 \\ x + (m + 1)y = -1 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} (m+1)x + 2my - 2 = 0 \\ 2mx + (m+1)y = 2m \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} mx + my = m - 1 \\ (m-1)x + 2my = m + 1 \end{cases}$$

g)
$$\begin{cases} (m+1)x - y = m + 1 \\ x + my = 2 \end{cases}$$

h)
$$\begin{cases} x - my = 0 \\ mx - y = m + 1 \end{cases}$$

i)
$$\begin{cases} (m+3)x + (m-3)y = 2m \\ (m^2+9)x + (m^2-9)y = 2m^2 \end{cases}$$

j)
$$\begin{cases} m(m-1)x + m(m+1)y = m^3 + 2 \\ (m^2-1)x + (m^3+1)y = m^4 - 1 \end{cases}$$

Hệ phương trình bậc nhất có vô số nghiệm khi:

.....

Bài 103. Tìm tham số m nguyên để các hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất $(x; y)$ nguyên.

a)
$$\begin{cases} 2mx + 3y = m \\ x + y = m + 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} mx + y = 2m \\ x + my = m + 1 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} mx + 2y = m \\ (m-1)x + (m-1)y = 1 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x + my = 1 \\ x + y = m \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} mx + 2y = m \\ (m-1)x + (m-1)y = 1 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} mx + 2y + 3 = 0 \\ 3mx + y = 4m \end{cases}$$

g)
$$\begin{cases} mx - y = 1 \\ x + 4(m+1)y = 4m \end{cases}$$

h)
$$\begin{cases} mx + y = 6 \\ x + my - 2m + 1 = 0 \end{cases}$$

i)
$$\begin{cases} 2x + (m+1)y = 7 \\ mx + (m^2-1)y = 5m - 3 \end{cases}$$

j)
$$\begin{cases} (m+1)x + y = 2m + 2 \\ x + (m+1)y = m + 2 \end{cases}$$

Nêu phương pháp tìm nghiệm nguyên:

.....

Bài 104. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} (m+1)x - my = 3m + 2 \\ x + 2y = 3m + 2 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số}).$$

a) Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất $(x_0; y_0)$.

b) Tìm m để x_0, y_0 thỏa mãn điều kiện: $|2x_0 - y_0| = 3$.

Bài 105. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} mx + y = 3m + 1 \\ x - my = 2 - m - m^2 \end{cases}$$
. Chứng tỏ hệ có nghiệm duy nhất $(x_0; y_0)$ với mọi giá trị của m . Tìm m để x_0, y_0 thỏa mãn điều kiện: $y_0^2 = 2x_0$.

Giải hệ với ẩn S, P với điều kiện có nghiệm $(x; y)$ là $S^2 \geq 4P$.

Tìm nghiệm $(x; y)$ bằng cách thế vào phương trình $X^2 - SX + P = 0$.

★ Một số biến đổi để đưa về dạng tổng – tích thường gặp:

- $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$.
- $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$.
- $(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$.
- $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2$.
- $x^4 + y^4 + x^2y^2 = (x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2) = \dots\dots\dots$

HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG LOẠI II

- **Dấu hiệu nhận dạng:** Thay đổi vị trí x và y cho nhau thì hệ phương trình không thay đổi và trật tự các phương trình thay đổi (phương trình này trở thành phương trình kia).
- **Phương pháp giải:** Lấy vế trừ vế và phân tích thành nhân tử, lúc nào cũng đưa được về dạng $(x - y).f(x) = 0$, tức luôn có $x = y$.
- ★ **Lưu ý:** Đối với hệ đối xứng loại II chứa căn thức, sau khi trừ ta thường liên hợp.

HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP BẬC HAI

- **Dạng tổng quát:**
$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 \end{cases} \quad (i)$$
- **Phương pháp giải:** $(i) \Leftrightarrow \begin{cases} d_2(a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2) = d_1d_2 & (1) \\ d_1(a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2) = d_1d_2 & (2) \end{cases}$

Lấy (1) - (2) $\Rightarrow (a_1d_2 - a_2d_1) \cdot x^2 + (b_1d_2 - b_2d_1) \cdot xy + (c_1d_2 - c_2d_1) \cdot y^2 = 0$. Đây là phương trình đẳng cấp bậc hai nên sẽ tìm được mối liên hệ x, y .

BÀI TẬP CƠ BẢN

Bài 112. Giải các hệ phương trình sau:

a)
$$\begin{cases} 4x^2 - 3xy + y^2 = 1 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x^2 + xy + y^2 = 3 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 - x - y = 6 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 3x - 4y + 1 = 0 \\ xy = 3(x + y) - 9 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} \sqrt{2x - y + 3} = 2 \\ x^2 + y^2 - xy = 19 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} 2x^2 - 6x + 2\sqrt{y - 1} = -1 \\ x(3 - x)\sqrt{y - 1} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} \text{g)} \begin{cases} 4x^2 - 3xy + y^2 = 1 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases} & \text{h)} \begin{cases} x^2 + y^2 + 6x + 2y = 0 \\ x + y + 8 = 0 \end{cases} \\ \text{i)} \begin{cases} x + 2y = 5 \\ x^2 + 2y^2 - 2xy = 5 \end{cases} & \text{j)} \begin{cases} 2x^2 - xy + 3y^2 = 7x + 12y - 1 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \\ \text{k)} \begin{cases} x^2 - xy + 3y^2 + 2x - 5y = 4 \\ x + 2y - 4 = 0 \end{cases} & \text{l)} \begin{cases} 2x - y = 5 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases} \\ \text{m)} \begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ y^2 - x^2 + 2x + 2y + 4 = 0 \end{cases} & \text{n)} \begin{cases} 4x + 9y = 6 \\ 3x^2 + 6xy + 3y - x = 0 \end{cases} \\ \text{o)} \begin{cases} 9x^2 + 4y^2 + 6xy + 42x + 135 = 40y \\ 3x - 2y + 9 = 0 \end{cases} & \text{p)} \begin{cases} 7x^2 + 9y^2 + 5x + 3y + 5 = 12xy \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \\ \text{q)} \begin{cases} (2x + 3y - 2)(x - 5y - 3) = 0 \\ x - 3y - 1 = 0 \end{cases} & \text{r)} \begin{cases} (x + 2y + 1)(x + 2y + 2) = 0 \\ xy + y^2 + 3y + 1 = 0 \end{cases} \\ \text{s)} \begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{y+2} = 1 \\ x + y = 10 \end{cases} & \text{t)} \begin{cases} x + \sqrt{y+3} = 4 \\ y + \sqrt{x+2} = 3 \end{cases} \\ \text{u)} \begin{cases} \sqrt{x-4} + \sqrt{y-1} = 4 \\ x + y = 15 \end{cases} & \text{x)} \begin{cases} 2x + \sqrt{y-2} + 4 = 0 \\ 2y + \sqrt{x+2} = 4 \end{cases} \\ \text{y)} \begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{2x+y+2} = 7 \\ 3x + 2y = 23 \end{cases} & \text{z)} \begin{cases} \sqrt{2x+y+1} - \sqrt{x+y} = 1 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases} \end{array}$$

Bài 113. Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} x + y + xy = 5 \\ x^2 + y^2 + x + y = 8 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x + xy + y = 11 \\ x^2 + y^2 - xy - 2(x + y) = -31 \end{cases} \\ \text{c)} \begin{cases} xy + x + y = 3 \\ x^2 + y^2 + x + y = 12 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} x + y + xy = 3 \\ x^2y + y^2x = 2 \end{cases} \\ \text{e)} \begin{cases} x^2y + xy^2 = 30 \\ x + y + xy = 11 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} x^3 + y^3 = 8 \\ x + y + 2xy = 2 \end{cases} \\ \text{g)} \begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17 \\ x + xy + y = 5 \end{cases} & \text{h)} \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 2 \\ x^3 + y^3 + x^2y^2 + xy = 1 \end{cases} \end{array}$$

$$i) \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 13 \\ x^4 + y^4 + x^2y^2 = 91 \end{cases}$$

$$j) \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 7 \\ x^4 + y^4 + x^2y^2 = 21 \end{cases}$$

$$k) \begin{cases} x + xy + y = 17 \\ x^3 + y^3 - 10xy = 33 \end{cases}$$

$$l) \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 4 \\ x(x + y + 1) + y(y + 1) = 2 \end{cases}$$

$$m) \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \\ x + y - \sqrt{xy} = 4 \end{cases}$$

$$n) \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \\ x + y - \sqrt{xy} = 1 \end{cases}$$

$$o) \begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 6 \\ x^2y + y^2x = 20 \end{cases}$$

$$p) \begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 3 \\ x + y = 5 + \sqrt{(x-1)(y-1)} \end{cases}$$

$$q) \begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4 \end{cases}$$

$$r) \begin{cases} 2(x + y) = 3(\sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{xy^2}) \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6 \end{cases}$$

$$s) \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases}$$

$$t) \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + xy} + 3\sqrt{xy} = 4\sqrt{3} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$u) \begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 35 \end{cases}$$

$$x) \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{7}{\sqrt{xy}} + 1 \\ x\sqrt{xy} + y\sqrt{xy} = 78 \end{cases}$$

$$y) \begin{cases} xy(x - y) = -2 \\ x^3 - y^3 = 2 \end{cases}$$

$$z) \begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y \\ x^2 + y^2 - x + y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Bài 114. Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} x^2 = 3x + 2y \\ y^2 = 3y + 2x \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y \\ y^2 - 2x^2 = 2y + x \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x^2 = 13x + 4y \\ y^2 = 13y + 4x \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} xy + x^2 = 1 + y \\ xy + y^2 = 1 + x \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 2x^2 - y^2 = 3x - 2 \\ 2y^2 - x^2 = 3y - 2 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 2x = y^2 - 4y + 5 \\ 2y = x^2 - 5x + 5 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} xy + x^2 = 1 + y \\ xy + y^2 = 1 + x \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} (4x + 2)^2 = 2y + 15 \\ (4y + 2)^2 = 2x + 15 \end{cases}$$

i)
$$\begin{cases} x + y^2 = y^3 \\ y + x^2 = x^3 \end{cases}$$

j)
$$\begin{cases} x^3 = 2x + y \\ y^3 = 2y + x \end{cases}$$

k)
$$\begin{cases} 2x^3 + x^2y = 3 \\ 2y^3 + xy^2 = 3 \end{cases}$$

l)
$$\begin{cases} x^3 + 2x = y \\ y^3 + 2y = x \end{cases}$$

m)
$$\begin{cases} x - 3y = \frac{4y}{x} \\ y - 3x = \frac{4x}{y} \end{cases}$$

n)
$$\begin{cases} 3y = \frac{y^2 + 2}{x^2} \\ 3x = \frac{x^2 + 2}{y^2} \end{cases}$$

o)
$$\begin{cases} 2x^2 = y + \frac{1}{y} \\ 2y^2 = x + \frac{1}{x} \end{cases}$$

p)
$$\begin{cases} \frac{2x}{y^2 + 1} + 3xy = 4 \\ \frac{2y}{x^2 + 1} + 3xy = 4 \end{cases}$$

q)
$$\begin{cases} (5x - 4y)(3x + 2y) = 7y - 2x \\ (5y - 4x)(3y + 2x) = 7x - 2y \end{cases}$$

r)
$$\begin{cases} (6x + 4y)(x^2 + y^2 - 1) = 5y(x^2 + 1) \\ (6y + 4x)(x^2 + y^2 - 1) = 5x(y^2 + 1) \end{cases}$$

s)
$$\begin{cases} (x - 1)(y^2 + 6) = y(x^2 + 1) \\ (y - 1)(x^2 + 6) = x(y^2 + 1) \end{cases}$$

t)
$$\begin{cases} x^4 + y^2 - xy^3 - \frac{9}{8}x = 0 \\ y^4 + x^2 - yx^3 - \frac{9}{8}y = 0 \end{cases}$$

u)
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{7-y} = 4 \\ \sqrt{y+1} + \sqrt{7-x} = 4 \end{cases}$$

x)
$$\begin{cases} x^2 + \sqrt{x} = 2y \\ y^2 + \sqrt{y} = 2x \end{cases}$$

y)
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 3} + 2\sqrt{x} = 3 + \sqrt{y} \\ \sqrt{y^2 + 3} + 2\sqrt{y} = 3 + \sqrt{x} \end{cases}$$

z)
$$\begin{cases} x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} = 2 \\ x\sqrt{1+x^2} + y\sqrt{1+y^2} = 2 \end{cases}$$

Bài 115. Giải các hệ phương trình sau:

a)
$$\begin{cases} 2x^2 - 4xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 + 2xy + 2y^2 = 7 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y^2 - 3xy = 4 \\ x^2 - 4xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 3x^2 + 5xy - 4y^2 = 38 \\ 5x^2 - 9xy - 3y^2 = 15 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 9 \\ x^2 - 4xy + 5y^2 = 5 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} 3x^2 - 8xy + 4y^2 = 0 \\ 5x^2 - 7xy - 6y^2 = 0 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13 \end{cases}$$

g)
$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 11 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17 \end{cases}$$

h)
$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 2y^2 - 4 = 0 \\ x^2 + 5xy - 3y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

i)
$$\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3y^2 = 6 \end{cases}.$$

k)
$$\begin{cases} 5x^2 - 3y = x - 3xy \\ x^3 - x^2 = y^2 - 3y^3 \end{cases}.$$

j)
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2 \end{cases}.$$

l)
$$\begin{cases} 2x^3 - 9y^3 = (x - y)(2xy + 3) \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases}.$$