

Chương 3

PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

§ 1. ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH

☆☆☆

KIẾN THỨC CƠ BẢN

① Khái niệm phương trình một ẩn

- Cho 2 hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ có tập xác định lần lượt là D_f và D_g . Đặt $D = D_f \cap D_g$. Mệnh đề chứa biến " $f(x) = g(x)$ " được gọi là phương trình một ẩn, x gọi là ẩn và D gọi tập xác định của phương trình.
- Số $x_0 \in D$ gọi là 1 nghiệm phương trình $f(x) = g(x)$ nếu " $f(x_0) = g(x_0)$ " là 1 mệnh đề đúng.

② Phương trình tương đương

- Hai phương trình gọi là tương đương nếu chúng có cùng 1 tập nghiệm. Nếu $f_1(x) = g_1(x)$ tương đương với $f_2(x) = g_2(x)$ thì viết $f_1(x) = g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) = g_2(x)$.
- **Định lý 1:** Cho phương trình $f(x) = g(x)$ có tập xác định D và $y = h(x)$ là một hàm số xác định trên D . Khi đó trên miền D , phương trình tương đương với mỗi phương trình sau: (1): $f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$. (2): $f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x)$ với $h(x) \neq 0, \forall x \in D$.

③ Phương trình hệ quả

- $f_1(x) = g_1(x)$ có tập nghiệm là S_1 được gọi là phương trình hệ quả của phương trình $f_2(x) = g_2(x)$ có tập nghiệm S_2 nếu $S_1 \subset S_2$. Khi đó: $f_1(x) = g_1(x) \Rightarrow f_2(x) = g_2(x)$.
- **Định lý 2:** Khi bình phương hai vế của một phương trình, ta được phương trình hệ quả của phương trình đã cho: $f(x) = g(x) \Rightarrow [f(x)]^2 = [g(x)]^2$.

Lưu ý:

- Nếu hai vế của 1 phương trình luôn cùng dấu thì khi bình phương 2 vế của nó, ta được một phương trình tương đương.
- Nếu phép biến đổi tương đương dẫn đến phương trình hệ quả, ta phải thử lại các nghiệm tìm được vào phương trình đã cho để phát hiện và loại bỏ nghiệm ngoại lai.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Tìm điều kiện xác định, rồi suy ra nghiệm của mỗi phương trình sau:

a) $\sqrt{2x-3} = \sqrt{3-2x}$.

b) $2x + 4 - \sqrt{x-1} = \sqrt{1-x} + 6$.

c) $\sqrt{3x-12} + 2 = \sqrt{4-x} + 2x$.

d) $5x - \sqrt{x-7} = \sqrt{7-x} + 35$.

e) $\frac{\sqrt{4x+12}}{x+3} + x = \sqrt{-x-3} + 1.$ f) $\frac{x}{2\sqrt{x-4}} = \frac{1}{\sqrt{x-4}}.$

Bài 2. Tìm tham số m để các cặp phương trình sau đây là tương đương nhau:

- a) $x = 2$ và $mx^2 + 2m + 1 = (m + 1)x.$ b) $2x - 1 = 0$ và $(m - 3)x + 2m = 1.$
 c) $(x + 1)^2 = 0$ và $mx^2 + m = (2m + 1)x.$ d) $x^2 = 9$ và $2x^2 + (m - 5)x = 3(m + 1).$
 e) $x + 2 = 0$ và $m(x^2 + 3x + 2) + m^2x + 2 = 0.$ f) $3x - 2 = 0$ và $(m + 3)x = m - 4.$

§ 2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

☆☆☆

Giải và biện luận phương trình $ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b$ (i)	
Hệ số	Kết luận
$a \neq 0$	(i) có nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}.$
$a = 0$	$b \neq 0$ (i) vô nghiệm.
$a = 0$	$b = 0$ (i) nghiệm đúng với mọi $x.$
Bài toán tìm tham số trong phương trình bậc nhất $ax + b = 0$ (ii)	
<ul style="list-style-type: none"> • Để phương trình (ii) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow a \neq 0.$ • Để phương trình (ii) có tập nghiệm là \mathbb{R} (vô số nghiệm) $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}.$ • Để phương trình (ii) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}.$ • Để (ii) có nghiệm \Leftrightarrow có nghiệm duy nhất hoặc có tập nghiệm là $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}.$ 	
<p>★ Lưu ý: Có nghiệm là trường hợp ngược lại của vô nghiệm. Do đó, tìm điều kiện để (ii) có nghiệm, thông thường ta tìm điều kiện để (ii) vô nghiệm, rồi lấy kết quả ngược lại.</p>	

