Với $x \ge 0$ và $x \ne 9$ ta có:

$$A = \left(\frac{x - 3\sqrt{x} + 3\sqrt{x} + 9}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)} \right) . \frac{\sqrt{x}+3}{x+9} = \frac{1}{\sqrt{x}} - 3 .$$

$$B = \frac{21}{2}\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^2 - 3\left(\sqrt{4-2\sqrt{3}} + +\sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^2 - 15\sqrt{15}$$

$$= \frac{21}{2}\left(\sqrt{3}+1+\sqrt{5}-1\right)^2 - 3\left(\sqrt{3}-1+\sqrt{5}+1\right)^2 - 15\sqrt{15}$$

$$= \frac{15}{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2 - 15\sqrt{15} = 60 .$$

7). Lời giải: Với điều kiện đã cho thì:

$$P = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{2}x\left(\sqrt{2}+\sqrt{x}\right)} + \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}+\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = 1 .$$

8. Lời giải:

Ta có: $A = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{120}+\sqrt{121}}$

$$= \frac{1-\sqrt{2}}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)} + ... + \frac{\sqrt{120}-\sqrt{121}}{\left(\sqrt{120}+\sqrt{121}\right)\left(\sqrt{120}-\sqrt{121}\right)}$$

$$= \frac{1-\sqrt{2}}{-1} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1} + ... + \frac{\sqrt{120}-\sqrt{121}}{-1}$$

$$= \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - 2 + ... + \sqrt{121} - \sqrt{120} = -1 + \sqrt{121} = 10 \quad (1)$$

Với mọi $k \in \mathbb{N}^*$, ta có: $\dfrac{1}{\sqrt{k}} = \dfrac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k}} > \dfrac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = 2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$

Do đó $B = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{35}}$

$\Rightarrow B > 2\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+...+\sqrt{36}-\sqrt{35}\right)$

$\Rightarrow B > 2\left(-\sqrt{1}+\sqrt{36}\right) = 2\left(-1+6\right) = 10$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $B > A$.

9. Lời giải:

1) $P = \dfrac{x^3+y^3}{x^2-xy+y^2} \cdot \dfrac{x+y}{(x-y)(x+y)} = \dfrac{x+y}{x-y}$.

2) Với $x = \sqrt{7-4\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$ và $y = \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{3}-1$

Thay vào P ta được: $P = \dfrac{2-\sqrt{3}+\sqrt{3}-1}{\left(2-\sqrt{3}\right)-\left(\sqrt{3}-1\right)} = \dfrac{1}{3-2\sqrt{3}} = -\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}$.

10.Lời giải:

Ta có: $Q = \dfrac{\dfrac{(a-b)^3}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^3} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}} + \dfrac{3a+3\sqrt{ab}}{b-a}$

$= \dfrac{\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^3\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^3}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^3} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(a+\sqrt{ab}+b\right)} - \dfrac{3\sqrt{a}+\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)} = 0$

$= \dfrac{a\sqrt{a}+3a\sqrt{b}+3b\sqrt{a}+b\sqrt{b}+2a\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(a+\sqrt{ab}+b\right)} - \dfrac{3\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}$

$$= \frac{3a\sqrt{a} + 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a} - 3a\sqrt{a} - 3a\sqrt{b} - 3b\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(a + \sqrt{ab} + b\right)} = 0 \quad \text{(ĐPCM)}.$$

11. Lời giải:

$$A = \frac{x + \sqrt{x} - 6}{x - 9} + \frac{x - 7\sqrt{x} + 19}{x + \sqrt{x} - 12} - \frac{x - 5\sqrt{x}}{x + 4\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 3} + \frac{x - 7\sqrt{x} + 19}{\left(\sqrt{x} - 3\right)\left(\sqrt{x} + 4\right)} - \frac{\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x} + 4}$$

$$= \frac{x + 2\sqrt{x} - 8 + x - 7\sqrt{x} + 19 - x + 8\sqrt{x} - 15}{\left(\sqrt{x} - 3\right)\left(\sqrt{x} + 4\right)} = \frac{\left(\sqrt{x} - 1\right)\left(\sqrt{x} + 4\right)}{\left(\sqrt{x} - 3\right)\left(\sqrt{x} + 4\right)} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 3}.$$

