Chủ đề 1: BIẾN ĐỔI ĐẠI SỐ

Chương 1: Căn thức

1.1 CĂN THỨC BẬC 2

Kiến thức cần nhớ:

- Căn bậc hai của số thực a là số thực x sao cho $x^2 = a$.
- Cho số thực a không âm. Căn bậc hai số học của a kí hiệu là $\sqrt{a}$ là một số thực không âm x mà bình phương của nó bằng a:
  $\begin{cases} a \ge 0 \\ \sqrt{a} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 = a \end{cases}$
- Với hai số thực không âm a,b ta có: $\sqrt{a} \le \sqrt{b} \Leftrightarrow a \le b$.
- Khi biến đổi các biểu thức liên quan đến căn thức bậc 2 ta cần lưu ý:

  + $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \ge 0 \\ -A & A < 0 \end{cases}$

  + $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B} = A\sqrt{B}$ với $A, B \ge 0$; $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B} = -A\sqrt{B}$ với $A < 0; B \ge 0$

  + $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \sqrt{\dfrac{A.B}{B^2}} = \dfrac{\sqrt{A.B}}{|B|}$ với $AB \ge 0, B \ne 0$

  + $\dfrac{M}{\sqrt{A}} = \dfrac{M.\sqrt{A}}{A}$ với $A > 0$;(Đây gọi là phép khử căn thức ở mẫu)

  + $\dfrac{M}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \dfrac{M\left(\sqrt{A} \mp \sqrt{B}\right)}{A - B}$ với $A, B \ge 0, A \ne B$ (Đây gọi là phép trục căn thức ở mẫu)

1.2 CĂN THỨC BẬC 3, CĂN BẬC n.

1.2.1 CĂN THỨC BẬC 3.

Kiến thức cần nhớ:

- Căn bậc 3 của một số a kí hiệu là $\sqrt[3]{a}$ là số x sao cho $x^3 = a$
- Cho $a \in R; \sqrt[3]{a} = x \Leftrightarrow x^3 = \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$
- Mỗi số thực a đều có duy nhất một căn bậc 3.
- Nếu $a > 0$ thì $\sqrt[3]{a} > 0$.
- Nếu $a < 0$ thì $\sqrt[3]{a} < 0$.
- Nếu $a = 0$ thì $\sqrt[3]{a} = 0$.
- $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ với mọi $b \neq 0$.
- $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}$ với mọi a, b.
- $a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$.
- $A\sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{A^3 B}$.
- $\sqrt[3]{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt[3]{AB^2}}{B}$ với $B \neq 0$
- $\dfrac{\sqrt[3]{A}}{B} = \sqrt[3]{\dfrac{A}{B^3}}$
- $\dfrac{1}{\sqrt[3]{A} \pm \sqrt[3]{B}} = \dfrac{\sqrt[3]{A^2} \mp \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}}{A \pm B}$ với $A \neq \pm B$.

1.2.2 CĂN THỨC BẬC n.

Cho số $a \in R, n \in N; n \geq 2$. Căn bậc n của một số a là một số mà lũy thừa bậc n của nó bằng a.

- Trường hợp n là số lẻ: $n = 2k + 1, k \in N$

  Mọi số thực a đều có một căn bậc lẻ duy nhất:

  $\sqrt[2k+1]{a} = x \Leftrightarrow x^{2k+1} = a$, nếu $a > 0$ thì $\sqrt[2k+1]{a} > 0$, nếu $a < 0$ thì $\sqrt[2k+1]{a} < 0$, nếu $a = 0$ thì $\sqrt[2k+1]{a} = 0$
- Trường hợp n là số chẵn: $n = 2k, k \in N$.

Mọi số thực $a > 0$ đều có hai căn bậc chẵn đối nhau. Căn bậc chẵn dương kí hiệu là $\sqrt[2k]{a}$ (gọi là căn bậc $2k$ số học của a). Căn bậc chẵn âm kí hiệu là $-\sqrt[2k]{a}$, $\sqrt[2k]{a} = x \Leftrightarrow x \geq 0$ và $x^{2k} = a$;
$-\sqrt[2k]{a} = x \Leftrightarrow x \leq 0$ và $x^{2k} = a$.
Mọi số thực $a < 0$ đều không có căn bậc chẵn.

Một số ví dụ:

Ví dụ 1: Phân tích các biểu thức sau thành tích:

a) $P = x^4 - 4$

b) $P = 8x^3 + 3\sqrt{3}$

c) $P = x^4 + x^2 + 1$

Lời giải:

a) $P = \left(x^2 - 2\right)\left(x^2 + 2\right) = \left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)\left(x^2 + 2\right)$.

b) $P = (2x)^3 + \left(\sqrt{3}\right)^3 = \left(2x + \sqrt{3}\right)\left(4x^2 - 2\sqrt{3}x + 3\right)$.

c) $P = \left(x^2 + 1\right)^2 - x^2 = \left(x^2 - x + 1\right)\left(x^2 + x + 1\right)$.

Ví dụ 2: Rút gọn các biểu thức:

a) $A = \sqrt{x} - \sqrt{x - \sqrt{x} + \dfrac{1}{4}}$ khi $x \geq 0$.

b) $B = \sqrt{4x - 2\sqrt{4x - 1}} + \sqrt{4x + 2\sqrt{4x - 1}}$ khi $x \geq \dfrac{1}{4}$.

c) $C = \sqrt{9 - \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{8 + 10\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}}}}$

Lời giải:

a) $A=\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{x}+\frac{1}{4}}=\sqrt{x}-\sqrt{\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{x}-\left|\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right|$

+ Nếu $\sqrt{x}\ge\frac{1}{2}\Leftrightarrow x\ge\frac{1}{4}$ thì $\left|\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right|=\sqrt{x}-\frac{1}{2}\Rightarrow A=\frac{1}{2}$.

+ Nếu $\sqrt{x}<\frac{1}{2}\Leftrightarrow 0\le x<\frac{1}{4}$ thì $\left|\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right|=-\sqrt{x}+\frac{1}{2}\Rightarrow A=2\sqrt{x}-\frac{1}{2}$

b)

$B=\sqrt{4x-2\sqrt{4x-1}}+\sqrt{4x+2\sqrt{4x-1}}=\sqrt{4x-1-2\sqrt{4x-1}+1}+\sqrt{4x-1+2\sqrt{4x-1}+1}$

Hay $B=\sqrt{\left(\sqrt{4x-1}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{4x-1}+1\right)^2}=\left|\sqrt{4x-1}-1\right|+\left|\sqrt{4x-1}+1\right|$

$=\left|\sqrt{4x-1}-1\right|+\sqrt{4x-1}+1$

+ Nếu $\sqrt{4x-1}-1\ge 0\Leftrightarrow 4x-1\ge 1\Leftrightarrow x\ge\frac{1}{2}$ thì $\left|\sqrt{4x-1}-1\right|=\sqrt{4x-1}-1$ suy ra $B=2\sqrt{4x-1}$.