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 3. Giải và biện luận các phương trình sau:

- a) $mx = m + 1.$ b) $(m + 1)x = 2m + 2.$
 c) $2mx = 2x + m + 4.$ d) $m(x - 4) = 5x - 2.$
 e) $(3m - 1)x + m = 2x + 1.$ f) $m(m - 2)x = m - 2.$

- g) $m(x + 3) = x - m$.
 h) $(m + 1)(x - 2) = 3m - 1$.
 i) $(m - 1)x = m^2 - 3m + 2$.
 j) $(2m - 3)x = m(2m - 5) + 3$.
 k) $(m^2 - 2m - 8)x = 4 - m$.
 l) $m^2(x - 1) + 2m = m^2x - 3$.
 m) $m^2(x - 2) - 6m(x - 1) + 9m = 0$.
 n) $m(m - 5)x = 4 - 6x - 2m$.

Bài 4. Giải và biện luận các phương trình sau:

- a) $m^2x - 3 = 9x + m$.
 b) $m^2(x - 1) = mx - 1$.
 c) $(m - 1)(x + 1) = m^2 - 1$.
 d) $(m^2 + 2)x - 2m = x - 3$.
 e) $m^2x + 4m - 3 = x + m^2$.
 f) $(4m^2 - 2)x = 1 + 2m - x$.
 g) $m(mx - 1) = (4m - 3)x - 3$.
 h) $m^2x + m(5x - 2) = 6(1 - x)$.
 i) $(m^2 - 10)x - m^2 + 2m = -x - 3$.
 j) $m^2x + 4m - 3 = m^2 + 6mx - 5x$.
 k) $(m^2 - 1)x = m^3 + 3m^2 + 2m$.
 l) $(m^3 - 1)x = 4m^3 - 3m^2 + 3m + 4$.

Bài 5. Giải và biện luận các phương trình sau:

- a) $\frac{(m - 2)x}{m - 1} = \frac{m^2 - 4}{m - 1}$.
 b) $\frac{m^2x}{m - 5} + \frac{2mx - m^2 + 1}{m - 5} = 1$.

Bài 6. Giải và biện luận các phương trình sau:

- a) $\frac{mx - 2m}{x - 2} = -2$.
 b) $\frac{mx - (m + 2)}{2x - 1} = -4$.
 c) $\frac{(m + 1)x + m - 2}{x + 3} = m$.
 d) $\frac{(m^2 + 1)x - 10}{x - 2} = m + 1$.
 e) $\frac{3mx - 2}{x - 2} = m + \frac{5m}{x - 2}$.
 f) $\frac{m^2x - m^2}{x - 1} = m$.
 g) $\frac{2m - 3}{x + 3} - m + 4 = 0$.
 h) $\frac{x + 2}{x - m} = \frac{x + 1}{x - 1}$.
 i) $\frac{m}{mx + 3} = 2$.
 j) $\frac{x + m}{x + 1} + \frac{x - 2}{x} = 2$.
 k) $\frac{5x - m}{x - 2} - \frac{4x - 3}{x} = 1$.
 l) $\frac{5m - 2}{mx - 1} = -3$.