12. Lời giải:

$A = \frac{1}{2 + \sqrt{x}} + \frac{1}{2 - \sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{4 - x} = \frac{4}{4 - x} - \frac{2\sqrt{x}}{4 - x} = \frac{2\left(2 - \sqrt{x}\right)}{4 - x} = \frac{2}{2 + \sqrt{x}}$. Với $A = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{2 + \sqrt{x}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16$ (nhận). Vậy $A = \frac{1}{3}$ khi $x = 16$.

13. Lời giải:

1) ĐKXĐ: $x \geq 3$

$$\Rightarrow P = \frac{3}{\sqrt{x - 3} - \sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x - 3} + \sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x} + x}{\sqrt{x} + 1}$$

$$= \frac{3\sqrt{x - 3} + 3\sqrt{3} + 3\sqrt{x - 3} - 3\sqrt{x}}{\left(x - 3\right) - x} + \frac{x\left(\sqrt{x} + 1\right)}{\sqrt{x} + 1} = \frac{6\sqrt{x - 3}}{-3} + x = x - 2\sqrt{x - 3}.$$

Vì $P > 2 \Rightarrow x - 2\sqrt{x - 3} > 2 \Leftrightarrow \left(x - 3\right) - 2\sqrt{x - 3} + 1 > 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-3}-1\right)^2 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-3}-1 \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-3} \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 4$ .Vậy $x \geq 3$ và $x \neq 4$.

2) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$x^2 + mx - 1 = 0$.

có $\Delta = m^2 + 4 > 0$ với mọi m, nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Theo hệ thức Viet ta có: $x_1 + x_2 = -m$ và $x_1x_2 = -1$

$\Rightarrow (x_1 + x_2)^2 = (-m)^2 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = m^2$

$\Rightarrow (x_1 - x_2)^2 + 4x_1x_2 = m^2 \Rightarrow (x_1 - x_2)^2 + 4.(-1) = m^2$

$\Rightarrow (x_1 - x_2)^2 = m^2 + 4 \geq 4$ với mọi $m \Rightarrow |x_1 - x_2| \geq 2$ với mọi m (ĐPCM).

14. Lời giải:

1) Biểu thức C có nghĩa khi: $\begin{cases} a \geq 0 \\ a - 16 \neq 0 \\ \sqrt{a} - 4 \neq 0 \\ \sqrt{a} + 4 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ a \neq 16 \\ a \neq 16 \\ \forall a \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a \geq 0, a \neq 16$.

Rút gọn

$$C = \frac{a}{a-16} - \frac{2}{\sqrt{a}-4} - \frac{2}{\sqrt{a}+4} = \frac{a}{\left(\sqrt{a}-4\right)\left(\sqrt{a}+4\right)} - \frac{2}{\sqrt{a}-4} - \frac{2}{\sqrt{a}+4}$$

$$= \frac{a - 2\left(\sqrt{a}+4\right) - 2\left(\sqrt{a}-4\right)}{\left(\sqrt{a}+4\right)\left(\sqrt{a}-4\right)} = \frac{a - 2\sqrt{a} - 8 - 2\sqrt{a} + 8}{\left(\sqrt{a}+4\right)\left(\sqrt{a}-4\right)} = \frac{a - 4\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}+4\right)\left(\sqrt{a}-4\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-4\right)}{\left(\sqrt{a}-4\right)\left(\sqrt{a}+4\right)} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+4}.$$

2) Giá trị của C khi $a = 9 - 4\sqrt{5}$.

Ta có:

$$a = a = 9 - 4\sqrt{5} = 4 - 4\sqrt{5} + 5 = \left(2 - \sqrt{5}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{5} - 2$$

Vậy $C = \dfrac{\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}+4\right)} = \dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2+4} = \dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} = 9 - 4\sqrt{5}$.