+ Nếu $\sqrt{4x-1}-1<0\Leftrightarrow 4x-1<1\Leftrightarrow\frac{1}{4}\le x<\frac{1}{2}$ thì $\left|\sqrt{4x-1}-1\right|=-\sqrt{4x-1}+1$ suy ra $B=2$.

c) Để ý rằng: $7-4\sqrt{3}=\left(2-\sqrt{3}\right)^2\Rightarrow\sqrt{7-4\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$

Suy ra

$C=\sqrt{9-\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{8+10(2-\sqrt{3})}}}=\sqrt{9-\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{28-10\sqrt{3}}}}$

$=\sqrt{9-\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{\left(5-\sqrt{3}\right)^2}}}$ .Hay

$C=\sqrt{9-\sqrt{5\sqrt{3}+5(5-\sqrt{3})}}=\sqrt{9-\sqrt{25}}=\sqrt{9-5}=\sqrt{4}=2$

Ví dụ 3) Chứng minh:

a) $A=\sqrt{7-2\sqrt{6}}-\sqrt{7+2\sqrt{6}}$ là số nguyên.

b) $B=\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}}+\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}}$ là một số nguyên (Trích đề TS vào lớp 10 chuyên Trường THPT chuyên ĐHQG Hà Nội 2006).

c) Chứng minh rằng: $x=\sqrt[3]{a+\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}+\sqrt[3]{a-\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}$ với $a\geq\frac{1}{8}$ là số tự nhiên.

d) Tính $x+y$ biết $\left(x+\sqrt{x^2+2015}\right)\left(y+\sqrt{y^2+2015}\right)=2015$.

Lời giải:

a) Dễ thấy $A<0$,

Tacó

$A^2=\left(\sqrt{7-2\sqrt{6}}-\sqrt{7+2\sqrt{6}}\right)^2=7-2\sqrt{6}+7+2\sqrt{6}-2\sqrt{7-2\sqrt{6}}.\sqrt{7+2\sqrt{6}}$

$=14-2.5=4$

Suy ra $A=-2$.

b) Áp dụng hằng đẳng thức: $(u+v)^3=u^3+v^3+3uv(u+v)$. Ta có:

$B^3=\left(\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}}+\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}}\right)^3=1+\frac{\sqrt{84}}{9}+1-\frac{\sqrt{84}}{9}+3\left(\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}}.\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}}\right)$

$\left(\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}}+\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}}\right)$. Hay

$B^3 = 2 + 3\sqrt[3]{\left(1+\frac{\sqrt{84}}{9}\right)\left(1-\frac{\sqrt{84}}{9}\right)}.B \Leftrightarrow B^3 = 2 + 3\sqrt[3]{1-\frac{84}{81}}B \Leftrightarrow B^3 = 2 - B \Leftrightarrow B^3 + B - 2$

$\Leftrightarrow (B-1)(B^2+B+2) = 0$ mà $B^2 + B + 2 = \left(B+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$ suy ra $B = 1$.

Vậy B là số nguyên.

c) Áp dụng hằng đẳng thức: $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$

Ta có

$x^3 = 2a + (1-2a)x \Leftrightarrow x^3 + (2a-1)x - 2a = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+2a) = 0$

Xét đa thức bậc hai $x^2 + x + 2a$ với $\Delta = 1 - 8a \geq 0$

+ Khi $a = \frac{1}{8}$ ta có $x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} + \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = 1$.

+ Khi $a > \frac{1}{8}$, ta có $\Delta = 1 - 8a$ âm nên đa thức (1) có nghiệm duy nhất $x = 1$

Vậy với mọi $a \geq \frac{1}{8}$ ta có: $x = \sqrt[3]{a + \frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a - \frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}} = 1$ là số tự nhiên.

d) Nhận xét:

$$\left(\sqrt{x^2+2015}+x\right)\left(\sqrt{x^2+2015}-x\right) = x^2 + 2015 - x^2 = 2015.$$

Kết hợp với giả thiết ta suy ra $\sqrt{x^2+2015} - x = \sqrt{y^2+2015} + y$

$\Rightarrow \sqrt{y^2+2015} + y + \sqrt{x^2+2015} + x = \sqrt{x^2+2015} - x + \sqrt{y^2+2015} - y \Leftrightarrow x + y = 0$

Ví dụ 4)

a) Cho $x=\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$. Tính giá trị biểu thức:
$P=\dfrac{x^4-4x^3+x^2+6x+12}{x^2-2x+12}$.

b) Cho $x=1+\sqrt[3]{2}$. Tính giá trị của biểu thức
$B=x^4-2x^4+x^3-3x^2+1942$.(Trích đề thi vào lớp 10 Trường PTC Ngoại Ngữ - ĐHQG Hà Nội năm 2015-2016).

c) Cho $x=1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$. Tính giá trị biểu thức:
$P=x^5-4x^4+x^3-x^2-2x+2015$

Giải:

a) Ta có:

$$x^2=\left(\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right)^2=8+2\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}.\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

$$\Leftrightarrow x^2=8+2\sqrt{6-2\sqrt{5}}=8+2\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}=8+2\left(\sqrt{5}-1\right)=6+2\sqrt{5}=\left(\sqrt{5}+1\right)^2$$

$\Rightarrow x=\sqrt{5}+1$. Từ đó ta suy ra $(x-1)^2=5\Leftrightarrow x^2-2x=4$.

Ta biến đổi: $P=\dfrac{\left(x^2-2x\right)^2-2\left(x^2-2x\right)+12}{x^2-2x+12}=\dfrac{4^2-3.4+12}{4+12}=1$.

b) Ta có $x=1+\sqrt[3]{2}\Rightarrow (x-1)^3=2\Leftrightarrow x^3-3x^2+3x-3=0$. Ta biến đổi biểu thức P thành:

$$P=x^2(x^3-3x^2+3x-3)+x\left(x^3-3x^2+3x-3\right)+\left(x^3-3x^2+3x-3\right)+1945=1945$$

c) Để ý rằng: $x=\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1$ ta nhân thêm 2 vế với $\sqrt[3]{2}-1$ để tận dụng hằng đẳng thức: $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$. Khi đó ta có:

$$\left(\sqrt[3]{2}-1\right)x=\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\left(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1\right)$$
$$\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{2}-1\right)x=1\Leftrightarrow\sqrt[3]{2}x=x+1\Leftrightarrow 2x^3=\left(x+1\right)^3\Leftrightarrow x^3-3x^2-3x-1=0.$$

Ta biến đổi:
$P=x^5-4x^4+x^3-x^2-2x+2015=\left(x^2-x+1\right)\left(x^3-3x^2-3x-1\right)+2016=2016$

Ví dụ 5) Cho $x,y,z>0$ và $xy+yz+zx=1$.

a) Tính giá trị biểu thức:
$$P=x\sqrt{\frac{\left(1+y^2\right)\left(1+z^2\right)}{1+x^2}}+y\sqrt{\frac{\left(1+z^2\right)\left(1+x^2\right)}{1+y^2}}+z\sqrt{\frac{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}{1+z^2}}$$

b) Chứng minh rằng: $\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}-\frac{z}{1+z^2}=\frac{2xy}{\sqrt{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)\left(1+z^2\right)}}$

Lời giải:

a) Để ý rằng: $1+x^2=x^2+xy+yz+zx=(x+y)(x+z)$

Tương tự đối với $1+y^2;1+z^2$ ta có:
$$x\sqrt{\frac{\left(1+y^2\right)\left(1+z^2\right)}{1+x^2}}=x\sqrt{\frac{(y+x)(y+z)(z+x)(z+y)}{(x+y)(x+z)}}=x\left(y+z\right)$$

Suy ra $P=x\left(y+z\right)+y\left(z+x\right)+z\left(x+y\right)=2\left(xy+yz+zx\right)=2$.

b) Tương tự như câu a)

Ta có:
$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}-\frac{z}{1+z^2}=\frac{x}{(x+y)(x+z)}+\frac{y}{(x+y)(y+z)}-\frac{z}{(z+y)(z+x)}$$
$$=\frac{x(y+z)+y(z+x)-z(x+y)}{(x+y)(y+z)(z+x)}=\frac{2xy}{(x+y)(y+z)(z+x)}=\frac{2xy}{\sqrt{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)\left(1+z^2\right)}}$$

Ví dụ 6)

a) Tìm $x_1, x_2, ..., x_n$ thỏa mãn:

$$\sqrt{x_1^2 - 1^2} + 2\sqrt{x_2^2 - 2^2} + .. + n\sqrt{x_n^2 - n^2} = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right)$$

b) Cho $f(n) = \dfrac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$ với n nguyên dương. Tính $f(1) + f(2) + .. + f(40)$.

Lời giải:

a) Đẳng thức tương đương với:

$$\left(\sqrt{x_1^2 - 1^2} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{x_2^2 - 2^2} - 2\right)^2 + ... + \left(\sqrt{x_n^2 - n^2} - n\right)^2 = 0$$

Hay $x_1 = 2, x_2 = 2.2^2, ..., x_n = 2.n^2$

b) Đặt $x = \sqrt{2n+1}, y = \sqrt{2n-1} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4n \\ xy = \sqrt{4n^2 - 1} \\ x^2 - y^2 = 2 \end{cases}$.

Suy ra

$$f(n) = \frac{x^2 + xy + y^2}{x + y} = \frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2} = \frac{1}{2}\left(x^3 - y^3\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(2n+1)^3} - \sqrt{(2n-1)^3}\right).$$

Áp dụng vào bài toán ta có:

$$f(1) + f(2) + .. + f(40) = \frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{3^3} - \sqrt{1^3}\right) + \left(\sqrt{5^3} - \sqrt{3^3}\right) + .. + \left(\sqrt{81^3} - \sqrt{79^3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{81^3} - \sqrt{1^3}\right) = 364$$

Ví dụ 7)

a) Chứng minh rằng: $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+....+\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}>4$. ***Đề thi chuyên ĐHSP 2011***

b) Chứng minh rằng: $\frac{1}{1\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{4}}+...+\frac{1}{n\sqrt{n+1}}>2\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.

c) Chứng minh: $2\sqrt{n}-2<\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1$ với mọi số nguyên dương $n\geq 2$.

Lời giải:

a) Xét $A=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+....+\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}$,

$B=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+..+\frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$

Dễ thấy $A>B$.

Ta có $A+B=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+....+\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}+\frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$

Mặt khác ta có: $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\frac{\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)}{\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$

Suy ra $A+B=\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+...+\left(\sqrt{81}-\sqrt{80}\right)=\sqrt{81}-1=8$. Do $A>B$ suy ra $2A>A+B=8\Leftrightarrow A>4$.

b) Để ý rằng: $\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)}<\frac{1}{2k\sqrt{k+1}}$ với mọi k nguyên dương.

Suy ra

$$VT > 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+..+2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

c) Đặt $P=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}$

Ta có: $\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}<\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{2}{2\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$ với mọi số tự nhiên $n \geq 2$.

Từ đó suy ra

$2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{2}{2\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$ hay

$$2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)<\frac{2}{\sqrt{n}}<2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$$

Do đó: $2\left[\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+...+\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right]<T$ và

$$T<1+2\left[\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+....\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)\right].$$

Hay $2\sqrt{n}-2<T<2\sqrt{n}-1$.

Ví dụ 8)

a) Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-c^2}+c\sqrt{1-a^2}=\frac{3}{2}$.Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2=\frac{3}{2}$.

a) Tìm các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện:

$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{2-z^2}+z\sqrt{3-x^2}=3$. (Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán- Trường chuyên ĐHSP Hà Nội 2014)

Lời giải:

a) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm ta có

$$a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-c^2}+c\sqrt{1-a^2}\le\frac{a^2+1-b^2}{2}+\frac{b^2+1-c^2}{2}+\frac{c^2+1-a^2}{2}=\frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}a=\sqrt{1-b^2}\\ b=\sqrt{1-c^2}\\ c=\sqrt{1-a^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=1-b^2\\ b^2=1-c^2\\ c^2=1-a^2\end{cases}\Rightarrow a^2+b^2+c^2=\frac{3}{2}\text{ (đpcm).}$$

b) Ta viết lại giả thiết thành: $2x\sqrt{1-y^2}+2y\sqrt{2-z^2}+2z\sqrt{3-x^2}=6$.

Áp dụng bất đẳng thức : $2ab\le a^2+b^2$ ta có:

$$2x\sqrt{1-y^2}+2y\sqrt{2-z^2}+2z\sqrt{3-x^2}\le x^2+1-y^2+y^2+2-z^2+z^2+3-x^2=6$$

. Suy ra $VT\le VP$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}x=\sqrt{1-y^2}\\ y=\sqrt{2-z^2}\\ z=\sqrt{3-x^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x,y,z\ge 0\\ x^2+y^2=1\\ y^2+z^2=2\\ z^2+x^2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2=3;x,y,z\ge 0\\ x^2+y^2=1\\ y^2+z^2=2\\ z^2+x^2=3\end{cases}\Leftrightarrow x=1;y=0;z=\sqrt{2}$$

Ví dụ 9) Cho $A=\dfrac{x\left(\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}\right)}{\sqrt{x^2-8x+16}}$ với $x>4$

a) Rút gọn A.Tìm x để A đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Lời giải:

a) Điều kiện để biểu thức A xác định là $x>4$.

$$A=\frac{x\left(\sqrt{\left(\sqrt{x-4}+2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-4}-2\right)^2}\right)}{\sqrt{(x-4)^2}}=\frac{x\left(\left|\sqrt{x-4}+2\right|+\left|\sqrt{x-4}-2\right|\right)}{|x-4|}=$$

$$\frac{x\left(\sqrt{x-4}+2+\left|\sqrt{x-4}-2\right|\right)}{x-4}$$

+ Nếu $4<x<8$ thì $\sqrt{x-4}-2<0$ nên

$$A=\frac{x\left(\sqrt{x-4}+2+2-\sqrt{x-4}\right)}{x-4}=\frac{4x}{x-4}=4+\frac{16}{x-4}$$

Do $4<x<8$ nên $0<x-4<4\Rightarrow A>8$.

+ Nếu $x\geq 8$ thì $\sqrt{x-4}-2\geq 0$ nên

$$A=\frac{x\left(\sqrt{x-4}+2+\sqrt{x-4}-2\right)}{x-4}=\frac{2x\sqrt{x-4}}{x-4}=\frac{2x}{\sqrt{x-4}}=2\sqrt{x-4}+\frac{8}{\sqrt{x-4}}\geq 2\sqrt{16}=8$$

(Theo bất đẳng thức Cô si). Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$2\sqrt{x-4}=\frac{8}{\sqrt{x-4}}\Leftrightarrow x-4=4\Leftrightarrow x=8.$$

Vậy GTNN của A bằng 8 khi $x=8$.

b) Xét $4<x<8$ thì $A=4+\dfrac{16}{x-4}$, ta thấy $A\in Z$ khi và chỉ khi

$\dfrac{16}{x-4}\in Z\Leftrightarrow x-4$ là ước số nguyên dương của 16. Hay

$x-4\in\{1;2;4;8;16\}\Leftrightarrow x=\{5;6;8;12;20\}$ đối chiếu điều kiện suy ra $x=5$ hoặc $x=6$.

+ Xét $x\ge 8$ ta có: $A=\dfrac{2x}{\sqrt{x-4}}$, đặt $\sqrt{x-4}=m\Rightarrow\begin{cases}x=m^2+4\\ m\ge 2\end{cases}$ khi đó ta có:

$A=\dfrac{2\left(m^2+4\right)}{m}=2m+\dfrac{8}{m}$ suy ra $m\in\{2;4;8\}\Leftrightarrow x\in\{8;20;68\}$.

Tóm lại để A nhận giá trị nguyên thì $x\in\{5;6;8;20;68\}$.

MỘT SỐ BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. (Đề thi vào lớp 10 thành phố Hà Nội – năm học 2013-2014)

Với $x>0$, cho hai biểu thức $A=\dfrac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}+\dfrac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$.

1) Tính giá trị biểu thức A khi $x=64$.
2) Rút gọn biểu thức B.
3) Tính x để $\dfrac{A}{B}>\dfrac{3}{2}$.

Câu 2. (Đề thi năm học 2012 -2013 thành phố Hà Nội)

1) Cho biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}$. Tính giá trị của biểu thức A.
2) Rút gọn biểu thức $B=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4}+\dfrac{4}{\sqrt{x}-4}\right):\dfrac{x+16}{\sqrt{x}+2}$ (với $x\ge 0, x\ne 16$)
3) Với các biểu thức A và B nói trên, hãy tìm các giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức $B(A-1)$ là số nguyên.

Câu 3. (Đề thi năm học 2011 -2012 thành phố Hà Nội).

Cho $A=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5}-\frac{10\sqrt{x}}{x-25}-\frac{5}{\sqrt{x}+5}$, với $x\ge 0, x\ne 25$.

1) Rút gọn biểu thức A
2) Tính giá trị của A khi $x=9$.
3) Tìm x để $A<\frac{1}{3}$.

Câu 4. (Đề thi năm học 2010 -2011 thành phố Hà Nội).

Cho $P=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\frac{3x+9}{x-9}$, với $x\ge 0, x\ne 9$.

1) Rút gọn P.
2) Tìm giá trị của x để $P=\frac{1}{3}$.
3) Tìm giá trị lớn nhất của P.

Câu 5. (Đè thi năm học 2014 – 2015 Thành phố Hồ Chí Minh)

Thu gọn các biểu thức sau:

$$A=\frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2}+\frac{5}{\sqrt{5}-1}-\frac{3\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$$

$$B=\left(\frac{x}{x+3\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}+3}\right):\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{6}{x+3\sqrt{x}}\right)\quad (x>0).$$

Câu 6. (Đề thi năm học 2013 – 2014 TPHCM)

Thu gọn các biểu thức sau:

$$A=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\frac{3}{\sqrt{x}-3}\right).\frac{\sqrt{x}+3}{x+9} \text{ với } x\geq 0, x\neq 9.$$

$$B=21\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2-6\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2-15\sqrt{15}.$$

Câu 7. (Đề thi năm 2014 – 2015 TP Đà Nẵng)

Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{x\sqrt{2}}{2\sqrt{x}+x\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{2x}-2}{x-2}$, với $x>0, x\neq 2$.

Câu 8. (Đề thi năm 2012 – 2013 tỉnh BÌnh Định)

Cho $A=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{120}+\sqrt{121}}$ và

$B=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{35}}$.

Chứng minh rằng $B>A$.

Câu 9. (Đề thi năm 2014 – 2015 tỉnh Ninh Thuận)

Cho biểu thức $P=\dfrac{x^3+y^3}{x^2-xy+y^2}.\dfrac{x+y}{x^2-y^2}, x\neq y$.

1) Rút gọn biểu thức P.
2) Tính giá trị của P khi $x=\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ và $y=\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

Câu 10. (Đề thi năm 2014 – 2015 , ĐHSPHN)

Cho các số thực dương a,b; $a\neq b$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{\dfrac{(a-b)^3}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^3}-b\sqrt{b}+2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}+\dfrac{3a+3\sqrt{ab}}{b-a}=0$.

Câu 11. (Đề thi năm 2014 – 2015 chuyên Hùng Vương Phú Thọ)

$A=\dfrac{x+\sqrt{x}-6}{x-9}+\dfrac{x-7\sqrt{x}+19}{x+\sqrt{x}-12}-\dfrac{x-5\sqrt{x}}{x+4\sqrt{x}};x>0,x\neq 9$.

Câu 12. (Đề thi năm 2014 – 2015 tỉnh Tây Ninh)

Cho biểu thức $A=\dfrac{1}{2+\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2-\sqrt{x}}-\dfrac{2\sqrt{x}}{4-x}\quad (x\geq 0,x\neq 4)$.

Rút gọn A và tìm x để $A=\dfrac{1}{3}$.

Câu 13. (Đề thi năm 2014 – 2015 chuyên Lê Khiết Quảng Ngãi).

1) Cho biểu thức $P=\dfrac{3}{\sqrt{x-3}-\sqrt{x}}+\dfrac{3}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x}}+\dfrac{x\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}+1}$. Tìm tất cả các giá trị của x để $P>2$.
2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $(P):y=-x^2$ và đường thẳng $(d):y=mx-1$ (m là tham số). chứng minh rằng với mọi giá trị của m, đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2 thỏa mãn $|x_1-x_2|\geq 2$.

Câu 14. (Đề thi năm 2014 – 2014 chuyên Lam Sơn Thanh Hóa)

Cho biểu thức $C=\frac{a}{a-16}-\frac{2}{\sqrt{a}-4}-\frac{2}{\sqrt{a}+4}$.

1) Tìm điều kiện của a để biểu thức C có nghĩa và rút gọn C.
2) Tính giá trị của biểu thức C khi $a=9-4\sqrt{5}$.

Câu 15. (Đề thi năm 2014 – 2015 chuyên Thái Bình tỉnh Thái BÌnh)

Cho biểu thức $A=\left(\frac{2}{\sqrt{x}-2}+\frac{3}{2\sqrt{x}+1}-\frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2}\right):\frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}}$ $(x>0, x\neq 4)$.

1) Rút gọn biểu thức A.
2) Tìm x sao cho A nhận giá trị là một số nguyên.

Câu 16. (Đề năm 2014 – 2015 Thành Phố Hà nội)

1) Tính giá trị của biểu thức $A=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$, khi $x=9$.
2) Cho biểu thức $P=\left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}+2}\right).\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x>0$ và $x\neq 1$.

a) Chứng minh rằng $P=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.

b) Tìm các giá trị của x để $2P=2\sqrt{x}+5$.

Câu 17) Cho $a=\sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}}+\sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$. Chứng minh rằng $a^2-2a-2=0$.

Câu 18) Cho $a=\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$.

Tính giá trị của biểu thức: $T=\dfrac{a^2-4a^3+a^2+6a+4}{a^2-2a+12}$.

Câu 19) Giả thiết $x,y,z>0$ và $xy+yz+zx=a$.

Chứng minh rằng:

$$x\sqrt{\frac{(a+y^2)(a+z^2)}{a+x^2}}+y\sqrt{\frac{(a+z)^2(a+x)^2}{a+y^2}}+z\sqrt{\frac{(a+x^2)(a+y^2)}{a+z^2}}=2a.$$

Câu 20. Cho $a=\sqrt{2}+\sqrt{7-\sqrt[3]{61+46\sqrt{5}}}+1$.

a) Chứng minh rằng: $a^4-14a^2+9=0$.

b) Giả sử $f(x)=x^5+2x^4-14x^3-28x^2+9x+19$. Tính $f(a)$.

Câu 21. Cho $a=\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}+\sqrt[3]{38-17\sqrt{5}}$.

Giả sử có đa thức $f(x)=(x^3+3x+1940)^{2016}$. Hãy tính $f(a)$.

Câu 22. Cho biểu thức $f(n)=\dfrac{2n+1+\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$.

Tính tổng $S=f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2016)$.

Câu 23) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:

$$1\le\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}<\frac{5}{3}.$$

Câu 24) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n>3$, ta có

$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{n^3}<\frac{65}{54}$.

Câu 25) Chứng minh rằng:

$$\frac{43}{44}<\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+...+\frac{1}{2002\sqrt{2001}+2001\sqrt{2002}}<\frac{44}{45}$$

(Đề thi THPT chuyên Hùng Vương Phú Thọ năm 2001-2002)

Câu 26) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}+1\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}}<1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Câu 27) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n>2$, ta có:

$$\frac{1}{3}.\frac{4}{6}.\frac{7}{9}.\frac{10}{12}....\frac{3n-2}{3n}.\frac{3n+1}{3n+3}<\frac{1}{3\sqrt{n+1}}.$$

LỜI GIẢI BÀI TẬP RÈN LUYỆN CHỦ ĐỀ 1

1). Lời giải:

1) Với $x=64$ ta có $A=\frac{2+\sqrt{64}}{\sqrt{64}}=\frac{2+8}{8}=\frac{5}{4}$.

$$B=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right).\left(x+\sqrt{x}\right)+\left(2\sqrt{x}+1\right).\sqrt{x}}{\sqrt{x}.\left(x+\sqrt{x}\right)}=\frac{x\sqrt{x}+2x}{x\sqrt{x}+x}=1+\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$$

Với $x>0$, ta có: $\frac{A}{B}>\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}:\frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}>\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}>\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x}+2>3\sqrt{x}\Leftrightarrow\sqrt{x}<2\Leftrightarrow 0<x<4$ (do $x>0$).

2. Lời giải:

1) Với $x = 36$, ta có $A = \dfrac{\sqrt{36}+4}{\sqrt{36}+2} = \dfrac{10}{8} = \dfrac{5}{4}$.

2) Với $x \geq 0, x \neq 16$ ta có:

$$B = \left(\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-4\right)}{x-16} + \frac{4\left(\sqrt{x}+4\right)}{x-16}\right)\frac{\sqrt{x}+2}{x+16} = \frac{(x+16)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-16)(x+16)} = \frac{\sqrt{x}+2}{x-16}$$

.

3) Biểu thức $B(A-1) = \dfrac{\sqrt{x}+2}{x-16}\left(\dfrac{\sqrt{x}+4-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}\right) = \dfrac{2}{x-16}$

$B(A-1)$ nguyên, x nguyên thì $x-16$ là ước của 2, mà $U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$. Ta có bảng giá trị tương ứng:

Kết hợp điều kiện, để $B(A-1)$ nguyên thì $x \in \{14;15;16;17\}$.

3). Lời giải:

$$A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} - \frac{10\sqrt{x}}{x-25} - \frac{5}{\sqrt{x}+5} = \frac{\sqrt{x}.\left(\sqrt{x}+5\right) - 10\sqrt{x} - 5.\left(\sqrt{x}-5\right)}{\left(\sqrt{x}-5\right)\left(\sqrt{x}+5\right)}$$

$$= \frac{x+5\sqrt{x}-10\sqrt{x}-5\sqrt{x}+25}{\left(\sqrt{x}-5\right)\left(\sqrt{x}+5\right)} = \frac{x-10\sqrt{x}+25}{\left(\sqrt{x}-5\right)\left(\sqrt{x}+5\right)}$$

$= \dfrac{\left(\sqrt{x}-5\right)^2}{\left(\sqrt{x}-5\right)\left(\sqrt{x}+5\right)} \Rightarrow A = \dfrac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+5}$. Với $x = 9$ ta có: $\sqrt{x} = 3$. Vậy $A = \dfrac{3-5}{3+5} = \dfrac{-2}{8} = -\dfrac{1}{4}$.

4). Lời giải:

1) $P=\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-3\right)+2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)-3x-9}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\dfrac{3}{\sqrt{x}+3}$

2) $P=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow\dfrac{3}{\sqrt{x}+3}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\sqrt{x}+3=9\Leftrightarrow x=36$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

3) Với $x\ge 0, P=\dfrac{3}{\sqrt{x}+3}\le\dfrac{3}{0+3}=1\Rightarrow P_{\max}=1$ khi $x=0$ (TM).

5. Lời giải:

$$A=\frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}-\frac{3\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\left(5+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}-2\right)}{\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)}+\frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}-\frac{3\sqrt{5}\left(3-\sqrt{5}\right)}{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}$$

$$=3\sqrt{5}-5+\frac{5+\sqrt{5}}{4}-\frac{9\sqrt{5}-15}{4}=3\sqrt{5}-5+\frac{5+\sqrt{5}-9\sqrt{5}+15}{4}$$

$$=3\sqrt{5}-5+5-2\sqrt{5}=\sqrt{5}.$$

$$B=\left(\frac{x}{x+3\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}+3}\right):\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{6}{x+3\sqrt{x}}\right)(x>0)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\frac{1}{\sqrt{x}+3}\right):\left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}+\frac{6}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}:\left(\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+3\right)+6}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)}\right)=\left(\sqrt{x}+1\right).\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}=1.$$

6. Lời giải:

Với $x \ge 0$ và $x \ne 9$ ta có:

$$A = \left(\frac{x - 3\sqrt{x} + 3\sqrt{x} + 9}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)} \right) . \frac{\sqrt{x}+3}{x+9} = \frac{1}{\sqrt{x}} - 3.$$

$$B = \frac{21}{2}\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^2 - 3\left(\sqrt{4-2\sqrt{3}} + +\sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^2 - 15\sqrt{15}$$

$$= \frac{21}{2}\left(\sqrt{3}+1+\sqrt{5}-1\right)^2 - 3\left(\sqrt{3}-1+\sqrt{5}+1\right)^2 - 15\sqrt{15}$$

$$= \frac{15}{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2 - 15\sqrt{15} = 60.$$

7). Lời giải: Với điều kiện đã cho thì:

$$P = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{2}x\left(\sqrt{2}+\sqrt{x}\right)} + \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}+\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = 1.$$

8. Lời giải:

Ta có: $A = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{120}+\sqrt{121}}$

$$= \frac{1-\sqrt{2}}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)} + ... + \frac{\sqrt{120}-\sqrt{121}}{\left(\sqrt{120}+\sqrt{121}\right)\left(\sqrt{120}-\sqrt{121}\right)}$$

$$= \frac{1-\sqrt{2}}{-1} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1} + ... + \frac{\sqrt{120}-\sqrt{121}}{-1}$$

$$= \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - 2 + ... + \sqrt{121} - \sqrt{120} = -1 + \sqrt{121} = 10 \quad (1)$$

Với mọi $k \in \mathbb{N}^*$, ta có: $\dfrac{1}{\sqrt{k}} = \dfrac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k}} > \dfrac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = 2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$

Do đó $B = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{35}}$

$\Rightarrow B > 2\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+...+\sqrt{36}-\sqrt{35}\right)$

$\Rightarrow B > 2\left(-\sqrt{1}+\sqrt{36}\right) = 2(-1+6) = 10$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $B > A$.

9. Lời giải:

1) $P = \dfrac{x^3+y^3}{x^2-xy+y^2} \cdot \dfrac{x+y}{(x-y)(x+y)} = \dfrac{x+y}{x-y}$.

2) Với $x = \sqrt{7-4\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$ và $y = \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{3}-1$

Thay vào P ta được: $P = \dfrac{2-\sqrt{3}+\sqrt{3}-1}{\left(2-\sqrt{3}\right)-\left(\sqrt{3}-1\right)} = \dfrac{1}{3-2\sqrt{3}} = -\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}$.

10.Lời giải:

Ta có: $Q = \dfrac{\dfrac{(a-b)^3}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^3} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} + \dfrac{3a+3\sqrt{ab}}{b-a}$

$$= \frac{\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^3\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^3}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^3} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(a+\sqrt{ab}+b\right)} - \frac{3\sqrt{a}+\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)} = 0$$

$$= \frac{a\sqrt{a}+3a\sqrt{b}+3b\sqrt{a}+b\sqrt{b}+2a\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(a+\sqrt{ab}+b\right)} - \frac{3\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}$$

$$= \frac{3a\sqrt{a} + 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a} - 3a\sqrt{a} - 3a\sqrt{b} - 3b\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(a + \sqrt{ab} + b\right)} = 0 \quad \text{(ĐPCM).}$$

11. Lời giải:

$$A = \frac{x + \sqrt{x} - 6}{x - 9} + \frac{x - 7\sqrt{x} + 19}{x + \sqrt{x} - 12} - \frac{x - 5\sqrt{x}}{x + 4\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 3} + \frac{x - 7\sqrt{x} + 19}{\left(\sqrt{x} - 3\right)\left(\sqrt{x} + 4\right)} - \frac{\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x} + 4}$$

$$= \frac{x + 2\sqrt{x} - 8 + x - 7\sqrt{x} + 19 - x + 8\sqrt{x} - 15}{\left(\sqrt{x} - 3\right)\left(\sqrt{x} + 4\right)} = \frac{\left(\sqrt{x} - 1\right)\left(\sqrt{x} + 4\right)}{\left(\sqrt{x} - 3\right)\left(\sqrt{x} + 4\right)} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 3}.$$

12. Lời giải:

$A = \frac{1}{2 + \sqrt{x}} + \frac{1}{2 - \sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{4 - x} = \frac{4}{4 - x} - \frac{2\sqrt{x}}{4 - x} = \frac{2\left(2 - \sqrt{x}\right)}{4 - x} = \frac{2}{2 + \sqrt{x}}$. Với $A = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{2 + \sqrt{x}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16$ (nhận). Vậy $A = \frac{1}{3}$ khi $x = 16$.

13. Lời giải:

1) ĐKXĐ: $x \geq 3$

$$\Rightarrow P = \frac{3}{\sqrt{x - 3} - \sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x - 3} + \sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x} + x}{\sqrt{x} + 1}$$

$$= \frac{3\sqrt{x - 3} + 3\sqrt{3} + 3\sqrt{x - 3} - 3\sqrt{x}}{(x - 3) - x} + \frac{x\left(\sqrt{x} + 1\right)}{\sqrt{x} + 1} = \frac{6\sqrt{x - 3}}{-3} + x = x - 2\sqrt{x - 3}.$$

Vì $P > 2 \Rightarrow x - 2\sqrt{x - 3} > 2 \Leftrightarrow (x - 3) - 2\sqrt{x - 3} + 1 > 0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-3}-1\right)^2>0\Leftrightarrow\sqrt{x-3}-1\neq 0\Leftrightarrow\sqrt{x-3}\neq 1\Leftrightarrow x\neq 4$. Vậy $x\geq 3$ và $x\neq 4$.

2) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$x^2+mx-1=0$.

có $\Delta=m^2+4>0$ với mọi m, nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2. Theo hệ thức Viet ta có: $x_1+x_2=-m$ và $x_1x_2=-1$

$\Rightarrow\left(x_1+x_2\right)^2=(-m)^2\Rightarrow x_1^2+x_2^2+2x_1x_2=m^2$

$\Rightarrow\left(x_1-x_2\right)^2+4x_1x_2=m^2\Rightarrow\left(x_1-x_2\right)^2+4.(-1)=m^2$

$\Rightarrow\left(x_1-x_2\right)^2=m^2+4\geq 4$ với mọi $m\Rightarrow\left|x_1-x_2\right|\geq 2$ với mọi m (ĐPCM).

14. Lời giải:

1) Biểu thức C có nghĩa khi: $\begin{cases}a\geq 0\\ a-16\neq 0\\ \sqrt{a}-4\neq 0\\ \sqrt{a}+4\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\geq 0\\ a\neq 16\\ a\neq 16\\ \forall a\geq 0\end{cases}\Rightarrow a\geq 0, a\neq 16$.

Rút gọn

$$C=\frac{a}{a-16}-\frac{2}{\sqrt{a}-4}-\frac{2}{\sqrt{a}+4}=\frac{a}{\left(\sqrt{a}-4\right)\left(\sqrt{a}+4\right)}-\frac{2}{\sqrt{a}-4}-\frac{2}{\sqrt{a}+4}$$

$$=\frac{a-2\left(\sqrt{a}+4\right)-2\left(\sqrt{a}-4\right)}{\left(\sqrt{a}+4\right)\left(\sqrt{a}-4\right)}=\frac{a-2\sqrt{a}-8-2\sqrt{a}+8}{\left(\sqrt{a}+4\right)\left(\sqrt{a}-4\right)}=\frac{a-4\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}+4\right)\left(\sqrt{a}-4\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-4\right)}{\left(\sqrt{a}-4\right)\left(\sqrt{a}+4\right)}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+4}.$$

2) Giá trị của C khi $a=9-4\sqrt{5}$.

Ta có:

$$a = a = 9 - 4\sqrt{5} = 4 - 4\sqrt{5} + 5 = \left(2 - \sqrt{5}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{\left(2 - \sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{5} - 2$$

Vậy $C = \dfrac{\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a} + 4\right)} = \dfrac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5} - 2 + 4} = \dfrac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5} + 2} = 9 - 4\sqrt{5}$.

15. Lời giải:

1) Với $x > 0, x \neq 4$ biểu thức có nghĩa ta có:

$$A = \left(\frac{2}{\sqrt{x} - 2} + \frac{3}{2\sqrt{x} + 1} - \frac{5\sqrt{x} - 7}{2x - 3\sqrt{x} - 2}\right) : \frac{2\sqrt{3} + 3}{5x - 10\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2\left(2\sqrt{x} + 1\right) + 3\left(\sqrt{x} - 2\right) - \left(5\sqrt{x} - 7\right)}{\left(\sqrt{x} - 2\right)\left(2\sqrt{x} + 1\right)} : \frac{2\sqrt{x} + 3}{5\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 2\right)}$$

$= \dfrac{2\sqrt{x} + 3}{\left(\sqrt{x} + 2\right)\left(2\sqrt{x} + 1\right)} \cdot \dfrac{5\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 2\right)}{2\sqrt{x} + 3} = \dfrac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 1}$. Vậy với $x > 0, x \neq 4$ thì $A = \dfrac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 1}$.

2) Ta có $\sqrt{x} > 0, \forall x > 0, x \neq 4$ nên $A = \dfrac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 1} > 0, x > 0, x \neq 4$

$A = \dfrac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 1} = \dfrac{5}{2} - \dfrac{5}{2\left(2\sqrt{x} + 1\right)} < \dfrac{5}{2}, x > 0, x \neq 4 \Rightarrow 0 < A < \dfrac{5}{2}$, kết hợp với A nhận giá trị là một số nguyên thì $A \in \{1, 2\}$.

$A = 1 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 2\sqrt{x} + 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{9}$ thỏa mãn điều kiện.

$A = 2 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 4\sqrt{x} + 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$ không thỏa mãn điều kiện.

Vậy với $x=\frac{1}{9}$ thì A nhận giá trị là nguyên.

16. Lời giải:

1) Với $x=9$ ta có $A=\frac{3+1}{3-1}=2$.

2) a)

$$P=\left(\frac{x-2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}\right).\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\left(\frac{\left(\sqrt{x}-1\right).\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}\right).\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}.$$

b) Theo câu a) $P=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

$\Rightarrow 2P=2\sqrt{x}+5 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+5$

$2\sqrt{x}+2=2x+5\sqrt{x} \Leftrightarrow 2x+3\sqrt{x}-2=0$ và $x>0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$.

17. Giải:

$a^2=\sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}}+3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}+2\sqrt{9-\left(5+2\sqrt{3}\right)}=6+2\sqrt{4-2\sqrt{3}}$

$=6+2\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=6+2\left(\sqrt{3}-1\right)=4+2\sqrt{3}=\left(1+\sqrt{3}\right)^2$. Do $a>0$ nên

$a=\sqrt{3}+1$. Do đó $\left(a-1\right)^2=3$ hay $a^2-2a-2=0$.

18. Giải:

$a^2 = 8 + 2\sqrt{16 - \left(10 + 2\sqrt{5}\right)} = 8 + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 8 + 2\sqrt{\left(\sqrt{5} - 1\right)^2}$

$= 8 + 2\left(\sqrt{5} - 1\right) = 6 + 2\sqrt{5}$. Vì $a > 0$ nên $a = \sqrt{5} + 1$. Do đó $\left(a - 1\right)^2 = 5$ hay $a^2 - 2a = 4$. Biểu diễn $T = \dfrac{\left(a^2 - 2a\right)^2 - 3\left(a^2 - 2a\right) + 4}{a^2 - 2a + 12} = \dfrac{4^2 - 3.4 + 4}{4 + 12} = \dfrac{1}{2}$.

19. Giải:

Ta có: $a + x^2 = x^2 + xy + yz + zx = \left(x + y\right)\left(x + z\right)$.Tương tự ta có: $a + y^2 = \left(y + x\right)\left(y + z\right); a + z^2 = \left(z + x\right)\left(z + y\right)$.

Từ đó ta có:

$x\sqrt{\dfrac{\left(a + y^2\right)\left(a + z^2\right)}{a + x^2}} = x\sqrt{\dfrac{\left(x + y\right)\left(y + z\right)\left(z + x\right)\left(z + y\right)}{\left(x + y\right)\left(x + z\right)}} = x\left(x + y\right)$. Tương tự: $y\sqrt{\dfrac{\left(a + z^2\right)\left(a + x^2\right)}{a + y^2}} = y\left(z + x\right); z\sqrt{\dfrac{\left(a + x^2\right)\left(a + y^2\right)}{a + z^2}} = z\left(x + y\right)$. Vậy

$VT = x\left(y + z\right) + y\left(z + x\right) + z\left(x + y\right) = 2\left(xy + yz + zx\right) = 2a$.

20. Giải:

a) Vì $\sqrt[3]{61 + 46\sqrt{5}} = \sqrt[3]{\left(1 + 2\sqrt{5}\right)^3} = 1 + 2\sqrt{5}$

Từ đó $a = \sqrt{2} + \sqrt{7 - 1 - 2\sqrt{5}} + 1 = \sqrt{2} + \sqrt{5}$

$\Rightarrow a^2 = \left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)^2 \Rightarrow a^2 - 7 = 2\sqrt{10} \Rightarrow a^4 - 14a^2 + 9 = 0$.

b) Do $f\left(x\right) = \left(x^4 - 14x^2 + 9\right)\left(x + 2\right) + 1$ và $x^4 - 14a^2 + 9 = 0$ nên ta được $f\left(a\right) = 1$.

21. Giải:

Vì $a^3 = 38 + 17\sqrt{5} + 38 - 17\sqrt{5} + 3.3.\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}.\sqrt[3]{38-17\sqrt{5}}$

$\Rightarrow a^3 = 76 - 3a \Rightarrow a^3 + 3a = 76 \Rightarrow f(a) = (76+1940)^{2012} = 2016^{2016}$.

22. Nhân cả tử và mẫu của $f(n)$ với $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, ta được:

$f(n) = (n+1)\sqrt{n+1} - n\sqrt{n}$. Cho n lần lượt từ 1 đến 2016, ta được:

$f(1) = 2\sqrt{2} - 1\sqrt{1}; f(2) = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}; ...; f(2016) = 2017\sqrt{2017} - 2016\sqrt{2016}$

Từ đó suy ra: $S = f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(2016) = 2017\sqrt{2017} - 1$.

23. Giải:

Vì n là số nguyên dương nên: $1 \le \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} \ge \frac{1}{1^2} = 1 \quad (1)$. Mặt khác, với mọi $k \ge 1$ ta có:

$\frac{1}{k^2} = \frac{4}{4k^2} < \frac{4}{4k^2-1} = 2\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$. Cho $k = 2,3,4,...,n$ ta có:

$$\frac{1}{2^2} = \frac{4}{4.2^2} < \frac{4}{4.2^2-1} = \frac{2}{2.2-1} - \frac{2}{2.2+1} = \frac{2}{3} - \frac{2}{5}$$

$$\frac{1}{3^2} = \frac{4}{4.3^2} < \frac{4}{4.3^2-1} = \frac{2}{2.3-1} - \frac{2}{2.3+1} = \frac{2}{3} - \frac{2}{7}$$

$$\frac{1}{4^2} = \frac{4}{4.4^2} < \frac{4}{4.4^2-1} = \frac{2}{2.4-1} - \frac{2}{2.4+1} = \frac{2}{7} - \frac{2}{9}$$

…………..

$$\frac{1}{n^2} = \frac{4}{4n^2} < \frac{4}{4n^2-1} = \frac{2}{2n-1} - \frac{2}{2n+1} = \frac{2}{2n-1} - \frac{2}{2n+1}$$

Cộng vế với vế ta được:

$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}<1+\frac{2}{3}-\frac{2}{2n+1}<1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

24. Giải:

Đặt $P=\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{n^3}$. Thực hiện làm trội mỗi phân số ở vế trái bằng cách làm giảm mẫu, ta có:

$$\frac{2}{k^3}<\frac{2}{k^3-k}=\frac{2}{(k-1)(k+1)}=\frac{1}{(k-1)k}-\frac{1}{k(k+1)}, \forall k>1$$

Cho $k=4,5,...,n$ thì

$$2P<2\left(\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\left(\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}\right)+\left(\frac{1}{4.5}-\frac{1}{5.6}\right)+...+\left[\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right]$$

$=\frac{251}{108}+\frac{1}{3.4}-\frac{1}{n(n+1)}<\frac{251}{108}+\frac{1}{3.4}=\frac{65}{27}$. Do đó $P<\frac{65}{64}$ (đpcm).

25. Giải:

Đặt $S_n=\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$

Để ý rằng :

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{(k+1)^2k-k^2(k+1)}=\frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{k(k+1)}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}, \forall k$$

Cho $k=1,2,...,n$ rồi cộng vế với vế ta có:

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Do đó $S_{2001}=1-\frac{1}{\sqrt{2002}}$

Như vậy ta phải chứng minh:

$$\frac{43}{44}<1-\frac{1}{\sqrt{2002}}<\frac{44}{45}\Leftrightarrow\frac{1}{45}<\frac{1}{\sqrt{2002}}<\frac{1}{44}$$

$$\Leftrightarrow 44<\sqrt{2002}<45\Leftrightarrow 1936<2002<2025$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng nên ta có điều phải chứng minh.

26. Giải:

Để giải bài toán này ta cần có bổ đề sau:

Bổ đề: với mọi số thực dương x,y ta có: $x\sqrt{y}+y\sqrt{x}\le x\sqrt{x}+y\sqrt{y}$.

Chứng minh: Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương

$$x\sqrt{y}+y\sqrt{x}\le x\sqrt{x}+y\sqrt{y}\Leftrightarrow x\sqrt{x}+y\sqrt{y}-x\sqrt{y}-y\sqrt{x}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)+y\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)\ge 0\Leftrightarrow (x-y)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\ge 0.$$

Bổ đề được chứng minh.

Áp dụng bổ đề ta có:

$$(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}>n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}}<\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$$

Vì thế: $\frac{1}{2\sqrt{2}+1\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}}<$

$<\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$. Mà theo kết quả câu 25

thì: $\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 27)

Giải:

Để ý rằng các phân số có tử và mẫu hơn kém nhau 2 đơn vị, nên ta nghĩ đến đẳng thức

$\frac{n}{n+2}<\frac{n-1}{n}\left(\Leftrightarrow n^2<n^2+n-2\Leftrightarrow n>2\right)$. Kí hiệu

$P=\frac{1}{3}.\frac{4}{6}.\frac{7}{9}.\frac{10}{12}....\frac{3n-2}{3n}.\frac{3n+1}{3n+3}$. Ta có:

$$P^2=\left(\frac{1}{3}.\frac{4}{6}.\frac{7}{9}.\frac{10}{12}...\frac{3n-2}{3n}.\frac{3n+1}{3n+3}\right)\left(\frac{1}{3}.\frac{4}{6}.\frac{7}{9}.\frac{10}{12}...\frac{3n-2}{3n}.\frac{3n+1}{3n+3}\right)$$

$$<\left(\frac{1}{3}.\frac{3}{4}.\frac{6}{7}.\frac{9}{10}...\frac{3n-3}{3n-2}.\frac{3n}{3n+1}\right)\left(\frac{1}{3}.\frac{4}{6}.\frac{7}{9}.\frac{10}{12}...\frac{3n-2}{3n}.\frac{3n+1}{3n+3}\right)$$

$<\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{3}{4}.\frac{6}{7}.\frac{7}{9}.\frac{9}{10}...\frac{3n-3}{3n-2}.\frac{3n-2}{3n}.\frac{3n}{3n+1}.\frac{3n+1}{3n+3}=\frac{1}{3(3n+3)}=\frac{1}{9(n+1)}$.

Từ đây suy ra $P<\frac{1}{3\sqrt{n+1}}$. Bất đẳng thức được chứng minh.