Bài 7. Giải và biện luận các phương trình sau:

- a) $\frac{x + 1}{\sqrt{x}} = \frac{m}{\sqrt{x}}$.
 b) $\frac{x - m}{\sqrt{x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x - 1}}$.
 c) $\frac{x - m}{\sqrt{x - 1}} = \frac{1}{x - 1}$.
 d) $\frac{x - m}{\sqrt{2x - 1}} = \frac{m}{\sqrt{2x - 1}} + \sqrt{2x - 1}$.

$$\begin{array}{ll} \text{e)} \frac{3x - m - 1}{\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 1} = \frac{2x + 2m - 3}{\sqrt{x - 1}}. & \text{f)} \frac{x - m}{\sqrt{3x - 2}} + \sqrt{3x - 2} = \frac{mx}{\sqrt{3x - 2}}. \\ \text{g)} (m - 1)x = \sqrt{m - 1}. & \text{h)} x\sqrt{2m - 1} = 2m - 1. \\ \text{i)} (mx + 1)\sqrt{x - 1} = 0. & \text{j)} (x + 2m)\sqrt{x - 4} = 0. \end{array}$$

Bài 8. Giải và biện luận các phương trình sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} |x - m| = |2x|. & \text{b)} |3x + m| = |x - m + 2|. \\ \text{c)} |2mx + 3| = 5. & \text{d)} |mx - 2| = |x + m|. \\ \text{e)} |x - 2m| = |x + 1|. & \text{f)} |mx + 1| = |2x + m - 3|. \end{array}$$

Bài 9. Tìm tham số m để các phương trình sau vô nghiệm.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} (m + 1)x - m - 2 = 0. & \text{b)} m^2(x - 1) = 2(2x - m - 4). \\ \text{c)} (4m^2 - 2)x = 1 + 2m - x. & \text{d)} (m + 1)^2x - 2 = (4m + 9)x + m. \\ \text{e)} \frac{x - m}{x - 2} + \frac{x - 2}{x} = 2. & \text{f)} \frac{x - 2}{x - 3} = \frac{x}{x + m}. \\ \text{g)} \frac{x + m}{m + 1} - \frac{2}{x} = 1. & \text{h)} \frac{x + 1}{x - m + 1} = \frac{x}{x + m + 2}. \\ \text{i)} \frac{x + 1}{\sqrt{x}} = \frac{m - 1}{\sqrt{x}}. & \text{j)} \frac{x - m}{\sqrt{x - 1}} = \frac{m}{\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 1}. \end{array}$$

Bài 10. Tìm tham số m để các phương trình sau có nghiệm duy nhất.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} 2mx - 1 = x + m. & \text{b)} m(m - 1)x = m^2 - 1. \\ \text{c)} m(mx - 1) = (4m - 3)x - 3. & \text{d)} m^2(mx - 1) = 2m(2x + 1). \\ \text{e)} \frac{mx - m - 3}{x + 1} = 1. & \text{f)} \frac{x + 2}{x - m} = \frac{x + 1}{x - 1}. \\ \text{g)} \frac{x - m}{x - 2} + \frac{x - 2}{x} = 2. & \text{h)} \frac{m}{mx + 3} = 2. \\ \text{i)} |2x - m| = |x - 1|. & \text{j)} |mx - 2| = |x + 4|. \\ \text{k)} |2x + m| = |2x + 2m - 1|. & \text{l)} |3mx + 4| = |x + m|. \end{array}$$

Bài 11. Tìm tham số m để các phương trình sau có tập nghiệm là \mathbb{R} (câu hỏi tương tự là: tìm m để phương trình vô số nghiệm hoặc nghiệm đúng với mọi số thực m).

$$\begin{array}{ll} \text{a)} (m - 2)x = m - 1. & \text{b)} 3mx - 1 = x - 9m^2. \\ \text{c)} m^2(x - 1) = 2(mx - 2). & \text{d)} (m^2 + 2m - 3)x = m - 1. \end{array}$$

e) $m^2(mx - 1) = 2m(2x + 1)$. f) $(mx + 2)(x + 1) = (mx + m^2)x$.

Bài 12. Tìm tham số m để các phương trình sau có nghiệm.

a) $m^2(x - 1) = x - m$.

b) $m^2x = 4x + m^2 + m - 2$.

c) $m^2(x - m) = x - m^2$.

d) $(m^2 + 2)x - 2m = x - 3$.

e) $m(x - m) = x + m - 2$.

f) $m^2(x - 1) + m = x(3m - 2)$.

g) $(m^2 - m)x = 2x + m^2 - 1$.

h) $m^2(mx - 1) = 2m(2x + 1)$.

i) $\frac{x + m}{x - 1} = \frac{x + 3}{x - 2}$.

j) $\frac{x - m}{x - 1} + \frac{x - 1}{x - m} = 2$.

k) $|x - 1| + 2x - 3 = m$.

l) $2(|x| + m - 1) = |x| - m + 3$.

m) $\frac{2mx - 1}{\sqrt{x - 1}} - 2\sqrt{x - 1} = \frac{m + 1}{\sqrt{x - 1}}$.

n) $\frac{3x - m}{\sqrt{x + 1}} + \sqrt{x + 1} = \frac{2x + 5m + 3}{\sqrt{x + 1}}$.