15. Lời giải:

1) Với $x > 0, x \neq 4$ biểu thức có nghĩa ta có:

$$A = \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2}\right) : \frac{2\sqrt{3}+3}{5x-10\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2\left(2\sqrt{x}+1\right)+3\left(\sqrt{x}-2\right)-\left(5\sqrt{x}-7\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(2\sqrt{x}+1\right)} : \frac{2\sqrt{x}+3}{5\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}$$

$= \dfrac{2\sqrt{x}+3}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(2\sqrt{x}+1\right)} \cdot \dfrac{5\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}{2\sqrt{x}+3} = \dfrac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$. Vậy với $x > 0, x \neq 4$ thì $A = \dfrac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$.

2) Ta có $\sqrt{x} > 0, \forall x > 0, x \neq 4$ nên $A = \dfrac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} > 0, x > 0, x \neq 4$

$A = \dfrac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} = \dfrac{5}{2} - \dfrac{5}{2\left(2\sqrt{x}+1\right)} < \dfrac{5}{2}, x > 0, x \neq 4 \Rightarrow 0 < A < \dfrac{5}{2}$, kết hợp với A nhận giá trị là một số nguyên thì $A \in \{1, 2\}$.

$A = 1 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 2\sqrt{x}+1 \Rightarrow \sqrt{x} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{9}$ thỏa mãn điều kiện.

$A = 2 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 4\sqrt{x} + 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$ không thỏa mãn điều kiện.

Vậy với $x=\dfrac{1}{9}$ thì A nhận giá trị là nguyên.

16. Lời giải:

1) Với $x=9$ ta có $A=\dfrac{3+1}{3-1}=2$.

2) a)

$$P=\left(\frac{x-2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}\right).\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\left(\frac{\left(\sqrt{x}-1\right).\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}\right).\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}.$$

b) Theo câu a) $P=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

$$\Rightarrow 2P=2\sqrt{x}+5\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+5$$

$2\sqrt{x}+2=2x+5\sqrt{x}\Leftrightarrow 2x+3\sqrt{x}-2=0$ và $x>0$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}.$$

17. Giải:

$$a^2=\sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}}+3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}+2\sqrt{9-\left(5+2\sqrt{3}\right)}=6+2\sqrt{4-2\sqrt{3}}$$

$=6+2\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=6+2\left(\sqrt{3}-1\right)=4+2\sqrt{3}=\left(1+\sqrt{3}\right)^2$. Do $a>0$ nên $a=\sqrt{3}+1$. Do đó $\left(a-1\right)^2=3$ hay $a^2-2a-2=0$.

18. Giải:

$a^2 = 8 + 2\sqrt{16 - \left(10 + 2\sqrt{5}\right)} = 8 + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 8 + 2\sqrt{\left(\sqrt{5} - 1\right)^2}$

$= 8 + 2\left(\sqrt{5} - 1\right) = 6 + 2\sqrt{5}$. Vì $a > 0$ nên $a = \sqrt{5} + 1$. Do đó $\left(a - 1\right)^2 = 5$ hay

$a^2 - 2a = 4$. Biểu diễn $T = \dfrac{\left(a^2 - 2a\right)^2 - 3\left(a^2 - 2a\right) + 4}{a^2 - 2a + 12} = \dfrac{4^2 - 3.4 + 4}{4 + 12} = \dfrac{1}{2}$.

19. Giải:

Ta có: $a + x^2 = x^2 + xy + yz + zx = \left(x + y\right)\left(x + z\right)$.Tương tự ta có:

$a + y^2 = \left(y + x\right)\left(y + z\right); a + z^2 = \left(z + x\right)\left(z + y\right)$.

Từ đó ta có:

$x\sqrt{\dfrac{\left(a + y^2\right)\left(a + z^2\right)}{a + x^2}} = x\sqrt{\dfrac{\left(x + y\right)\left(y + z\right)\left(z + x\right)\left(z + y\right)}{\left(x + y\right)\left(x + z\right)}} = x\left(x + y\right)$. Tương

tự: $y\sqrt{\dfrac{\left(a + z^2\right)\left(a + x^2\right)}{a + y^2}} = y\left(z + x\right); z\sqrt{\dfrac{\left(a + x^2\right)\left(a + y^2\right)}{a + z^2}} = z\left(x + y\right)$. Vậy

$VT = x\left(y + z\right) + y\left(z + x\right) + z\left(x + y\right) = 2\left(xy + yz + zx\right) = 2a$.

20. Giải:

a) Vì $\sqrt[3]{61 + 46\sqrt{5}} = \sqrt[3]{\left(1 + 2\sqrt{5}\right)^3} = 1 + 2\sqrt{5}$

Từ đó $a = \sqrt{2} + \sqrt{7 - 1 - 2\sqrt{5}} + 1 = \sqrt{2} + \sqrt{5}$

$\Rightarrow a^2 = \left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)^2 \Rightarrow a^2 - 7 = 2\sqrt{10} \Rightarrow a^4 - 14a^2 + 9 = 0$.

b) Do $f\left(x\right) = \left(x^4 - 14x^2 + 9\right)\left(x + 2\right) + 1$ và $x^4 - 14a^2 + 9 = 0$ nên ta được $f\left(a\right) = 1$.

21. Giải:

Vì $a^3 = 38+17\sqrt{5}+38-17\sqrt{5}+3.3.\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}.\sqrt[3]{38-17\sqrt{5}}$

$\Rightarrow a^3 = 76-3a \Rightarrow a^3+3a = 76 \Rightarrow f(a) = (76+1940)^{2012} = 2016^{2016}$.

22. Nhân cả tử và mẫu của $f(n)$ với $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, ta được:

$f(n) = (n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}$. Cho n lần lượt từ 1 đến 2016, ta được:

$f(1) = 2\sqrt{2}-1\sqrt{1}; f(2) = 3\sqrt{3}-2\sqrt{2};...; f(2016) = 2017\sqrt{2017}-2016\sqrt{2016}$

Từ đó suy ra: $S = f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2016) = 2017\sqrt{2017}-1$.

23. Giải:

Vì n là số nguyên dương nên: $1 \le \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2} \ge \frac{1}{1^2} = 1 \quad (1)$. Mặt khác, với mọi $k \ge 1$ ta có:

$\frac{1}{k^2} = \frac{4}{4k^2} < \frac{4}{4k^2-1} = 2\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$. Cho $k = 2,3,4,...,n$ ta có:

$$\frac{1}{2^2} = \frac{4}{4.2^2} < \frac{4}{4.2^2-1} = \frac{2}{2.2-1}-\frac{2}{2.2+1} = \frac{2}{3}-\frac{2}{5}$$

$$\frac{1}{3^2} = \frac{4}{4.3^2} < \frac{4}{4.3^2-1} = \frac{2}{2.3-1}-\frac{2}{2.3+1} = \frac{2}{3}-\frac{2}{7}$$

$$\frac{1}{4^2} = \frac{4}{4.4^2} < \frac{4}{4.4^2-1} = \frac{2}{2.4-1}-\frac{2}{2.4+1} = \frac{2}{7}-\frac{2}{9}$$

…………..

$$\frac{1}{n^2} = \frac{4}{4n^2} < \frac{4}{4n^2-1} = \frac{2}{2n-1}-\frac{2}{2n+1} = \frac{2}{2n-1}-\frac{2}{2n+1}$$

Cộng vế với vế ta được:

$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}<1+\frac{2}{3}-\frac{2}{2n+1}<1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

24. Giải:

Đặt $P=\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{n^3}$. Thực hiện làm trội mỗi phân số ở vế trái bằng cách làm giảm mẫu, ta có:

$$\frac{2}{k^3}<\frac{2}{k^3-k}=\frac{2}{(k-1)(k+1)}=\frac{1}{(k-1)k}-\frac{1}{k(k+1)}, \forall k>1$$

Cho $k=4,5,...,n$ thì

$$2P<2\left(\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\left(\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}\right)+\left(\frac{1}{4.5}-\frac{1}{5.6}\right)+...+\left[\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right]$$

$=\frac{251}{108}+\frac{1}{3.4}-\frac{1}{n(n+1)}<\frac{251}{108}+\frac{1}{3.4}=\frac{65}{27}$. Do đó $P<\frac{65}{64}$ (đpcm).

25. Giải:

Đặt $S_n=\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$

Để ý rằng :

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{(k+1)^2k-k^2(k+1)}=\frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{k(k+1)}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}, \forall k$$

Cho $k = 1, 2, ..., n$ rồi cộng vế với vế ta có:

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Do đó $S_{2001} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2002}}$

Như vậy ta phải chứng minh:

$$\frac{43}{44} < 1 - \frac{1}{\sqrt{2002}} < \frac{44}{45} \Leftrightarrow \frac{1}{45} < \frac{1}{\sqrt{2002}} < \frac{1}{44}$$

$$\Leftrightarrow 44 < \sqrt{2002} < 45 \Leftrightarrow 1936 < 2002 < 2025$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng nên ta có điều phải chứng minh.

26. Giải:

Để giải bài toán này ta cần có bổ đề sau:

Bổ đề: với mọi số thực dương x, y ta có: $x\sqrt{y} + y\sqrt{x} \le x\sqrt{x} + y\sqrt{y}$.

Chứng minh: Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương

$$x\sqrt{y} + y\sqrt{x} \le x\sqrt{x} + y\sqrt{y} \Leftrightarrow x\sqrt{x} + y\sqrt{y} - x\sqrt{y} - y\sqrt{x} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right) + y\left(\sqrt{y} - \sqrt{x}\right) \ge 0 \Leftrightarrow (x - y)\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \ge 0.$$

Bổ đề được chứng minh.

Áp dụng bổ đề ta có:

$$(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}>n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}}<\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$$

Vì thế: $\frac{1}{2\sqrt{2}+1\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}}<$

$<\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$. Mà theo kết quả câu 25

thì: $\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 27)

Giải:

Để ý rằng các phân số có tử và mẫu hơn kém nhau 2 đơn vị, nên ta nghĩ đến đẳng thức

$\frac{n}{n+2}<\frac{n-1}{n}\left(\Leftrightarrow n^2<n^2+n-2\Leftrightarrow n>2\right)$. Kí hiệu

$P=\frac{1}{3}.\frac{4}{6}.\frac{7}{9}.\frac{10}{12}....\frac{3n-2}{3n}.\frac{3n+1}{3n+3}$. Ta có:

$$P^2=\left(\frac{1}{3}.\frac{4}{6}.\frac{7}{9}.\frac{10}{12}...\frac{3n-2}{3n}.\frac{3n+1}{3n+3}\right)\left(\frac{1}{3}.\frac{4}{6}.\frac{7}{9}.\frac{10}{12}...\frac{3n-2}{3n}.\frac{3n+1}{3n+3}\right)$$

$$<\left(\frac{1}{3}.\frac{3}{4}.\frac{6}{7}.\frac{9}{10}...\frac{3n-3}{3n-2}.\frac{3n}{3n+1}\right)\left(\frac{1}{3}.\frac{4}{6}.\frac{7}{9}.\frac{10}{12}...\frac{3n-2}{3n}.\frac{3n+1}{3n+3}\right)$$

$$< \frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{3}{4}.\frac{6}{7}.\frac{7}{9}.\frac{9}{10}...\frac{3n-3}{3n-2}.\frac{3n-2}{3n}.\frac{3n}{3n+1}.\frac{3n+1}{3n+3} = \frac{1}{3(3n+3)} = \frac{1}{9(n+1)}.$$

Từ đây suy ra $P < \frac{1}{3\sqrt{n+1}}$. Bất đẳng thức được chứng minh.