

$$\bullet x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P, \quad (x_1 - x_2)^2 = S^2 - 4P, \quad x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3SP, \dots$$

$$\bullet |x_1 - x_2| = a > 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = a^2 \Leftrightarrow S^2 - 4P = a^2.$$

② **Dấu các nghiệm của phương trình bậc hai:**

$$\bullet \text{Phương trình có 2 nghiệm trái dấu: } x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow P < 0.$$

$$\bullet \text{Phương trình có 2 nghiệm dương: } 0 < x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}.$$

$$\bullet \text{Phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt: } 0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}.$$

$$\bullet \text{Phương trình có 2 nghiệm âm: } x_1 \leq x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}.$$

$$\bullet \text{Phương trình có 2 nghiệm âm phân biệt: } x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}.$$

$$\bullet \text{Phương trình có 2 nghiệm cùng dấu: } \begin{cases} x_1 \leq x_2 < 0 \\ 0 < x_1 \leq x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}.$$

Lưu ý: Nếu đề bài yêu cầu so sánh 2 nghiệm x_1, x_2 với số α , thường có 2 cách làm sau:

- Một là đặt ẩn phụ $t = x - \alpha$ để đưa về so sánh 2 nghiệm t_1, t_2 với số 0 như trên.

$$\bullet \text{ Hai là biến đổi, chẳng hạn: } \begin{cases} x_1 < a < x_2 \Leftrightarrow x_1 - a < 0 < x_2 - a \Leftrightarrow (x_1 - a)(x_2 - a) < 0 \\ a < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 > a \\ x_2 > a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - a > 0 \\ x_2 - a > 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{nhân}} \begin{cases} (x_1 - a)(x_2 - a) > 0 \\ + \\ x_1 + x_2 - 2a > 0 \end{cases} \end{cases}$$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 20. Tìm tham số m để các phương trình sau có 1 nghiệm cho trước. Tính nghiệm còn lại.

$$\text{a) } x^2 - mx + 21 = 0, \quad x_1 = 7.$$

$$\text{b) } 2x^2 - (m + 3)x + m - 1 = 0, \quad x_1 = 3.$$

$$\text{c) } mx^2 - (m + 2)x + m = 1, \quad x_1 = 2.$$

$$\text{d) } (m + 3)x^2 + 2(3m + 1)x = -m - 3, \quad x_1 = 2.$$

$$\text{e) } (4 - m)x^2 + mx + 1 - m = 0, \quad x_1 = 1.$$

- f) $(2m - 1)x^2 - 4x + 4m - 3 = 0,$ $x_1 = -1.$
 g) $(m - 4)x^2 + x + m^2 - 4m + 1 = 0,$ $x_1 = -1.$
 h) $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + m - 2 = 0,$ $x_1 = 2.$

Nêu 2 phương pháp giải thường gặp:

Bài 21. Tìm tham số m để các phương trình sau có 2 nghiệm trái dấu:

- a) $x^2 + 5x + 3m - 1 = 0.$ b) $2x^2 + 12x - 15m = 0.$
 c) $mx^2 - 2(m - 2)x - 3 = 0.$ d) $(m - 1)x^2 + (2 - m)x - 1 = 0.$
 e) $(m + 1)x^2 + 2(m + 4)x + m + 1 = 0.$ f) $x^2 - (2m - 3)x + m^2 - 4 = 0.$
 g) $mx^2 + mx - m - 2 = 0.$ h) $mx^2 + 2x + m^2 - 2m = 0.$
 i) $(m + 2)x^2 - mx + m - 2 = 0.$ j) $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + m - 2 = 0.$

Phương trình có 2 nghiệm trái dấu khi:

Bài 22. Tìm tham số m để các phương trình sau có 2 nghiệm dương phân biệt:

- a) $x^2 - 3x + m - 1 = 0.$ b) $x^2 - 6x + m - 2 = 0.$
 c) $x^2 - 2x + m - 1 = 0.$ d) $3x^2 - 10x - 3m + 1 = 0.$
 e) $x^2 - 4mx + 3m^2 = 0.$ f) $x^2 + (2m - 3)x + m^2 + 2 = 0.$
 g) $(m + 2)x^2 - 2(m - 1)x + m - 2 = 0.$ h) $mx^2 + (2 - 3m)x - 6 = 0.$
 i) $mx^2 - 2(m - 2)x + m - 3 = 0.$ j) $x^2 + (2m - 1)x - m = 0.$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt dương khi:

Bài 23. Tìm tham số m để các phương trình sau có 2 nghiệm âm phân biệt:

- a) $x^2 - 2(m + 1)x + m + 7 = 0.$ b) $x^2 + 5x + 3m - 1 = 0.$
 c) $x^2 + 2x + m + 3 = 0.$ d) $mx^2 + 2(m + 3)x + m = 0.$
 e) $(m - 2)x^2 - 2(m + 1)x + m = 0.$ f) $x^2 - 2(m - 1)x - 2m + 1 = 0.$
 g) $(m - 1)x^2 - 2(m + 2)x + m + 2 = 0.$ h) $mx^2 - (4m + 1)x + 4m + 2 = 0.$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt đều âm khi:

Bài 24. Tìm tham số m để các phương trình sau có 2 nghiệm cùng dấu:

- a) $mx^2 + 2(m + 3)x + m = 0.$ b) $mx^2 - 2(m - 2)x + m - 3 = 0.$
 c) $(m - 1)x^2 + 2(m + 1)x + m = 0.$ d) $(m - 1)x^2 + 2(m + 2)x + m - 1 = 0.$
 e) $mx^2 + 2(m + 3)x + m = 0.$ f) $(m + 1)x^2 - 2mx + m - 3 = 0.$

g) $(m + 1)x^2 + 2(m + 4)x + m + 1 = 0$. h) $x^2 + (2m - 1)x - m = 0$.

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt cùng dấu khi:

.....

Bài 25. Tìm tham số m để các phương trình sau:

- | | |
|---|------------------------------|
| a) $x^2 - 2mx + m - 3 = 0$ | có ít nhất một nghiệm dương. |
| b) $(m - 1)x^2 - 2(m - 4)x + m - 5 = 0$ | có đúng một nghiệm dương. |
| c) $x^2 + (2m + 3)x + m^2 = 0$ | có ít nhất một nghiệm âm. |
| d) $mx^2 - 2(m - 2)x + m - 3 = 0$ | có đúng một nghiệm âm. |
| e) $(m + 1)x^2 - 2(m + 2)x + m - 3 = 0$ | có đúng một nghiệm âm. |
| f) $mx^2 - 2(m + 1)x + m + 1 = 0$ | có đúng một nghiệm âm. |

Bài 26. Cho phương trình: $mx^2 - 2mx + m - 1 = 0$ (*)

- Tìm tham số m để phương trình (*) có 2 nghiệm âm phân biệt.
- Tìm tham số m để phương trình (*) có duy nhất một nghiệm dương.

Bài 27. Cho phương trình: $(m - 1)x^2 + 2(m - 3)x + m = 0$ (*)

- Tìm tham số m để phương trình (*) có 2 nghiệm dương phân biệt.
- Tìm tham số m để phương trình (*) có duy nhất một nghiệm dương.

Bài 28. Cho phương trình: $(m^2 - 4)x^2 + 2(m + 1)x - 1 = 0$ (*)

- Tìm tham số m để phương trình (*) có 2 nghiệm trái dấu.
- Tìm tham số m để phương trình (*) có ít nhất 1 nghiệm âm.
- Tìm tham số m để phương trình (*) có duy nhất một nghiệm dương.

Bài 29. Cho phương trình: $(m - 2)x^2 - (m - 1)^2x + m = 0$ (*)

- Tìm tham số m để phương trình (*) vô nghiệm.
- Tìm tham số m để phương trình (*) không có nghiệm dương.

Bài 30. Cho phương trình: $(m - 1)x^2 - (m^2 + 1)x + 2m + 2 = 0$ (*)

- Tìm tham số m để phương trình (*) vô nghiệm.
- Tìm tham số m để phương trình (*) không có nghiệm âm.

Bài 31. Cho phương trình: $(x - 1) \cdot [(m - 1)x^2 + (m - 1)x - 4] = 0$ (*)

- Tìm tham số m để phương trình (*) có 3 nghiệm dương phân biệt.
- Tìm tham số m để phương trình (*) có 2 nghiệm dương phân biệt.

Bài 32. Cho phương trình: $(x + 2) \cdot [mx^2 + (m + 3)x - m - 3] = 0$ (*)

- a) Tìm tham số m để phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt và 2 nghiệm đó âm.
 b) Tìm tham số m để phương trình (*) có ít nhất một nghiệm dương.

Bài 33. Cho phương trình: $(x^2 - 4x + 1 - m)\sqrt{x - 1} = 0$ (*)

- a) Tìm tham số m để phương trình (*) có nghiệm.
 b) Tìm tham số m để phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt.

Bài 34. Tìm m để các phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa điều kiện cho trước:

- a) $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 3m = 0$, $x_1^2 + x_2^2 = 8$.
 b) $(m - 1)x^2 - 2(m + 2)x + m + 1 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 = 18$.
 c) $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 3m + 4 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 = 20$.
 d) $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + m - 2 = 0$, $4(x_1 + x_2) = 7x_1x_2$.
 e) $x^2 + (2m + 1)x - m - 1 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 = x_1x_2 + 1$.
 f) $(m - 1)x^2 - (2m + 3)x + m + 10 = 0$, $(x_1 - x_2)^2 + 3x_1 + 3x_2 = 22$.
 g) $(m - 3)x^2 + (2m - 3)x + m + 2 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 - 3x_2 = 28$.
 h) $x^2 - (2m - 1)x + m^2 + 2m - 1 = 0$, $x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2^2 + 9 = 0$.
 i) $(m - 1)x^2 + 2(m - 1)x + m + 3 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 = 1$.
 j) $x^2 - (m + 1)x + 12 = 0$, $(x_1 - 2x_2)(x_2 - 2x_1) = 10$.
 k) $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 3 = 0$, $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 = 0$.
 l) $(m + 1)x^2 - 2(m + 2)x + m - 3 = 0$, $(4x_1 + 1)(4x_2 + 1) = 18$.
 m) $(m - 1)x^2 - 2(m + 1)x + m - 2 = 0$, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 5$.
 n) $x^2 + 2(m + 3)x + m^2 + 4m + 5 = 0$, $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 6$.
 o) $(m - 1)x^2 + 2(m - 4)x + m - 5 = 0$, $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 3$.
 p) $x^2 - mx + 1 = 0$, $x_1 - x_2 = 1$.
 q) $(m + 1)x^2 - 2(m + 2)x + m - 3 = 0$, $|x_1| - |x_2| = 0$.
 r) $(3m - 1)x^2 + 2(m + 1)x - m + 2 = 0$, $|x_2 - x_1| = \sqrt{2}$.
 s) $x^2 - 3x + m^2 + 2m - 2 = 0$, $4(x_1^2 + x_2^2) = 17|x_1x_2|$.
 t) $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 3m + 4 = 0$, $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 2\sqrt{2}$.

u) $x^2 - 4x + m + 1 = 0,$	$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{6}.$
v) $x^2 - 2x + 2m + 1 = 0,$	$4 + \sqrt{x_1 x_2 + 7} = 3(x_1 + x_2).$
w) $x^2 - 4x + m - 1 = 0,$	$x_1^3 + x_2^3 = 40.$
x) $mx^2 - 2(m+1)x + m + 3 = 0,$	$x_1^3 + x_2^3 = 2(x_1 + x_2).$
y) $x^2 + 2mx + 4 = 0,$	$x_1^4 + x_2^4 = 2x_1^2 x_2^2.$
z) $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + m - 1 = 0$	$(x_1 + \sqrt{x_1^2 + 1})(x_2 + \sqrt{x_2^2 + 1}) = 1.$
aa) $x^2 - x + m = 0$	$\sqrt{x_1^3 - mx_1 + m^2} + \sqrt{x_2^3 - mx_2 + m^2} = 5.$

Biểu thức có đặc điểm gì thì được gọi biểu thức đối xứng theo 2 biến x_1, x_2 :

.....

Bài toán liên quan đến biểu thức 2 nghiệm đối xứng của x_1, x_2 ta sẽ làm như thế nào ? ...

Bài 35. Tìm m để các phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa điều kiện cho trước:

a) $x^2 + 2x + m = 0,$	$x_1 - 3x_2 = 0.$
b) $x^2 - 4x + m + 3 = 0,$	$x_1 = 3x_2.$
c) $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 2m + 4 = 0,$	$x_1 = 2x_2.$
d) $x^2 - (2m-1)x + m + 3 = 0$	$x_2 = 3x_1.$
e) $mx^2 + 2(m-4)x + m + 7 = 0,$	$x_2 = 2x_1.$
f) $(m+2)x^2 + 2(m-1)x - m + 3 = 0,$	$x_1 - 11x_2 = 2.$
g) $x^2 + 2mx + 4 = 0,$	$x_1 = 4x_2 > 0.$
h) $(m-1)x^2 - 2(m+4)x + m + 3 = 0,$	$x_1 x_2 + 2x_1 + 1 = 0.$
i) $x^2 - 2(2m-1)x + 1 - 4m = 0,$	$3x_1 + x_2 = 4.$
j) $x^2 - (3m+2)x + m^2 = 0$	$x_1 = 9x_2.$
k) $3x^2 + 6mx + 4m^2 = 0,$	$x_1^2 = x_2, (x_1 < x_2).$
l) $x^2 - (m^2 - 3m)x + m^3 = 0,$	$x_1 = x_2^2.$
m) $x^2 - (2m+1)x - (m^2 + 2) = 0,$	$x_1^2 = x_2^2.$
n) $x^2 - (m+3)x + 2(m+2) = 0,$	$2x_1 - x_2 = 0.$
o) $x^2 - (m+2)x + m(m-3) = 0,$	$x_1 + 2x_2 = 1.$
p) $3x^2 - 2(m+1) + 3m - 5 = 0,$	$x_1 = 3x_2.$
q) $\frac{x^2 - 2(2m+1)x + 3m^2 + 6m}{x-2} = 0,$	$x_1 + 2x_2 = 16.$

Bài toán liên quan đến biểu thức 2 nghiệm không đối xứng x_1, x_2 ta làm như thế nào ?

.....

Bài 36. Tìm m để các phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa điều kiện cho trước:

- a) $x^2 + 2mx - m^2 = 0,$ $x_1 < x_2 < -1.$
 b) $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0,$ $2 < x_1 < x_2.$
 c) $x^2 - 2x - m^2 - 2m = 0,$ $x_1 < 2 < x_2.$
 d) $mx^2 - 2(m+1)x + m + 1 = 0,$ $x_1 < 1 < x_2.$
 e) $mx^2 + 2mx + m - 3 = 0,$ $x_1 \leq x_2 \leq 4.$
 f) $(m-1)x^2 + 2mx + m = 0,$ $-3 \leq x_1 \leq x_2.$
 g) $(m^2 - 2m)x^2 + 2(m^2 - m - 1)x + m^2 - 1 = 0,$ $x_1 \leq -2 \leq x_2.$

Nêu 2 phương pháp giải thường gặp:

.....

Bài 37. Tìm tham số m để các phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 độc lập với tham số m ?

- a) $x^2 - (2m-3)x + m^2 - 4 = 0.$ b) $mx^2 - (2m+3)x + m - 4 = 0.$
 c) $mx^2 - (2m-1)x + m + 2 = 0.$ d) $mx^2 - 2(m+1)x + m + 3 = 0.$
 e) $(m+1)x^2 - 2(m+2)x + m - 3 = 0.$ f) $(m-4)x^2 - 2(m-2)x + m - 1 = 0.$
 g) $(m-1)x^2 + 2(m+2)x + m - 4 = 0.$ h) $mx^2 - (2m-1)x + m + 2 = 0.$
 i) $(m+2)x^2 - 2(4m-1) - 2m + 5 = 0.$ j) $(m+2)x^2 - (2m+1)x + \frac{3m}{4} = 0.$

Nêu phương pháp giải:

.....

Bài 38. Tìm tham số m để các phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt trái dấu mà nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương trong các trường hợp sau:

- a) $(m-3)x^2 + 2(3-m)x + m + 1 = 0.$ b) $(m+1)x^2 - 2mx + m - 3 = 0.$
 c) $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0.$ d) $x^2 - (m+5)x - m - 6 = 0.$

Bài 39. Cho phương trình: $mx^2 - (2m+1)x + m + 3 = 0$ (1) (m : tham số).

- a) Định m để phương trình (1) có nghiệm.

b) Định m nguyên để phương trình (1) có đúng 2 nghiệm đều nguyên.

Bài 40. Cho phương trình: $mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0$ (1) (m : tham số).

a) Tìm tham số m để phương trình (1) có 2 nghiệm trái dấu.

b) Định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa điều kiện: $x_1 < 2 < x_2$.

Bài 41. Cho phương trình: $x^2 - 2(1-m)x + m^2 + 3 = 0$ (1) (m : tham số).

a) Định m để phương trình (1) có một nghiệm $x_1 = 6$. Tính nghiệm còn lại.

b) Định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 . Khi đó hãy xác định tham số m để biểu thức $A = 2(x_1 + x_2) - x_1x_2$ đạt giá trị lớn nhất ?

Bài 42. Cho phương trình: $x^2 - 2x + 2 - m = 0$ (1) (m : tham số).

a) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm trái dấu.

b) Định m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 . Khi đó hãy xác định tham số m để biểu thức $A = x_1^2x_2^2 + 3(x_1^2 + x_2^2) - 4$ đạt giá trị nhỏ nhất ?

Bài 43. Cho phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2 = 0$ (1) (m : tham số). Tìm tham số m để phương trình có nghiệm x_1, x_2 (có thể trùng nhau) sao cho:

a) $A = x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) - 6$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) $B = \sqrt{2(x_1^2 + x_2^2) + 16} - 3x_1x_2$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 44. Cho phương trình: $mx^2 - (2m+1)x + m - 5 = 0$ (1) (m : tham số).

a) Tìm tham số m để phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 phân biệt.

b) Định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa: $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1x_2 + 16 = 0$.

Bài 45. Cho phương trình: $(2m-3)x^2 - 2(2m+3)x + 1 + 2m = 0$ (1) (m : tham số).

a) Tìm tham số m để phương trình (1) có 1 nghiệm là $x = -1$. Tính nghiệm còn lại.

b) Định m để (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa: $(5x_1 + 1)(5x_2 + 1) - 13x_1x_2 = 1$.

Bài 46. Tìm tham số m để phương trình: $(m-1)x^2 - 2mx + 9 - 3m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện: $2(x_1 - x_2)^2 = x_1(2x_2 - 1) + x_2(2x_1 - 1)$.

Bài 47. Cho phương trình: $(m-1)x^2 + (2m-1)x + m - 2 = 0$ (1) (m : tham số).

a) Giải và biện luận phương trình (1).

b) Định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa hệ thức: $3x_1 + 3x_2 - 4x_1x_2 = 1$.