Bài 13. Tìm tham số m nguyên để các phương trình sau có nghiệm nguyên.

a) $(m - 2)x = m - 1$.

b) $(m - 1)x = 2x + m - 3$.

c) $m(x - 1) = m + 3$.

d) $m(x + 3) = x - m$.

e) $(m + 1)(x - 2) = 3m - 1$.

f) $(2m - 3)x = m(2m - 5) + 3$.

§ 3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

☆☆☆

Dạng toán 1: Giải và biện luận phương trình bậc hai

Giải và biện luận phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$ (i)

Phương pháp:

Bước 1. Biến đổi phương trình về đúng dạng $ax^2 + bx + c = 0$.

Bước 2. Nếu hệ số a chứa tham số, ta xét 2 trường hợp:

- Trường hợp 1: $a = 0$, ta giải và biện luận $ax + b = 0$.
- Trường hợp 2: $a \neq 0$. Ta lập $\Delta = b^2 - 4ac$. Khi đó:

○ Nếu $\Delta > 0$ thì (i) có 2 nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

○ Nếu $\Delta = 0$ thì (i) có 1 nghiệm (kép): $x = -\frac{b}{2a}$.

○ Nếu $\Delta < 0$ thì (i) vô nghiệm.

Bước 3. Kết luận.

Lưu ý:

- Phương trình (i) có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$.
- Phương trình (i) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG**Bài 14.** Giải và biện luận các phương trình bậc hai sau:

- | | |
|--|---|
| a) $x^2 - x + 2m = 0.$ | b) $2x^2 + 12x - 15m = 0.$ |
| c) $2x^2 - 6x + 3m - 5 = 0.$ | d) $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3 = 0.$ |
| e) $x^2 - (2m+1)x + m = 0.$ | f) $x^2 - 2(m+3)x + m^2 = 0.$ |
| g) $mx^2 + 2x + 1 = 0.$ | h) $mx^2 - 2(m-1)x + m - 5 = 0.$ |
| i) $(m-1)x^2 + 2x + 3 = 0.$ | j) $(m+1)x^2 - (2m+1)x + m - 2 = 0.$ |
| k) $(m^2 - 5m - 36)x^2 - 2(m+4)x + 1 = 0.$ | l) $(m^2 + m - 2)x^2 + (m+2)x + 1 = 0.$ |
| m) $(m-2)x^2 + 2mx + m + 1 = 0.$ | n) $mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0.$ |
| o) $(m-1)x^2 + 2(m+1)x + m - 3 = 0.$ | p) $(m+1)x^2 - (1-2m)x + m - 1 = 0.$ |
| q) $(x-3)(2m-x) = 0.$ | r) $(mx-3)[(m+1)x-3] = 0.$ |
| s) $(x-3)(x^2 - mx + 1) = 0.$ | t) $(x-2)[x^2 - 2(m-1)x + m^2] = 0.$ |
| u) $(x-1)(x^2 - 4x + 2m - 1) = 0.$ | v) $(x^2 - 4x + 1 - m)\sqrt{x-1} = 0.$ |
| x) $x^3 - (m+3)x + 3m - 18 = 0.$ | y) $(x^2 + 2x - m)(x^2 - 3x + 4m) = 0.$ |
| z) $\frac{(x-2)(mx+3)}{x-1} = 0.$ | w) $\frac{(mx-2)(x-2)}{x+1} = 0.$ |

Bài 15. Tìm tham số m để các phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt.

- | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $2x^2 - x + m - 2 = 0.$ | b) $x^2 - 2mx + (m+2)(m-3) = 0.$ |
| c) $x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 1 = 0.$ | d) $x^2 - 2(m-3)x + m + 3 = 0.$ |
| e) $mx^2 - (1-2m)x + m - 2 = 0.$ | f) $mx^2 - (m+2)x + m - 1 = 0.$ |
| g) $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0.$ | h) $(m-3)x^2 + 2(3-m)x + m + 1 = 0.$ |
| i) $(m+1)x^2 - 2mx + m - 3 = 0.$ | j) $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0.$ |

Bài 16. Tìm tham số m để các phương trình sau có nghiệm kép. Tính nghiệm kép đó.

- | | |
|-------------------------------|----------------------------------|
| a) $x^2 - (2m+3)x + m^2 = 0.$ | b) $(m-1)x^2 - 2mx + m - 2 = 0.$ |
|-------------------------------|----------------------------------|

- c) $(2 - m)x^2 - 2(m + 1)x + 4 - m = 0$. d) $mx^2 - 2(m - 1)x + m + 1 = 0$.
 e) $x^2 - 2(m + 1)x + m + 7 = 0$. f) $(m - 1)x^2 - 3(m - 1)x + 2m = 0$.
 g) $(m + 2)x^2 + 2(3m - 2)x + m + 2 = 0$. h) $(2m - 1)x^2 + (3 + 2m)x + m - 8 = 0$.

Bài 17. Tìm tham số m để các phương trình sau có duy nhất 1 nghiệm.

- a) $x^2 - (m - 1)x + 4 = 0$. b) $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 3m + 4 = 0$.
 c) $(3 - m)x^2 + 2(m + 1)x + 5 - m = 0$. d) $(m + 2)x^2 - (4 + m)x + 6m + 2 = 0$.
 e) $(m - 1)x^2 + 2(m + 2)x + m - 1 = 0$. f) $(m - 2)x^2 - 2(m + 4)x + 5(m - 2) = 0$.
 g) $(m - 2)x^2 + 2(4 - 3m)x + 10m = 11$. h) $(x - 1)[(m + 1)x - 2] = 0$.
 i) $(mx - 2)(2mx - x + 1) = 0$. j) $(mx - 3)[(m + 1)x - 3] = 0$.
 k) $(m^2 - 5m - 36)x^2 + 1 = 2(m + 4)x$. l) $(x - 2)[(m - 1)x + 2] = 0$.

Bài 18. Tìm tham số m để các phương trình sau có nghiệm.

- a) $2x^2 - 6x + 3m - 5 = 0$. b) $2x^2 + 3x + m - 1 = 0$.
 c) $x^2 - (m + 2)x + m + 2 = 0$. d) $x^2 + 2(m + 1)x + m^2 - 4m + 1 = 0$.
 e) $(2 - m)x^2 + (m - 2)x + m + 1 = 0$. f) $(m + 1)x^2 - 2(m - 3)x + m + 6 = 0$.
 g) $(m + 1)x^2 - (2m + 1)x + m - 2 = 0$. h) $(m - 2)x^2 - 2(m + 1)x + m - 5 = 0$.
 i) $(m - 1)x^2 - (2 - m)x - 1 = 0$. j) $mx^2 - 2(m + 3)x + m + 1 = 0$.

Bài 19. Biện luận theo số giao điểm của 2 parabol theo tham số m trong các trường hợp sau:

- a) $(P_1): y = x^2 - 2x + 3$. $(P_2): y = x^2 - m$.
 b) $(P_1): y = x^2 + mx + 8$. $(P_2): y = x^2 + x + m$.
 c) $(P_1): y = (m - 2)x^2 + 2(m - 3)x + m - 5$. $(P_2): y = x^2 - x + m$.

Dạng toán 2: Định lý Viét & Ứng dụng

☆☆☆

Định lý Viét

Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$) có 2 nghiệm x_1, x_2 thì

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Ngược lại, nếu hai số u và v có tổng $u + v = S$ và tích $uv = P$ thì u, v là 2 nghiệm của phương trình: $x^2 - Sx + P = 0$, ($S^2 - 4P \geq 0$).

Ứng dụng định lý Viét

① Tính giá trị các biểu thức đối xứng của 2 nghiệm phương trình bậc hai: